Resenhas de Livros

Real Analysis, 2.ª edição, H. L. Royden
Macmillan, 1968. XII + 349 pgs. USÍ 11.95

Este livro destaca-se notoriamente pelo fato de dar uma excelente introdução à integral de Lebesgue na reta, introdução esta que é exposta em menos de 60 páginas (não contando os exercícios). Todos os docentes que conhecemos e que já ministraram cursos de introdução à integral de Lebesgue, são unânimes em considerar esta parte do livro como um dos melhores e mais adequados para um primeiro curso da teoria da integração de Lebesgue.

No aprendizado desta teoria são essenciais duas coisas. 1.º) Manejar corretamente as propriedades formais; 2.º) Apreender os teoremas básicos. Por propriedades formais entendemos as proposições que dão as propriedades fundamentais da medida e da integral de Lebesgue e as que nos asseguram que se certos conjuntos ou funções são mensuráveis ou integráveis, então determinadas operações nos levam novamente a conjuntos ou funções mensuráveis ou integráveis etc. Os teoremas básicos da teoria da integração de Lebesgue e que estão na base de quase todas as aplicações da teoria à Análise Matemática, são essencialmente cinco: o teorema da convergencia dominada, o teorema que caracteriza as funções absolutamente contínuas como as primitivas das funções integráveis, o teorema de Fischer-Riesz que diz que os espaços L_p são completos, o teorema da densidade das funções contínuas de suporte compacto em L_p e o teorema de Fubini. Todo este material (exceto o teorema de Fubini) está exposto nos capítulos III a VI deste livro.

Analisemos rapidamente o conteúdo do livro – Este é dividido em três partes, precedidas de um capítulo sobre os fatos básicos da teoria dos conjuntos. A primeira parte ("Teoria das funções de uma variável real") se compõe de 5 capítulos dos quais o 1.º expõe os fatos básicos do sistema dos números reais (incluindo a topologia da reta, funções contínuas e conjuntos borelianos). A parte central de um curso de teoria da integração baseado neste livro está nos 4 capítulos restantes desta parte. O capítulo 3 trata de medida de conjuntos na reta bem como das funções mensuráveis. O capítulo 4 estuda a integração de Lebesgue na reta e nele é dado o teorema da convergência dominada de Lebesgue. O capítulo 5 trata das operações de diferenciação e integração como inversas uma da outra; lembremos que somente com a noção da integral de Lebesgue é que esta correspondência se tornou perfeita. No capítulo 6 finalmente são estudados os espaços L_p sendo também demonstrado o teorema de representação de Riesz.

A segunda parte do livro ("Espaços abstratos") se compõe de 4 capítulos: espaços métricos, espaços topológicos, espaços compactos e espaços de Banach, em que todos os fatos básicos destes tópicos são cobertos com elegância e de modo bastante econômico em 90 páginas (incluindo os exercícios). São expostos o teorema da categoria de Baire e algumas aplicações, o lema de Urysohn e o teorema de Tietze (demonstração como exercício), o teorema de Tychonoff, a compactificação de Stone-Cech, o teorema de Stone-Weirstrass, o teorema de Ascoli, o teorema de Hahn-Banach, o teorema do gráfico fechado, topologia fraca e o teorema de Alaoglu (= Bourbaki), o teorema de Krein-Millman. Esta segunda parte do livro contém material suficiente para um curso de 40 horas de aulas mas provavelmente é preferível não cobrir todo este material e dar mais aplicações.

Na 3.ª parte ("Teoria geral da medida e da integração") o estudo feito na 1.ª parte é estendido a medidas abstratas. Esta parte se compõe de 5 capítulos: o cap. 11 estuda a medida e integral abstratas dando os teoremas fundamentais inclusive os teoremas de decomposição de Hahn, de Jordan e de Lebesgue, bem como o teorema de Radon-Nikodym e o teorema de representação de Riesz (para espaços L_p). O cap. 12 estuda medidas externas dando o teorema de extensão, o teorema de Caratheodory com aplicações à medida produto. O cap. 13 faz o estudo da integral de Daniell. O cap. 14 ("medida e topologia") inclui o estudo das medidas de Baire e a caracterização do dual $\mathscr{C}(X)$ onde X é compacto. O cap. 15 finalmente estuda aplicações entre espaços com medidas.

Acreditamos que num curso normal de pós-graduação (40 horas de aulas), junto com a parte básica da integral de Lebesgue na reta também se possa cobrir parte do material contido nos capítulos 11, 12 e 13.

CHAIM SAMUEL HÖNIG