Nova Série
BOLETIM
DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Bol. Soc. Bras. Mat., Vol.31, No. 2, 155–161

Hypersurfaces exceptionnelles des endomorphismes de $\mathbb{CP}(n)$

D. Cerveau et A. Lins Neto

Resumé. On étudie les hypersurfaces exceptionnelles pour les applications holomorphes de $\mathbb{CP}(n)$. On montre qu'une telle hypersurface n'est jamais lisse dès que son degré est plus grand que deux.

Mots-clés: endomorphismes de $\mathbb{CP}(n)$, hypersurfaces exceptionelles.

Abstract. Exceptional hypersurfaces for holomorphic endomorphisms of $\mathbb{CP}(n)$ are studied. We prove that such an hypersurface is not smooth as soon as its degree is greater than two.

Keywords: endomorphisms of $\mathbb{CP}(n)$, exceptional hypersurfaces.

0 Introduction

On appelle endomorphisme de $\mathbb{CP}(n)$ toute application holomorphe $F\colon \mathbb{CP}(n) \to \mathbb{CP}(n)$ non constante. Se donner un tel endomorphisme F c'est se donner $n+1$ polynômes homogènes $f_0, \dots, f_n$ de même degré en $n+1$ variables dont le seul zéro commun est l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} & \xrightarrow{f=(f_0,\dots,f_n)} & \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{CP}(n) & \xrightarrow{F} & \mathbb{CP}(n) \end{array}$$

On remarque qu'un endomorphisme est bien sûr surjectif et sans éclatement, i.e. pour tous $m \in \mathbb{CP}(n)$, $\#F^{-1}(m)$ est fini. Le degré d de F est par définition

Received 20 April 2000.

le degré des f_i et pour m générique $F^{-1}(m) = d^n$. Dans ce qui suit on suppose $d \geq 2$. Soit $H \subset \mathbb{CP}(n)$ une hypersurface; on dit que H est exceptionnelle pour l'endomorphisme F si $F^{-1}(H) = H$. Remarquer que nécessairement $F(H) = H$. Dans [F, S], Fornaess et Sibony donnent quelques propriétés des hypersurfaces exceptionnelles en particulier en dimension deux. On se propose de préciser et de généraliser certains de leurs résultats. En particulier on démontre qu'une telle hypersurface n'est jamais **lisse** si son degré est plus grand que deux ($n \geq 2$).

1 Quelques rappels [F, S]

Soit H une hypersurface exceptionnelle pour F; les composantes $H_1, \ldots, H_s$ de H sont éventuellement permutées par F mais quitte à prendre une puissance de F ad-hoc on constate que chaque H_i est aussi exceptionnelle. Dans la suite on supposera, quitte 'a prendre une puissance que $F^{-1}(H_i) = H_i = F(H_i)$.

Soit $h = h_1 \ldots h_s = 0$ une équation homogéne réduite de H.

Sous les hypothèses et avec les notations précédentes, on a la:

Proposition I. ([F, S] [p. 209)

(i) $d^\circ h = \sum d^\circ h_i \leq n + 1$

(ii) *il existe* $c \in \mathbb{C} - \{0\}$ *tel que* $h \circ f = c \cdot h^d$.

Preuve. Puisque $F^{-1}H_i = H_i = F(H_i)$, $h_i \circ f$ s'annule précisément sur $h_i = 0$; par suite il existe $c_i \in \mathbb{C} - \{0\}$ tel que $h_i \circ f = c_i h_i^d$ et on obtient le point (ii).

Pour obtenir le point (i) on se place en un point $m \in h^{-1}(0)$ tel que $h^{-1}(0)$ soit lisse en m et $f(m)$; en choisissant des coordonnées locales en m et $h(m)$ on constate d'après (ii) que le déterminant Jacobien

$$\Delta = \text{dét}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \text{ est divisible par } h^{d-1} \text{ ; par suite :}$$

$(d^\circ h)(d - 1) \leq d^\circ \Delta = (d - 1)(n + 1)$ et l'on obtient (i). □

Remarques

1. Comme $d \geq 2$, on peut changer de h et supposer que $c = 1$.

2. Lorsque le degré est maximal, $d^\circ h = n+1$, alors $\Delta = \text{cste}h^{d-1}$; en résulte d'après le théorème de Bézout que l'application $F\colon \mathbb{CP}(n) - H \to \mathbb{CP}(n) - H$ est un revêtement.

2 Hypersurfaces invariantes de degrés ≥ 3

Nous nous proposons d'établir dans ce paragraphe le:

Théorème 1. *Soit H une hypersurface exceptionnelle. Si $d^\circ H \geq 3$ alors H n'est pas lisse.*

Preuve. Soient h une équation homogène réduite de H et f un endomorphisme tel que $h \circ f = h^d$; dire que H est lisse implique que le polynôme homogène h est à singularité isolée en 0, i.e. $\dim \mathbb{C}\{x_0, \dots, x_n\}/(\dots, \frac{\partial h}{\partial x_i}, \dots) < \infty$.

Considérons les champs de vecteurs $X_{ij} = \frac{\partial h}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ et dérivons l'identité $h \circ f = h^d$ par $X = X_{ij}$:

$$\sum \left(\frac{\partial h}{\partial x_k} \circ f\right) \cdot X(f_k) = 0. \tag{*}$$

Remarquant que la condition $f^{-1}(0) = 0$ implique que les $\frac{\partial h}{\partial x_k} \circ f$ ne s'annulent simultanément qu'à l'origine on en déduit que la relation (*) est triviale [T], i.e. il existe des polynômes homogènes $\alpha_{k\ell}$ tels que

$$(X(f_0), \dots, X(f_n)) = \sum \alpha_{k\ell} \cdot (0 \dots, \underset{\uparrow_k^{i\grave{e}me}\text{place}}{\frac{\partial h}{\partial x_\ell} \circ f}, 0 \dots, \underset{\uparrow_\ell^{i\grave{e}me}\text{place}}{-\frac{\partial h}{\partial x_k} \circ f}, 0 \dots) \tag{**}$$

Si tous les $X(f_k)$ sont nuls pour tout $X \in \{\dots, X_{ij}, \dots\}$ alors $dh \wedge df_k = 0$, $k = 0, \dots, n$, et par suite $(f_0, \dots, f_n)$ s'annule ailleurs qu'en 0. Par suite un des $X(f_k)$, pour un certain X, est non nul et l'on a:

$$d^\circ X(f_k) = (d^\circ h - 1) + (d - 1)$$
$$d^\circ \frac{\partial h}{\partial x_\ell} \circ f = (d^\circ h - 1)d$$

et d'après (**)

$$(d^\circ h - 1) + d - 1 \geq (d^\circ h - 1)d.$$

Soit encore $(d-1) \geq (d^\circ h - 1)\cdot(d-1)$ et puisque $d \geq 2$, $d^\circ h \leq 2$. □

3 L'argument de Fornaess-Narasimhan-Sibony

Énonce dans [F, S] en dimension deux, il se généralise sans effort à la dimension quelconque. Il repose sur le:

Théorème [D]. *Soit $H \subset \mathbb{CP}(n)$ une hypersurface; supposons qu'il existe un 2-plan général $\mathbb{CP}(2) \hookrightarrow \mathbb{CP}(n)$ tel que $H_0 = H \cap \mathbb{CP}(2)$ soit une courbe lisse ou à croisements ordinaires. Alors $\pi_1(\mathbb{CP}(n) - H, *) = G$ est abélien. Plus précisément si $H = \bigcup_{i=1}^{s} H_i$ où les H_i sont irréductibles de degré d_i alors $G = \mathbb{Z}^s/(d_1, \dots, d_s)\mathbb{Z}$. En particulier lorsque H est irréductible G est fini $= \mathbb{Z}/d^\circ H$.*

Considérons le cas d'un endomorphisme $F\colon \mathbb{CP}(n) \to \mathbb{CP}(n)$ possédant une hypersurface exceptionnelle H de degré maximal $n+1$. D'après la remarque 2 l'application $F\colon \Omega = \mathbb{CP}(n) - H \to \Omega$ est un revêtement fini à d^n feuillets, et l'on récupère un morphisme injectif

$$F^*\colon \pi_1(\mathbb{CP}(n) - H, *) \hookleftarrow$$

lorsque $\pi_1(\mathbb{CP}(n) - H, *)$ est fini, F^* est nécessairement bijectif ce qui n'est pas possible puisque F est non trivial.

En particulier en dimension 2 où le degré maximal est 3, on obtien qu'une cubique lisse ou à singularité nodale ne peut être exceptionnelle; le cas lisse peut bien sûr se déduire du théorème 1. Fornaess et Sibony montrent ensuite qu'une cubique irréductible Γ à singularité cuspidale ne peut être exceptionnelle. L'argument est le suivant avec les notations précédentes; comme Δ est précisément h^{d-1} (où h est l'équation de Γ), on constate en choisissant des coordonnées locales que la restriction de F à Γ a pour seul point critique le point cuspidal. En désingularisant le cusp on trouve un morphisme $F'\colon \mathbb{CP}(1) \to \mathbb{CP}(1)$ de degré $d =$ degré F avec un seul point critique, ce qui est impossible.

Toujours dans [F, S] les auteurs établissent que l'union d'une quadrique et d'une droite ne peut être courbe exceptionnelle. Nous le retrouverons comme cas particulier du paragraphe 4; ainsi en degrès 3 seules trois droites peuvent être exceptionnelles. Par exemple l'application $(x^d : y^d : z^d)$ possède 3 droites en position générale comme ensemble exceptionnel. Nous affirmons que trois droites concourantes ne peuvent être exceptionnelles; c'est une conséquence de la proposition suivante établie dans [B, C, L]:

Proposition 2. *Soit $A\colon \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}^2, 0$ un germe d'application holomorphe* *sans éclatement. S'il existe des courbes $\gamma_i, i = 1, 2, 3$ lisses et deux à deux transverses telles que $A^{-1}(A(\gamma_i)) = \gamma_i$ alors H est un difféomorphisme local.*

Ainsi dans notre cas si $F\colon \mathbb{CP}(2) \to \mathbb{CP}(2)$ possède 3 droites concourantes comme ensemble exceptionnel alors le déterminant jacobien Δ ne pourra s'annuler sur ces 3 droites: on réinvoque comme dans la proposition 1 le fait que Δ est divisible par h^{d-1}. Finalement en dimension 2 les seules possibilités de courbes exceptionnelles sont 1 droite, 2 droites, 3 droites en position générale.

4 Le cas des quadriques

La démonstration du théorème 1 ne s'applique pas en degré 2. Toutefois c'est la même idée qui nous permet d'obtenir le:

Théorème 2. *Une quadrique lisse $H \subset \mathbb{CP}(n)$ ne peut être exceptionnelle en dimension ≥ 2.*

Preuve. Soit $f = (f_0, \dots, f_n)$ ayant la quadratique H d'équation $h = x_0^2 + \dots + x_n^2$ comme hypersurface exceptionnelle; on va montrer que l'égalité $h \circ f = f_0^2 + \dots + f_n^2 = (x_0^2 + \dots + x_n^2)^d$ conduit à une contradiction, $d =$ degré f. On note $O(n+1, \mathbb{C})$ le groupe linéaire orthogonal complexe:

$$O(n+1, \mathbb{C}) = \{g \in G\ell(n+1, \mathbb{C}), h \circ g = h\}$$

so $(n+1, \mathbb{C})$ son algèbre de Lie; elle s'identifie à l'algèbre engendrée par les champs linéaires:

$$X_{ij} = x_j \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial}{\partial x_j}$$

que nous verrons soit comme dérivations soit comme matrices.

Si $X \in so(n+1, \mathbb{C})$ on a

$$\sum_{i=0}^{n} f_i \cdot X(f_i) = 0. \tag{1}$$

Comme toujours puisque $(f_0, \dots, f_n)$ définissent 0, la relation (1) produit une relation triviale i.e.:

$$(X(f_0), \dots, X(f_n)) = \sum_{i<j} \alpha_{ij}(0, \dots, f_j, 0 \dots 0, -f_i, \dots 0)$$

où pour des raisons de degré les α_{ij} sont des constantes bien définies. Si $\sigma(X)$ désigne la matrice antisymétrique:

$$\sigma(X) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{ij} \\ -\alpha_{ij} & 0 \end{pmatrix}$$

on a

$$(X(f_0), \ldots, X(f_n)) = (f_0, \ldots, f_n)\sigma(X)$$

soit encore après transposition

$$X(f) = -\sigma(X) \cdot f \tag{2}$$

où f désigne le vecteur colonne des f_i.

Visiblement l'application $X \to \sigma(X)$ définit un morphisme d'algèbre de Lie $\sigma\colon \mathrm{so}(n+1, \mathbb{C}) \hookleftarrow$. Nous affirmons que son noyau est trivial; en effet si $\sigma(X) = 0$ pour un X non nul alors $X(f_0) = \ldots = X(f_n) = 0$ implique que $df_0 \wedge \cdots \wedge df_n = 0$, qui contredit $f^{-1}(0) = \{0\}$.

Après intégration de l'équation différentielle (2) on obtient:

$$f(\exp\, tX) = \exp\, -t\sigma(X) \cdot f, \quad t \in \mathbb{C} \tag{3}$$

et par itération

$$f^m(\exp\, tX) = \exp\, (-1)^m t\sigma^m(X) \cdot f^m, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}, \quad \forall\, t \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Par suite quitte à remplacer f par une puissance paire convenable f^m on peut supposer que

$$f(\exp\, tX) = \exp\, t\sigma(X) \cdot f, \quad \forall\, t \in \mathbb{C} \tag{5}$$

et que σ est dans la composante neutre du groupe des automorphismes Aut so$(n+1, \mathbb{C})$ de l'algèbre so$(n+1, \mathbb{C})$; mais un tel automorphisme est intérieur [B], i.e. il existe $A \in \mathrm{SO}(n+1, \mathbb{C})$ tel que:

$$\sigma(X) = A^{-1}XA \quad \forall\, X$$

et par suite

$$(A \cdot f)(\exp\, tX) = (\exp\, tX)(Af), \quad \forall\, t, \quad \forall\, X \tag{6}$$

qui indique que l'endomorphisme Af commute finalement aux éléments du groupe SO$(n+1, \mathbb{C})$. D'après [F,S] $A \cdot f$ a un nombre fini de points fixes (en fait $(d^{n+1} - 1)/(d-1)$) ce qui est évidemment contredit par (6).

Remerciement. Merci à J.-J. Loeb qui nous a posé le problème et nous a encouragé à en écrire la solution.

Bibliographie

[B] N. Bourbaki, *Groupes et algèbre de Lie.* Vol. 7-8 Hermann.

[B,C,L] M. Berthier, D. Cerveau and A. Lins Neto, *Sur les feuilletages analytiques réels et le problème du centre.* Journ. of diff. eq., **131**(2): (1996), 244-266.

[D] P. Deligne, *Le groupe fondamental du complément d'une courbe n'ayant que des points doubles ordinaires est abélien.* Sém. Bourbaki **543:** (1979), nov.

[F,S] J.-F. Fornaes, N. Sibony, *Complex dynamic in higher dimension* I. Astérisque, **222:** 201-231.

[T] J.-C. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables.* Springer-Verlag 1972.

D. Cerveau
IRMAR, Rennes
et
A. Lins Neto
IMPA, Rio