

# Quelques Propriétés sur les Algèbres de Lie Lineairement Compacte\*

ODINETE RENÉE ABIB\*\*

Soit  $\Delta$  un corps et  $L$  une algèbre de Lie topologique sur  $\Delta$ .

DEFINITION 1.  $L$  est une algèbre de Lie lineairement compacte (l.c.) si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

- 1)  $L$  possède une base de sous-espaces affines ouverts.
- 2)  $\bigcap_{\alpha} A_{\alpha} \neq \emptyset$  pour toute famille  $\{A_{\alpha}\}$  de sous-espaces affines fermés satisfaisant la propriété de l'intersection finie.

DEFINITION 2. Soit  $L$  une algèbre de Lie l.c., soit  $\mathcal{F} = \{F^i\}$ ,  $-\infty < i < \infty$  une famille des sous-espaces ouverts de  $L$ . Nous dirons que  $\mathcal{F}$  est une filtration de  $L$  si:

- a)  $F^i \supset F^{i+1}$  pour tout  $i$ .
- b)  $\bigcup_i F^i = L$ ,  $\bigcap_i F^i = \{0\}$ .
- c)  $[F^i, F^j] \subset F^{i+j}$  pour tout  $i$  et  $j$ .

REMARQUE [1]. Il existe un  $i_0$  tel que  $F^{i_0} = L$ , car  $\dim(L/F^i) < \infty$  et  $\bigcup F^i = L$ ; à fortiori on peut considérer  $L = F^{-1}$ .

EXEMPLE. Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie et  $S(\widehat{V^*})$  l'algèbre des séries formelles sur  $V^*$ ; alors  $D(V) = \text{Der}(S(\widehat{V^*}))$ , l'ensemble des dérivations continues de  $S(\widehat{V^*})$ , est une algèbre de Lie sur  $\Delta$ . La filtration  $\mathcal{F}$  est donnée de la façon suivante:

$$F^i = \{d \in D(V), d(\widehat{S(V^*)}) \subset \mathfrak{m}^{i+1}\},$$

\*Recebido pela SBM em 31 de outubro de 1972.

\*\*Ce travail a été effectué avec l'aide de la B.N.D.E. et C.N.Pq. à l'Université de São Paulo - Brésil.

où  $m$  est l'idéal maximal de  $S(\widehat{V}^*)$  et  $m^i$  la  $i^{\text{ème}}$ -puissance de  $m$ . La topologie sur  $D(V)$  est la topologie filtrée.

Soit  $A$  une sous-algèbre de  $L$ ,

$$D_L^1(A) = \{X \in A, [X, L] \in A\},$$

$$D_L^2(A) = \{X \in D_L^1(A), [X, L] \in D_L^1(A)\},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$D_L^{h+1}(A) = \{X \in D_L^h(A), [X, L] \in D_L^h(A)\},$$

pour tout  $h \geq 0$ .

DEFINITION 3. Soit  $A$  une sous-algèbre ouverte de  $L$ ;  $A$  est dite *fondamentale* si elle ne contient aucun idéal de  $L$  sauf  $\{0\}$ .

EXEMPLES. 1) Soit  $L$  l.c. et  $A$  une sous-algèbre fondamentale. On vérifie que  $\mathcal{F} = \{D_L^h A\}_h$  est une filtration de  $L$ . En plus si  $\mathcal{O}$  est un ouvert de  $L$  contenant zéro, alors existe  $h_0$  tel que  $D_L^{h_0} \subset \mathcal{O}$  ([1], pg. 319).

2) Soit  $L$  l.c. et  $A$  une sous-algèbre ouverte de  $L$ . Considérons  $D_L^\infty A = \bigcap_h D_L^h A$ . On a que  $L = L/D_L^\infty A$  contient une sous-algèbre fondamentale.

PROPOSITION 1. Soit  $L$  une algèbre de Lie l.c.; les conditions suivantes sont équivalentes:

- a)  $L$  possède une sous-algèbre fondamentale;
- b)  $L$  satisfait la propriété de la chaîne décroissante d'idéaux fermés, c'est-à-dire, toute chaîne  $I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_h \supset \dots$  d'idéaux fermés est stationnaire [1].

PROPOSITION 2. Soit  $L$  l.c. et  $A$  une sous-algèbre fondamentale de  $L$

- a) Si  $I$  est un idéal de  $L$  et  $A \rightarrow L/I$  surjectif, alors  $I$  est de codimension finie.
- b) Supposons que pour tout idéal  $I$  fermé de  $L$  on a  $A \rightarrow L/I$  surjectif, alors  $A$  est une sous-algèbre ouverte maximale de  $L$ .

DEMONSTRATION. a) La projection  $A \rightarrow L/I$  étant surjective on a  $I + A = L$ ; en plus, d'après la proposition 1,  $L$  satisfait la propriété de la chaîne décrois-

sante d'ideaux fermés. Le même étant vraie pour  $L/I$ , la suite  $\{D_L^h A + I\}$  est estationnaire. Mais comme  $I$  est un ideal fermé,

$$I = \bigcap_h (D_L^h A + I) = D_L^{h_0} A + I$$

pour un certain  $h_0$ . A fortiori,  $I$  est ouvert.

b) Si  $A$  n'est pas maximale, existe une sous-algèbre ouverte  $B$ ,  $A \subsetneq B \subsetneq L$ , et un ideal fermé  $I$ ,  $\{0\} \neq I$ ,  $I \subset B$ . D'où  $A + I \subset B$  et  $A + I \subsetneq L$ . Cela entraîne la non-surjectivité de la projection  $A \rightarrow L/I$ ; donc  $A$  est maximal. c.q.f.d.

LEMME [1]. Soit  $L$  une algèbre de Lie l.c. satisfaisant la propriété de la chaîne décroissante d'ideaux fermés. Il existe une suite d'ideaux fermés  $L = L \supset I_2 \supset I_1 \supset \dots \supset I_h = \{0\}$  avec

a)  $I_i/I_{i+1}$  est abélien;

b)  $I_i/I_{i+1}$  est non-abélien et il n'existe ideal  $I_{i+1} \subsetneq J \subsetneq I_i$  fermé.

PROPOSITION 3. Soit  $L$  une algèbre de Lie l.c.,  $I$  un ideal fermé de  $L$  et  $A$  une sous-algèbre fondamentale de  $L$ . Il existe une suite d'ideaux fermés de  $L$ ,  $L = I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_h = \{0\}$  avec  $I_i =$  pour un  $i$ ,  $0 \leq i \leq h$  où

a)  $I_i/I_{i+1}$  est abélien;

b)  $I_i/I_{i+1}$  non-abélien et il n'existe ideal  $I_{i+1} \subsetneq J \subsetneq I_i$  fermé.

DÉMONSTRATION.  $I$  étant un ideal fermé,  $L/I$  satisfait le lemme précédent. Un raisonnement analogue à celui de Guillemain nous permet de conclure la démonstration.

#### REFERENCE

[1] VICTOR GUILLEMIN, *A Jordan-Holder decomposition for a certain class of infinite dimensional Lie algebras*, J. Diff. Geometry 2 (1968).

[2] Pour les applications voir:

POLLACK, *The Integrability Problem for Pseudogroup Structures*, M. I. T. Thesis, à paraître.

P. MOLINO, a) *Platitude relative et problème d'équivalence pour les structures transitives*, Montpellier.

b) *Théorème general d'équivalence pour les pseudogroupes de Lie plats transitifs*.

Instituto de Matemática e Estatística  
Universidade de S. Paulo - S. Paulo

Université de Montpellier  
Montpellier, France