

O Lema de Krasner Generalizado e Aplicações*

G. G. BASTOS

§1. Introdução

Seja (K, ϕ) um corpo valorizado, i.e. um corpo K munido de uma valorização ϕ . Lembramos que (K, ϕ) é dito *henseliano* se toda extensão algébrica $L|K$ possui uma única valorização que prolonga ϕ . A seguinte versão do lema de Krasner é bem conhecida e pode ser encontrada, por exemplo, em [3] F.

LEMA (Krasner). *Sejam (K, ϕ) um corpo valorizado henseliano, Ω um fecho algébrico de K e ω o único prolongamento de ϕ a Ω . Dado $y \in \Omega$, separável sobre K , sejam*

$$C(y) = \{y' \in \Omega \mid y' \text{ é } K\text{-conjugado a } y\}$$

e

$$\varepsilon(y) = \text{Min} \{ \omega(y - y') \mid y' \in C(y) \setminus \{y\} \}.$$

Para todo $x \in \Omega$ tal que $\omega(x - y) < \frac{1}{2} \cdot \varepsilon(y)$ tem-se $K(y) \subseteq K(x)$.

O objetivo do presente trabalho é o estabelecimento da generalização do lema de Krasner para um corpo valorizado qualquer. Como aplicações, daremos uma nova demonstração do teorema do elemento primitivo e mostraremos que se (K, ϕ) é henseliano e ϕ é não trivial então se L é uma extensão separável finita de K tomando-se em L a topologia T_ϕ , definida pela única valorização de L que estende ϕ , o subconjunto $\mathcal{P}$ de L , constituído dos elementos primitivos de $L|K$ é aberto e denso em L relativamente a topologia T_ϕ .

*Recebido pela SBM em 22 de novembro de 1972.

Trabalho apresentado à Sociedade Brasileira de Matemática pelo Professor O. Endler.

§2. O Lema de Krasner Generalizado

Sejam (K, ϕ) um corpo valorizado, Ω um fecho algébrico de K e $\mathcal{V}$ o conjunto das valorizações χ de Ω , tais que $\chi|_K = \phi$. Dado $y \in \Omega$, y separável sobre K , denotaremos por $C(y)$ o conjunto dos elementos de Ω , que são K -conjugados a y .

LEMA (lema de Krasner generalizado). *Seja $y \in \Omega$, um elemento separável sobre K . Seja*

$$\varepsilon(y) = \inf \{ \chi(y - y') \mid \chi \in \mathcal{V}, y' \in C(y) \setminus \{y\} \}.$$

Então,

i) $\varepsilon(y) > 0$.

ii) Para todo $x \in \Omega$, tal que $\chi(x - y) < \frac{1}{2} \cdot \varepsilon(y)$, para toda $\chi \in \mathcal{V}$, tem-se $K(y) \subseteq K(x)$.

DEMONSTRAÇÃO. i) Seja N o corpo de raízes do polinômio minimal de y sobre K . Então $[N : K] < \infty$ e portanto o conjunto das valorizações de N que prolongam ϕ é finito. Como $C(y) \subseteq N$ e $C(y)$ é finito, segue-se que o conjunto $\{\chi(y - y') \mid \chi \in \mathcal{V}, y' \in C(y) \setminus \{y\}\}$ é, também, finito. Logo,

$$\varepsilon(y) = \min \{ \chi(y - y') \mid \chi \in \mathcal{V}, y' \in C(y) \setminus \{y\} \} > 0.$$

ii) Seja $\sigma: K(x, y) \rightarrow \Omega$ uma $K(x)$ -imersão. Mostraremos que $\sigma = id_{K(x, y)}$. Com efeito, seja $\chi_0 \in \mathcal{V}$. Temos

$$\begin{aligned} \chi_0(\sigma y - \sigma y) &= \chi_0(\sigma y - \sigma x + x - y) \\ &\leq \chi_0(\sigma y - \sigma x) + \chi_0(x - y) \\ &= \chi_0 \circ \sigma(y - x) + \chi_0(x - y) \\ &= \chi_v(x - y) + \chi_0(x - y), \end{aligned}$$

para certo $\chi_v \in \mathcal{V}$, pois $\chi_v = \chi_0 \circ \sigma$ é uma valorização de Ω . Por hipótese, temos que $\chi_0(y - x) < \frac{1}{2} \cdot \varepsilon(y)$ e $\chi_v(x - y) < \frac{1}{2} \cdot \varepsilon(y)$. Logo, temos $\chi_0(\sigma y - y) < \varepsilon(y)$. De acordo com a definição de $\varepsilon(y)$, segue-se que $\sigma y = y$, pois $y \in C(y)$. Como $[K(x, y) : K(x)] = (\text{número de } K(x)\text{-imersões } \sigma: K(x, y) \rightarrow \Omega) = 1$, segue-se que $K(y) \subseteq K(x, y) = K(x)$. C.Q.D.

§3. Aplicações

Aplicação 1. Seja π_p o corpo primo de característica $p > 0$. Se L é uma extensão finita de π_p , então L é um corpo finito. Nesse caso, é bem conhecido que o grupo multiplicativo $L^* = L \setminus \{0\}$ é cíclico. Se y é um gerador desse grupo, L^* , tem-se trivialmente que $L = K(y)$. Mais geralmente, se K é um corpo localmente finito (i.e. K é uma extensão algébrica de π_p) e $L|K$ é uma extensão de grau finito, então $L = K(y_1, \dots, y_m)$ para certos $y_1, \dots, y_m \in L$ e, tomando-se o corpo intermediário $L' = \pi_p(y_1, \dots, y_m)$ tem-se $L' = \pi_p(y)$, para certo $y \in L'$. Logo, $L = KL' = K(y)$.

PROPOSICAO 1. *Seja K um corpo não localmente finito. Então pode-se definir em K uma infinidade de valorizações duas a duas não equivalentes.*

DEMONSTRACAO. Seja K_0 o corpo primo de K .

1.^o *Caso.* $K|K_0$ é uma extensão algébrica. Então, K_0 é isomórfico a $\mathbb{Q}$. Como existe em $\mathbb{Q}$ uma infinidade de valorizações duas a duas não equivalentes e $K|K_0$ é uma extensão algébrica, tomando-se os prolongamentos das valorizações de $\mathbb{Q}$, a proposição fica provada neste caso.

2.^o *Caso.* $K|K_0$ é uma extensão transcendente. Seja T uma base de transcendência de $K|K_0$. Seja $t \in T$ e $K_1 = K_0(T/\{t\})$. Como em $K_1[t]$ existe uma infinidade de polinômios irredutíveis, segue-se, por um conhecido resultado da teoria das valorizações (V. [2], §4), que se pode definir em $K_0(T)$ uma infinidade de valorizações duas a duas não equivalentes. Como $L|K(T)$ é uma extensão algébrica, a proposição fica provada. C.Q.D.

PROPOSICAO 2 (Teorema do elemento primitivo). *Seja $L|K$ uma extensão separável de grau finito. Então $L|K$ é uma extensão simples.*

DEMONSTRACAO. Se K é localmente finito a demonstração é trivial como vimos acima. Suponhamos, então, que K não é localmente finito.

Sejam Ω um fecho algébrico de K que contém L e $y_1, \dots, y_m$ tais que $L = K(y_1, \dots, y_m)$. Tomemos em K , m valorizações $\phi^1, \dots, \phi^m$, duas a duas não equivalentes. Seja $\mathcal{V}_j$ o conjunto das valorizações de Ω que prolongam ϕ^j e sejam $\psi_1^j, \dots, \psi_{r_j}^j$ as valorizações de L que prolongam ψ^j , para todo

$j \in \{1, \dots, m\}$. Em particular as valorizações $\psi_1^1, \dots, \psi_{r_m}^m$ são duas a duas não equivalentes. Logo, aplicando o teorema de aproximação em L , relativamente às valorizações $\psi_1^1, \dots, \psi_{r_m}^m$ obtemos $y \in L$ tal que

$$\psi_i^j(y - y_j) < \frac{1}{2} \cdot \varepsilon(y_j)$$

para todo $j \in \{1, \dots, m\}$ e $i \in \{1, \dots, r_j\}$, onde $\varepsilon(y_j)$ é escolhido como no lema de Krasner generalizado. Então,

$$\chi(y - y_j) < \frac{1}{2} \cdot \varepsilon(y),$$

para todo $\chi \in \mathcal{V}_j$. Logo $K(y_j) \subseteq K(y)$, para todo $j \in \{1, \dots, m\}$ e portanto $L = K(y)$. C.Q.D.

Aplicação 2. Sejam (K, ϕ) um corpo valorizado henseliano e $L|K$ uma extensão separável de grau finito. Denotemos ainda por ϕ o único prolongamento de ϕ a L e por T_ϕ a topologia definida em L por ϕ . Seja $\mathcal{P}$ o conjunto dos elementos primitivos de $L|K$. O teorema do elemento primitivo afirma que $\mathcal{P}$ é não vazio. Mostraremos que $\mathcal{P}$ é aberto em L relativamente a T_ϕ e que se ϕ não é a valorização trivial (caso em que T_ϕ é a topologia discreta), então $\mathcal{P}$ é denso em L relativamente à topologia T_ϕ .

PROPOSICAO 3. *$\mathcal{P}$ é aberto em L relativamente à topologia T_ϕ .*

DEMONSTRACAO. Segue-se, imediatamente, do lema de Krasner generalizado aplicado ao corpo valorizado henseliano (K, ϕ) . C.Q.D.

PROPOSICAO 4. *Se ϕ não é a valorização trivial, $\mathcal{P}$ é denso em L , relativamente a topologia T_ϕ .*

DEMONSTRACAO. Sejam $y, x \in L$ onde y é um elemento primitivo de $L|K$. Pela proposição 1, existe uma valorização ψ de K , tal que ψ é não equivalente a ϕ . Sejam $\chi_1, \dots, \chi_r$ os prolongamentos de ψ a L . Dado $\varepsilon > 0$, pelo teorema da aproximação, existe um elemento $z \in L$ tal que

$$\phi(x - z) < \varepsilon \quad \text{e} \quad \chi_j(y - z) < \frac{1}{2} \cdot \varepsilon(y),$$

para todo $j \in \{1, \dots, r\}$, onde $\varepsilon(y)$ é tomado como no lema de Krasner generalizado. Então, $K(z) \subseteq K(y)$, i.e. $z \in \mathcal{P}$ e $\phi(x-z) < \varepsilon$. C.Q.D.

Para outra aplicação do lema de Krasner generalizado ver [1] §4.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BASTOS, G. G., *Sobre um Problema de Existência na Teoria das Valorações*. Tese de Doutorado (IMPA), Rio de Janeiro (1972).
- [2] ENDLER, O., *Valuation Theory*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1972).
- [3] RIBENBOIM, P., *Théorie des Valuations*, Les Presses de l'Université de Montreal (1968).

Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Rio de Janeiro