Nova Série
BOLETIM
DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Bol. Soc. Bras. Mat., Vol.32, No. 2, 185-212
© 2001, Sociedade Brasileira de Matemática

Dynamique des groupes paraboliques d'automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$

Stéphane Lamy

Résumé. Nous étudions la dynamique de certains groupes abéliens d'automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$, que nous appelons groupes paraboliques. Nous montrons que ces groupes sont toujours formellement linéarisables, et que la linéarisante peut être strictement formelle ou au contraire convergente. Nous montrons ensuite que sous une hypothèse d'uniformité un groupe parabolique admet un (1,1) courant positif fermé invariant. Enfin nous donnons un exemple de groupe parabolique non uniforme n'admettant aucun (1,1) courant positif fermé invariant.

Mots-clés: automorphismes polynomiaux, linéarisation, courant invariant.

Abstract. We study the dynamics of a class of abelian groups of polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^2$, that we call parabolic groups. We show that these groups are always formally linearizable, and the linearizing map could be strictly formal or convergent. Further we show that under an uniformity hypothesis a parabolic group has a invariant (1,1) positive closed current. Lastly we give an example of parabolic group that does not admit any invariant (1,1) positive closed current.

Keywords: polynomial automorphisms, linearization, invariant current.

Mathematical subject classification: 37F (14R).

1 Introduction

Nous noterons Aut[$\mathbb{C}^2$] le groupe des automorphismes polynomiaux du plan complexe. Nous nous proposons dans cet article de poursuivre l'étude dynamique des sous-groupes de Aut[$\mathbb{C}^2$] commencée dans [9]. Avant d'énoncer nos

Received 17 May 2001.

résultats nous rappelons comment l'action canonique de $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ sur un arbre simplicial (via la théorie de Bass-Serre) permet d'obtenir une classification de ses sous-groupes. Nous noterons A le groupe affine, *i.e.* le groupe des éléments de $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ qui se prolongent en des automorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$; et nous appellerons E (pour « élémentaire ») le sous-groupe de $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ constitué des automorphismes qui préservent le pinceau des droites $y = constante$. Autrement dit :

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \mapsto (a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2); \\ &\quad a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}, a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0\}; \\ E &= \{(x,y) \mapsto (\alpha x + P(y), \beta y + \gamma); \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*, \gamma \in \mathbb{C}, P \in \mathbb{C}[X]\}. \end{aligned}$$

Nous désignerons par $S = A \cap E$ l'intersection de ces deux sous-groupes, et nous appellerons application de Hénon un automorphisme de la forme

$$g : (x,y) \mapsto (y, P(y) - \delta x)$$

où $\delta \in \mathbb{C}^*$ et P est un polynôme de degré supérieur ou égal à 2. Nous suivons ici les notations de [5] (à ceci près que nous appelons « application de Hénon » ce que Friedland et Milnor appellent « application de Hénon généralisée ») ; à noter que d'autres auteurs appellent application de Hénon un conjugué par $(x,y) \mapsto (y,x)$ d'une application de Hénon en notre sens.

Nous avons le théorème de Jung qui décrit $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ comme un produit amalgamé :

Théorème 1 (Jung). *Le groupe $Aut[\mathbb{C}^2]$ est le produit amalgamé du groupe affine A et du groupe élémentaire E suivant leur intersection :*

$$Aut[\mathbb{C}^2] = A *_S E.$$

On peut reformuler ce résultat de la manière suivante. Suivant Wright [12] nous posons

$$\begin{aligned} a(\lambda) &: (x,y) \mapsto (\lambda x + y, x) \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{C}; \\ e(P) &: (x,y) \mapsto (x + P(y), y) \text{ pour tout } P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\} \\ &\quad \text{satisfaisant } P(0) = P'(0) = 0. \end{aligned}$$

Les $a(\lambda)$ et les $e(P)$ forment des systèmes de représentants des classes à gauche non triviales A/S et E/S. Tout élément $\varphi \in \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\varphi = m \circ s$$

où $s \in S$ et m est une composition alternée de $a(\lambda)$ et de $e(P)$ (voir [10, p.9]).

L'arbre associé à Aut$[\mathbb{C}^2]$ consiste simplement à considérer chaque composition m comme une arête, de telle manière que si m_1 et m_2 diffèrent seulement par la dernière composition à droite (autrement dit si $m_1^{-1}m_2 \in A$ ou E) alors les arêtes associées aient un sommet en commun. Plus précisément les arêtes sont en bijection avec les classes à gauche Aut$[\mathbb{C}^2]/S$; de même on peut mettre les sommets en bijection avec l'union des classes à gauche Aut$[\mathbb{C}^2]/A$ et Aut$[\mathbb{C}^2]/E$. Si $\varphi = m \circ s \in$ Aut$[\mathbb{C}^2]$, on note φS la classe de φ dans le quotient Aut$[\mathbb{C}^2]/S$; $\varphi S = mS$ correspond donc à l'arête associée à m, et cette arête relie les sommets correspondant aux classes φA et φE (voir figure 1).

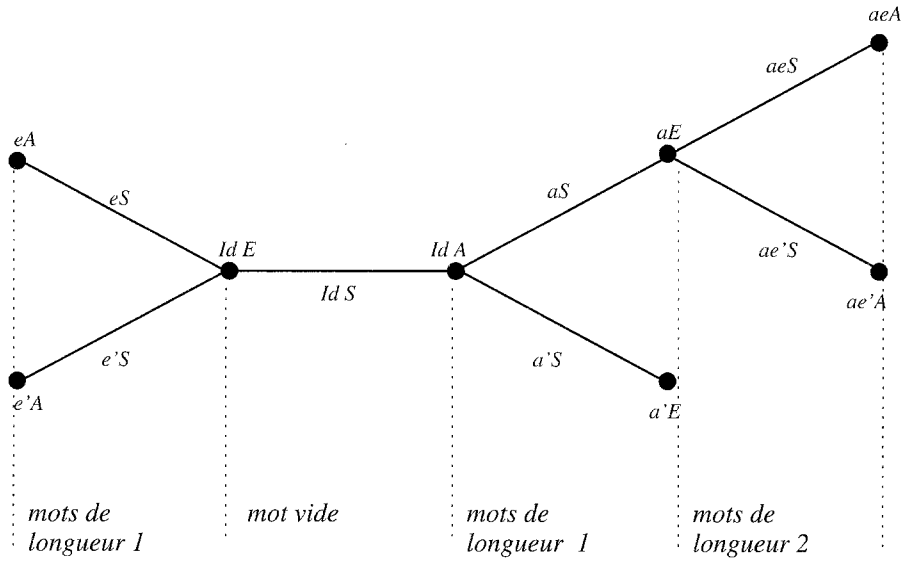

Figure 1 : Quelques arêtes et sommets de l'arbre associé à Aut$[\mathbb{C}^2](a, a' \in A \setminus E; e, e' \in E \setminus A)$.

En profitant du fait que le groupe Aut$[\mathbb{C}^2]$ agit sur cet arbre (par translation à gauche : $f.(\varphi S) := (f \circ \varphi)S$) on obtient une classification d'une part des éléments de Aut$[\mathbb{C}^2]$, d'autre part de ses sous-groupes. Ainsi tout $f \in$ Aut$[\mathbb{C}^2]$ appartient à l'une des deux classes suivantes (comparer avec [5]) :

1. *automorphismes de type élémentaire* : f induit une isométrie elliptique (au moins un sommet est fixé), et il est conjugué à un élément de E ;
2. *automorphismes de type Hénon* : f induit une isométrie hyperbolique, *i.e.* il existe une géodésique globalement invariante sur laquelle f agit

par translation. L'automorphisme f est alors conjugué à une composée d'applications de Hénon :

$$f = \varphi \circ g_m \circ \cdots \circ g_1 \circ \varphi^{-1}$$

où $\varphi \in \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$, $g_i(x, y) = (y, P_i(y) - \delta_i x)$ avec $\delta_i \in \mathbb{C}^*$, et $P_i \in \mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 2.

Il est remarquable que les classifications dynamique et algébrique des éléments de $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ coïncident. Notre démarche consiste à poursuivre cette analogie dans le cadre de la classification des sous-groupes de $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$. Dans [9] nous avons ainsi distingué en fonction de leur action sur l'arbre trois classes de sous-groupes dont nous avons pu décrire précisément la structure algébrique :

1. *groupes elliptiques* : les sous-groupes qui fixent (au moins) un sommet de l'arbre. Par définition de l'arbre de Bass-Serre, à conjugaison près ce sont exactement les sous-groupes des groupes affine et élémentaire.
2. *groupes paraboliques* : les sous-groupes qui ne fixent aucun sommet, et qui fixent un unique bout de l'arbre. On montre (voir [9, prop. 3.12]) que ces groupes sont des groupes abéliens obtenus comme union croissante de groupes cycliques finis ; des exemples avaient déjà été décrits par Wright [12]. Ce sont principalement ces groupes qui vont nous intéresser dans cet article, nous reviendrons donc en détail sur leur description.
3. *groupes loxodromiques* : nous disons qu'un sous-groupe est loxodromique s'il ne fixe aucun sommet, et s'il existe deux bouts de l'arbre qui sont fixés ou échangés par chaque élément du groupe (autrement dit il existe une géodésique globalement invariante sous l'action du groupe). Un tel groupe est engendré par un automorphisme de type Hénon g et un groupe fini de « symétries » (voir [9, prop. 4.10]).

Il existe bien sûr une quatrième classe : ce sont les groupes que l'on peut qualifier de généraux, qui ne fixent ni sommet ni bout de l'arbre et qui peuvent être caractérisés par le fait qu'ils contiennent beaucoup (c'est-à-dire un groupe libre) d'automorphismes de type Hénon (voir [9, prop. 4.3]).

Nous nous proposons dans cet article d'étudier les groupes paraboliques ; plus précisément nous aborderons les deux questions suivantes :

1. Un groupe parabolique est-il linéarisable (formellement, localement...) ?
2. Existe-t-il un courant invariant sous l'action d'un groupe parabolique ?

L'article est organisé comme suit.

Dans la section 2 nous montrons comment l'arbre de Bass-Serre permet de caractériser un groupe parabolique H. En particulier on obtient une suite (φ_i) de linéarisantes partielles : chaque φ_i linéarise un sous-groupe H_i de H, où (H_i) est une suite croissante de sous-groupes finis cycliques dont l'union recouvre H. En conjuguant on peut de plus supposer que les φ_i sont des composées d'applications de Hénon (nous dirons alors que H est normalisé).

Dans la section 3 nous répondons à la première des deux questions ci-dessus : un groupe parabolique est toujours formellement linéarisable ; et nous donnons des exemples montrant que cette linéarisante peut être strictement formelle, ou a contrario convergente (localement, ou même globalement).

La section 4 contient quelques rappels sur la théorie des courants, ainsi que sur la construction des deux courants de Green associés à une application de type Hénon. C'est cette construction que nous avons cherché à généraliser au cas d'un groupe parabolique.

La section 5 est consacrée à la preuve de notre théorème principal. Il est possible de définir à partir de la suite (φ_i) des linéarisantes partielles un ensemble de Julia J_H^+ associé à un groupe parabolique H. Moyennant une hypothèse d'uniformité (voir définition p. 10) on obtient le résultat suivant (ω est la forme de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$) :

Théorème 11. *Soient H un groupe parabolique normalisé uniforme, et (φ_i) la suite des linéarisantes partielles.*

1. *La suite $\frac{1}{d(\varphi_n)}{\varphi_n}^*\omega$ converge vers un courant μ_H^+ positif fermé de type (1,1) dont le support est J_H^+ ;*
2. *Pour tout (1,1) courant T positif fermé de masse 1 et dont le support n'adhère pas au point $[0:1:0]$, la suite $\frac{1}{d(\varphi_n)}{\varphi_n}^*T$ converge également vers μ_H^+ ;*
3. *Le courant μ_H^+ est invariant par H : pour tout $h \in H$ on a $h^*\mu_H^+ = \mu_H^+$.*

Nous verrons que l'hypothèse du théorème (H uniforme) peut être satisfaite par des groupes paraboliques dont la linéarisante formelle diverge de manière arbitrairement rapide. Nous montrons cependant dans la section 6 qu'il existe des groupes paraboliques qui n'admettent aucun (1,1) courant positif fermé invariant, ainsi il est indispensable de faire une hypothèse de type « uniforme » dans le théorème 11. Enfin, nous concluons avec quelques remarques et questions autour de ce théorème.

Je remercie vivement C. Favre et V. Guedj avec qui j'ai eu de fructueuses discussions au moment de la rédaction finale de cet article. Ce travail a été en partie

réalisé lors d'un séjour de l'auteur au *Centre de Recerca Matemàtica* de l'Université Autonome de Barcelone (bourse européenne, réseau TMR « Singularités d'Équations Différentielles et Feuilletages »).

2 Description combinatoire d'un groupe parabolique

Il n'est pas évident *a priori* qu'il existe des groupes paraboliques dans $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$; c'est Wright [12] qui le premier a exhibé de tels sous-groupes. Avant de donner un exemple explicite nous commençons par énoncer quelques propriétés d'un tel groupe. Le détail des arguments est contenu dans [9], et repose essentiellement sur les deux résultats suivants (nous identifions dans les énoncés un élément de $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ avec l'isométrie qu'il induit sur l'arbre de Bass-Serre) :

Proposition 2 (proposition 3.3 de [9]). *Soit $f \in Aut[\mathbb{C}^2]$. Le sous-arbre fixé par f est non borné si et seulement si f est conjugué dans $Aut[\mathbb{C}^2]$ à une rotation $(\alpha x, \beta y)$ avec α, β racines de l'unité de même ordre.*

Remarque 3 (remarque 3.4 de [9]). *Soient α, β deux racines de l'unité de même ordre. Si l'automorphisme $(\alpha x, \beta y)$ fixe une arête $mS = a(\lambda_1)e(P_1)\cdots a(\lambda_n)e(P_n)S$ alors*

- *$(\alpha x, \beta y) \circ a(\lambda_i) = a(\lambda_i) \circ (\beta x, \alpha y)$;*
- *$(\alpha x, \beta y)$ commute avec chaque $e(P_{2k})$, et $(\beta x, \alpha y)$ commute avec chaque $e(P_{2k+1})$.*

En particulier si $\alpha \neq \beta$ alors pour tout i, $\lambda_i = 0$. On a bien sûr des résultats similaires lorsque l'écriture de m commence par $e(P_1)$ ou finit par $a(\lambda_n)$.

Soit H un groupe parabolique. Rappelons que les bouts d'un arbre simplicial sont les classes de demi-géodésiques infinies modulo la relation d'équivalence : $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ si Γ_1 et Γ_2 ont une infinité d'arêtes en commun. Dire que H fixe un bout (représenté par Γ), c'est dire que chaque $h \in H$ admet un sous-arbre fixé $\mathrm{Fix}(h)$ qui contient une demi-géodésique Γ_h, avec $\Gamma_h \sim \Gamma$. À noter que chaque $\mathrm{Fix}(h)$ contient une infinité de demi-géodésiques infinies deux à deux non équivalentes (autrement dit h fixe une infinité de bouts), mais que le groupe H ne fixe qu'un seul bout.

Par la proposition 2 tout $h \in H$ est conjugué par un élément de $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ à une rotation $(\alpha x, \beta y)$ avec α, β racines de l'unité de même ordre. Plus précisément on peut montrer (voir [9, prop. 3.12]) que H s'obtient comme la réunion d'une suite croissante (H_i) de sous-groupes finis cycliques, chaque H_i étant engendré par un automorphisme h_i de la forme

$$h_i = \varphi_i^{-1}(\alpha_i x, \beta_i y)\varphi_i$$

avec $\varphi_i \in \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ et (α_i, β_i) couple de racines de l'unité du même ordre. Nous dirons que (φ_i) est une suite de linéarisantes partielles pour H, et nous noterons $H = (\varphi_i, (\alpha_i x, \beta_i y))$. On déduit également de cette description que H est abélien et que ses éléments admettent un unique point fixe dans $\mathbb{C}^2$ qui leur est commun.

Exemple 4. Posons $h_0 = (-x, -y)$ et pour tout $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= e^{i\pi/2^k}; \\ g_k &: (x, y) \mapsto (y, c_k y^{2^k+1} + x); \\ \varphi_k &= g_k^2 \circ \cdots \circ g_1^2 \end{aligned}$$

où $c_k \in \mathbb{C}^*$. Alors en posant $h_k = \varphi_k^{-1}(\alpha_k x, \alpha_k^p y)\varphi_k$, où p est un entier impair, $H = \bigcup_{k\geq 0} < h_k >$ est un groupe parabolique. Remarquons que dans la définition de φ_k les carrés ne sont pas indispensables (au sens qu'en posant $\varphi_k = g_k \circ \cdots \circ g_1$ on obtient encore un groupe parabolique), mais permettent d'obtenir directement une suite de linéarisantes partielles tangentes à l'identité (comparer avec la discussion dans la section 3).

Deux remarques à propos de cet exemple. D'une part, le choix de prendre pour α_k des racines d'ordre des puissances de 2 n'est pas du tout essentiel ; Wright obtient de manière similaire des groupes paraboliques abstraitement isomorphes au groupe de toutes les racines de l'unité. D'autre part, nous allons voir que tout groupe parabolique peut se ramener à un groupe semblable à cet exemple, au sens où les linéarisantes partielles seront des composées d'applications de Hénon. C'est l'objet de la discussion qui suit.

Désignons par Γ_i une demi-géodésique contenue dans $\mathrm{Fix}(h_i)$ et représentant le bout fixé par H. On peut choisir les Γ_i de manière à ce que la suite (Γ_i) soit décroissante (pour l'inclusion). Nous allons montrer la

Proposition 5. *Soit H un groupe parabolique qui s'obtient comme l'union croissante des sous-groupes finis cycliques $H_i = \langle \varphi_i^{-1}(\alpha_i x, \beta_i y)\varphi_i \rangle$. En conjuguant H par un élément de $Aut[\mathbb{C}^2]$ et en considérant une sous-suite de la suite (H_i) il est possible de se ramener au cas où les propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. *$\varphi_0 = Id$, autrement dit H contient la rotation (non triviale) $h_0 = (\alpha_0 x, \beta_0 y)$;*
2. *la première arête de la demi-géodésique $\Gamma_0 \subset Fix(h_0)$ représentant le bout fixé par H est de la forme $e(P_1)S$;*
3. *ou bien $\alpha_i = \beta_i$ pour tout i, ou bien $\alpha_i \neq \beta_i$ pour tout i ;*

4. *si $h \in H$ fixe une arête mS de Γ_0, où m est une composée de $a(\lambda)$ et de $e(P)$, alors h est de la forme*

$$h = m(\alpha x, \beta y)m^{-1}$$

avec α, β racines de l'unité de même ordre.

Preuve. La première condition s'obtient trivialement en conjuguant H, on peut alors choisir Γ_0 d'arête initiale voisine de IdS (*i.e.* de la forme $a(\lambda)S$ ou $e(P)S$). Si la deuxième condition n'est pas satisfaite alors les deux premières arêtes de Γ_0 sont de la forme $a(\lambda_1)S$ et $a(\lambda_1)e(P_1)S$. En conjuguant H par $a(\lambda_1)$ on obtient la deuxième condition, et $< h_0 >$ reste inchangé par la remarque 3. Supposons qu'il existe un indice i tel que $\alpha_i \neq \beta_i$. Alors pour tout $j \geq i$ on a également $\alpha_j \neq \beta_j$, en effet comme la suite de sous-groupes $< h_i >$ est croissante il existe un entier p tel que $\alpha_j^p = \alpha_i$ et $\beta_j^p = \beta_i$. Quitte à oublier les premiers termes de la suite (h_i) on peut donc supposer la troisième condition satisfaite. Montrons que la quatrième condition est alors automatiquement satisfaite. Remarquons d'abord que si $(\alpha x, \beta y)$ et $s \in S$ sont conjugués dans $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$, alors s est conjugué dans S ou bien à $(\alpha x, \beta y)$ ou bien à $(\beta x, \alpha y)$ (car A est engendré par S et $(x, y) \mapsto (y, x)$). Maintenant soit $h \in H$ fixant l'arête mS de Γ_0. Autrement dit h est conjugué par m à un automorphisme $s \in S$, et comme d'autre part h est conjugué à une rotation $(\alpha x, \beta y)$, par la remarque ci-dessus il existe $s' \in S$ tel que (quitte à échanger α et β)

$$h = ms'(\alpha x, \beta y)s'^{-1}m^{-1}.$$

Remarquons que s' fixe 0, car m fixe 0 qui est l'unique point fixe dans $\mathbb{C}^2$ de $h_0 = (\alpha_0 x, \beta_0 y)$ et donc aussi de h. Si $\alpha = \beta$ alors on a $h = m(\alpha x, \beta y)m^{-1}$, ce qu'on voulait. Si $\alpha \neq \beta$, on écrit $s' = (x + cy, y) \circ (ax, by)$ et on a donc

$$h = m(x + cy, y)(\alpha x, \beta y)(x - cy, y)m^{-1}.$$

Supposons que l'écriture de m se termine à droite par une composition par un $e(P)$ (l'autre cas se traite de manière analogue). Alors Γ_0 contient une arête de la forme $ma(\lambda)S$. De plus $\alpha_0 \neq \beta_0$ (c'est la condition 3), donc par la remarque 3 on a $\lambda = 0$. On a $h = m(x + cy, y)(\alpha x, \beta y)(x - cy, y)m^{-1}$ qui fixe l'arête $ma(0)S$, donc $(\alpha x, \beta y)$ fixe l'arête $(x - cy, y)a(0)S$. Remarquons que

$$(x - cy, y)a(0) = (x - cy, y) \circ (y, x) = (-cx + y, x) = a(-c)$$

et donc toujours par la remarque 3 on a $c = 0$. Finalement on obtient encore $h = m(\alpha x, \beta y)m^{-1}$. □

Un groupe parabolique satisfaisant les quatre propriétés de la proposition 5 sera dit *normalisé*. Dans ce cas chaque arête d'indice pair de Γ_0 s'écrit :

$$e(P_1)a(\lambda_1)e(P_2)a(\lambda_2)\cdots e(P_n)a(\lambda_n)S.$$

Remarquons que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ (on suppose toujours P non nul et sans partie linéaire) l'automorphisme $e(P)a(\lambda)$ est l'inverse d'une application de Hénon de déterminant jacobien -1 :

$$\begin{aligned} e(P)a(\lambda) &= (x + P(y), y) \circ (\lambda x + y, x) \\ &= (y + \lambda x + P(x), x) \\ &= (y, -P(y) - \lambda y + x)^{-1}. \end{aligned}$$

On voit que pour tout n l'arête d'indice $2n$ de Γ_0 s'écrit $\varphi_n^{-1}S$ où φ_n est une composée d'applications de Hénon :

$$\varphi_n = g_n \circ \cdots \circ g_1.$$

De plus φ_n est de déterminant jacobien 1 ou -1 selon la parité de n. D'après la proposition 5 (4^e assertion) on peut choisir une sous-suite de (φ_n) comme suite de linéarisantes partielles ; dans la suite nous noterons encore (φ_n) cette sous-suite. Ainsi lorsque nous écrirons $H = (\varphi_i, (\alpha_i x, \beta_i y))$ pour désigner un groupe parabolique normalisé il sera implicite que chaque $\varphi_i \varphi_{i-1}^{-1}$ est une composée d'applications de Hénon de déterminant jacobien ± 1.

Nous introduisons maintenant la notion de groupe parabolique uniforme. De manière générale (voir [5]) étant donnée g une composée d'applications de Hénon de degré $d(g)$ on peut associer à g une constante R_g et une partition (V_g, V_g^+, V_g^-) de $\mathbb{C}^2$ définie par :

$$\begin{aligned} V_g &= \{(x, y); |x| \leq R_g, |y| \leq R_g\} \\ V_g^+ &= \{(x, y); |x| > R_g \text{ et } |x| > |y|\} \\ V_g^- &= \{(x, y); |y| > R_g \text{ et } |y| \geq |x|\} \end{aligned}$$

telle que (voir figure 2)

$$\begin{aligned} &\forall z \in V_g^-, \quad ||g(z))|| \geq ||z||^{d(g)} \quad \text{et } g(z) \in V_g^-; \\ &\forall z \in V_g^+, \quad ||g^{-1}(z))|| \geq ||z||^{d(g)} \quad \text{et } g^{-1}(z) \in V_g^+; \\ &g(V_g) \subset V_g \cup V_g^- \quad \text{et} \quad g^{-1}(V_g) \subset V_g \cup V_g^+. \end{aligned}$$

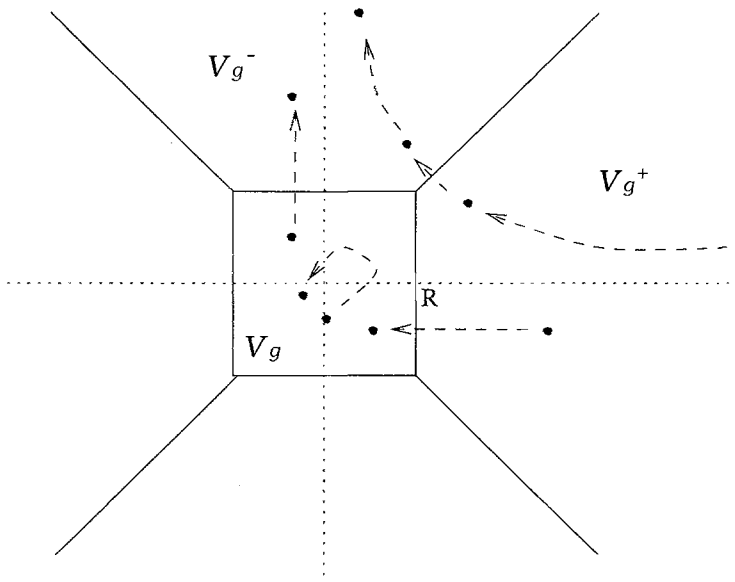

Figure 2 : Les flèches donnent une idée de la dynamique par itération de g.

Un groupe parabolique normalisé $H = (\varphi_i, (\alpha_i x, \beta_i y))$ sera dit *uniforme* s'il existe $R > 0$, et une partition associée (V, V^+, V^-) valables pour tout $g_i = \varphi_i \circ \varphi_{i-1}^{-1}$ indépendamment de i. Nous laissons le lecteur vérifier que, dans l'exemple 4, si le module des c_k est minoré par une constante alors le groupe H correspondant est uniforme.

3 Linéarisation

Étant donné un groupe parabolique il existe un unique point de $\mathbb{C}^2$ fixé par tout élément du groupe (dans le cas normalisé ce point fixe est l'origine). Il est naturel de se demander si la dynamique du groupe est linéarisable au voisinage de ce point fixe. Nous commençons par traiter le problème de la linéarisation du point de vue formel.

Proposition 6. *Un groupe parabolique H est toujours formellement linéarisable.*

Preuve. En conjuguant dans $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ on se ramène à H normalisé, autrement dit $H = (\varphi_i, (\alpha_i x, \beta_i y))$ avec $\varphi_i^{-1} = e(P_1)a(\lambda_1) \cdots e(P_{n_i})a(\lambda_{n_i})$.

Montrons tout d'abord que nous pouvons prendre les φ_i tangents à l'identité. Si pour tout i on a $\alpha_i = \beta_i$ alors la différentielle $D\varphi_i(0)$ de φ_i en 0 et $(\alpha_i x, \beta_i y)$

commutent ; on peut donc remplacer chaque φ_i par $D\varphi_i(0)^{-1} \circ \varphi_i$ sans changer le groupe H. A contrario si $\alpha_i \neq \beta_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ alors d'après la remarque 3 l'écriture de φ_j^{-1} ne contient que des $a(\lambda)$ avec $\lambda = 0$, donc $D\varphi_j(0) = (y, x)$ ou Id selon la parité de n_j. En remplaçant éventuellement H par $\varphi_k H \varphi_k^{-1}$ avec n_k impair on peut supposer qu'il existe une infinité de φ_j avec $D\varphi_j(0) = Id$. En prenant une sous-suite nous pouvons donc encore nous ramener au cas où tous les φ_i sont tangents à l'identité. Posons maintenant $f_i = \varphi_i \varphi_{i-1}^{-1}$ Alors

$$\varphi_i = f_i \circ \cdots \circ f_1.$$

Par construction f_{i+1} est tangent à l'identité et commute avec $(\alpha_i x, \beta_i y)$ qui est d'ordre fini (disons d'ordre n_i). Donc tous les monômes (non linéaires) de f_{i+1} sont de degré supérieur à n_i. Ainsi, composer à gauche par f_{i+1} n'affecte que les monômes de degré supérieur à n_i ; de plus la suite n_i est strictement croissante. La limite $\varphi = \lim_{i \to +\infty} \varphi_i$ est donc une série formelle qui linéarise H :

$$\varphi^{-1} H \varphi \subset \{(x, y) \mapsto (\alpha x, \beta y);\ |\alpha|, |\beta| = 1\}.$$

□

Nous allons maintenant étudier trois exemples, et montrer que la linéarisante formelle d'un groupe parabolique peut être divergente, ou a contrario localement (ou même globalement) convergente.

Reprenons les notations de l'exemple 4. Nous allons déterminer les coefficients c_k par récurrence de manière à ce que la linéarisante formelle pour H

$$\varphi = \lim_{i \to +\infty} \varphi_i = \lim_{i \to +\infty} g_i^2 \circ \cdots \circ g_1^2$$

soit strictement divergente. Posons $c_1 = 1$. Les c_k étant déterminés jusqu'au rang n, nous définissons c_{n+1} de la manière suivante. On pose

$$V_n = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2;\ |y| > |x| \text{ et } |y| > \delta_n\}$$

où $\delta_n > 0$ est choisi de telle sorte que

1. la suite (δ_n) soit décroissante ;
2. $I_n = V_n \cap \varphi_n(B(0, 1/n)) \neq \emptyset$ (possible car $\varphi_n(0) = 0$).

On choisit alors c_{n+1} de module assez grand pour que

$$\forall z \in V_n,\ g_{n+1}^2(z) \in V_n \text{ et } ||g_{n+1}^2(z)|| > 2||z||.$$

Fixons maintenant $m \in \mathbb{N}^*$ et considérons $z \in \varphi_m^{-1}(I_m)$, *i.e.* $z \in B(0, 1/m)$ et $\varphi_m(z) \in V_m$. On a

$$||\varphi_{m+i}(z)|| \geq 2^i ||\varphi_m(z)|| \longrightarrow_{i \to +\infty} +\infty.$$

Ainsi il n'existe aucun voisinage de l'origine sur laquelle φ soit convergente.

Nous construisons maintenant une linéarisante localement convergente. Nous reprenons l'exemple 4 mais en supposant à présent g_k de la forme

$$g_k : (x, y) \mapsto (y, c_k y^{m_k.(2^k+1)} + x)$$

où $m_k \in \mathbb{N}$. Nous définissons trois sous-ensembles de $\mathbb{C}^2$ par

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x, y); |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\} \\ W_2 &= \{(x, y); |x| \leq 2 \text{ et } |y| \leq 2\} \\ W_3 &= \{(x, y); |y| \geq 3 \text{ et } |y| \geq x\} \end{aligned}$$

L'entier m_k étant fixé nous définissons c_k comme le plus grand réel positif tel que l'inégalité suivante ait lieu :

$$\forall z \in W_2, ||g_k^2(z) - z|| < 2^{-k}.$$

On vérifie alors que la suite $(\varphi_i)_{i \geq 1}$ converge uniformément sur tout compact de W_1 vers une limite φ. Cette application φ est injective comme limite d'automorphismes de déterminant jacobien égal à un, nous obtenons donc une linéarisante localement convergente pour H. De plus en choisissant m_k suffisament grand nous pouvons supposer que $g_k(W_3) \subset W_3$ et que

$$\forall k \geq 1, \forall z \in W_3, ||g_k(z)|| \geq 2||z||.$$

Ainsi la suite $(\varphi_i(z))$ est divergente sur W_3.

Nous allons adapter cet exemple pour obtenir une linéarisante globalement convergente ; autrement dit nous allons produire un groupe parabolique linéarisable dans le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$ des automorphismes biholomorphes de $\mathbb{C}^2$. Considérons de nouveau

$$g_k : (x, y) \mapsto (y, c_k y^{2^k+1} + x).$$

Choisissons une suite de réels positifs (R_n) telle que $R_n > n + 1$ et telle que pour tout choix des c_k avec $|c_k| \leq 1$ on ait

$$g_{n-1}^2 \circ \cdots \circ g_1^2(B(0, n)) \subset B(0, R_n - 1).$$

Maintenant choisissons les c_k de modules suffisamment petits pour que

$$\forall z \in B(0, R_k), ||g_k^{\pm 2}(z) - z|| < 2^{-k}.$$

Alors la suite $(\varphi_i)_{i\geq 1}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}^2$ vers une limite φ injective. Reste à voir que φ est surjective. Pour cela il suffit de montrer que l'image inverse d'un borné est un borné ; en effet φ sera alors une application propre donc fermée, de plus φ est ouverte car holomorphe de déterminant jacobien 1, on aura donc bien $\varphi(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C}^2$. Considérons l'image inverse de la boule $B(0, k)$ par φ_n, pour $n > k$ on a

$$\begin{aligned} \varphi_n^{-1}(B(0,k)) &= g_1^{-2} \circ \cdots \circ g_{k-1}^{-2} \circ g_k^{-2} \circ \cdots \circ g_n^{-2}(B(0,k)) \\ &\subset \varphi_{k-1}^{-1}(B(0,k+1)). \end{aligned}$$

Ainsi $\varphi^{-1}(B(0,k)) \subset \varphi_{k-1}^{-1}(B(0,k+1))$, ce qui termine la démonstration (je remercie Bruno Scardua qui m'a aidé à mettre au clair les arguments de ce dernier exemple).

Insistons sur le fait que dans ces exemples le groupe de racines de l'unité $\{\alpha_k; k \geq 0\}$ associé à H ne joue aucun rôle ; c'est uniquement le choix des g_k (via les coefficients c_k) qui conditionnent la dynamique du groupe H.

4 Courants invariant, le cas d'une application de Hénon

Nous commençons par rappeler quelques notions de théorie du pluripotentiel ; on pourra consulter [1], [4] ou [11] pour plus de détails.

Nous considèreront des courant positifs fermés de type (1,1), c'est-à-dire des courants localement de la forme $dd^c u$, où u est une fonction plurisousharmonique sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Par exemple dans $\mathbb{C}^2$ une courbe algébrique $M = \{P(x, y) = 0\}$ (où P est une équation réduite de M) définit un courant d'intégration noté $[M]$:

$$\langle [M], \psi \rangle = \int_M \psi$$

et on a $[M] = dd^c \log |P|$ (formule de Lelong).

La masse d'un (1,1) courant T sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est définie par $||T|| := \int_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}} T \wedge \omega$ où ω est la forme de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Plus généralement, si U est un ouvert de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, $||T||_U = \int_U T \wedge \omega$ désigne la masse de T sur U. Nous noterons $\mathcal{D}^{1,1}(\mathbb{C}^2)$ l'ensemble des (1,1) courants positifs fermés de masse 1 sur $\mathbb{C}^2$. Tout élément de $\mathcal{D}^{1,1}(\mathbb{C}^2)$ peut être considéré comme un courant de masse 1 sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, par prolongement trivial.

Si $g \in \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ et $T = dd^c u \in \mathcal{D}^{1,1}(\mathbb{C}^2)$, le pull-back de T par g est défini par la formule $g^*T = dd^c u \circ g$. D'autre part, si l'on prolonge g en un automorphisme birationnel $\bar{g}$ de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ et que l'on considère T comme un courant sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, la définition du pull-back $\bar{g}^*T$ nécessite de se ramener à $\mathbb{C}^3$ par la projection canonique $\Pi : \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ (voir [11]). On a alors la relation $||\bar{g}^*T|| = d(g).||T||$. Par contre quand on regarde le pull-back sur $\mathbb{C}^2$ on oublie la masse portée par la droite à l'infini et il n'y a plus de relation simple entre $||g^*T||$ et $||T||$.

Étant donné un courant $T \in \mathcal{D}^{1,1}(\mathbb{C}^2)$ et $p \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ nous considèrerons le nombre de Lelong de T en p :

$$\nu(T, p) = \lim_{r \to 0} \frac{||T||_{B(p,r)}}{||[D]||_{B(p,r)}}$$

où $[D]$ est le courant d'intégration sur une droite passant par p. Quand T est un courant d'intégration sur une courbe M le nombre de Lelong $\nu(T, p)$ n'est rien d'autre que la multiplicité de M en p.

Nous dirons qu'un courant $T \in \mathcal{D}^{1,1}(\mathbb{C}^2)$ est *invariant* par un automorphisme $f \in \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ s'il existe $c > 0$ tel que $f^*T = c.T$ (on pourrait dire plus précisément que T est contracté, dilaté où préservé par f selon que c est supérieur, inférieur ou égal à 1). De même T sera dit invariant par un sous groupe $G \subset \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ si T est invariant par chaque élément de G, autrement dit si pour tout $g \in G$ il existe $c > 0$ dépendant de g tel que $g^*T = c.T$.

Dans l'idée de motiver l'étude des courants invariants pour un groupe parabolique nous rappelons maintenant la situation dans le cas loxodromique. Pour tout $f = \varphi g \varphi^{-1}$, avec $\varphi \in \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$, et g une composée d'applications de Hénon, on définit l'ensemble de Julia (positif) J_f^+ en posant :

$$\begin{aligned} K_f^+ &= \{z \in \mathbb{C}^2;\ (f^n(z))_{n \geq 0} \text{ est bornée}\}; \\ J_f^+ &= \partial K_f^+ \quad (\partial \text{ désigne le bord topologique}). \end{aligned}$$

On peut définir de même K_f^- et J_f^- en considérant les itérés négatifs de f. On associe à g les fonctions et courants de Green (voir [4])

$$\begin{aligned} G_g^{\pm} &= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{d(g)^n} \log^+ ||g^{\pm n}||; \\ \mu_g^{\pm} &= dd^c G_g^{\pm}. \end{aligned}$$

On pose alors

$$\mu_f^{\pm} = c^{\pm}.\varphi^{-1*}\mu_g^{\pm}$$

où les constantes $c^{\pm} > 0$ sont uniquement déterminés par la condition $||\mu_f^{\pm}|| = 1$. Le support de μ_f^+ (resp. μ_f^-) est J_f^+ (resp. J_f^-), et on a les égalités fonctionnelles

$$f^*\mu_f^+ = d(f).\mu_f^+ \text{ et } f^*\mu_f^- = \frac{1}{d(f)}.\mu_f^-.$$

Notre théorème 11 est largement inspiré du résultat suivant :

Théorème 7 (Sibony, Fornaess [4]). *Soient g une composée d'applications de Hénon et $T_i \in \mathcal{D}^{1,1}(\mathbb{C}^2)$ une suite de courants. On suppose que les supports des T_i ne rencontrent pas un voisinage fixé du point à l'infini* $[0 : 1 : 0]$. *Alors on a la convergence au sens des courants*

$$\frac{g^{n*}T_i}{d(g)^n} \to \mu_g^+.$$

Je dois le résultat d'unicité suivant à V. Guedj :

Proposition 8. *Si g est une composée d'applications de Hénon, les courants μ_g^+ et μ_g^- sont les seuls courants (dans $\mathcal{D}^{1,1}(\mathbb{C}^2)$) invariants par g.*

Preuve. Supposons que $T = dd^c u$ soit un courant de masse 1 satisfaisant une relation

$$g^*T = c.T.$$

Quitte à changer g par g^{-1} on peut supposer $c \geq 1$.

Si $c = d(g)$, cela signifie que le pull-back de T par g dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ ne met pas de masse sur la droite à l'infini, ce qui revient à dire (voir [3]) que $\nu(T, [0 : 1 : 0]) = 0$. Par un résultat de V.Guedj et C.Favre [7], pour tout courant de masse 1 tel que $\nu(S, [0 : 1 : 0]) = 0$ on a

$$\frac{g^{n*}S}{d(g)^n} \to \mu_g^+$$

En appliquant ce résultat à T on obtient $T = \mu_g^+$.

Supposons maintenant $1 \leq c < d(g)$, nous allons aboutir à une contradiction. Le potentiel u de T satisfait à l'équation $u \circ g = c.u$, et est de l'ordre de $\log||z||$ à l'infini (car nous supposons T de masse 1). Supposons d'abord $c > 1$. On voit que u est négatif ou nul sur K_g^+, en effet sinon u serait non majorée sur un compact, ce qui est impossible pour une fonction PSH. Or G_g^+ peut être définie comme le supremum des fonctions PSH négatives sur K_g^+ et de l'ordre de $\log||z||$

à l'infini. On a ainsi $u \leq G_g^+$ sur $\mathbb{C}^2$. Fixons alors $z \in \mathbb{C}^2$ tel que $u(z) = \alpha > 0$, on a

$$\frac{\alpha}{c^n} = u(g^{-n}(z)) \leq G_g^+(g^{-n}(z)) = \frac{G_g^+(z)}{d(g)^n}$$

d'où une contradiction quand n est assez grand.

Reste à traiter le cas $c = 1$. À partir de l'équation $u \circ g = u$ nous pouvons seulement conclure que u est majorée par une constante M sur K_g^+. Considérons $z \in \mathbb{C}^2$ tel que $u(z) > M$, on a :

$$u(z) - M = u(g^{-n}(z)) - M \leq G_g^+(g^{-n}(z)) = \frac{G_g^+(z)}{d(g)^n}$$

d'où encore une contradiction. □

Nous sommes maintenant tentés d'établir une analogie entre un bout invariant (dans l'arbre) et un courant invariant (dans $\mathbb{C}^2$).

Considérons en effet un sous-groupe $G \subset \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ général, *i.e.* un groupe qui contient au moins deux applications de type Hénon avec des ensembles de Julia différents. Du point de vue de l'arbre de Bass-Serre un tel groupe agit sans laisser aucun sommet ou bout fixe. D'autre part, la proposition 8 assure que G n'admet pas non plus de courant invariant.

Considérons d'autre part G un groupe loxodromique, de géodésique associée Γ. Un tel groupe est engendré par (au plus) trois automorphismes (voir [9, prop. 4.10]) :

1. g de type Hénon agissant par translation sur Γ ;
2. f d'ordre fini fixant point par point Γ ;
3. φ agissant par symétrie sur Γ.

À g sont associés deux courants de Green μ_g^+ et μ_g^- ; ces courants sont préservés par f (car f commute avec g ou g^2, voir [9, prop. 4.1]), et sont interchangés par φ (car $\varphi^{-1} g \varphi = g^{-1} \circ f^p$). De même g et f fixent les deux bouts définis par Γ, alors que φ les échange.

On peut dès lors espérer pousser un peu plus loin cette analogie, à savoir trouver, dans le cas d'un groupe parabolique, un courant invariant correspondant à l'unique bout fixé dans l'arbre. Nous allons voir que cette idée fonctionne bien au moins dans le cas uniforme.

Concernant les fonctions plurisousharmoniques (PSH) nous utiliserons les deux propositions suivantes (qui sont aussi des ingrédients essentiels dans la preuve du théorème 7) :

Proposition 9 (voir [8], p. 94). *Soit (v_j) une suite de fonctions PSH dans un domaine $\Omega \in \mathbb{C}^n$. Supposons que sur tout compact de Ω cette suite soit majorée. Alors*

1. *Si (v_j) ne converge pas uniformément vers $-\infty$ sur les compacts de Ω, il existe une sous-suite convergente dans $L^1_{loc}(\Omega)$ vers une fonction PSH;*
2. *Si v est PSH et $v_j \to v$ dans $L^1_{loc}(\Omega)$, alors pour tout compact $K \subset \Omega$ et pour toute fonction continue f sur K, on a*

$$\limsup_{j\to\infty} \sup_K (v_j - f) \leq \sup_K (v - f)$$

Proposition 10 (voir [2], lemme 4.13). *Soit $\tilde{u} \in PSH(\mathbb{C}^3)$ telle que*

1. $\tilde{u}(\lambda z) = \log ||\lambda|| + \tilde{u}(z)$;
2. $\sup_{B(0,1)} \tilde{u}(z) \geq 0$.

Alors il existe une constante C_1 indépendante de $\tilde{u}$ telle que

$$Volume\{\Pi(z) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}};\ \tilde{u}(z) - \log ||z|| < -k\} \leq C_1.e^{-k}$$

Si de plus $K \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est un compact sur un voisinage duquel $\tilde{u}$ est pluriharmonique, alors il existe une constante C_2 (dépendant de K mais pas de $\tilde{u}$) telle que

$$\tilde{u}(z) - \log ||z|| \geq C_2$$

sur $\Pi^{-1}(K)$.

5 Courant invariant par un groupe parabolique uniforme

Soit $H = (\varphi_i, (\alpha_i x, \beta_i y))$ un groupe parabolique normalisé uniforme. On note R et (V, V^+, V^-) la constante et la partition de $\mathbb{C}^2$ associées à H (voir p. 10). Posons

$$\begin{aligned} K_H^+ &= \{z;\ (\varphi_n(z))_{n\geq 0} \text{ bornée}\};\\ J_H^+ &= \partial K_H^+;\\ U_H^+ &= \mathbb{C}^2 \setminus K_H^+. \end{aligned}$$

Remarquons que $K_H^+ \subset V^+ \cup V$. Rappelons que nous désignons par ω la forme de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Dans cette section nous allons démontrer le

Théorème 11. *Soit $H = (\varphi_i, (\alpha_i x, \beta_i y))$ un groupe parabolique normalisé uniforme. Alors :*

1. *La suite* $\frac{1}{d(\varphi_n)}{\varphi_n}^*\omega$ *converge vers un courant* $\mu_H^+ \in \mathcal{D}^{1,1}(\mathbb{C}^2)$ *dont le support est* J_H^+ ;
2. *Pour tout courant* $T \in \mathcal{D}^{1,1}(\mathbb{C}^2)$ *dont le support n'adhère pas au point* $[0:1:0]$, *la suite* $\frac{1}{d(\varphi_n)}{\varphi_n}^*T$ *converge également vers* μ_H^+ ;
3. *Le courant* μ_H^+ *est invariant par* H *: pour tout* $h \in H$ *on a* $h^*\mu_H^+ = \mu_H^+$.

Comme précédemment nous notons Π la projection $\Pi : \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Rappelons que $\Pi^*\omega = dd^c \log ||z||$; donc un potentiel $\tilde{u}_n$ du courant $\Pi^*\left(\frac{1}{d(\varphi_n)}{\varphi_n}^*\omega\right)$ s'écrit

$$\tilde{u}_n = C_n + \frac{1}{d(\varphi_n)} \log ||\widetilde{\varphi_n}||$$

où $C_n > 0$ et $\widetilde{\varphi_n}$ désigne l'homogénéisé de φ_n (*i.e.* $\widetilde{\varphi_n}(x, y, t)$ est le relevé de φ_n par Π qui préserve le plan $\{t = 1\}$). On peut déterminer les constantes C_n de manière unique en imposant la condition $\sup_{B(0,1)} \tilde{u}_n = 0$. Ceci nous assure que la suite $(\tilde{u}_n)$ est localement majorée ; nous pouvons donc appliquer la proposition 9-1 : $(\tilde{u}_n)$ admet une sous-suite convergente $(\tilde{u}_{n_i})$. Nous noterons $\tilde{G}_H$ la limite et $G_H^+(x, y) := \tilde{G}_H(x, y, 1)$. On a donc

$$G_H^+(x, y) = \lim_{i \to +\infty} C_{n_i} + \frac{1}{d(\varphi_{n_i})} \log^+ ||\varphi_{n_i}(x, y)||.$$

Notons $C = \lim_{i \to \infty} C_{n_i}$, on a $C \in [-\infty, +\infty[$.

Lemme 12. *La fonction plurisousharmonique* G_H^+ *satisfait les propriétés*

1. $G_H^+ \equiv C$ *sur* K_H^+ ;
2. *si* $C \neq -\infty$ *alors* $G_H^+ > C$ *sur* U_H^+.

En fait nous verrons plus loin que G_H^+ est pluriharmonique sur U_H^+ et donc *a posteriori* la deuxième affirmation du lemme sera aussi vraie quand $C = -\infty$.

Preuve. La première affirmation découle des définitions, en se rappelant que $\lim_{n \to +\infty} d(\varphi_n) = +\infty$. Supposons maintenant C fini. Si $z \in U_H^+$ alors il existe n tel que $\varphi_n(z) \in V^-$. Par hypothèse d'uniformité on a

$$||\varphi_{n+i}(z)|| \geq ||\varphi_n(z)||^{d(\varphi_{n+i})/d(\varphi_n)}$$

On en déduit

$$\frac{1}{d(\varphi_{n+i})} \log ||\varphi_{n+i}(z)|| \geq \frac{1}{d(\varphi_n)} \log ||\varphi_n(z)||$$

et donc

$$G_H^+(z) \geq C + \frac{1}{d(\varphi_n)} \log ||\varphi_n(z)|| > C$$

ce qu'on voulait. □

Nous montrons maintenant le lemme clé pour la démonstration du théorème. Notons $\mu_H^+ = dd^c G_H^+$.

Lemme 13. *Soit $(T_i) \in \mathcal{D}^{1,1}(\mathbb{C}^2)$ une suite de courants dont les supports n'intersectent pas un voisinage fixé de $[0:1:0]$. Alors la suite $\frac{1}{d(\varphi_{n_i})}\varphi_{n_i}^* T_i$ converge vers μ_H^+.*

Preuve. On peut supposer que le voisinage de $[0:1:0]$ de l'énoncé est V^-, quitte à prendre une partition plus grossière (en prenant la constante R assez grande).

On pose $\Pi^* T_i = dd^c \tilde{v}_i$ où $\tilde{v}_i$ est normalisé par la condition $\sup_{B(0,1)} \tilde{v}_i = 0$. On notera $v_i(x, y) = \tilde{v}_i(x, y, 1)$. Il suffit de montrer que la suite de potentiels $C_{n_i} + \frac{1}{d(\varphi_{n_i})} v_i \circ \varphi_{n_i}$ converge dans $L^1_{loc}(\mathbb{C}^2)$ vers G_H^+.

Commençons par montrer ceci sur U_H^+. La fonction $\tilde{v}_i$ est pluriharmonique sur $\Pi^{-1}(V^-)$ qui contient $(0, 1, 0)$, de plus on a

$$\tilde{v}_i(\lambda z) = \log ||\lambda|| + \tilde{v}_i(z).$$

Par la proposition 10 il existe donc une constante C_2 (négative) tel que pour tout i, et pour tout $z \in \Pi^{-1}(V^-)$ on ait

$$0 \geq \tilde{v}_i(z) - \log ||z|| \geq C_2$$

d'où

$$0 \geq \left(C_{n_i} + \frac{1}{d(\varphi_{n_i})} \tilde{v}_i \circ \widetilde{\varphi_{n_i}}(z) \right) - \left(C_{n_i} + \frac{1}{d(\varphi_{n_i})} \log ||\widetilde{\varphi_{n_i}}(z)|| \right) \geq \frac{C_2}{d(\varphi_{n_i})}.$$

Ainsi on voit que $C_{n_i} + \frac{1}{d(\varphi_{n_i})} v_i \circ \varphi_{n_i}$ converge uniformément vers G_H^+ sur V^-. De plus pour tout $z \in U_H^+$ il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $\varphi_n \in V^-$; on en déduit que la convergence a lieu sur U_H^+.

D'autre part la fonction G_H^+ est égale à la constante $C = \lim C_{n_i}$ sur K_H^+. La condition $\sup_{B(0,1)} \tilde{v}_i = 0$ implique que la suite v_i est majorée sur tout compact

de $\mathbb{C}^2$, en particulier sur V. Si $z \in K_H^+$ alors pour i assez grand $\varphi_{n_i}(z)$ est dans V, on en déduit

$$\liminf \left(C_{n_i} + \frac{1}{d(\varphi_{n_i})} v_i \circ \varphi_{n_i}(z) \right) \leq C \text{ sur } K_H^+.$$

Montrons qu'en fait cette limite inférieure est égale à C, ce qui terminera la démonstration. Supposons C fini (sinon c'est terminé). S'il existe $\alpha > 0$ et z dans K_H^+ tel que

$$\liminf \left(C_{n_i} + \frac{1}{d(\varphi_{n_i})} v_i \circ \varphi_{n_i}(z) \right) \leq C - 2\alpha$$

alors la même inégalité est valable sur un voisinage W de z (par semi-continuité) et par la proposition 9-2 on a pour i assez grand, et pour $z \in W$:

$$\frac{1}{d(\varphi_{n_i})} v_i \circ \varphi_{n_i}(z) \leq -\alpha$$

et donc

$$v_i(z) \leq -\alpha d(\varphi_{n_i}) \text{ pour } z \in \varphi_{n_i}(W).$$

Autrement dit les $\varphi_{n_i}(W)$ seraient des ouverts de volume fixé (rappelons que les φ_j sont de déterminant jacobien ± 1) sur lesquels v_i serait arbitrairement proche de $-\infty$, ce qui contredirait la proposition 10. □

Il nous faut maintenant montrer que le courant μ_H^+ ne dépend pas de la sous-suite choisie pour construire $\tilde{G}_H$. Nous commençons par montrer le

Lemme 14. *Le support du courant μ_H^+ est J_H^+. De plus si $T \in \mathcal{D}^{1,1}(\mathbb{C}^2)$ est un courant à support dans K_H^+, alors $T = \mu_H^+$.*

Preuve. Choisissons $S \in \mathcal{D}^{1,1}(\mathbb{C}^2)$ à support dans $V^+ \cup V$; par exemple S est le courant d'intégration sur la droite $\{y = 0\}$. Le lemme 13 appliqué avec $T_i = S$ pour tout i implique que la suite de courants $\frac{1}{d(\varphi_{n_i})} {\varphi_{n_i}}^* S$ converge vers μ_H^+. Remarquons que si $z \in U_H^+$ alors il existe un voisinage W de z tel que pour tout i assez grand $\varphi_i(W) \subset V^-$. Si ψ est une forme test à support dans W on a donc

$$\langle {\varphi_i}^* T, \psi \rangle = \langle T, {\varphi_i}_* \psi \rangle = 0$$

et donc

$$\langle \mu_H^+, \psi \rangle = 0$$

Ainsi le support de μ_H^+ est inclu dans K_H^+. Ce support est même inclu dans J_H^+ car sur l'intérieur de K_H^+ la fonction G_H^+ est constante égale à C. Montrons l'inclusion inverse ; autrement dit nous voulons montrer que pour tout $z \in J_H^+$ la fonction G_H^+ n'est pas pluriharmonique au voisinage de z. Si $C = -\infty$ c'est terminé. Sinon, on conclut à l'aide du principe du minimum. En effet si G_H^+ était pluriharmonique au voisinage de $z \in J_H^+$ alors elle serait localement constante, ce qui n'est pas le cas d'après le lemme 12.

Pour la deuxième affirmation il suffit d'appliquer le lemme 13 à

$$T_i = \varphi_{n_i *} T / ||\varphi_{n_i *} T||.$$

En effet tous ces courants ont leur support dans $V^+ \cup V$. □

Supposons que μ' soit un courant obtenu comme limite d'une autre sous-suite. Le support de μ' est encore J_H^+ par la première affirmation du lemme 14, et la deuxième affirmation implique $\mu' = \mu_H^+$. Ainsi la suite de potentiels $(\tilde{u}_n)$ admet des sous-suite convergente qui ont toutes même limite, autrement dit $(\tilde{u}_n)$ admet une limite. Ceci démontre la première affirmation du théorème 11, avec $\mu_H^+ = dd^c G_H^+$, où

$$G_H^+(x, y) = \lim_{n \to +\infty} C_n + \frac{1}{d(\varphi_n)} \log^+ ||\varphi_n(x, y)||.$$

La deuxième affirmation du théorème découle du lemme 13 (le lemme 13 est même un peu plus fort). Reste à vérifier l'invariance de μ_H^+ par H. Fixons $h = \varphi_i^{-1}(\alpha x, \beta y)\varphi_i \in H$. Alors pour tout $j > i$ on a (car $\varphi_j \varphi_i^{-1}$ commute avec $(\alpha x, \beta y)$)

$$\frac{1}{d(\varphi_j)} \log ||\varphi_j|| \circ h = \frac{1}{d(\varphi_j)} \log ||\varphi_j \varphi_i^{-1}(\alpha x, \beta y)\varphi_i|| = \frac{1}{d(\varphi_j)} \log ||\varphi_j||.$$

En passant à la limite quand j tend vers l'infini on obtient $G_H^+ \circ h = G_H^+$; et donc $h^* \mu_H^+ = \mu_H^+$. □

6 Remarques et compléments

6.1 Le Julia J_H^+ peut être pluripolaire

Dans le cas d'un groupe parabolique uniforme nous avons obtenu dans la section précédente un courant invariant par une méthode très semblable à celle utilisée dans le cas d'une application de Hénon. Cependant remarquons que le support du courant μ_f^+ associé à un automorphisme f de type Hénon n'est jamais

pluripolaire, alors que ce peut être le cas pour le courant associé à un groupe parabolique uniforme : cela arrive quand la linéarisante formelle diverge très rapidement. Nous construisons maintenant un exemple explicite où ce phénomène se produit. On a vu (exemple 4) qu'il existait une suite d_k tel que si l'on pose

$$g_k(x, y) = (y, \alpha_k y^{d_k} + x) \text{ et } \varphi_k = g_k \circ \cdots \circ g_1$$

alors il existe un groupe parabolique normalisé uniforme (pourvu que les α_k soient assez grands) qui admet (φ_k) comme suite de linéarisantes partielles. Posons $\tilde{u}_k(z) = C_k + \frac{1}{d(\varphi_k)} \log ||\widetilde{\varphi_k}(z)||$, où C_k est déterminé par la condition $\sup_{B(0,1)} \tilde{u}_k = 0$. Le lemme 12 affirme que J_H^+ est le bord du niveau $\{G_H^+ = C\}$ où $C = \lim C_k$. Nous allons choisir les α_k de manière à ce que $C = -\infty$. Supposons les α_k déterminés jusqu'au rang $i-1$. On remarque que

$$\tilde{g}_{i-1} \circ \cdots \circ \tilde{g}_1(0, 1, 0) = (0, l, 0)$$

où $l \in \mathbb{C}$. Donc

$$\widetilde{\varphi_i}(0, 1, 0) = (0, \alpha_i l^{d_i}, 0).$$

Par définition de C_i on a

$$C_i + \frac{1}{d(\varphi_i)} \log |\alpha_i l^{d_i}| \leq 0.$$

En prenant α_i suffisament grand on obtient $C_i \leq -i$. Ainsi $C = \lim C_k$ est égal à $-\infty$, et J_H^+ support de μ_H^+ est un ensemble pluripolaire.

6.2 Un groupe parabolique non uniforme pour lequel $\mu_H^+ = 0$

Nous nous proposons maintenant de construire un exemple de groupe parabolique non uniforme pour lequel le procédé itératif utilisé dans la preuve du théorème 11 ne produit pas un courant invariant dans $\mathbb{C}^2$.

Soient $\alpha_k = e^{i\pi/2^k}$, et $d_k = 2^k + 1$. On pose

$$\begin{aligned} g_k(x, y) &= (y, \varepsilon_k y^{d_k} + x) \circ (y, y^{d_k} + x) \circ (y, \varepsilon_k y^{d_k} + x) \\ &= (y, x) \circ (x + \varepsilon_k y^{d_k}, y) \circ (y, x) \circ (x + y^{d_k}, y) \circ (y, x) \circ \\ &\quad (x + \varepsilon_k y^{d_k} + x) \\ g'_k(x, y) &= (x + y^{d_k}, y) \circ (y, x) \\ \varphi_k &= g_k \circ \cdots \circ g_1 \end{aligned}$$

Alors pour tout choix des $\varepsilon_k \in \mathbb{C}^*$ on obtient un groupe parabolique $H = (\varphi_i, (\alpha_i x, \alpha_i y))$. Nous allons maintenant faire un choix particulier pour les ε_k,

en procédant par récurrence (et en utilisant une suite auxiliaire (R_k), voir ci-dessous). L'idée est de prendre les ε_k petits de manière à ce que g_k et g_k' soient proches, ainsi φ_k sera bien approximé sur un grand voisinage de l'origine par un automorphisme de degré plus petit.

Si les (ε_k) et (R_k) sont définis du rang 1 jusqu'au rang $i-1$, nous choisissons R_i de manière à ce que les propriétés suivantes soient satisfaites pour tout $|\varepsilon_i| \leq 1$ (pour $i = 1$ seule la première condition a un sens) :

1. si $||z|| \leq i$ alors $\varphi_i(z) \in B(0, R_i)$;
2. si $\varphi_{i-1}(z) \in B(0, R_{i-1})$ alors $\varphi_i(z) = g_i \circ \varphi_{i-1}(z) \in B(0, R_i)$ et $g_i' \circ \varphi_{i-1}(z) \in B(0, R_i)$. ;
3. $R_i > R_{i-1}$.

Ayant ainsi fixé R_i on peut choisir ε_i de module suffisamment petit pour que

$$||g_i(z)|| \leq 2||g_i'(z)|| \text{ pour tout } z \in B(0, R_i).$$

Nous avons ainsi défini les (ε_k) et (R_k) pour tout $k \geq 1$. Nous allons maintenant estimer la valeur de $\frac{1}{d(\varphi_k)} \log ||\varphi_k||$. Remarquons que $d(\varphi_k) = d_k^3$, et qu'il existe deux constantes $c_1, c_2 \geq 1$ telles que pour tout k on ait

$$||g_k'(z)|| \leq c_1.||z||^{d_k} \text{ pour tout } z \notin B(0, c_2).$$

Fixons z à orbite non bornée. Par construction des R_k il existe un indice i tel que pour tout $j \geq i$ on ait $||\varphi_j(z)|| > c_2$ et $\varphi_j(z) \in B(0, R_j)$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} ||\varphi_{i+1}(z)|| &= ||g_{i+1} \circ \varphi_i(z)|| \\ &\leq 2||g_{i+1}' \circ \varphi_i(z)|| \\ &\leq 2c_1||\varphi_i(z)||^{d_{i+1}} \\ &\leq ||2c_1\varphi_i(z)||^{d_{i+1}} \end{aligned}$$

et par récurrence :

$$||\varphi_{i+n}(z)|| \leq ||2^n c_1^n \varphi_i(z)||^{d_{i+1}d_{i+2}\cdots d_{i+n}}$$

Ainsi, pour tout $j > i$

$$\frac{1}{d(\varphi_j)} \log ||\varphi_j|| \leq \frac{d_{i+1}.\cdots.d_j}{d_1^3.\cdots.d_j^3} \log ||2^j c_1^j \varphi_i(z)||$$

et le terme de droite tend vers 0 quand j tend vers l'infini. Finalement la fonction G_H^+ que nous avions définie dans le cas uniforme par la formule

$$G_H^+(x, y) = \lim_{n \to +\infty} C_n + \frac{1}{d(\varphi_n)} \log^+ ||\varphi_n(x, y)||$$

se trouve dans le cas présent être égale à une constante (la limite C des C_n), et le courant invariant obtenu est donc le courant nul. En fait, la suite de courant $\frac{1}{d(\varphi_n)}{\varphi_n}^*\omega$ converge bien vers un courant de masse 1 dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, et la limite n'est rien d'autre que le courant d'intégration sur la droite à l'infini.

6.3 Un groupe non uniforme sans courant invariant

L'exemple précédent montre que sans l'hypothèse d'uniformité notre construction d'un courant invariant μ_H^+ dans $\mathbb{C}^2$ peut ne plus fonctionner. On pourrait espérer obtenir un courant invariant par un autre procédé ; cependant, même si notre hypothèse « H uniforme » n'est certainement pas optimale nous allons maintenant montrer que l'on ne peut pas se passer complètement d'hypothèse sur un groupe parabolique pour assurer l'existence d'un courant invariant. En effet nous allons reprendre l'exemple ci-dessus pour obtenir un groupe qui n'admet aucun courant positif fermé de type (1,1) invariant. La construction serait plus simple si l'on pouvait montrer que le support de tout courant invariant par un groupe hyperbolique normalisé n'adhère à l'infini qu'au seul point $[1 : 0 : 0]$ (c'est bien le cas pour le courant μ_H^+ que nous avons construit dans le cas uniforme, mais il n'est pas clair que ce soit vrai en général). Pour contourner cet obstacle technique nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 15. *Soient H un groupe parabolique normalisé, et T un (1,1) courant positif fermé invariant par H. Alors :*

1. $\nu(T, [0 : 1 : 0]) = 0$;
2. *de plus on a* $||{\varphi_n}_* T|| = \frac{1}{d(\varphi_n)}||T||$.

Preuve. Nous commençons par la remarque suivante. Supposons que g soit une application de Hénon, son inverse s'écrit :

$$g^{-1}(x, y) = (P(x) - \delta y, x) \text{ avec } d = d^\circ P \geq 2.$$

Si M est une courbe algébrique dont la multiplicité au point $[0 : 1 : 0]$ est n, alors $M = \{Q(x, y) = 0\}$ où Q s'écrit :

$$Q(x, y) = x^n(y - \lambda_1 x)^{n_1} \cdots (y - \lambda_p x)^{n_p} + \text{ termes d'ordre inférieur.}$$

La droite $\{x = 0\}$ est envoyée par g sur la courbe $\{P(x) - \delta y = 0\}$ qui admet une singularité de multiplicité $d - 1$ en $[0 : 1 : 0]$, ainsi on a

De même si g est une composée d'applications de Hénon et si S est un courant d'intégration (*i.e.* S est une combinaison linéaire $\sum \lambda_i[M_i]$ où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et les M_i sont des courbes algébriques), on a

$$\nu(g_*S, [0:1:0]) \geq (d(g)-1).\nu(S, [0:1:0]).$$

Considérons maintenant T invariant par H, et supposons que $\nu(T, [0:1:0]) = \alpha > 0$. On peut obtenir T comme limite d'une suite de courants d'intégration S_i tel que $\nu(S_i, [0:1:0]) = \alpha$ (voir [6]). On a alors

$$\nu(g_*T, [0:1:0]) \geq \liminf \nu(g_*S_i, [0:1:0]) \geq \alpha.(d(g)-1).$$

Il reste à remarquer que tout élément de H s'écrit $h = (y, x) \circ g$, où g est une composée d'applications de Hénon. En effet :

$$\begin{aligned} h &= \varphi_i^{-1}(\alpha_i x, \beta_i y)\varphi_i \\ &= e_1^{-1}\sigma \cdots \sigma \underbrace{e_i^{-1}\sigma(\alpha_i x, \beta_i y)\sigma e_i}_{=e\in E\setminus A} \cdots \sigma e_1 \quad \text{où } \sigma = (y, x) \\ &= \sigma(\sigma e_1^{-1}) \cdots (\sigma e_{i-1}^{-1})(\sigma e)(\sigma e_{i-1}) \cdots (\sigma e_1) \\ &= \sigma \circ g. \end{aligned}$$

On aurait donc

$$||T|| = ||h_*T|| = ||g_*T|| \geq \nu(g_*T, [0:1:0]) \geq \alpha.(d(g)-1).$$

d'où une contradiction quand $d(g)$ est assez grand. Ainsi $\nu(T, [0:1:0]) = 0$.

Montrons maintenant la deuxième égalité. On a $||\varphi_n^*\varphi_{n*}T|| = ||T||$, et d'autre part par un résultat de C. Favre [3] :

$$||\varphi_n^*\varphi_{n*}T|| = d(\varphi_n)||\varphi_{n*}T|| \Leftrightarrow \nu(\varphi_{n*}T, [0:1:0]) = 0.$$

Remarquons que le courant $\varphi_{n*}T$ est invariant par le groupe parabolique $\varphi_n H \varphi_n^{-1}$; par l'égalité précédente on a $||T|| = ||\varphi_n^*\varphi_{n*}T|| = d(\varphi_n)||\varphi_{n*}T||$ ce qu'on voulait. □

Reprenons maintenant l'exemple de la section 6.2. Posons

$$\varphi_k' = g_k' \circ g_{k-1} \circ \cdots \circ g_1.$$

Nous choisissons les ε_k de module suffisamment petit pour que $\varphi_k \circ \varphi_k'^{-1}$ soit très proche de l'identité sur $B(0, k)$; en particulier on peut supposer que pour

tout courant $S \in \mathcal{D}^{1,1}(\mathbb{C}^2)$ on a (par compacité de l'espace des (1,1) courants positifs fermés de masse 1 sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$) :

$$||{\varphi_k}^* \varphi'_{k*} S||_{B(0.k)} < 2||S||_{B(0,k)}.$$

Maintenant supposons que le groupe parabolique $H = (\varphi_i, (\alpha_i x, \beta_i y))$ admette un courant invariant T de masse finie sur $\mathbb{C}^2$. Fixons $i > 0$. On a (l'avant-dernière inégalité provient du lemme 15) :

$$\begin{aligned} ||T||_{B(0,i)} &= ||{\varphi_i}^* \varphi'_{i*} {\varphi'_i}^* \varphi_{i*} T||_{B(0,i)} \\ &\leq 2||{\varphi'_i}^* \varphi_{i*} T||_{B(0,i)} \\ &\leq 2||{\varphi'_i}^* \varphi_{i*} T|| \\ &\leq 2d(\varphi'_i)||\varphi_{i*} T|| \\ &\leq 2\frac{d(\varphi'_i)}{d(\varphi_i)}||T|| \\ &\leq \frac{2}{d_i^2}||T||. \end{aligned}$$

Ce dernier terme tend vers 0 quand i tend vers l'infini. Donc $T = 0$, ainsi H n'admet pas de courant invariant autre que le courant nul.

6.4 Questions ouvertes

6.4.1 Sur l'unicité de μ_H^+

Considérons H un groupe parabolique uniforme et μ_H^+ le courant invariant produit par le théorème 11. Nous avons montré (lemme 14) que μ_H^+ est le seul courant à support dans K_H^+. Dans la même veine une autre question naturelle est celle de l'unicité de μ_H^+ : existe-t-il plusieurs (1,1) courants positifs fermés T sur $\mathbb{C}^2$ tels que $h^*T = T$ pour tout $h \in H$. Ceci semble se ramener au problème suivant :

(*) Étant donné un groupe parabolique normalisé H (uniforme ou non), le support d'un courant invariant par H n'adhère-t-il à l'infini qu'au point [1 : 0 : 0] ? (c'est bien sûr le cas pour le courant μ_H^+ quand H est uniforme).

En cas de réponse positive, en remarquant que $\varphi_{i*}T$ est invariant par le groupe normalisé $\varphi_i h \varphi_i^{-1}$ et en appliquant le lemme 14 on obtiendrait l'unicité. Cependant le problème (*) ne paraît pas trivial.

6.4.2 Sur la dynamique de H sur J_H^+

Nous avons mis en évidence l'existence d'un « ensemble de Julia » J_H^+ associé à un groupe parabolique uniforme, et l'existence d'un courant supporté par J_H^+ apporte des informations sur la structure de cet ensemble (qui reste d'ailleurs dans le cas non uniforme une partie de $\mathbb{C}^2$ invariante sous l'action de H). Sur $\mathbb{C}^2 \setminus K_H^+$ il est facile de vérifier que l'orbite d'un point sous l'action de H est discrète et vient adhérer à l'infini seulement au point $[1 : 0 : 0]$ (utiliser l'écriture $h = (y, x) \circ g$ comme dans la preuve du lemme 15). Cependant la dynamique du groupe H restreinte à J_H^+ reste à étudier ; par exemple on peut se demander si l'orbite d'un point $z \in J_H^+$ est relativement compacte, si elle adhère à l'origine... En s'inspirant des résultats connus pour les applications de Hénon, il est également tentant de chercher une mesure associée à H possédant de bonnes propriétés dynamiques. On rencontre alors au moins deux difficultés : une telle mesure ne semble pas pouvoir s'obtenir par intersection de courants ($\mu_H^+ \wedge \mu_H^+$ n'est rien d'autre que la masse de Dirac en $[1 : 0 : 0]$), d'autre part les notions telles que celle « d'entropie maximale » seraient à préciser (existe-t-il une bonne définition qui associe à H parabolique une « entropie de groupe » strictement positive et finie ?).

6.4.3 Sur les groupes localement linéarisables

Un espoir au début de ce travail était, dans le cas d'un groupe parabolique localement linéarisable, de trouver un courant invariant porté par le bord du bassin de linéarisation. Il semble cependant qu'une suite de linéarisante (φ_i) localement convergente ne puisse jamais être uniforme, et donc le théorème 11 ne s'applique pas. De plus, on peut adapter la construction de la section 6.3 de manière à obtenir un groupe parabolique localement linéarisable sans aucun courant invariant : il suffit de considérer

$$g_k = (y, \varepsilon_k y^{d_k} + x) \circ (y, \beta_k y^{d_k} + x) \circ (y, \varepsilon_k y^{d_k} + x)$$

avec les β_k suffisamment petits. La question reste ouverte de savoir s'il existe des groupes paraboliques localement linéarisables admettant un courant $T \in \mathcal{D}^{1,1}(\mathbb{C}^2)$ invariant.

Références

[1] J.-P. Demailly, *L^2 vanishing theorems for positive line bundles and adjunction theory.* Springer, LNM 1646, (1996), 1–97.

[2] J. Diller, *Dynamics of birationnal maps of $\mathbb{P}^2$.* Indiana Math. J., **45 :** (1997), 721–772.

[3] C. Favre, *Note on pull-back and lelong number of currents.* Bull. Soc. Math. France, **127 :** (1999), 445–458.

[4] J.E. Fornaess et N. Sibony, *Complex dynamics in higher dimensions.* Kluwer Acad. Publish., (1994), 131–186.

[5] S. Friedland et J. Milnor, *Dynamical properties of plane polynomial automorphisms.* Erg. Th. and Dyn. Sys., **9 :** (1989), 67–99.

[6] V. Guedj, *Approximation of currents on complex manifolds.* Math. Ann., **313 :** (1999), 437–474.

[7] V. Guedj et C. Favre, *Dynamique des applications rationnelles des espaces multi-projectifs.* Indiana J. of Math., **50 :** (2001).

[8] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential equations I.* Springer-Verlag, (1983).

[9] S. Lamy, *L'alternative de Tits pour Aut*$[\mathbb{C}^2]$. J. of Algebra, **239 :** (2001), 413–437.

[10] J.-P. Serre, *Arbres, Amalgames,* SL_2. SMF, Astérisque, **46 :** (1977).

[11] N. Sibony, *Dynamique des applications rationnelles de* $\mathbb{P}^k$, Société Mathématique de France, Panorama et Synthèse, **8 :** (1999), 97–185.

[12] D. Wright, *Abelian subgroups of* $Aut_k(k[X, Y])$ *and applications to actions on the affine plane.* Illin. J. Math., **23 :** (1979), 579–635.

Stéphane Lamy
Université de RENNES 1
Institut de Recherche Mathématiques de Rennes
Campus de Beaulieu
35042 RENNES Cedex

E-mail : slamy@maths.univ-rennes1.fr