

Groupes résolubles de difféomorphismes de l'intervalle, du cercle et de la droite

Andrés Navas

Résumé. On donne une classification complète (des points de vue algébrique et dynamique) des groupes résolubles de difféomorphismes directs et de classe C^2 de l'intervalle, du cercle et de la droite. On donne aussi des résultats complémentaires dans le cas analytique réel.

Mots-clés: dynamique unidimensionnelle, groupes de difféomorphismes, résoluble, moyennable.

Abstract. We give a complete classification (from the algebraic and dynamical points of view) of solvable groups of orientation preserving C^2 -diffeomorphisms of the interval, the circle and the real line. We also give some complementary results in the real-analytic case.

Keywords: one-dimensional dynamics, groups of diffeomorphisms, solvable, amenable.

Mathematical subject classification: 57S25, 57R30, 37E99, 20F16, 20F60.

Introduction

Les groupes *nilpotents* de difféomorphismes de classe C^2 des variétés unidimensionnelles (séparées) sont bien compris, d'après certains travaux de J. Plante et W. Thurston (voir [36]). L'outil essentiel pour l'étude de ces groupes est le fameux lemme de N. Koppel que nous présentons ci-dessous (voir [21] ainsi que le §1 pour plus de détails).

Lemme [Kopell]. Soient f et g deux difféomorphismes directs et de classe C^2 d'un intervalle $[a, b[$. Supposons que f n'a pas de point fixe à l'intérieur de l'intervalle et que g possède de tels points. Si f et g commutent, alors g est l'identité.

Le centre de tout groupe nilpotent étant non trivial, à l'aide du lemme de Koppel on démontre aisément le résultat suivant (voir [36]).

Théorème [Plante-Thurston]. *Tout sous-groupe nilpotent de $\text{Diff}_+^2([a, b[)$ ou de $\text{Diff}_+^2(S^1)$ est abélien.*

Le cas de la droite est un peu plus délicat. Cependant, en utilisant le théorème d'existence d'une mesure de Radon invariante démontré dans [34] (voir aussi [1]), on obtient le résultat suivant (voir [36]).

Théorème [Plante-Thurston]. *Tout sous-groupe nilpotent Γ de $\text{Diff}_+(\mathbb{R})$ est métabélien. De plus, si tous les éléments de Γ ont des points fixes, alors Γ est abélien.*

Nous dirons qu'un intervalle non dégénéré (c'est-à-dire non vide ni réduit à un seul point) d'une variété unidimensionnelle est une *composante irréductible* pour l'action d'un groupe Γ s'il est invariant par Γ et aucun sous-intervalle fermé non dégénéré n'est invariant. Dans les deux théorèmes précédents, on peut décrire explicitement la structure dynamique des groupes que l'on considère. Par exemple, la restriction de tout sous-groupe nilpotent de $\text{Diff}_+^2([a, b[)$ à l'intérieur de chaque composante irréductible est topologiquement conjuguée à une action par des translations de la droite. Dans le cas de $\text{Diff}_+^2(S^1)$, un sous-groupe nilpotent est soit semiconjugué à un groupe de rotations, soit une extension centrale finie d'un sous-groupe d'un produit de groupes conjugués à des groupes de translations qui agissent sur des sous-intervalles du cercle dont les intérieurs sont deux à deux disjoints. Finalement, un sous-groupe nilpotent de $\text{Diff}_+^2(\mathbb{R})$ est soit semiconjugué à un groupe de translations, soit un sous-groupe d'un produit de groupes conjugués à des groupes de translations qui agissent sur des sous-intervalles de la droite dont les intérieurs sont deux à deux disjoints, soit une extension par $(\mathbb{Z}, +)$ d'un tel groupe.

Notons que le deuxième théorème de Plante et Thurston n'entraîne pas que la longueur de nilpotence de tout sous-groupe nilpotent de $\text{Diff}_+^2(\mathbb{R})$ est au plus égale à 2. En effet, dans [9] on trouve des exemples de sous-groupes nilpotents et de type fini de $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{R})$ de longueur de nilpotence arbitraire. Cependant, dans le §6.1 nous démontrons que tout sous-groupe nilpotent de $\text{Diff}_+^\omega(\mathbb{R})$ est abélien ; plus précisément, un tel groupe est soit contenu dans un groupe à un paramètre, soit topologiquement conjugué au relèvement à la droite d'un sous-groupe abélien de $\text{Diff}_+^\omega(S^1)$.

Pour quelques résultats concernant les groupes nilpotents de *difféomorphismes de surfaces* nous renvoyons le lecteur à [7], [12] et [37].

Le cas nilpotent étant bien connu, nous nous intéressons plutôt à l'étude des groupes *résolubles*. Signalons que les groupes résolubles d'*homéomorphismes*

de la droite ont été étudiés dans [33] par J. Plante, qui a démontré que sous certaines hypothèses assez générales, il existe une mesure de Radon *quasi-invariante* pour l'action (i.e. une mesure invariante à un facteur constant près, ce facteur ne dépendant que de chaque élément du groupe). Nous renvoyons le lecteur à [5] pour un autre résultat sur la structure de ces groupes, et à [38] pour le cas des *groupes polycycliques*. Signalons cependant que, même dans le cas différentiable, on ne dispose que de résultats partiels (voir par exemple [26] et [32]), et on n'a pas de classification satisfaisante.

Dans ce travail nous étudions principalement les groupes résolubles de difféomorphismes de classe C^2 et C^ω du cercle, de l'intervalle et de la droite. Remarquons d'abord que le groupe affine peut être vu comme un groupe de difféomorphismes analytiques réels de l'intervalle $[0, 1]$: il suffit considérer le groupe des transformations de Möbius qui fixent un point donné du cercle (voir aussi le §1). On pourrait penser que cette action est unique, à semiconjugation topologique près, parmi les actions de groupes résolubles, lorsqu'on se restreint aux composantes irréductibles (voir [26] et [32]). On pourrait penser qu'au moins tout sous-groupe résoluble de $\text{Diff}_+^2([0, 1])$ est métabélien (voir [8]). Cependant, nous montrons par des exemples très simples que le groupe $\text{Diff}_+^2([0, 1])$ contient des sous-groupes de type fini, résolubles d'ordre de résolubilité arbitraire, sans point fixe à l'intérieur de $[0, 1]$, et qui ne sont pas semiconjugés à des sous-groupes du groupe affine. Nous donnons aussi une famille intéressante d'exemples de sous-groupes résolubles de $\text{Diff}_+^2([0, 1])$ d'ordre de résolubilité égal à 3 qui sont des extensions par $(\mathbb{Z}, +)$ d'un sous-groupe d'un produit de groupes conjugués à des sous-groupes non commutatifs du groupe affine.

On peut trouver néanmoins une classification simple lorsqu'on suppose que l'ordre de résolubilité est inférieur ou égal à 2 (i.e. dans le cas métabélien).

Théorème A. *Si Γ est un sous-groupe métabélien de $\text{Diff}_+^2([0, 1])$ sans point fixe à l'intérieur, alors Γ est soit C^2 -conjugué à un sous-groupe du groupe affine, soit un produit semidirect entre $(\mathbb{Z}, +)$ et un sous-groupe d'un produit (au plus dénombrable) de groupes C^2 -conjugués à des groupes de translations.*

On considère maintenant un sous-groupe Γ de $\text{Diff}_+^2([0, 1])$ d'ordre de résolubilité arbitraire. Si Γ est abélien, alors le lemme de Kopell (ou plutôt le théorème de Szekeres cité au §1) entraîne que Γ est un sous-groupe d'un produit (au plus dénombrable) de groupes C^2 -conjugués à des groupes de translations. On note $r(1)$ la famille de ces groupes, et on note $r(2)$ la famille des groupes qui sont soit C^2 -conjugués à des sous-groupes non commutatifs du groupe affine, soit des produits semidirects entre $(\mathbb{Z}, +)$ et un sous-groupe d'un produit au plus dénombrable de groupes C^2 -conjugués à des groupes de translations non triviaux. Dans le cours de la preuve du théorème A on montrera que tout sous-groupe métabélien et non commutatif de $\text{Diff}_+^2([0, 1])$ sans point fixe à l'intérieur

appartient à $r(2)$. Pour $k > 2$, nous donnons la classification par récurrence. On désigne par $r(k)$ la classe des groupes qui sont des produits semidirects entre $(\mathbb{Z}, +)$ et un sous-groupe d'un produit (au plus dénombrable) de groupes de $\mathcal{R}(k-1) = r(1) \cup \dots \cup r(k-1)$ dont au moins l'un des facteurs n'appartient pas à $\mathcal{R}(k-2)$. Dans le §2.2 nous donnons la preuve du résultat suivant, ainsi qu'une propriété intéressante de rigidité lorsque l'ordre de résolubilité est supérieur à 3.

Théorème B. *Soit Γ un sous-groupe résoluble de $\text{Diff}_+^2([0, 1])$ sans point fixe à l'intérieur. Si l'ordre de résolubilité de Γ est égal à $k \geq 2$, alors Γ appartient à la classe $r(k)$.*

Les théorèmes A et B restent évidemment valables lorsqu'on remplace l'intervalle $[0, 1[$ par $]0, 1]$. La classe de différentiabilité C^2 est essentielle. Des exemples pathologiques de groupes résolubles d'homéomorphismes de l'intervalle apparaissent déjà dans [33]. On peut construire des exemples de classe C^1 en commençant avec les groupes construits dans [9] ou [31], et puis en prenant des extensions successives par $(\mathbb{Z}, +)$ de manière analogue aux constructions du §1. Un problème intéressant est d'essayer d'appliquer des idées semblables à celles du §X de [19] pour rendre ces exemples de classe $C^{2-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$. Un autre problème intéressant est celui d'obtenir une description satisfaisante des sous-groupes *moyennables* de $\text{Diff}_+^2([0, 1])$. Néanmoins, ce dernier problème semble être très difficile, puisque d'après [13] il est relié à la question (encore ouverte) de savoir si le groupe F de Thompson est moyennable ou non. Nous obtenons cependant un résultat intéressant au §6.2 dans le cas analytique réel, à savoir tout sous-groupe *sous-exponentiellement moyennable* de $\text{Diff}_+^\omega([0, 1])$ est résoluble.

Dans le §2.3 nous expliquons comment étendre les théorèmes A et B au cadre des difféomorphismes dont le logarithme de la dérivée est à variation totale bornée sur les intervalles compacts, tout au moins si l'on remplace les conjugaisons de classe C^2 des énoncés par des conjugaisons topologiques.

La classification des sous-groupes résolubles du groupe des *difféomorphismes du cercle* se réduit, par un argument simple, à celle donnée par les théorèmes précédents. Le résultat suivant est à rapprocher avec la proposition 3.7 de [12].

Théorème C. *Soit Γ un sous-groupe résoluble de $\text{Diff}_+^2(S^1)$. Si la longueur de résolubilité de Γ est égale à $k + 1$, alors on a l'une des deux possibilités suivantes:*

- (i) Γ est topologiquement semiconjugué à un groupe de rotations;
- (ii) il existe un ensemble fini non vide F de S^1 invariant par Γ et des homéomorphismes entre la droite et les composantes connexes de $S^1 - F$, tels que le groupe dérivé Γ' fixe chacun des points de F , et la restriction de Γ'

à chacune de ses composantes irréductibles ouvertes à droite et fermées à gauche est un groupe de la classe $\mathcal{R}(k)$.

Le premier théorème de Plante et Thurston décrit les sous-groupes nilpotents de $\text{Diff}_+^2(S^1)$. Le théorème précédent en est un analogue pour les sous-groupes résolubles. Comme nous l'avons remarqué plus haut, la description des sous-groupes moyennables de $\text{Diff}_+^2(S^1)$ semble compliquée. Dans ce même esprit, il serait intéressant de trouver des conditions algébriques qui permettent d'en déduire qu'un sous-groupe donné de $\text{Diff}_+^2(S^1)$ est topologiquement conjugué à un groupe de transformations de Möbius ou à un sous-groupe du groupe G de Thompson. Au delà de ces familles, et à cause du résultat principal de [28], il est très difficile de trouver d'autres exemples de sous-groupes de $\text{Diff}_+^2(S^1)$ "algébriquement intéressants".

Le cas des *difféomorphismes de la droite* est un peu plus compliqué. La raison technique essentielle est le fait évident que l'affirmation du lemme de Kopell n'est pas toujours valable pour des difféomorphismes commutants d'un intervalle ouvert. Cependant, à l'aide des résultats obtenus par J. Plante dans [33], et en utilisant les méthodes développées dans la première partie de ce travail, on aboutit à la classification suivante des sous-groupes résolubles de $\text{Diff}_+^2(\mathbb{R})$.

Théorème D. *Soit Γ un sous-groupe résoluble de $\text{Diff}_+^2(\mathbb{R})$. Si sa longueur de résolubilité est égale à $k \geq 1$, alors on a l'une des possibilités suivantes:*

- (i) Γ est topologiquement semiconjugué à un sous-groupe du groupe affine;
- (ii) Γ est un sous-groupe d'un produit (au plus dénombrable) de groupes de la classe $\mathcal{R}(k)$ dont au moins l'un des facteurs n'appartient pas à $\mathcal{R}(k-1)$;
- (iii) Γ appartient soit à $r(k)$, soit à $r(k+1)$.

Notons que si Γ est résoluble et semiconjugué à un groupe de transformations affines sans y être conjugué, alors le deuxième groupe dérivé Γ'' agit en fixant une famille dénombrable d'intervalles ouverts et disjoints dont le complémentaire de la réunion est nulle part dense. Les théorèmes A et B permettent alors de décrire la dynamique de Γ'' . D'autre part, le fait que Γ puisse appartenir à $r(k+1)$ étant d'ordre de résolubilité k est naturel, car contrairement au cas de l'intervalle, sur la droite on peut faire des *extensions centrales* de groupes non triviaux qui agissent avec des points fixes, tout en restant de classe C^2 .

Nous considérons dans le §5 le cas particulier de groupes résolubles d'homéomorphismes de l'intervalle, du cercle et de la droite, lorsqu'on suppose que l'ensemble des points fixes de chaque élément non trivial est discret. Les arguments dans ce contexte sont élémentaires et les résultats sont en quelque sorte analogues (mais un peu plus faibles) à ceux du cas analytique réel. Signalons

que ce dernier cas a été déjà étudié dans [27] par I. Nakai et dans [12] par É. Ghys, au moins en ce qui concerne l'intervalle et le cercle respectivement.

Théorème [Nakai]. *Tout sous-groupe résoluble de $\text{Diff}_+^\omega([0, 1])$ est métabélien. De plus, s'il n'a pas de point fixe sur $]0, 1[$, alors il est contenu dans un conjugué topologique du groupe affine.*

Théorème [Ghys]. *Tout sous-groupe résoluble de $\text{Diff}_+^\omega(S^1)$ est métabélien.*

Dans le §6.1 nous donnons l'analogue de ces deux résultats pour le cas des difféomorphismes analytiques réels de la droite, c'est-à-dire que nous démontrons que tout sous-groupe résoluble de $\text{Diff}_+^\omega(\mathbb{R})$ est métabélien.

Quelques commentaires. C'est en essayant de mettre au propre tous les résultats connus sur la classification des groupes résolubles d'homéomorphismes et de difféomorphismes des variétés unidimensionnelles que l'on s'est aperçu que cette classification n'était pas complète dans le cas des difféomorphismes de classe C^2 . Nous croyons que l'une des raisons pour cela est le fait que les “versions fortes” du lemme de Kopell restent mal connues dans toute leur généralité; de plus, les démonstrations classiques de ce lemme sont en général assez compliquées. Un problème analogue se produit autour du théorème de Hölder (assez souvent mal référencé) sur la classification des groupes qui agissent librement sur la droite et sur le cercle. Nous renvoyons le lecteur à [11] et à [18] pour des preuves complètes de ce théorème.

Les démonstrations de la plupart des résultats de ce travail utilisent comme outil essentiel les “versions fortes” du lemme de Kopell et du théorème de Hölder. Les techniques restent en général très élémentaires, à l'exception de certaines utilisées dans la classification des groupes résolubles de difféomorphismes de la droite (où nous devons faire appel à l'un des résultats de J. Plante signalés précédemment), et dans la classification des groupes résolubles de difféomorphismes analytiques réels (où l'on utilise la classification locale de I. Nakai).

Je voudrais remercier É. Ghys pour m'avoir encouragé à poursuivre cette étude, ainsi que pour sa disponibilité à discuter tous ces points qui restent un peu obscurs dans la littérature. Je remercie également Jean Yves Welschinger et Thierry Barbot pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et pour leurs corrections à l'article.

1 Des exemples

Première construction. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ un difféomorphisme de classe C^∞ sans autre point fixe que 0 et 1, et qui est topologiquement contractant en 0. Supposons de plus que f est le temps 1 du flot associé à un champ de vecteurs de

classe C^∞ de $[0, 1]$ qui est nul et infiniment plat en 0 et 1. On fixe $a \in]0, 1[$ et on considère un champ de vecteurs X sur $[f(a), a]$ dont les seules singularités sont $f(a)$ et a , et qui est infiniment plat en ces deux points. On étend la définition du champ X en posant $X(x) = 0$ pour $x \in [0, 1] \setminus [f(a), a]$. On obtient ainsi un champ de vecteurs de classe C^∞ sur $[0, 1]$ qui est nul et infiniment plat en 0 et 1.

Considérons le difféomorphisme g de classe C^∞ obtenu en intégrant le champ X (au temps 1). Soit Γ le groupe engendré par f et g . Évidemment, la restriction de Γ à l'intérieur de $[0, 1]$ n'est pas semiconjugée à un sous-groupe du groupe affine, et Γ n'a pas de point fixe sur $]0, 1[$. Nous affirmons cependant que Γ est résoluble d'ordre de résolubilité égal à 2. En effet, soit Γ^* le sous-groupe commutatif de Γ constitué des éléments qui fixent les points $f^n(a)$, $n \in \mathbb{Z}$, de manière que leurs restrictions à chaque intervalle $[f^{n+1}(a), f^n(a)]$ soient contenues dans le groupe engendré par la restriction de l'élément $f^n g f^{-n}$ à ce même intervalle. Le groupe Γ^* est évidemment distingué dans Γ , et il contient le groupe dérivé de Γ . De plus, le groupe quotient Γ / Γ^* s'identifie à $(\mathbb{Z}, +)$. À partir de ceci on finit aisément la preuve de l'affirmation.

Dans ce qui suit on appliquera l'idée de cette construction à plusieurs reprises pour obtenir des groupes résolubles $\bar{\Gamma}_k$ de difféomorphismes de classe C^∞ de l'intervalle $[2 - k, k - 1]$, $k \geq 2$, dont l'ordre de résolubilité est égal à k , et qui sont engendrés par des éléments $f_{1,k}, \dots, f_{k,k}$, dont chacun est le temps 1 du flot associé à un champ de vecteurs de classe C^∞ qui est nul et infiniment plat en $2 - k$ et $k - 1$. Nous raisonnons par récurrence. Pour $k = 2$ on pose $\bar{\Gamma}_2 = \Gamma$, où $f_{1,2} = g$, $f_{2,2} = f$. On suppose maintenant que l'on a déjà construit le groupe Γ_k , et soient $X_{i,k} : [2 - k, k - 1] \rightarrow \mathbb{R}$ les champs associés aux $f_{i,k}$. Considérons un champ $X_{k+1,k+1}$ défini sur $[1 - k, k]$, qui soit de classe C^∞ , négatif et sans singularité à l'intérieur, et infiniment plat en $1 - k$ et k . Quitte à reparamétriser ce champ, on peut supposer que le temps 1 du flot associé est un difféomorphisme $f_{k+1,k+1}$ de $[1 - k, k]$ qui vérifie $f_{k+1,k+1}(k - 1) = 2 - k$.

Pour $i = 1, \dots, k$, on étend le champ $X_{i,k}$ en un champ $X_{i,k+1}$ en posant $X_{i,k+1}(x) = 0$ pour tout $x \in [1 - k, k] \setminus [2 - k, k - 1]$. Les champs ainsi obtenus sont de classe C^∞ sur $[1 - k, k]$, nuls et infiniment plats en $1 - k$ et k . Soient $f_{i,k+1}$, $i = 1, \dots, k$, les temps 1 des flots associés. Nous affirmons que le groupe $\bar{\Gamma}_{k+1}$ engendré par les $f_{i,k+1}$, $i = 1, \dots, k + 1$, est résoluble d'ordre de résolubilité égal à $k + 1$. En effet, le stabilisateur dans Γ de $[2 - k, k - 1]$ est un sous-groupe distingué $\bar{\Gamma}^*$ qui s'identifie à une somme directe de groupes isomorphes à $\bar{\Gamma}_k$, et par l'hypothèse de récurrence ce dernier groupe est résoluble d'ordre de résolubilité égal à k . D'autre part, $\bar{\Gamma}_{k+1} / \bar{\Gamma}^*$ s'identifie à $(\mathbb{Z}, +)$, et le groupe dérivé de Γ est contenu dans $\bar{\Gamma}_*$. À partir de ceci on finit aisément la preuve de l'affirmation. Remarquons en passant que $\bar{\Gamma}_{k+1}$ n'a pas de point fixe à l'intérieur de $[1 - k, k]$.

Deuxième construction. On améliorera dans la suite le premier pas de la construction précédente pour obtenir une famille plus intéressante de sous-groupes résolubles de $\text{Diff}_+^\infty([0, 1])$ d'ordre de résolubilité égal à 3. Fixons d'abord une constante $0 < \varepsilon < 1/6$ et considérons deux difféomorphismes $\varphi_1 :]1/3, 2/3[\rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi_2 :]1/3, 2/3[\rightarrow]1/3, 2/3[$ de classe C^∞ tels que

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{3} \left[1 + \exp \left(\frac{1}{1-3t} \right) \right], \quad \varphi_1(t) = \frac{-1}{t-1/3} \quad \text{pour } t \in]1/3, 1/3 + \varepsilon]$$

et

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{3} \left[2 + \exp \left(\frac{1}{3t-2} \right) \right], \quad \varphi_1(t) = \frac{1}{2/3-t} \quad \text{pour } t \in [2/3 - \varepsilon, 2/3[.$$

Sur la droite on considère les champs de vecteurs $Y_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ et $Y_2 = x \frac{\partial}{\partial x}$ qui engendrent l'algèbre de Lie du groupe affine. Il est facile de vérifier que les champs $X_j = \varphi^*(Y_j)$, $j = 1, 2$, $Y = Y_1 \cdot Y_2$, s'étendent en des champs de classe C^∞ de $[1/3, 2/3]$ qui sont nuls et infiniment plats aux extrémités (voir par exemple [32]).

Fixons un difféomorphisme $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ , sans point fixe à l'intérieur, et qui vérifie $f(2/3) = 1/3$. On note $a = 2/3$ et on considère une suite (à être fixée) de nombres réels positifs $(t_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. On étend la définition des champs X_j par récurrence en posant

$$X_j(x) = t_n X_j(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x), \quad x \in [f^{n+1}(a), f^n(a)], \quad n \geq 1,$$

$$X_j(x) = t_n X_j(f(x))f'(x), \quad x \in [f^{n+1}(a), f^n(a)], \quad n \leq -1.$$

Il est facile de montrer que les X_j s'étendent en des champs de vecteurs de classe C^∞ sur $[0, 1]$ qui sont nuls et infiniment plats en 0 et 1 si $\prod_{i=1}^n t_i \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, si $\prod_{i=n}^0 t_i \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow -\infty$, et si ces convergences sont suffisamment rapides (par exemple, si la vitesse de convergence est plus forte que n'importe quelle exponentielle).

Considérons maintenant les difféomorphismes g et h de classe C^∞ obtenus en intégrant au temps 1 les champs X_1 et X_2 respectivement. Soit Γ le groupe engendré par f, g et h . Évidemment, la restriction de Γ à l'intérieur de $[0, 1]$ n'est pas semiconjugée à un sous-groupe du groupe affine, et Γ n'a pas de point fixe sur $]0, 1[$. Nous affirmons cependant que Γ est résoluble d'ordre de résolubilité égal à 3. En effet, soit Γ^* le sous-groupe métabélien non commutatif de Γ constitué des éléments qui fixent les points $f^n(a)$, $n \in \mathbb{Z}$, de manière que leurs restrictions à l'intérieur de chaque intervalle $[f^{n+1}(a), f^n(a)]$ soient contenues dans l'image du groupe affine par $f^{-n}\varphi^{-1}$. Si l'on désigne respectivement par

$g_{[f^{n+1}(a), f^n(a)]}^t$ et par $h_{[f^{n+1}(a), f^n(a)]}^t$, $t \in \mathbb{R}$, les flots associés aux restrictions de X_1 et X_2 à $[f^{n+1}(a), f^n(a)]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ g_{[f^{n+1}(a), f^n(a)]} \circ f &= g_{[f^n(a), f^{n-1}(a)]}^{t_n}, \\ f^{-1} \circ h_{[f^{n+1}(a), f^n(a)]} \circ f &= h_{[f^n(a), f^{n-1}(a)]}^{t_n}. \end{aligned}$$

Le groupe Γ^* est donc distingué dans Γ . De plus, le groupe quotient Γ/Γ^* s'identifie à $(\mathbb{Z}, +)$, et Γ^* contient le groupe dérivé de Γ . À partir de ceci on conclut aisément l'affirmation.

Comme précédemment, on peut faire des extensions successives de Γ par $(\mathbb{Z}, +)$ pour construire pour tout $k \geq 2$ des sous-groupes résolubles de $\text{Diff}_+^\infty([1-k, k])$ d'ordre de résolubilité $k+2$. Cependant, l'idée essentielle de la deuxième construction, celle qui consiste à "multiplier" les champs de vecteurs associés par des facteurs non nuls, ne peut pas être utilisée à plusieurs reprises (voir la Proposition 2.3 du §2.2).

Remarquons pour finir que le sous-groupe engendré par f et g du groupe ci-dessus est métabélien non commutatif, qu'il n'a pas de point fixe global à l'intérieur de l'intervalle $[0, 1]$, et qu'il n'est pas semiconjugué à un sous-groupe du groupe affine.

Pour mieux comprendre l'idée qui est derrière la deuxième construction, nous rappelons la "version forte" du lemme de N. Kopell (voir [40] pour des résultats reliés et des références précises). Étant donné un intervalle non vide $[a, b[$, on désigne par $\text{Diff}_+^{2,\Delta}([a, b[)$ le sous-ensemble de $\text{Diff}_+^2([a, b[)$ des éléments g tels que $g(x) \neq x$ pour tout $x \in]a, b[$.

Théorème [Szekeres]. *Pour tout $g \in \text{Diff}_+^{2,\Delta}([a, b[)$ il existe un unique champ de vecteurs associé $X_g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ qui n'a pas de singularité sur $]a, b[$ et qui vérifie:*

- (i) *le champ X_g est de classe C^1 sur $]a, b[$;*
- (ii) *si l'on note $g^\mathbb{R} = \{g^t : t \in \mathbb{R}\}$ le flot associé à ce champ, alors on a $g^1 = g$;*
- (iii) *le centralisateur de g dans $\text{Diff}_+^1([a, b[)$ est égal à $g^\mathbb{R}$.*

Étant donné un difféomorphisme g de classe C^2 , on notera $g_{[a,b]}$ la restriction de g à un intervalle $[a, b]$ tel que a et b soient les seuls points fixes de g sur $[a, b]$; notons que $g_{[a,b]}$ appartient à $\text{Diff}_+^{2,\Delta}([a, b])$. De la même manière, on notera $g_{[a,b]}^\mathbb{R} = \{g_{[a,b]}^t : t \in \mathbb{R}\}$ le flot respectif. Ici on accepte la possibilité $b = +\infty$, mais on exclut $a = -\infty$. L'unicité du champ de vecteurs associé par le théorème

de Szekeres entraîne une propriété remarquable: si $f : [a, b[\rightarrow [a', b'[$ est un difféomorphisme de classe C^1 et $g \in \text{Diff}_+^{2,\Delta}([a, b[)$, $h \in \text{Diff}_+^{2,\Delta}([a', b'[)$ et $s \in \mathbb{R}$ sont tels que $f^{-1} \circ h_{[a', b'[} \circ f = g_{[a, b[}^s$, alors $f^{-1} \circ h_{[a', b'[}^t \circ f = g_{[a, b[}^{st}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Si l'on change l'intervalle $[a, b[$ par $]a, b]$, alors on obtient un sous-ensemble $\text{Diff}_+^{2,\Delta}(]a, b])$ de $\text{Diff}_+^2(]a, b])$ tel que tout $g \in \text{Diff}_+^{2,\Delta}(]a, b])$ est le temps 1 d'un flot $g_{\mathbb{R}} = \{g_t : t \in \mathbb{R}\}$ associé à un unique champ de vecteurs Y_g qui est de classe C^1 sur $]a, b]$, et tel que $g_{\mathbb{R}}$ contient le centralisateur de g dans $\text{Diff}_+^2(]a, b])$. Ici on accepte $a = -\infty$, mais pas $b = +\infty$. Ainsi, si g appartient à $\text{Diff}_+^{2,\Delta}([a, b])$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors on a deux flots $g^{\mathbb{R}}$ et $g_{\mathbb{R}}$ tels que $g^1 = g_1 = g$. Signalons cependant que ces deux flots ne sont pas forcément les mêmes. S'ils coïncident alors ils coïncident aussi avec le centralisateur de g dans $\text{Diff}_+^2([a, b])$. Sinon, on a $g^{1/n} = g_{1/n}$ pour certain $n \in \mathbb{N}$, et le centralisateur de g dans $\text{Diff}_+^2([a, b])$ est le groupe infini cyclique engendré par $g^{1/n} = g_{1/n}$ (voir [40]).

Nous allons maintenant montrer que les convergences $\Pi_{i=1}^n t_i \rightarrow 0$ et $\Pi_{i=n}^0 t_i \rightarrow 0$ demandées dans la deuxième construction de ce paragraphe sont nécessaires, même pour obtenir des groupes de difféomorphismes de classe C^2 . La proposition ci-dessous peut être considérée comme une version généralisée du lemme de Kopell.

Proposition 1.1. *Soient $g : [0, 1[\rightarrow [0, g(1)[$ un difféomorphisme direct et de classe C^2 , et soient $a, b \in]0, 1[$ deux points fixes de g tels que g n'a pas de point fixe dans $]a, b[$. Soit $f : [0, b[\rightarrow [0, f(b)[$ un difféomorphisme direct et de classe C^2 sans autre point fixe sur $[0, b]$ que 0, et tel que $f(b) \leq a$. Supposons qu'il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $f^{-1} \circ g_{[f^n(a), f^n(b)[} \circ f = g_{[f^{n-1}(a), f^{n-1}(b)[}^{t_n}$. Alors la valeur de $\Pi_{i=1}^n t_i$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.*

Preuve. Si l'on note $a_n = f^n(a)$, $b_n = f^n(b)$, $T_n = \Pi_{i=1}^n t_i$, alors on vérifie aisément que pour tout $n \geq 1$ on a

$$f^{-n} \circ g_{[a_n, b_n[} \circ f^n = g_{[a, b[}^{T_n}.$$

Soit $\delta > 0$ une constante telle que $|(\log(f'))'(y)| \leq \delta$ pour tout $y \in [0, b]$. Si u, v appartiennent à $[a, b]$ alors

$$\begin{aligned} \left| \log \left(\frac{(f^n)'(v)}{(f^n)'(u)} \right) \right| &\leq \sum_{i=1}^n \left| \log(f')(f^{i-1}(v)) - \log(f')(f^{i-1}(u)) \right| \\ &\leq \delta \sum_{i=1}^n |f^{i-1}(v) - f^{i-1}(u)| \leq \delta. \end{aligned} \tag{1}$$

À partir de ceci et de l'égalité

$$g'(f^n(x)) = \frac{(f^n)'(g_{[a,b]}^{T_n}(x))}{(f^n)'(x)} \cdot (g_{[a,b]}^{T_n})'(x), \quad (2)$$

on obtient

$$\sup_{y \in]a,b[} (g_{[a,b]}^{T_n})'(y) \leq e^\delta \cdot \sup_{y \in [0, f^n(b)[} g'(y).$$

Puisque $\sup_{x \in [a,b[} |(g^T)'(x)|$ tend vers l'infini lorsque $|T|$ tend à l'infini, la suite $(|T_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Pour montrer qu'elle converge vers zéro, on montrera que toute sous-suite convergente de (T_n) converge vers zéro. Soit donc (n_k) une suite croissante d'entiers positifs telle que T_{n_k} converge vers une limite $T \in \mathbb{R}$. Notons que g fixe chaque intervalle $[a_n, b_n]$, et on a donc $g'(0) = 1$. En remplaçant n par n_k dans (2) et en prenant la limite lorsque k tend vers l'infini on obtient

$$(g_{[a,b]}^T)'(x) \leq e^\delta \quad \text{pour tout } x \in]a, b[.$$

Or, ceci reste vrai si l'on remplace g par g^j pour tout $j \in \mathbb{N}$ (car δ ne dépend que de f). On a donc

$$(g_{[a,b]}^{jT})'(x) \leq e^\delta \quad \text{pour tout } x \in]a, b[\quad \text{et tout } j \in \mathbb{N},$$

et ceci n'est possible que si $T = 0$.

Le lemme suivant peut aussi être pensé comme une généralisation du lemme de Kopell. Nous suivons l'idée de la preuve de ce dernier lemme qui se trouve dans [3]. Nous refaisons la démonstration complète avec l'objectif de ne remarquer que les hypothèses essentielles.

Lemme 1.2. *Soient γ_1 et γ_2 deux difféomorphismes de l'intervalle $[0, 1[$ sur leurs images qui fixent 0 et préservent l'orientation. On suppose γ_1 de classe C^2 et γ_2 de classe C^1 . Supposons que $\gamma_1(x) < x$ pour tout $x \in]0, 1[$, que $\gamma_2(x_0) = x_0$ pour certain $x_0 \in]0, 1[$, et que chaque $x_n = \gamma_1^n(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, est un point fixe de γ_2 . Supposons de plus que $\gamma_2(y) \geq z > y$ (resp. $\gamma_2(y) \leq z < y$) pour certains $y, z \in]x_1, x_0[$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma_2(\gamma_1^n(y)) < \gamma_1^n(z)$ (resp. $\gamma_2(\gamma_1^n(y)) > \gamma_1^n(z)$) pour tout $n \geq N$.*

Preuve. Notons que la suite (x_n) tend vers zéro lorsque $n \in \mathbb{N}$ tend vers l'infini. Soit δ une constante telle que pour tout $x \in [0, x_0]$ on ait $|(\log(\gamma_1'))'(x)| \leq \delta$. Pour tout $u, v \in [x_1, x_0]$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a (voir l'inégalité (1))

$$\left| \log \left(\frac{(\gamma_1^n)'(u)}{(\gamma_1^n)'(v)} \right) \right| \leq \delta. \quad (3)$$

Puisque γ_2 fixe chaque point x_n , $n \in \mathbb{N}$, on a nécessairement $\gamma_2'(0) = 1$. Supposons que l'affirmation du lemme ne soit pas satisfaite pour certains $y, z \in]x_1, x_0[$ tels que $\gamma_2(y) \geq z > y$ (l'autre cas est analogue). Soit κ une constante telle que

$$1 < \kappa < 1 + \frac{z - y}{e^\delta(y - x_1)}.$$

Fixons $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand de sorte que

$$\gamma_2(\gamma_1^N(y)) \geq \gamma_1^N(z) \quad \text{et} \quad \gamma_2'(w) \leq \kappa \quad \text{pour tout } w \in [x_{N+1}, x_N]. \quad (4)$$

Notons $y_N = \gamma_1^N(y)$, $z_N = \gamma_1^N(z)$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe u, v dans $[x_1, x_0]$ tels que

$$\frac{\gamma_2(y_N) - y_N}{y_N - x_{N+1}} \geq \frac{z_N - y_N}{y_N - x_{N+1}} = \frac{(\gamma_1^N)'(u) \cdot (z - y)}{(\gamma_1^N)'(v) \cdot (y - x_1)}.$$

D'après (3) on conclut

$$\frac{\gamma_2(y_N) - y_N}{y_N - x_{N+1}} \geq \frac{z - y}{e^\delta(y - x_1)} > \kappa - 1.$$

On obtient ainsi, pour certain $w \in [x_{N+1}, y_N]$,

$$\gamma_2'(w) = \frac{\gamma_2(y_N) - \gamma_2(x_{N+1})}{y_N - x_{N+1}} = \frac{\gamma_2(y_N) - x_{N+1}}{y_N - x_{N+1}} > \kappa,$$

ce qui contredit (4).

2 Groupes résolubles de difféomorphismes de l'intervalle

2.1 Le cas métabélien

Même si le lemme suivant est élémentaire, il sera fondamental dans la suite.

Lemme 2.1. *Le normalisateur dans $\text{Homéo}_+(\mathbb{R})$ d'un sous-groupe dense du groupe des translations $(\mathbb{R}, +)$ est contenu dans le groupe affine.*

Preuve. Par continuité, il suffit de démontrer que le normalisateur $\mathcal{N}$ du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans $\text{Homéo}_+(\mathbb{R})$ est le groupe affine. On notera T_u la translation $T_u(x) = x + u$.

Par hypothèse, pour chaque $g \in \mathcal{N}$ il existe un unique $A(g) \in \mathbb{R}$ tel que

$$g \circ T_1 = T_{A(g)} \circ g. \quad (5)$$

Nous affirmons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $g \circ T_{1/n} = T_{A(g)/n} \circ g$. En effet, par hypothèse, il existe $A(g, n)$ tel que $g \circ T_{1/n} = T_{A(g,n)} \circ g$. On a alors

$$T_{A(g)} = g \circ T_1 \circ g^{-1} = (g \circ T_{1/n} \circ g^{-1})^n = T_{A(g,n)}^n = T_{nA(g,n)},$$

et donc $A(g, n) = A(g)/n$, ce qui montre l'affirmation. À partir de ceci on obtient par continuité

$$g \circ T_y = T_{yA(g)} \circ g \quad (6)$$

pour tout $y > 0$. Un argument analogue en changeant T_1 par T_{-1} montre que (6) est valable pour tout $y < 0$ (notons que d'après (5) on obtient $g \circ T_{-1} = T_{-A(g)} \circ g$). On a alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$g(y) = g \circ T_y(0) = T_{yA(g)} \circ g(0) = A(g)y + g(0),$$

et g est donc une application affine.

La lemme suivant est une version améliorée du précédent en classe C^2 .

Lemme 2.2. *Si Γ est un sous-groupe abélien de $\text{Diff}_+^2([0, 1])$ sans point fixe à l'intérieur, alors son normalisateur dans $\text{Diff}_+^1([0, 1])$ est C^2 -conjugué à un sous-groupe du groupe affine.*

Preuve. Notons que l'hypothèse d'absence de point fixe à l'intérieur équivaut, d'après le théorème de Szekeres, au fait que Γ est contenu dans le groupe à un paramètre associé à chacun de ses éléments non triviaux. Fixons un tel élément $g \in \Gamma$.

Si $\{t \in \mathbb{R} : g^t \in \Gamma\}$ est dense dans $\mathbb{R}$, alors par conjugaison (de classe C^2) on transforme Γ en un sous-groupe dense de $(\mathbb{R}, +)$. L'image par cette conjugaison du normalisateur $\mathcal{N}$ de Γ dans $\text{Diff}_+^1([0, 1])$ est donc contenue dans le normalisateur dans $\text{Homéo}_+(\mathbb{R})$ de ce groupe dense de translations, et donc, d'après le Lemme 2.1, elle est contenue dans le groupe affine.

Supposons maintenant que $\{t \in \mathbb{R} : g^t \in \Gamma\}$ est infini cyclique. Nous affirmons que le normalisateur $\mathcal{N}$ de Γ dans $\text{Diff}_+^1([0, 1])$ est égal à $g^{\mathbb{R}}$. En effet, si $g^{1/k}$ est le générateur de $\{t \in \mathbb{R} : g^t \in \Gamma\}$, où k est un entier positif, alors pour tout $h \in \mathcal{N}$ il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $hg^{1/k}h^{-1} = (g^{1/k})^n$ et $h^{-1}g^{1/k}h = (g^{1/k})^m$. On a ainsi

$$(g^{1/k})^{mn} = ((g^{1/k})^m)^n = (h^{-1}g^{1/k}h)^n = h^{-1}(g^{1/k})^nh = g^{1/k},$$

d'où on obtient $m = n = 1$. Ceci entraîne que les éléments de $\mathcal{N}$ commutent avec $g^{1/k}$, et d'après le théorème de Szekeres, $\mathcal{N}$ est contenu dans $g^{\mathbb{R}}$. Puisque $g^{\mathbb{R}}$ normalise Γ , on obtient $\mathcal{N} = g^{\mathbb{R}}$.

Nous passons maintenant à la preuve du théorème A. D'après le théorème de Szekeres, si Γ est un sous-groupe commutatif de $\text{Diff}_+^2([0, 1])$, alors Γ est un sous-groupe d'un produit au plus dénombrable de groupes C^2 -conjugués à des groupes de translations. Fixons maintenant un sous-groupe métabélien et non commutatif Γ de $\text{Diff}_+^2([0, 1])$ sans point fixe à l'intérieur, et désignons par $\Gamma' = [\Gamma, \Gamma]$ son premier groupe dérivé. Il peut se présenter deux cas.

Premier cas: il existe $g \in \Gamma'$ tel que les orbites par g s'accumulent vers 0 et 1.

Dans ce cas le groupe abélien Γ' est contenu dans le flot $g^{\mathbb{R}} = \{g^t : t \in \mathbb{R}\}$ associé à g . Il agit donc sans point fixe à l'intérieur. Le lemme précédent entraîne que Γ est C^2 -conjugué à un sous-groupe du groupe affine. Notons que ce sous-groupe doit être non abélien, car on a supposé Γ non abélien.

Deuxième cas: tout $g \in \Gamma'$ possède des points fixes à l'intérieur de $[0, 1]$.

En utilisant le lemme de Kopell on démontre aisément qu'il existe des points de $]0, 1[$ fixés par Γ' . Soit $[a, b]$ une composante irréductible de Γ' . Notons que pour tout $h \in \Gamma$, l'intervalle $h([a, b])$ est aussi une composante irréductible de Γ' . En particulier, si $h([a, b]) \neq [a, b]$ alors $h([a, b]) \cap]a, b[= \emptyset$.

Si $a = 0$ ou $b = 1$ alors tout élément $f \in \Gamma$ fixe $[a, b]$, ce qui contredit l'hypothèse d'absence de point fixe à l'intérieur. Les composantes irréductibles fermées de Γ' sont donc contenues dans $]0, 1[$. Fixons une telle composante $[a, b] \subset]0, 1[$. Si $f \in \Gamma$ fixe $[a, b]$, alors le Lemme 2.2 montre que la restriction de f à $]a, b[$ est affine dans les coordonnées induites par le champ associé à la restriction d'un élément de Γ' à $[a, b]$ dont cette restriction est non triviale. Le cas des éléments qui ne fixent pas $[a, b]$ est plus intéressant.

Affirmation 1: si f est un élément quelconque de Γ qui ne fixe pas $[a, b]$ et u et v sont les points fixes de f à gauche et à droite de $[a, b]$ respectivement, alors l'intervalle $]u, v[$ est une composante irréductible de Γ (c'est-à-dire que $u = 0$ et $v = 1$).

Preuve. Supposons le contraire et soit $\tilde{f} \in \Gamma$ un élément qui ne fixe pas $]u, v[$. Quitte à remplacer f par f^{-1} , on peut supposer que $f(x) > x$ pour $x \in]u, v[$. On a alors $f(a) \geq b$. Pour $n \in \mathbb{N}$, l'élément $f^{-1} \tilde{f}^{-n} f \tilde{f}^n$ appartient à Γ' , et fixe donc les points a et u . Ceci implique que

$$f \tilde{f}^n(u) = \tilde{f}^n f(u) = \tilde{f}^n(u), \quad f \tilde{f}^n(a) = \tilde{f}^n f(a) \geq \tilde{f}^n(b), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

On a $\tilde{f} f \tilde{f}^{-1} = f \bar{g}$ pour certain $\bar{g} \in \Gamma'$. D'autre part, $f \bar{g}$ n'a pas de point fixe sur $]u, v[$ et fixe u et v . Donc, f n'a pas de point fixe sur $] \tilde{f}(u), \tilde{f}(v)[$ et fixe $\tilde{f}(u)$ et $\tilde{f}(v)$. Ceci montre que $] \tilde{f}(u), \tilde{f}(v)[\cap]u, v[= \emptyset$. On remplace $\tilde{f}$ par $\tilde{f}^{-1}$ si nécessaire de sorte que $\tilde{f}(u) < u$. Notons que la suite $(\tilde{f}^n(u))$ tend

vers un point fixe de $\bar{f}$. Si l'on pose $\gamma_1 = \bar{f}$, $\gamma_2 = f$, $x_0 = \bar{f}^{-1}(u)$, $y = a$, $z = b \leq f(a)$, alors on voit que les relations (7) contredisent le Lemme 1.2. Ceci finit la preuve de l'affirmation 1.

On désigne par Γ_1^* le sous-groupe distingué de Γ des éléments qui fixent les composantes irréductibles de Γ' . Comme l'affirmation 1 est valable pour n'importe quelle composante irréductible $[a, b]$ de Γ' , un élément de Γ est dans Γ_1^* si et seulement si cet élément fixe au moins une composante irréductible de Γ' . La restriction de Γ_1^* à toute composante irréductible de Γ' est affine dans les coordonnées induites. Remarquons que Γ_1^* peut admettre des composantes irréductibles contenues dans le complémentaire de la réunion des composantes irréductibles de Γ' . Cependant, la restriction de Γ_1^* à une telle composante est abélienne, et donc C^2 -conjuguée à un sous-groupe du groupe de translations. Ainsi, Γ_1^* est un sous-groupe d'un produit (au plus dénombrable) de groupes C^2 -conjugués à des groupes de transformations affines. De plus, le groupe quotient Γ/Γ_1^* agit de manière libre sur l'ensemble $\text{Fix}(\Gamma')$. On fixe une composante irréductible $[a, b]$ de Γ' et on définit une relation d'ordre $<$ sur Γ/Γ_1^* par $f_1\Gamma_1^* < f_2\Gamma_1^*$ lorsque $f_1([a, b])$ est à gauche de $f_2([a, b])$. Cette relation est totale, bi-invariante et archimédienne. L'argument de la preuve du théorème de Hölder (voir [11], page 376) montre alors qu'il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma_1^* \longrightarrow \Gamma \longrightarrow H \subset (\mathbb{R}, +) \longrightarrow 0.$$

Notons que l'image H est non triviale, car Γ ne fixe pas $[a, b]$.

Affirmation 2: le groupe H est infini cyclique.

Preuve. On pourrait donner une preuve simple de cette affirmation en utilisant le résultat de contrôle de la distorsion de la page 170 de [3]. Nous donnons un argument plus compliqué, mais qui reste valable en classe $C^{\log}$ (voir le §2.3). On désigne par $||[p, q]||$ la longueur de l'intervalle $[p, q]$.

Supposons que l'image H de Γ dans $(\mathbb{R}, +)$ ne soit pas cyclique. Alors cette image est dense. On fixe $f \in \Gamma$ tel que son image soit négative, c'est-à-dire tel que $f(b) \leq a$. On fixe une constante $\delta > 0$ telle que $|(\log(f'))'(x)| \leq \delta$ pour tout $x \in [0, b]$. Le fait que H est dense revient à dire qu'il existe une suite croissante d'entiers positifs (n_i) telle que pour chaque $i \in \mathbb{N}$ il existe $\bar{f}_i \in \Gamma$ qui pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifie

$$\begin{aligned} \bar{f}_i^{n_i}(f^n(a)) &\geq f^{n+1}(a), & \bar{f}_i^{n_i+1}(f^n(a)) &< f^{n+1}(a), \\ \bar{f}_i^{n_i}(f^n(b)) &\geq f^{n+1}(b), & \bar{f}_i^{n_i+1}(f^n(b)) &< f^{n+1}(b). \end{aligned}$$

On note $a_n = f^n(a)$, $b_n = f^n(b)$. En prenant la limite lorsque n tend vers l'infini dans les inégalités

$$\frac{\bar{f}_i^{n_i+1}(a_n)}{a_n} < \frac{f(a_n)}{a_n} \leq \frac{\bar{f}_i^{n_i}(a_n)}{a_n},$$

on obtient

$$(\bar{f}'_i(0))^{n_i+1} \leq f'(0) \leq (\bar{f}'_i(0))^{n_i}.$$

Les intervalles $f^n([\bar{f}_i(a), b])$, $n \geq 0$, sont deux à deux disjoints. En prenant la limite lorsque n tend vers l'infini dans l'inégalité

$$\begin{aligned} |\bar{f}_i([a, b])| &= |f^{-n} \bar{f}_i f^n([a, b])| \\ &\geq \frac{\inf_{u \in [\bar{f}_i(a), b]} (f^n)'(u)}{\sup_{v \in [\bar{f}_i(a), b]} (f^n)'(v)} \cdot \inf_{x \in [f^n(a), f^n(b)]} \bar{f}'_i(x) \cdot |[a, b]|, \end{aligned}$$

et en utilisant l'estimée (1), on obtient, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$|\bar{f}_i([a, b])| \geq e^{-\delta} \cdot (f'(0))^{1/n_i} \cdot |[a, b]| \geq C.$$

Néanmoins, ceci est absurde, car $|\bar{f}_i([a, b])|$ tend évidemment vers zéro lorsque i tend vers l'infini.

D'après ce qui précède, on conclut qu'il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma_1^* \longrightarrow \Gamma \longrightarrow (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow 0.$$

La preuve du théorème A est alors complétée par l'affirmation suivante.

Affirmation 3: le groupe Γ_1^* est en fait un sous-groupe d'un produit de groupes conjugués à des groupes de translations.

Preuve. Soit $g \in \Gamma'$ un élément dont la restriction à une composante irréductible $[a, b]$ de Γ' ne soit pas triviale. Nous devons montrer qu'il n'existe pas d'élément $h \in \Gamma$ qui fixe $[a, b]$ et tel que les restrictions de g et h à cet intervalle engendrent un groupe non commutatif. Supposons le contraire et soit $f \in \Gamma$ tel que son image engendre $(\mathbb{Z}, +)$. Quitte à changer f par f^{-1} , on suppose que $f(b) \leq a$. Puisque Γ est métabélien, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $t_n \in \mathbb{R}$ tel que la restriction de $f^{-n} h f^n$ à $[a, b]$ est égale à la restriction à $[a, b]$ de $h g^{t_n}$. On fixe $\delta > 0$ tel que $|(\log(f'))'(y)| \leq \delta$ pour tout $y \in [0, b]$. L'estimée (1) permet de montrer que pour tout $x \in]a, b[$ on a

$$\begin{aligned} (h g^{t_n})'(x) &= (f^{-n} \circ h \circ f^n)'(x) \leq \frac{(f^n)'(x)}{(f^n)'(f^{-n} h f^n(x))} \cdot \sup_{y \in]0, f^n(b)[} h'(y) \\ &\leq e^\delta \cdot \sup_{y \in]0, f^n(b)[} h'(y), \end{aligned} \tag{8}$$

et donc

$$\sup_{y \in]a, b[} (g^{t_n})'(x) \leq e^\delta \cdot \frac{\sup_{y \in]0, b[} h'(y)}{\inf_{y \in]a, b[} h'(y)}.$$

Cela entraîne évidemment que (t_n) est une suite bornée. Prenons une sous-suite (t_{n_k}) qui converge vers une limite $T \in \mathbb{R}$. Puisque h fixe chaque intervalle $[a_n, b_n]$, on a $h'(0) = 1$. En intégrant (8) on obtient, pour tout k suffisamment grand et tout $x \in]a, b[$,

$$(x - a)/2e^\delta \leq hg^{t_{n_k}}(x) - a \leq 2e^\delta(x - a),$$

et en passant à la limite lorsque k tend vers l'infini on conclut que $(x - a)/2e^\delta \leq hg^T(x) - a \leq 2e^\delta(x - a)$. Or, cet argument reste valable lorsqu'on remplace h par h^j pour tout $j \in \mathbb{N}$ (car la constante δ ne dépend que de f). On obtient ainsi $(x - a)/2e^\delta \leq (hg^T)^j(x) - a \leq 2e^\delta(x - a)$ pour tout $x \in]a, b[$ et tout $j \in \mathbb{N}$, ce qui est évidemment impossible. Ceci finit la preuve de l'affirmation 3, et donc celle du théorème A.

2.2 Le cas général

La preuve du théorème B sera faite par récurrence sur l'ordre de résolubilité. Étant donné un sous-groupe résoluble Γ de $\text{Diff}_+^2([0, 1[)$ sans point fixe à l'intérieur, on note

$$\{id\} = \Gamma_0 \triangleleft \Gamma_1 \triangleleft \cdots \triangleleft \Gamma_{k-1} \triangleleft \Gamma_k = \Gamma$$

la *série dérivée* de Γ , i.e. $\Gamma_{i-1} = \Gamma'_i$ et $\Gamma_1 \neq \{id\}$. On démontrera plus précisément que pour $k \geq 2$, le groupe $\Gamma = \Gamma_k$ admet une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma_{k-1}^* \longrightarrow \Gamma \longrightarrow (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow 0,$$

où Γ_{k-1}^* désigne le sous-groupe distingué de Γ des éléments qui fixent les composantes irréductibles de Γ_{k-1} . On montrera aussi que Γ_{k-1}^* est d'ordre de résolubilité égal à $k-1$, et le morphisme sur $(\mathbb{Z}, +)$ associé sera induit par le décalage des composantes irréductibles de Γ_{k-1} . Tout ceci impliquera clairement le théorème B tel qu'il est énoncé.

Remarquons d'abord que l'hypothèse de récurrence pour $k = 2$ est fournie par le théorème A pour des groupes qui ne sont pas conjugués à des groupes non abéliens de transformations affines. Dans le cas contraire, l'argument qui permet d'obtenir la validité de l'hypothèse de récurrence pour $k = 3$ est analogue à l'argument général de passage de k à $k + 1$ ci-dessous. Supposons donc que toutes les affirmations plus haut sont vraies pour des groupes dont l'ordre de résolubilité est inférieur ou égal à k , et fixons un sous-groupe $\Gamma = \Gamma_{k+1}$ de $\text{Diff}_+^2([0, 1[)$ d'ordre de résolubilité $k + 1$ et sans point fixe à l'intérieur.

Affirmation 1: si $[u_2, v_2[$ est une composante irréductible de Γ_2 , alors la restriction à $[u_2, v_2[$ de son stabilisateur dans Γ est métabélienne.

Preuve. On désigne par $\Gamma_{[u_2, v_2[}^*$ le stabilisateur de $[u_2, v_2[$ dans Γ . Si la restriction de Γ_2 à $[u_2, v_2[$ est C^2 -conjuguée à un sous-groupe (non trivial) du groupe affine, alors Γ_2 étant distingué dans Γ , la restriction de $\Gamma_{[u_2, v_2[}^*$ à $[u_2, v_2[$ est C^2 -conjuguée à un sous-groupe du groupe affine (voir le Lemme 2.2). Considérons maintenant le cas où la restriction de Γ_2 à $[u_2, v_2[$ n'est pas conjuguée à un sous-groupe du groupe affine. Dans ce cas, d'après le théorème A, cette restriction est une extension par $(\mathbb{Z}, +)$ d'un sous-groupe d'un produit de groupes C^2 -conjugués à des groupes de translations. Remarquons que la restriction de Γ_1 à $[u_2, v_2[$ est distinguée dans la restriction de $\Gamma_{[u_2, v_2[}^*$ à cet intervalle.

Supposons d'abord l'existence d'une composante irréductible $[u_1, v_1[$ de Γ_1 contenue dans $[u_2, v_2[$ et d'un élément $h \in \Gamma$ tels que si $g \in \Gamma_1$ est un élément dont la restriction à $[u_1, v_1[$ n'est pas triviale, alors les restrictions de g et h à $]u_1, v_1[$ engendrent un groupe C^2 -conjugué à un sous-groupe non commutatif du groupe affine. Soit j le plus petit indice tel que cela a lieu pour un certain élément $h \in \Gamma_{j+1}$ (notons que $j \geq 1$). Fixons $f_2 \in \Gamma_2$ tel que $f_2(v_1) \leq u_1$ et tel que l'image de la restriction de f_2 à $[u_2, v_2[$ engendre $(\mathbb{Z}, +)$ dans la suite exacte correspondante. Le commutateur $[h^{-1}, f_2^{-n}]$ appartient à Γ_j , et de plus il fixe $[u_1, v_1]$. Par la définition de j , la restriction de ce commutateur à $[u_1, v_1[$ appartient au flot associé à la restriction de g à $[u_1, v_1[$. Cela signifie qu'il existe une suite de nombres réels (t_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $[h^{-1}, f_2^{-n}] = g^{t_n}$, et donc $f_2^{-n} h f_2^n = h g^{t_n}$. Si l'on applique les arguments de la preuve de l'affirmation 3 du §2.1 en remplaçant $[a, b]$ par $[u_1, v_1]$, alors on aboutit à une contradiction.

Supposons maintenant que pour toute composante irréductible $[u_1, v_1[$ de Γ_1 contenue dans $[u_2, v_2[$ et tout $h \in \Gamma$ fixant $[u_1, v_1]$, la restriction de h à $]u_1, v_1[$ est une translation dans les coordonnées induites par Γ_1 . Si l'action du quotient $\Gamma_{[u_2, v_2[}^* / \Gamma_1^*|_{[u_2, v_2[}$ sur l'ensemble de ces composantes $[u_1, v_1[$ est libre, alors l'argument de la preuve du théorème de Hölder implique que ce quotient est abélien. Puisque par hypothèse la restriction $\Gamma_1^*|_{[u_2, v_2[}$ est abélienne, cela implique que $\Gamma_{[u_2, v_2[}^*$ est métabelien. Donc, si $\Gamma_{[u_2, v_2[}^*$ n'est pas métabelien alors il existe des éléments dans $\Gamma_{[u_2, v_2[}^*$ qui ne fixent pas toutes les composantes irréductibles de Γ_1 contenues dans $[u_2, v_2[$ mais qui possèdent des points fixes sur $]u_2, v_2[$. Fixons le plus petit indice j tel que ceci soit vrai pour un élément $h \in \Gamma_{j+1}$. Comme Γ_1 est distingué dans Γ on a $h([u_1, v_1] \cap]u_1, v_1[) = \emptyset$ ou $h([u_1, v_1]) =]u_1, v_1[$ pour toute composante irréductible $]u_1, v_1[$ de Γ_1 . Cela permet de trouver un point fixe $p \in]u_2, v_2[$ de h qui est un point d'accumulation de composantes irréductibles de Γ_1 non fixées par h . Fixons une composante irréductible $]u_1, v_1[$ de Γ_1 entre p et le point fixe de h à droite de p , de sorte que l'une des suites $(h^n(u_1))$ ou $(h^{-n}(u_1))$ converge vers p . Le commutateur $[h^{-1}, f_2^{-n}]$ appartient à Γ_j , et donc il fixe $[u_1, v_1]$ (par la définition de j). En particulier, les intervalles $h([f_2^n(u_1), f_2^n(v_1)])$ et $]f_2^n(u_1), f_2^n(v_1)[$ sont disjoints. De plus, on vérifie aisément que $h(f_2^n(p)) = f_2^n(p)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Cepen-

nant, ces relations contredisent le Lemme 1.2 appliqué à $\gamma_1 = f_2$ et $\gamma_2 = h$ (avec $x_0 = f_2^{-1}(p)$, $y = u_1$ et $z = v_1$). Ceci finit la démonstration de l'affirmation.

Affirmation 2: l'ordre de résolubilité du groupe Γ_k^* est égal à k ; en particulier, ce groupe n'est pas égal à Γ .

Preuve. La restriction de Γ_k^* à chacune de ses composantes irréductibles contenues dans le complémentaire de la réunion des composantes irréductibles de Γ_k est évidemment abélienne (et donc C^2 -conjuguée à une action par des translations). Il faut donc se restreindre aux composantes irréductibles de Γ_k . Notons que le groupe Γ_k^* agit par automorphismes de chaque image $(\mathbb{Z}, +)$ de la restriction de Γ_k à ses composantes irréductibles (car Γ_k est distingué dans Γ). Cela entraîne que pour tout $f, g \in \Gamma_k^*$, le commutateur $[f, g]$ fixe ces composantes. Par récurrence on montre que chaque élément du i -ème groupe dérivé de Γ_k^* fixe chaque composante irréductible de Γ_{k-i} . Pour $i = k - 2$ on obtient que les éléments du $(k - 2)$ -ème groupe dérivé de Γ_k^* fixent chaque composante irréductible de Γ_2 . En dehors de ces composantes, les éléments du $(k - 2)$ -ème groupe dérivé de Γ_k^* sont donc triviaux. D'autre part, l'affirmation 1 entraîne qu'à l'intérieur de ces composantes, les éléments du k -ème groupe dérivé de Γ_k^* sont triviaux. Ceci entraîne que l'ordre de résolubilité de Γ_k^* est inférieur ou égal à k . Finalement, cet ordre doit être égal à k , car Γ_k^* contient Γ_k .

D'après l'affirmation 2, il existe des éléments de Γ qui ne fixent pas toutes les composantes irréductibles de Γ_k . On fixe l'une de telles composantes $[u_k, v_k]$, et pour la cohérence de la notation on désigne par $[u_{k+1}, v_{k+1}[= [0, 1[$ la composante irréductible de $\Gamma = \Gamma_{k+1}$.

Affirmation 3: si $f \in \Gamma$ ne fixe pas $[u_k, v_k]$, alors u_{k+1} (resp. v_{k+1}) est le point fixe de f à gauche (resp. à droite) de $[u_k, v_k]$.

Preuve. La démonstration est analogue à celle de l'affirmation 1 du §2.1. Il suffit de remplacer dans ce démonstration $[a, b]$ et Γ' par $[u_k, v_k]$ et Γ_k respectivement.

Affirmation 4: si $f \in \Gamma_{k+1}$ fixe une composante irréductible quelconque de Γ_k , alors f appartient au groupe Γ_k^* .

Preuve. C'est clair à partir du fait que l'affirmation précédente est valable pour n'importe quelle composante irréductible de Γ_k .

À partir des affirmations précédentes, on voit que l'action du groupe Γ / Γ_k^* sur $\text{Fix}(\Gamma_k)$ est libre. Un argument similaire à celui du §2.1 (qui utilise l'idée de la preuve du théorème de Hölder) montre qu'il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma_k^* \longrightarrow \Gamma \longrightarrow H \subset (\mathbb{R}, +) \longrightarrow 0,$$

Notons que l'image H de Γ dans $(\mathbb{R}, +)$ est non triviale, à cause de l'affirmation 2. L'argument de la preuve de l'affirmation 2 du §2.1 montre que cette image est infinie cyclique, et on a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma_k^* \longrightarrow \Gamma \longrightarrow (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow 0.$$

L'hypothèse de récurrence est donc vérifiée à l'ordre $k + 1$.

Notons finalement que, d'après l'affirmation 2, l'hypothèse de récurrence est applicable à la restriction de Γ_k^* à chacune de ses composantes irréductibles. Donc, Γ_k^* est un sous-groupe d'un produit (au plus dénombrable) de groupes de $\mathcal{R}(k)$. Au moins l'un des facteurs de ce produit n'appartient pas à $\mathcal{R}(k - 1)$, car en cas contraire l'ordre de résolubilité de Γ_k^* serait inférieur à k . Ceci finit la preuve du théorème B.

Nous avons à peu près explicité toutes les possibilités de construction de sous-groupes résolubles de $\text{Diff}_+^2([0, 1])$. Cependant, le lecteur aura noté la différence essentielle entre les deux constructions du §1. En effet, pour obtenir des groupes d'ordre de résolubilité aussi grande que l'on veut, on ne peut pas appliquer à plusieurs reprises l'idée centrale de la deuxième construction (celle qui consiste à "multiplier" les champs de vecteurs par des facteurs non nuls). Ceci est une conséquence plus au moins claire du résultat ci-dessous, lequel conclut notre description des sous-groupes résolubles de $\text{Diff}_+^2([0, 1])$.

On fixe un sous-groupe résoluble de $\text{Diff}_+^2([0, 1])$ d'ordre de résolubilité $k \geq 3$ et sans point fixe à l'intérieur. On considère une composante irréductible $[u_2, v_2[$ de Γ_2 , et pour $i \geq 3$ on définit par récurrence $[u_i, v_i[$ comme étant la composante irréductible de Γ_i qui contient à $[u_{i-1}, v_{i-1}[$. Désignons par f_i un élément quelconque de Γ_i tel que dans la série exacte associée à la restriction de Γ_i à $[u_i, v_i[$, l'image de la restriction respective de f_i engendre $(\mathbb{Z}, +)$. Quitte à changer f_i par f_i^{-1} si nécessaire, on suppose que cette image est négative, c'est-à-dire que l'intervalle $f_i([u_{i-1}, v_{i-1}[)$ est à gauche de $[u_{i-1}, v_{i-1}[$.

Proposition 2.3. *Avec les notations précédentes, pour tout $i > j \geq 3$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $f_i^{-n} f_j f_i^n$ fixe $[u_2, v_2[$ pour tout $n \geq N$.*

Preuve. Le fait que $f_i^{-n} f_j f_i^n$ fixe $[u_2, v_2[$ est équivalent au fait que f_j fixe $[f_i^n(u_2), f_i^n(v_2)]$. Dans le cas où ceci a lieu, l'action de f_j sur cet intervalle est affine dans les coordonnées associées. Notons que $[f_i^n(u_2), f_i^n(v_2)]$ est une composante irréductible de Γ_2 contenue dans $[f_i^n(u_j), f_i^n(v_j)]$, qui à son tour est une composante irréductible de Γ_j (voir la figure 1).

Supposons qu'il existe une suite croissante (n_k) d'entiers positifs telle que f_j ne fixe pas $[f_i^{n_k}(u_2), f_i^{n_k}(v_2)]$. Chaque intervalle $[f_j f_i^{n_k}(u_2), f_j f_i^{n_k}(v_2)]$ étant une composante irréductible de Γ_2 et ce dernier groupe étant distingué dans Γ_i , on

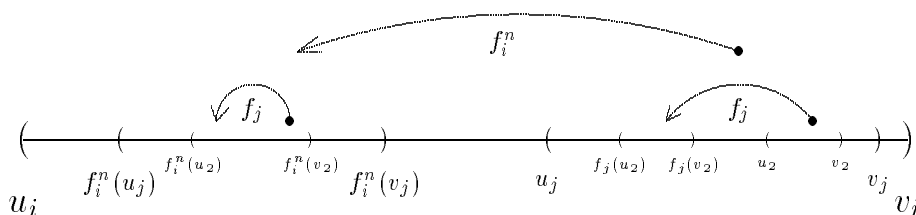


Figure 1

a soit $f_j f_i^{n_k}(v_2) \leq f_i^{n_k}(u_2)$, soit $f_j f_i^{n_k}(u_2) \geq f_i^{n_k}(v_2)$. Une application simple du Lemme 1.2 avec $\gamma_1 = f_i$ et $\gamma_2 = f_j$ permet d'obtenir alors une contradiction. Ceci achève la preuve de la proposition.

Soit $[u_2, v_2]$ une composante irréductible de Γ_2 sur laquelle la restriction de Γ_2 n'est pas conjuguée à un sous-groupe du groupe affine. Si l'on fixe une composante irréductible $[u_1, v_1]$ de Γ_1 contenue dans $]u_2, v_2[$, alors on voit aisément que l'énoncé de la proposition reste valable en remplaçant $[u_2, v_2[$ par $[u_1, v_1[$ et en considérant des indices $i > j \geq 2$.

2.3 En classe $C^{\log}$

On dit qu'un difféomorphisme f de classe C^1 de l'intervalle $[0, 1[$ est de classe $C^{\log}$ si la variation du logarithme de sa dérivée est finie sur chaque sous-intervalle compact $[a, b]$ de $[0, 1[$. On note $\text{Var}(\log(f'); [a, b])$ cette variation, c'est-à-dire

$$\text{Var}(\log(f'); [a, b]) = \sup_{a=a_0 < a_1 < \dots < a_n=b} \sum_{i=1}^n |\log(f')(a_i) - \log(f')(a_{i-1})|.$$

On désigne par $\text{Diff}_+^{\log}([0, 1[)$ le groupe des difféomorphismes de classe $C^{\log}$ de l'intervalle $[0, 1[$.

Nous nous proposons dans ce paragraphe de montrer que les théorèmes A et B restent valables lorsque l'on considère des sous-groupes résolubles de $\text{Diff}_+^{\log}([0, 1[)$ au lieu de $\text{Diff}_+^2([0, 1[)$, tout au moins si l'on se contente de conjugaisons topologiques. Pour cela, remarquons d'abord que l'estimée (1) reste valable en classe $C^{\log}$, la constante δ n'étant rien d'autre que $\text{Var}(\log(f'); [0, b])$. Le point délicat est celui relié aux différentes versions du lemme de Kopell et du théorème de Szekeres.

Proposition 2.4. *Soit g un difféomorphisme direct et de classe $C^{\log}$ de $[0, 1[$. Si g ne possède pas de point fixe à l'intérieur, alors son centralisateur dans*

$\text{Diff}_+^1([0, 1])$ est soit cyclique infini, soit topologiquement conjugué à un sous-groupe dense du groupe des translations. De plus, son normalisateur dans $\text{Diff}_+^1([0, 1])$ est topologiquement conjugué à un sous-groupe du groupe affine.

Preuve. Le Lemme 1.2 reste valable lorsqu'on suppose γ_1 de classe $C^{\log}$. Ceci entraîne que le centralisateur dans $\text{Diff}_+^1([0, 1])$ d'un difféomorphisme direct et de classe $C^{\log}$ de $[0, 1]$ sans point fixe à l'intérieur agit librement sur $]0, 1[$. D'après le théorème de Hölder, ce centralisateur est semiconjugué à un groupe de translations. On doit donc démontrer que si le groupe de translations associé est dense, alors la semiconjugaison est en fait une conjugaison topologique. Or, ceci est facile à obtenir en utilisant les arguments de la preuve de l'affirmation 2 du §2.1. Finalement, l'affirmation concernant le normalisateur est obtenue aisément en utilisant les arguments de la preuve du Lemme 2.2.

La proposition précédente est un analogue du théorème de Szekeres en classe $C^{\log}$. Elle permet de réutiliser tous les arguments des preuves des théorèmes A et B basés sur les "coordonnées associées" aux difféomorphismes qui fixent un intervalle et n'ont pas des points fixes à l'intérieur. Ainsi, ces théorèmes restent valables en classe $C^{\log}$ si l'on ne considère que des conjugaisons topologiques. Les théorèmes C et D qui seront démontrés dans les paragraphes suivants s'étendent aussi au cadre des difféomorphismes de classe $C^{\log}$. Signalons finalement que les théorèmes de Plante et Thurston énoncés dans l'introduction restent valables eux aussi en classe $C^{\log}$.

3 Le cas du cercle

Pour la preuve du théorème C, rappelons d'abord que pour tout sous-groupe de $\text{Homéo}_+(S^1)$ on a l'une des trois possibilités suivantes (voir [11], page 351):

- (i) il y a (au moins) une orbite finie;
- (ii) toutes les orbites sont denses;
- (iii) il existe un ensemble de Cantor invariant et minimal (i.e. un *minimal exceptionnel*).

Si Γ est résoluble alors il est moyennable, et donc il préserve une mesure de probabilité μ sur S^1 (voir le §6.2). Si Γ est un sous-groupe moyennable et de type fini de $\text{Diff}_+^2(S^1)$, alors il ne peut pas y avoir un minimal exceptionnel. En effet, dans le cas contraire le support de μ serait le Cantor minimal. Or, le théorème de Sacksteder stipule qu'il existe des éléments dans Γ avec des points fixes hyperboliques sur cet ensemble de Cantor (voir [3] ou [39]), et ceci contredit évidemment le fait que μ est invariante (cet argument est classique et apparaît

déjà dans [35] ; en classe $C^{\log}$, on peut utiliser un résultat du premier appendice de [29] et qui est obtenu aisément à partir des résultats de [24] et du théorème de Denjoy, à savoir tout sous-groupe de type fini de $\text{Diff}_+^{\log}(S^1)$ qui admet un minimal exceptionnel contient un sous-groupe libre à deux générateurs, et donc n'est pas moyennable).

Si les orbites par Γ sont denses alors le support de μ est total, et par un reparamétrage on constate que Γ est topologiquement conjugué à un groupe de rotations.

S'il y a une orbite finie, alors les éléments de Γ préservent l'ordre cyclique de cette orbite, et donc le groupe dérivé Γ' fixe chacun de ses points. Sur la fermeture de chaque composante connexe du complémentaire de cette orbite agit (par difféomorphismes de classe C^2) le groupe résoluble Γ' de longueur de résolubilité égal à k . La situation de l'affirmation (ii) de l'énoncé du théorème C a donc lieu (notons que l'intérieur de chaque composante irréductible de Γ' est contenu dans une composante connexe du complémentaire de l'orbite finie).

Il reste le cas où Γ n'est pas de type fini et il existe un Cantor minimal (le théorème de Sacksteder n'est plus valable dans ce contexte). Or, dans cette situation, le support de la mesure invariante μ est l'ensemble de Cantor minimal, et ceci permet de semiconjuguer Γ à un groupe de rotations. Le groupe dérivé Γ' fixe alors chaque composante connexe du complémentaire du Cantor, et ce groupe étant encore résoluble, la situation est clarifiée par les théorèmes A et B. Signalons finalement qu'un exemple de la situation décrite ci-dessus peut être obtenu à partir de [20].

4 Le cas de la droite

Dans ce paragraphe nous donnons la preuve du théorème D. Fixons un sous-groupe résoluble et non commutatif Γ de $\text{Diff}_+^2(\mathbb{R})$, et soit

$$\{id\} = \Gamma_0 \triangleleft \Gamma_1 \triangleleft \cdots \triangleleft \Gamma_{k-1} \triangleleft \Gamma_k = \Gamma,$$

la série dérivée de Γ , i.e. $\Gamma_{i-1} = \Gamma'_i$ et $\Gamma_1 \neq \{id\}$. Si Γ possède des points fixes globaux, alors les théorèmes A et B entraînent que Γ est un sous-groupe d'un produit (au plus dénombrable) de groupes de la classe $\mathcal{R}(k)$ dont au moins l'un des facteurs n'appartient pas à $\mathcal{R}(k-1)$. Supposons maintenant que Γ n'a pas de point fixe. Rappelons qu'une mesure de Radon ν définie sur (les boréliens de) la droite est *quasi-invariante* si pour tout $g \in \Gamma$ il existe un facteur $c(g) \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout borélien X de la droite on a $\nu(g^{-1}(X)) = c(g)\nu(X)$. On commence par le lemme suivant, qui généralise des résultats qui se trouvent dans [33].

Lemme 4.1. *Il existe une mesure de Radon non triviale sur la droite qui est quasi-invariante par l'action de Γ .*

Pour la preuve du lemme, on considère le plus petit indice j pour lequel Γ_j possède des points fixes et Γ_{j+1} n'en possède pas. Il peut se présenter deux cas.

Premier cas: l'indice j est nul.

Dans ce cas, le groupe Γ_1 étant commutatif, à l'aide du lemme de Kopell on démontre aisément qu'il existe des éléments dans Γ_1 sans points fixe. Pour montrer l'existence d'une mesure de Radon non triviale ν sur la droite qui soit quasi-invariante par Γ il suffit de recopier la démonstration du théorème 4.4 de [33] en observant que, par hypothèse, Γ_1 préserve une mesure de Radon et la fonction *nombre de translation* par rapport à cette mesure est non nulle sur Γ_1 (voir la Proposition 3.1 de [33]).

Deuxième cas: l'indice j est non nul.

Notons que, par l'hypothèse d'absence de point fixe à l'intérieur, cet indice j est plus petit que k . On fixe une composante irréductible quelconque $[u_j, v_j]$ de Γ_j .

Affirmation 1: si $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ sont deux éléments de Γ_{j+1} qui possèdent des points fixes et qui ne fixent pas l'intervalle $[u_j, v_j]$, alors les points fixes de ces deux éléments à gauche et à droite de $[u_j, v_j]$ sont les mêmes.

Preuve. Soient u et v les points fixes de $\tilde{f}_1$ à gauche et à droite de $[u_j, v_j]$ respectivement. Supposons que $\tilde{f}_2$ ne fixe pas $[u, v]$. Pour chaque $n \in \mathbb{Z}$ il existe un élément $\tilde{g} \in \Gamma_j$ tel que $\tilde{f}_2^n \tilde{f}_1 \tilde{f}_2^{-n} = \tilde{f}_1 \tilde{g}$. Puisque $\tilde{f}_1 \tilde{g}$ n'a pas de point fixe sur $]u, v[$ et fixe u et v , $\tilde{f}_1$ fixe l'intervalle $\tilde{f}_2^n([u, v])$ et n'a pas de point fixe à l'intérieur. On en déduit que les $\tilde{f}_2^n([u, v])$, $n \in \mathbb{Z}$, sont deux à deux disjoints. Quitte à changer $\tilde{f}_2$ par son inverse si nécessaire, on peut supposer que $\tilde{f}_2^n(u_j)$ tend vers un point fixe de $\tilde{f}_2$ lorsque n tend vers $+\infty$. On obtient alors une contradiction en appliquant les arguments de la preuve de l'affirmation 1 du §2.1.

On définit l'intervalle $[u_{j+1}^*, v_{j+1}^*]$ comme étant égal à $[u_j, v_j]$ si tout élément de Γ_{j+1} qui ne fixe pas $[u_j, v_j]$ n'a pas de point fixe. Dans le cas contraire, on considère $f_{j+1} \in \Gamma_{j+1}$ avec des points fixes et qui ne fixe pas $[u_j, v_j]$, et on définit u_{j+1}^* et v_{j+1}^* comme étant les points fixes de f_{j+1} à gauche et à droite de $[u_j, v_j]$ respectivement. On note finalement Γ_{j+1}^* le stabilisateur de $[u_{j+1}^*, v_{j+1}^*]$ dans Γ_{j+1} ; c'est un sous-groupe distingué de Γ_{j+1} .

Affirmation 2: le groupe Γ_{j+1} fixe une mesure de Radon non triviale de la droite et n'a pas de point fixe.

Preuve. L'affirmation 1 étant valable pour toute composante irréductible de Γ_j , l'action du groupe quotient $\Gamma_{j+1}/\Gamma_{j+1}^*$ sur l'ensemble $\text{Fix}(\Gamma_{j+1}^*)$ est libre. En appliquant le théorème de Hölder à cette action on constate aisément qu'il existe une mesure de Radon non triviale de la droite invariante par Γ_{j+1} dont le support est contenu dans $\text{Fix}(\Gamma_{j+1}^*)$. Le fait que Γ_{j+1} n'a pas de point fixe découle de la définition de l'indice j .

La fonction *nombre de translation* par rapport à la mesure de Radon invariante associée à Γ_{j+1} est non nulle. Ainsi, pour finir la preuve du lemme dans le deuxième cas, on peut appliquer l'argument donné dans le premier cas (i.e. recopier la fin de la preuve du théorème 4.4 de [33]).

Pour démontrer le théorème D, fixons une mesure de Radon non triviale ν qui soit quasi-invariante par Γ . Supposons d'abord que ν est sans atome. On considère la relation d'équivalence $\sim$ qui identifie deux points s'ils appartiennent à la fermeture d'une même composante connexe du complémentaire de la fermeture du support de ν . L'espace quotient $\mathbb{R}/\sim$ est topologiquement une droite sur laquelle le groupe Γ agit de manière naturelle par homéomorphismes directs. La mesure ν étant sans atome, elle induit une mesure de Radon $\bar{\nu}$ sur $\mathbb{R}/\sim$ de support total, sans atome et quasi-invariante par l'action de Γ . On montre aisément que cette dernière action est topologiquement conjuguée à celle d'un groupe de transformations affines (voir le corollaire 4.6 de [33]). L'action originale de Γ sur la droite est donc semiconjugée à une action par des transformations affines.

Il nous reste le cas où ν possède des atomes. Remarquons d'abord que le groupe dérivé Γ' agit en préservant ν . Cela entraîne que le deuxième groupe dérivé Γ'' fixe chaque atome de ν . Cet argument montre en particulier que l'indice j considéré dans la preuve du Lemme 4.1 est égal à $k - 2$ ou à $k - 1$. Nous verrons ci-dessus qu'il est égal à $k - 1$.

On note Γ_ν le sous-groupe de Γ des éléments qui fixent ν , et on désigne par Γ'_ν son groupe dérivé. Les éléments de Γ'_ν fixent les atomes de ν . On désigne par Γ_ν^* le sous-groupe distingué de Γ des éléments qui fixent les composantes irréductibles de Γ'_ν . Les arguments des preuves des affirmations 1 et 2 du Lemme 4.1 montrent que Γ_ν/Γ_ν^* est isomorphe à un sous-groupe non trivial H de $(\mathbb{R}, +)$. Ce sous-groupe H ne peut pas être dense. En effet, dans le cas contraire Γ_ν^* serait semiconjugé à un sous-groupe dense du groupe des translations. Ceci impliquerait que des atomes de ν de même masse s'accumulent sur certains points de la droite. Or, ceci est absurde, car ν est une mesure de Radon. Le groupe H est donc infini cyclique, et puisque Γ agit par automorphismes de H , ses éléments doivent préserver la mesure ν , et donc $\Gamma = \Gamma_\nu$ (ceci montre que $j = k - 1$). On en déduit que Γ est une extension par $(\mathbb{Z}, +)$ d'un sous-groupe résoluble d'un produit de groupes de difféomorphismes d'intervalles fermés. L'affirmation (iii) de l'énoncé du théorème a donc lieu, et ceci finit la démonstration.

5 Le cas de points fixes isolés

On commence par le lemme suivant.

Lemme 5.1. *Soit Γ un sous-groupe de $\text{Homéo}_+(\mathbb{R})$ qui est topologiquement conjugué (resp. semiconjugué) à un groupe de translations. Le normalisateur de Γ dans $\text{Homéo}_+(\mathbb{R})$ est alors conjugué (resp. semiconjugué) à un sous-groupe du groupe affine, ou bien il s'identifie au relèvement à la droite d'un sous-groupe de $\text{Homéo}_+(S^1)$.*

Preuve. Si l'image de Γ dans $(\mathbb{R}, +)$ par l'homomorphisme induit est dense alors, d'après le Lemme 2.1, le normalisateur $\mathcal{N}$ de Γ dans $\text{Homéo}_+(\mathbb{R})$ est conjugué (resp. semiconjugué) à un sous-groupe du groupe affine. Supposons désormais que l'image de Γ dans $(\mathbb{R}, +)$ est infinie cyclique et soit $g \in \Gamma$ la préimage dans Γ de son générateur. Quitte à changer g par g^{-1} , on peut supposer que $g(x) > x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $h \in \mathcal{N}$ il existe des entiers positifs m et n tels que $hgh^{-1} = g^n$ et $h^{-1}gh = g^m$. On a alors

$$g^{mn} = (g^m)^n = (h^{-1}gh)^n = h^{-1}g^nh = g, \quad (9)$$

ce qui entraîne que $m = n = 1$. Tout élément de $\mathcal{N}$ commute donc avec g . Si l'on considère la relation d'équivalence $\sim$ sur la droite qui identifie les points des orbites par g , alors l'espace $\mathbb{R}/\sim$ s'identifie naturellement à un cercle, sur lequel agit (par homéomorphismes directs) le groupe $\Gamma/\langle g \rangle$. Ainsi, Γ s'identifie au relèvement à la droite d'un sous-groupe de $\text{Homéo}_+(S^1)$.

Dans la suite, on dira qu'un groupe Γ d'homéomorphismes est à *points fixes isolés* si les points fixes des éléments non triviaux sont isolés. Nous passons maintenant à la description des groupes résolubles et à points fixes isolés d'homéomorphismes de l'intervalle, du cercle et de la droite. On aura besoin du lemme suivant, qui peut être considéré comme un analogue du lemme de Kopell.

Lemme 5.2. *Soit Γ un sous-groupe abélien et non trivial de $\text{Homéo}_+([a, b[)$ sans point fixe à l'intérieur. Si les points fixes de chaque élément non trivial de Γ sont isolés (dans $[a, b[$), alors Γ est topologiquement semiconjugué à un groupe de translations.*

Preuve. Soit $g \in \Gamma$ un élément non trivial quelconque. Nous affirmons que g n'a pas de point fixe à l'intérieur de $[a, b]$. Supposons le contraire et soit $a^* \in]a, b[$ un point fixe de g . Considérons la composante irréductible $]a^*, b^*[$ correspondante pour le groupe engendré par g . L'image de cet intervalle pour tout élément de Γ est aussi une composante irréductible de ce groupe cyclique. Par

l'hypothèse d'absence de point fixe global, il existe $f \in \Gamma$ tel que l'intervalle $f([a^*, b^*[)$ est disjoint de $]a^*, b^*[$. Quitte à remplacer f par f^{-1} , on peut supposer que $f([a^*, b^*[)$ est à gauche de $]a^*, b^*[$. Chaque point de la suite $(f^n(a^*))$, $n \in \mathbb{N}$, est un point fixe de g , et cette suite tend vers un point fixe de g dans $[a, a^*[$. Ceci contredit l'hypothèse de points fixes isolés.

On a donc montré que l'action de Γ sur $]a, b[$ est libre. D'après le théorème de Hölder (voir [11]), le groupe Γ est semiconjugué à un groupe de translations.

Soit Γ un sous-groupe de $\text{Homéo}_+([a, b[)$ à points fixes isolés et sans point fixe à l'intérieur. On suppose Γ résoluble et on considère le sous-groupe Γ_1 qui apparaît dans la série dérivée correspondante. Si $[u, v[$ est une composante irréductible de Γ_1 , alors pour tout $f \in \Gamma$ l'intervalle $f([u, v[)$ lui aussi est une composante irréductible de Γ_1 . Si f est tel que $f(b) \leq a$ alors $f^n(a)$ converge vers un point fixe de Γ_1 , ce qui contredit l'hypothèse de points fixes isolés. On a ainsi que $[u, v[$ est aussi une composante irréductible de Γ , et donc $[u, v[= [a, b[$.

D'après le Lemme 5.2, Γ_1 est semiconjugué à un groupe de translations. Si le groupe de translations correspondant est dense, alors la preuve du Lemme 5.1 montre que Γ est semiconjugué à un sous-groupe du groupe affine. Sinon, la preuve de ce même lemme montre que la restriction de Γ à $]a, b[$ s'identifie au relèvement à la droite d'un sous-groupe de $\text{Homéo}_+(S^1)$. Or, par l'hypothèse de points fixes isolés, le sous-groupe de $\text{Homéo}_+(S^1)$ associé doit agir librement sur le cercle. Le version du théorème de Hölder pour des homéomorphismes du cercle entraîne alors que ce groupe est semiconjugué à un groupe de rotations (voir [11]). Le groupe Γ est donc semiconjugué à un groupe de translations. On a bien démontré le résultat suivant.

Proposition 5.3. *Soit Γ un sous-groupe résoluble de $\text{Homéo}_+([a, b[)$ à points fixes isolés. Si Γ n'a pas de point fixe à l'intérieur, alors Γ est topologiquement semiconjugué à un sous-groupe du groupe affine. En particulier, Γ est métabélien.*

On considère maintenant le cas du cercle. Si Γ est un sous-groupe résoluble de $\text{Homéo}_+(S^1)$, alors les arguments du §3 montrent que soit Γ est semiconjugué à un groupe de rotations, soit il possède une orbite finie. Dans le dernier cas, le groupe dérivé fixe chaque composante connexe du complémentaire de cette orbite, et d'après la proposition précédente, son action sur cette composante connexe est semiconjugue à une action par des transformations affines. On a donc le résultat suivant.

Proposition 5.4. *Si Γ est un sous-groupe résoluble de $\text{Homéo}_+(S^1)$ à points fixes isolés, alors soit Γ est semiconjugué à un groupe de rotations, soit Γ est un produit semidirect entre un groupe fini cyclique et un sous-groupe d'un produit*

fini de groupes semiconjugés à des groupes de transformations affines. En particulier, sa longueur de résolubilité est inférieure ou égale à 3.

Finalement, on considère le cas plus compliqué de la droite (remarquons que si bien $\text{Homéo}_+([a, b])$ s'identifie de façon évidente à $\text{Homéo}_+(\mathbb{R})$, l'hypothèse de points fixes isolés est plus faible pour les sous-groupes de ce dernier groupe).

Proposition 5.5. *Si Γ est un sous-groupe résoluble de $\text{Homéo}_+(\mathbb{R})$ à points fixes isolés, alors on a l'une des possibilités suivantes:*

- (i) Γ est semiconjugé à un sous-groupe du groupe affine;
- (ii) Γ est un sous-groupe d'un produit de groupes semiconjugés à des sous-groupes du groupe affine qui agissent sur des intervalles dont les intérieurs sont deux à deux disjoints et qui ne s'accumulent pas sur un point de la droite;
- (iii) Γ est un produit semidirect entre $(\mathbb{Z}, +)$ et un groupe comme celui décrit dans (ii).

En particulier, la longueur de résolubilité du groupe Γ est inférieure ou égale à 3.

La preuve se divise en deux cas.

Premier cas: il existe un élément $g \in \Gamma_1$ sans points fixes.

Puisque Γ_1 est contenu dans le normalisateur du groupe engendré par g , la preuve du Lemme 5.1 montre que Γ_1 s'identifie au relèvement à la droite d'un sous-groupe abélien de $\text{Homéo}_+(S^1)$. Les arguments de la preuve de la Proposition 5.4 montrent alors que Γ_1 est soit semiconjugé à un groupe de translations, soit une extension par $(\mathbb{Z}, +)$ d'un sous-groupe d'un produit de groupes semiconjugés à des groupes de translations. On en déduit aisément que Γ est soit semiconjugé à un groupe de transformations affines, soit une extension par $(\mathbb{Z}, +)$ d'un sous-groupe d'un produit de groupes semiconjugés à des groupes de transformations affines.

Deuxième cas: tous les éléments de Γ_1 ont des points fixes.

À l'aide du Lemme 5.2, il est facile de montrer qu'il existe des points qui sont fixés par tous les éléments de Γ_1 . Puisque l'ensemble des points fixes de chaque $g \in \Gamma_1$ distinct de l'identité est discret, il existe une suite finie ou infinie (a_n) , avec $a_n < a_{n+1}$, telle que chaque intervalle $]a_n, a_{n+1}[$ est une composante irréductible de Γ_1 . Puisque Γ_1 est distingué dans Γ , pour tout $f \in \Gamma$ il existe un entier $m(f)$ tel que f envoie $[a_{n-1}, a_n]$ sur $[a_{n-1+m(f)}, a_{n+m(f)}]$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. L'application $f \mapsto m(f)$ définit un homomorphisme (possiblement

trivial) de Γ sur $(\mathbb{Z}, +)$. D'après la Proposition 5.3, on déduit que Γ est soit un sous-groupe d'un produit (au plus dénombrable) de groupes semiconjugés à des groupes de transformations affines (et qui agissent sur les intervalles $]a_{n-1}, a_n[$), soit une extension par $(\mathbb{Z}, +)$ d'un sous-groupe d'un produit (fini) de groupes semiconjugés à des groupes de transformations affines (le morphisme sur $(\mathbb{Z}, +)$ étant donné par m). Ceci termine la preuve de la proposition.

6 Le cas analytique réel

6.1 Groupes résolubles

Pour l'étude du groupe des difféomorphismes analytiques réels et directs de l'intervalle $[0, 1[$, il est pratique de considérer son image dans le groupe $\hat{G}_+^\omega(\mathbb{R}, 0)$ des *germes de difféomorphismes formels*. Un élément $\hat{g}$ de $\hat{G}_+^\omega(\mathbb{R}, 0)$ est une série formelle de la forme

$$\hat{g}(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad a_1 > 0,$$

le produit de deux éléments étant donnée par la série qui résulte de la composition des deux séries correspondantes. Ce groupe admet comme algèbre de Lie celle des champs des vecteurs formels, et l'*application exponentielle* est une bijection (voir [25]). Pour $\ell \in \mathbb{N}$, les séries formelles des difféomorphismes locaux de la forme

$$x \mapsto \frac{ax}{(1 + bx^\ell)^{1/\ell}}, \quad a > 0.$$

constituent un sous-groupe remarquable de $\hat{G}_+^\omega(\mathbb{R}, 0)$, noté $\text{Aff}_+(\ell)$. Pour $\ell = 1$ on retrouve le groupe affine. Pour $\ell \geq 2$ le groupe $\text{Aff}_+(\ell)$ est appelé le "revêtement ramifié de degré ℓ du groupe affine". Les techniques de la théorie de groupes de Lie permettent de caractériser ces sous-groupes dans $\hat{G}_+^\omega(\mathbb{R}, 0)$. Plus précisément, dans [27], I. Nakai démontre le résultat suivant (voir aussi [4], [12] et [23]).

Théorème [Nakai]. *Si Γ est un sous-groupe résoluble de $\hat{G}_+^\omega(\mathbb{R}, 0)$, alors on a l'une des possibilités suivantes:*

- (i) Γ est abélien et contenu dans un groupe à un paramètre réel;
- (ii) Γ est métabelien non commutatif et il est conjugué à un sous-groupe de l'un des $\text{Aff}_+(\ell)$.

De plus, si Γ est un sous-groupe de $\text{Diff}_+^\omega([0, 1[)$ sans point fixe à l'intérieur, alors la conjugaison dans (ii) ci-dessus peut être prise dans $\text{Diff}_+^\omega([0, 1[)$.

Dans [12], É. Ghys démontre que tout sous-groupe résoluble et de type fini de $\text{Diff}_+^\omega(S^1)$ est métabélien (remarquons que ceci ne découle pas directement des résultats du §5). En fait, l'hypothèse de génération finie n'est pas nécessaire : dans le cas général il faudrait ajouter la possibilité que le groupe soit semiconjugué à un groupe de rotations sans y être conjugué, mais dans le cadre analytique réel un tel groupe est évidemment commutatif. Nous appliquerons la méthode de [12] pour démontrer le résultat suivant.

Théorème E. *Tout sous-groupe résoluble de $\text{Diff}_+^\omega(\mathbb{R})$ est métabélien.*

Pour la preuve de ce résultat, notons que d'après le §5 et la classification de Nakai, il y a trois possibilités.

Premier cas: Γ est semiconjugué à un sous-groupe du groupe affine.

Dans ce cas, les éléments du deuxième groupe dérivé de Γ fixent au moins un ensemble non dénombrable de points, et ils coïncident donc avec l'identité. Le groupe Γ est alors métabélien.

Deuxième cas: Γ est un sous-groupe d'un produit de groupes topologiquement conjugués à des groupes de transformations affines.

Dans ce cas le groupe Γ est évidemment métabélien.

Troisième cas: Γ est une extension par $(\mathbb{Z}, +)$ d'un produit fini de groupes conjugués à des groupes de transformations affines.

D'après le §5, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que $a_n < a_{n+1}$ pour tout n et telle que chaque élément de Γ' fixe les intervalles $[a_n, a_{n+1}]$. Par la classification de Nakai, autour de chaque point a_n on peut introduire des coordonnées analytiques réelles telles que tout élément $g \in \Gamma'$ s'exprime sous la forme

$$x \mapsto \frac{a(g, a_n)x}{(1 + b(g, a_n)x^\ell)^{1/\ell}}, \quad a(g, a_n) > 0.$$

On peut donc munir chaque intervalle $]a_n, a_{n+1}[$ d'une mesure de Radon infinie ν_n , sans atome et de support total, telle que pour tout $g \in \Gamma'$ on ait $g_*(\nu) = c(g, a_n)\nu_n$ pour certain facteur $c(g, a_n) > 0$. Supposons que Γ' n'est pas abélien. Dans ce cas, les mêmes arguments de la partie finale de la preuve de la proposition 3.8 de [12] montrent que tout $g \in \Gamma'$ agit sur chaque intervalle $]a_n, a_{n+1}[$ en préservant la mesure ν_n , c'est-à-dire par "translations". Or, ceci est absurde, car on a supposé Γ' non abélien.

Le groupe dérivé de Γ est donc commutatif, et ceci finit la preuve de la métabélianité de Γ .

Nous considérons maintenant les groupes nilpotents de difféomorphismes analytiques réels de la droite.

Théorème F. *Tout sous-groupe nilpotent de $\text{Diff}_+^\omega(\mathbb{R})$ est abélien.*

Pour la démonstration, fixons un sous-groupe nilpotent Γ de $\text{Diff}_+^\omega(\mathbb{R})$, et considérons un élément $g \neq id$ du centre de Γ . Il peut se présenter deux cas.

Premier cas: le difféomorphisme g n'a pas de point fixe.

Sur la droite on considère la relation de équivalence $\sim$ qui identifie les points des orbites de g . L'espace quotient $\mathbb{R}/\sim$ s'identifie naturellement à un cercle, sur lequel agit (par difféomorphismes analytiques réels) le groupe nilpotent $\Gamma/\langle g \rangle$. D'après le premier théorème de Plante et Thurston, $\Gamma/\langle g \rangle$ est abélien. Donc, si h_1 et h_2 appartiennent à Γ , alors le commutateur entre h_1 et h_2 est une puissance de g , disons $[h_1, h_2] = g^n$, $n = n(h_1, h_2)$. Cependant, puisque le groupe $\Gamma/\langle g \rangle$ préserve une mesure de probabilité sur S^1 (car il est moyennable), on a nécessairement $n(h_1, h_2) = 0$ pour tout $h_1, h_2 \in \Gamma$. On a bien démontré que Γ est conjugué au relèvement à la droite d'un groupe abélien de difféomorphismes analytiques réels du cercle.

Deuxième cas: le difféomorphisme g possède des points fixes.

Soit Γ^* le sous-groupe distingué de Γ dont les éléments fixent chacun des points de $\text{Fix}(g)$. La restriction de Γ^* à chaque intervalle déterminé par deux points consécutifs de $\text{Fix}(g)$ est conjuguée à un groupe de translations. Par analyticité, Γ^* est un sous-groupe d'un groupe à un paramètre.

Supposons que Γ/Γ^* ne soit pas trivial et soit $f\Gamma^*$ un générateur. Pour finir la démonstration, il suffit de vérifier que f commute avec chaque élément de Γ^* . Considérons deux points distincts a et $b = f(a)$ de $\text{Fix}(g)$. Puisque $fg = gf$, le germe en a de g est envoyé par conjugaison par f sur le germe de g en b . Puisque l'application exponentielle est bijective, cela entraîne que f commute avec tous les difféomorphismes de la forme $\exp(t\hat{X}(g, a))$, où $t \in \mathbb{R}$, $\exp$ désigne l'application exponentielle et $\hat{X}(g, a)$ est le champ formel associé au germe de g en a . Puisque Γ^* est contenu dans cette dernière famille, on en déduit que f commute localement (autour de a) avec les éléments de Γ^* , et par analyticité ceci entraîne que f commute avec les éléments de Γ^* .

6.2 Groupes moyennables

Rappelons qu'un groupe topologique localement compact Γ est *moyennable* si toute action continue de Γ par homéomorphismes d'un espace métrique compact préserve une mesure de probabilité. L'objectif de ce paragraphe est d'essayer de répondre à la question suivante:

Question 1. Tout sous-groupe moyennable de $\text{Diff}_+^\omega([0, 1])$ est métabélien?

Si Γ est un sous-groupe localement compact moyennable et *non discret* de $\text{Diff}_+^\omega([0, 1])$, alors la composante connexe de l'identité est un groupe de Lie, et d'après la classification de Lie, la restriction de cette composante connexe Γ^* à une composante irréductible est topologiquement conjuguée à un sous-groupe du groupe affine (voir [11], pp. 345-348). Comme Γ^* est distingué dans Γ , on conclut aisément que Γ est un groupe métabélien. Le problème de la caractérisation des sous-groupes moyennables de $\text{Diff}_+^\omega([0, 1])$ se pose donc pour les sous-groupes discrets.

Rappelons que la famille des groupes moyennables est fermée par rapport aux opérations suivantes (dites *opérations élémentaires*): passage au quotient, passage à un sous-groupe, réunion directe et extension. On note AG la famille des groupes moyennables discrets et SG la plus petite famille qui contient les groupes discrets dont tous les sous-groupes de type fini sont à croissance sous-exponentielle et qui est fermée par rapport aux opérations élémentaires. Les éléments de cette dernière famille sont appelés *groupes sous-exponentiellement moyennables*. Pour mieux expliquer cette définition, on définit par récurrence les familles de groupes SG_α par:

- (i) SG_0 est la famille des groupes discrets dont tous les sous-groupes de type fini sont à croissance sous-exponentielle;
- (ii) $\text{SG}_{\alpha+1}$ est la famille des groupes obtenus par une opération élémentaire à partir de groupes appartenant à SG_α ;
- (iii) $\text{SG}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \text{SG}_\beta$ lorsque α est un ordinal limite.

Un groupe discret Γ est un élément de SG si et seulement s'il appartient à SG_α pour certain ordinal α . La question suivante a été posée dans [14].

Question 2. Est-il vrai que $\text{AG} = \text{SG}$?

Bien que tous les exemples connus de groupes moyennables discrets appartiennent à SG, le travail [16] de R. Grigorchuk et A. Zuk laisse entendre que la réponse à la question ci-dessus pourrait être négative. D'ailleurs, si l'on commence avec les groupes finis et abéliens au lieu des groupes dont les sous-groupes de type fini sont à croissance sous-exponentielle, alors on obtient une famille plus petite de groupes, appelée la famille des *groupes élémentairement moyennables* et notée EG. Nous renvoyons le lecteur à [6] et à [30] pour plus d'informations sur le sujet.

Dans la suite, nous nous proposons de démontrer le résultat suivant.

Théorème G. *Tout sous-groupe sous-exponentiellement moyennable de $\text{Diff}_+^\omega([0, 1])$ est métabélien.*

Il est clair d'après les définitions que pour comprendre les sous-groupes sous-exponentiellement moyennables de $\text{Diff}_+^\omega([0, 1[)$, on doit commencer par considérer les sous-groupes à croissance sous-exponentielle.

Lemme 6.1. *Si Γ est un sous-groupe de type fini de $\text{Diff}_+^\omega([0, 1[)$ à croissance sous-exponentielle, alors il est abélien.*

Preuve. Par analyticité on peut supposer, sans perdre en généralité, que Γ n'a pas de point fixe à l'intérieur. On va démontrer que Γ agit librement sur $]0, 1[$. D'après le théorème de Hölder, ceci entraîne que Γ est abélien. Supposons donc que l'action de Γ sur $]0, 1[$ ne soit pas libre et soit g un élément non trivial de Γ avec des points fixes. Soit c le premier point fixe de g à droite de 0. Fixons $h \in \Gamma$ tel que $h(c) > c$. On note $\tilde{f} = hgh^{-1}$ et $d = h(c)$. Soit e le premier point fixe de g à gauche de d . Il peut se présenter deux cas.

Premier cas: le point d n'appartient pas à $\text{Fix}(g)$.

On note $a = e, b = d, f = \tilde{f}$. On change f et g par ses inverses si nécessaire de sorte que $f(x) > x$ et $g(x) < x$ pour tout $x \in]a, b[$. Par une application simple du lemme du ping-pong de Klein sur $[a, b]$ (voir [17], page 188), on montre que pour $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, le semigroupe engendré par f^N et g^N est libre.

Deuxième cas: le point d appartient à $\text{Fix}(g)$.

On change $\tilde{f}$ par $\tilde{f}^{-1}$ si nécessaire de sorte que $\tilde{f}(x) < x$ pour $x \in]0, d[$. On fixe $m \in \mathbb{N}$ suffisamment grand de sorte que $\tilde{f}^m(e) < c$. On note alors $a = \tilde{f}^m(e), b = c, f = \tilde{f}^m g \tilde{f}^{-m}$. On change f et g par ses inverses si nécessaire de sorte que $f(x) < x$ et $g(x) > x$ pour tout $x \in]a, b[$. De nouveau, une application simple du lemme du ping-pong sur $[a, b]$ montre que pour $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, le semigroupe engendré par f^N et g^N est libre.

On a bien démontré que si l'action de Γ sur $]0, 1[$ n'est pas libre, alors Γ contient un semigroupe libre, et donc sa croissance est exponentielle. Ceci est contraire à notre hypothèse, ce qui conclut la preuve du lemme.

Preuve alternative. On suppose de nouveau que Γ n'a pas de point fixe sur $]0, 1[$. D'après [34], le fait que la croissance de Γ soit sous-exponentielle entraîne l'existence d'une mesure de Radon non triviale sur $]0, 1[$ invariante par Γ . En utilisant cette mesure on démontre aisément que les éléments du groupe dérivé Γ' fixent un nombre infini de points sur chaque intervalle compact contenant 0. Par analyticité on déduit que Γ' est trivial, et donc Γ est abélien.

Remarque 6.2. À l'aide des estimées reliées au théorème de Sacksteder (voir [3]), et par un argument similaire à celui de la première des preuves précédentes, on peut démontrer que tout sous-groupe à croissance sous-exponentielle de $\text{Diff}_+^2([0, 1])$ est abélien. Dans [15] le lecteur trouvera un exemple d'un groupe à *croissance intermédiaire* qui agit fidèlement par homéomorphismes directs de la droite. On ignore s'il existe des sous-groupes à croissance intermédiaire dans $\text{Diff}_+^1([0, 1])$ ou dans $\text{Diff}_+^1(\mathbb{R})$.

Pour démontrer le théorème G, au lieu de considérer directement des sous-groupes de $\text{Diff}_+^\omega([0, 1])$, on considérera des *représentations* ϕ de groupes sous-exponentiellement moyennables dans $\text{Diff}_+^\omega([0, 1])$. Ainsi, pour chaque α on note

$$\mathcal{R}_\alpha = \{(\phi, \Gamma) : \phi : \Gamma \rightarrow \text{Diff}_+^\omega([0, 1]), \quad \Gamma \in \text{SG}_\alpha\}.$$

Proposition 6.3. *Pour tout ordinal α et tout (ϕ, Γ) dans $\mathcal{R}_\alpha$, l'image $\phi(\Gamma)$ est métabélienne.*

Preuve. Par récurrence. Le cas $\alpha = 0$ se déduit du lemme précédent, suivant lequel pour tout $(\phi, \Gamma) \in \mathcal{R}_0$, l'image $\phi(\Gamma)$ est abélienne.

Supposons que l'affirmation de la proposition est satisfaite pour tout élément de $\mathcal{R}_\beta$, $\beta \leq \alpha$, et soit (ϕ, Γ) un élément de $\mathcal{R}_{\alpha+1}$. Si Γ a été obtenu à partir de SG_α par un passage au quotient, alors $\phi(\Gamma)$ peut être vu comme l'image d'une représentation d'un groupe de SG_α . Par l'hypothèse de récurrence, $\phi(\Gamma)$ est métabélien. Dans le cas où Γ a été obtenu à partir de SG_α par un passage à un sous-groupe ou une réunion directe, le fait que $\phi(\Gamma)$ est métabélien est évident à partir de l'hypothèse de récurrence. Il reste le cas où Γ est obtenu par une extension. Dans ce cas, fixons Γ_1 et Γ_2 dans SG_α , de sorte qu'il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Gamma_2 \longrightarrow 0.$$

Par hypothèse, $\phi(\Gamma_1)$ est métabélien. On suppose que ce groupe n'est pas trivial: dans le cas contraire, ϕ peut être vue comme une représentation du groupe $\Gamma_2 \in \text{SG}_\alpha$. Fixons donc une composante irréductible $]a, b[$ de $\phi(\Gamma_1)$. Comme Γ_1 est distingué dans Γ , pour tout $h \in \Gamma$ on a que $\phi(h)(]a, b[)$ est une composante irréductible de $\phi(\Gamma_1)$. Si cette composante est disjointe de $]a, b[$, alors les $\phi^n(h)(a)$, $n \in \mathbb{Z}$, sont des points fixes (distincts) des éléments de $\phi(\Gamma_1)$ qui s'accumulent sur 0, ce qui contredit l'analyticité. On déduit alors que tout élément de Γ vérifie $\phi(h)([a, b]) = [a, b]$.

Soit H un sous-groupe abélien distingué et non trivial de $\phi(\Gamma_1)$. Fixons un élément non trivial $g \in H$ et notons H^* le sous-groupe de $\phi(\Gamma_1)$ des éléments dont la restriction à $[a, b]$ appartient au flot $g_{[a, b]}^\mathbb{R}$. Ce groupe H^* est distingué dans $\phi(\Gamma_1)$. Nous affirmons qu'il est encore distingué dans $\phi(\Gamma)$. En effet, pour tout

$h \in H$ et tout $f \in \Gamma$, on a que $\bar{f} = \phi(f)h\phi(f)^{-1}$ appartient à $\phi(\Gamma_1)$. De plus, cet élément étant conjugué à h , il ne possède pas de point fixe sur $]a, b[$. Donc, on a que $\bar{f} \in H^*$, et par le théorème de Szekeres, ceci entraîne que $\phi(\Gamma)$ normalise H^* . Ainsi, la restriction de $\phi(\Gamma)$ à $]a, b[$ est topologiquement conjuguée à un sous-groupe du groupe affine. Par conséquence, $\phi(\Gamma)$ est métabélien.

Finalement, si α est un ordinal limite, alors la validité de la proposition pour $(\phi, \Gamma) \in \mathcal{R}_\alpha$ est évidente lorsqu'on la suppose pour les ordinaux inférieurs à α . Ceci finit la preuve de la proposition et donc celle du théorème G.

Le théorème G s'étend de manière simple au cas du cercle (resp. de la droite) en utilisant les arguments du §3 et le résultat de Ghys cité au §6.1 (resp. les arguments du §5 et le théorème E). Nous laissons au soin du lecteur la vérification du fait suivant: *tout sous-groupe sous-exponentiellement moyennable de $\text{Diff}_+^\omega(S^1)$ ou de $\text{Diff}_+^\omega(\mathbb{R})$ est métabélien*. De la même manière, le résultat s'étend au cas des groupes d'homéomorphismes à points fixes isolés: *tout sous-groupe sous-exponentiellement moyennable de $\text{Homéo}_+([0, 1[)$ (resp. de $\text{Homéo}_+(S^1)$ ou de $\text{Homéo}_+(\mathbb{R}))$ à points fixes isolés est résoluble d'ordre de résolubilité au plus égal à 2 (resp. au plus 3)*. Nous croyons qu'il est possible d'aboutir aussi à une classification satisfaisante des sous-groupes sous-exponentiellement moyennables de $\text{Diff}_+^2([0, 1])$ à l'aide de la *théorie des niveaux* (voir [3]) et de la *théorie des groupes ordonnables* (voir [2] et [22]). Signalons pour finir que le problème de la caractérisation des groupes moyennables de difféomorphismes analytiques réels se pose plus généralement à niveau des germes. La question centrale est la suivante.

Question 3. L'alternative de Tits est-elle valable dans $\mathcal{G}_+^\omega(\mathbb{R}, 0)$ ou dans $\hat{\mathcal{G}}_+^\omega(\mathbb{R}, 0)$? Autrement dit, est-il vrai que tout sous-groupe de type fini et non métabélien de $\mathcal{G}_+^\omega(\mathbb{R}, 0)$ ou de $\hat{\mathcal{G}}_+^\omega(\mathbb{R}, 0)$ contient un sous-groupe libre à deux générateurs?

L'une des difficultés de ce problème consiste en ce que $\hat{\mathcal{G}}_+^\omega(\mathbb{R}, 0)$ est la limite inverse d'une suite de groupes résolubles (il suffit de considérer pour chaque $n \in \mathbb{N}$ le morphisme naturel de $\hat{\mathcal{G}}_+^\omega(\mathbb{R}, 0)$ dans le groupe des n -jets à l'origine). Ce dernier fait a été exploité dans [10] pour donner une version faible de l'alternative de Tits dans $\text{Diff}_+^\omega(S^1)$: si Γ est un sous-groupe de $\text{Diff}_+^\omega(S^1)$ qui ne contient pas de sous-groupe libre à deux générateurs, alors Γ est *résiduellement résoluble*.

Remarque 6.4. Signalons qu'à partir de la classification de Nakai on peut montrer aisément que tout sous-groupe *virtuellement résoluble* de $\hat{\mathcal{G}}_+^\omega(\mathbb{R}, 0)$ est métabélien (ceci explique l'énoncé si fort de la question 3). Un résultat analogue peut être établi par les méthodes de ce travail pour les sous-groupes virtuellement

résolubles de $\text{Diff}_+^2([0, 1])$, de $\text{Diff}_+^2(S^1)$ ou de $\text{Diff}_+^2(\mathbb{R})$: ces groupes sont nécessairement résolubles.

Bibliographie

- [1] L. Beklaryan. On analogues of the Tits alternative for groups of homeomorphisms of the circle and the line. *Mat. Zametki* **71** (2002), 334–347. Traduction à l’anglais dans *Math. Notes* **71** (2002), 305–315.
- [2] R. Botto & A. Rhemtulla. *Orderable groups*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **27**, Marcel Dekker, New York-Basel (1977).
- [3] A. Candel & L. Conlon. *Foliations I*. Graduate Studies in Mathematics **23**, American Mathematical Society, Providence (2000).
- [4] D. Cerveau & R. Moussu. Groupes d’automorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$ et équations différentielles $ydy + \dots = 0$. *Bull. Soc. Math. France* **116** (1988), 459–488.
- [5] I. Chiswell & P. Kropholler. Soluble right orderable groups are locally indicable. *Can. Math. Bull.* **36** (1993), 22–29.
- [6] C. Chou. Elementary amenable groups. *Illinois J. Math.* **24** (1980), 396–407.
- [7] S. Druck, F. Fang & S. Firmo. Fixed points of discrete nilpotent group actions on S^2 . *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **52** (2002), 1075–1091.
- [8] D. Epstein & W. Thurston. Transformation groups and natural bundles. *Proc. London Math. Soc.* **38** (1979), 219–236.
- [9] B. Farb & J. Franks. Groups of homeomorphisms of one-manifolds III: Nilpotent subgroups. À paraître dans *Erg. Theory and Dyn. Systems*.
- [10] B. Farb & P. Shalen. Groups of real-analytic diffeomorphisms of the circle. *Erg. Theory and Dyn. Systems* **22** (2002), pp.835–844.
- [11] É. Ghys. Groups acting on the circle. *L’Enseignement Mathématique* **47** (2001), 329–407.
- [12] É. Ghys. Sur les groupes engendrés par des difféomorphismes proches de l’identité. *Bol. Soc. Brasileira Mat.* **24** (1993), 137–178.
- [13] É. Ghys & V. Sergiescu. Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle. *Comment. Math. Helv.* **62** (1987), 185–239.
- [14] R. Grigorchuk. An example of a finitely presented amenable group that does not belong to the class EG. *Mat. Sbornik* **189** (1998), 79–100.
- [15] R. Grigorchuk & A. Maki. On a group of intermediate growth that acts on a line by homeomorphisms. *Mat. Zametki* **53** (1993), 46–63. Traduction à l’anglais dans *Math. Notes* **53** (1993), 146–157.
- [16] R. Grigorchuk & A. Zuk. On a torsion-free weakly branch group defined by a three state automaton. *Int. J. of Algebra and Computation* **12** (2002), 223–246.
- [17] P. de la Harpe. *Topics in geometric group theory*. Univ. of Chicago Press (2000).

- [18] G. Hector & U. Hirsch. *Introduction to the geometry of foliations. Part B. Foliations of codimension one*. Second edition, Aspect of Mathematics (1987).
- [19] M. Herman. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. *Publ. Math. IHES* **49** (1979), 5–234.
- [20] M. Hirsch. A stable analytic foliation with only exceptional minimal set. *Lecture Notes in Math.* **468** (1965), 9–10.
- [21] N. Kopell. Commuting diffeomorphisms. Dans *Global Analysis*. Proc. Sympos. Pure Math., Vol. **XIV**, Berkeley, Calif. (1968), 165–184.
- [22] V. Kopytov & N. Medvedev. *Right-ordered groups*. Plenum Publishing Corporation, New York (1996).
- [23] F. Loray. Dynamique des groupes d’automorphismes de $\mathbb{C}$, 0. *Bol. Soc. Mat. Mexicana* **5** (1999), 1–23.
- [24] G. Margulis. Free subgroups of the homeomorphism group of the circle. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **331** (2000), 669–674.
- [25] J. Mattei & R. Moussu. Holonomie et intégrales premières. *Annales Sci. de l’École Normale Supérieure* **13** (1980), 469–523.
- [26] Y. Moriyama. Polycyclic groups of diffeomorphisms of the half line. *Hokkaido Math. J.* **23** (1994), 399–422.
- [27] I. Nakai. Separatrices for non solvable dynamics on $\mathbb{C}$, 0. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **44** (1994), 569–599.
- [28] A. Navas. Actions de groupes de Kazhdan sur le cercle. *Annales Sci. de l’École Normale Supérieure* **35** (2002), 749–758.
- [29] A. Navas. Sur les groupes de difféomorphismes du cercle engendrés par des éléments proches de rotations. À paraître dans *L’Enseignement Mathématique*.
- [30] D. Osin. Elementary classes of groups. À paraître dans *Math. Notes*.
- [31] D. Pixton. Nonsmoothable, unstable group actions. *Trans. of the AMS* **229** (1977), 259–268.
- [32] J. Plante. Subgroups of continuous groups acting differentiably on the half line. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **34** (1984), 47–56.
- [33] J. Plante. Solvable groups acting on the line. *Trans. of the AMS* **278** (1983), 401–414.
- [34] J. Plante. Foliations with measure preserving holonomy. *Ann. of Math.* **102** (1975), 327–361.
- [35] J. Plante. Measure preserving pseudogroups and a theorem of Sacksteder. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **25** (1975), 237–249.
- [36] J. Plante & W. Thurston. Polynomial growth in holonomy groups of foliations. *Comment. Math. Helv.* **51** (1976), 567–584.
- [37] J. Rebelo. On nilpotent groups of real analytic diffeomorphisms of the torus. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **331** (2000), 317–322.

- [38] A. Rhemtulla. Polycyclic right ordered groups. Dans *Algebra, Carbondale*. Lecture Notes in Math. **848** (1981), 230–234.
- [39] R. Sacksteder. Foliations and pseudogroups. *Amer. Journal of Math.* **87** (1965), 79–102.
- [40] J. C. Yoccoz. *Centralisateurs et conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle*. Thèse d'État, Université Paris Sud, Orsay (1985).

Andrés Navas

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
École Normale Supérieure de Lyon, UMR 5669 du CNRS
46 allée d'Italie, F-69364 Lyon 07
FRANCE
e-mail: anavas@umpa.ens-lyon.fr