BULLETIN OF THE BRAZILIAN MATHEMATICAL SOCIETY

Bull Braz Math Soc, New Series 38(4), 517-524

Mesures harmoniques conformes et feuilletages du plan projectif complexe

Marco Brunella

Résumé. On introduit la notion de *mesure harmonique conforme* pour les feuilletages holomorphes des surfaces complexes. Dans le cas d'un feuilletage du plan projectif, de degré d, on démontre que l'exposant (ou dimension transverse) d'une telle mesure est majoré par $\frac{d-1}{d+2}$.
Mots-clés: feuilletages holomorphes, mesures harmoniques, mesures conformes.

Abstract. We introduce the notion of *conformal harmonic measure* for holomorphic foliations on complex surfaces. In the case of a foliation on the projective plane, of degree d, we prove that the exponent (or transverse dimension) of such a measure is bounded from above by $\frac{d-1}{d+2}$.
Keywords: holomorphic foliations, harmonic measures, conformal measures.
Mathematical subject classification: 37F75, 37F35.

1 Introduction

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe du plan projectif complexe $\mathbb{C}P^2$. Dans l'article [CLS], les auteurs posent la question suivante: est-ce que toute feuille de $\mathcal{F}$ s'accumule sur un (ou plusieurs) point(s) singulier(s) de $\mathcal{F}$? Si ce n'est pas le cas, alors $\mathcal{F}$ possède un compact invariant $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}P^2$ disjoint des singularités. À l'heure actuelle, on ne connait aucun exemple d'une telle situation.

Dans [Der], Deroin démontre qu'un tel $\mathcal{M}$ ne peut pas être une hypersurface réelle de classe C^1 qui possède une mesure harmonique (au sens de Garnett [Gar], voir par exemple [Ghy] ou [Can]) ayant certaines propriétés de régularité. Notre but est de généraliser ce résultat de Deroin à des situations un peu moins régulières. Pour ce faire, on introduira la notion de *mesure harmonique conforme*, inspirée de la théorie des groupes Kleiniens et de l'itération des fractions rationnelles [Sul], et on démontrera:

Received 22 December 2006.

Théorème 1.1. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe de $\mathbb{C}P^2$, de degré d. Soit $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}P^2$ un compact invariant disjoint des singularités du feuilletage. Supposons que $\mathcal{M}$ possède une mesure harmonique conforme d'exposant α. Alors*

$$\alpha \leq \frac{d-1}{d+2}.$$

Le cas étudié dans [Der] correspond, grosso modo, au cas $\alpha = 1$. La question qui se pose est, bien sûr, celle de l'existence d'une mesure harmonique *conforme*. Une mesure harmonique existe toujours, et d'après [F-S] (voir aussi [D-K]) elle est aussi unique. Il s'agit donc d'en établir la conformité.

Le Théorème ci-dessus dit que si $\mathcal{M}$ possède une mesure harmonique conforme alors il est "petit", car l'exposant α, qui est une sorte de dimension de Hausdorff transverse, est inférieur à 1. Par contre, on déduit de [F-S, Th. 2.9] que $\mathcal{M}$ ne peut pas être "trop petit": le complémentaire $\mathbb{C}P^2 \setminus \mathcal{M}$ admet une 2-forme holomorphe non triviale et carré intégrable, et donc $\mathcal{M}$ n'est pas transversalement de capacité logarithmique nulle.

La preuve du Théorème suit le même schéma que [Der], un peu épuré. D'un côté, et puisqu'on est dans $\mathbb{C}P^2$, le fibré normal du feuilletage possède une métrique hermitienne dont la courbure le long des feuilles est égale à $\frac{d+2}{d-1}$. D'un autre côté, la mesure harmonique conforme permet de construire sur ce même fibré une autre métrique, dont la courbure le long des feuilles est au plus égale à $\frac{1}{\alpha}$. La comparaison de ces deux courbures et le principe du maximum donnent l'inégalité cherchée.

2 Rappel sur la métrique hyperbolique

Il convient d'abord de bien fixer certaines constantes qui apparaîtrons dans la suite, pour éviter toute ambiguité.

Considérons le disque $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$, équipé de la métrique hyperbolique de courbure -1. La forme d'aire associée est

$$\omega = \frac{2i dz \wedge d\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}.$$

Si $v(z) = a(z)\frac{\partial}{\partial z}$ est un champ de vecteurs holomorphe et sans zéros dans un ouvert de $\mathbb{D}$, on a alors

$$i\partial\bar{\partial}(\log \omega(i\bar{v} \wedge v)) = \omega.$$

Soit $h \colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique positive. L'inégalité de Harnack affirme que

$$i\partial h \wedge \bar{\partial} h \leq \frac{h^2}{2} \cdot \omega.$$

En effet, modulo composition par une isométrie il suffit de vérifier cela à l'origine, où l'on a $\left(\frac{\partial h}{\partial x}(0)\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}(0)\right)^2 \leq 4h(0)^2$, voir [Ran, page 20]. En utilisant l'identité

$$i\partial\bar{\partial}(\log h) = \frac{1}{h} i\partial\bar{\partial}h - \frac{1}{h^2} i\partial h \wedge \bar{\partial}h,$$

on peut réécrire cette inégalité sous la forme

$$i\partial\bar{\partial}(\log h) \geq -\frac{1}{2} \cdot \omega.$$

3 Mesures harmoniques conformes

Soit X une surface complexe équipée d'un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{M} \subset X$ un compact invariant par $\mathcal{F}$ et disjoint des singularités de $\mathcal{F}$.

On recouvre un voisinage U de $\mathcal{M}$ par des cartes distinguées U_j, $j = 1, ..., \ell$. Sur chaque U_j on a donc une submersion holomorphe

$$\varphi_j \colon U_j \longrightarrow V_j \subset \mathbb{C}$$

qui définit $\mathcal{F}$ sur U_j, et sur chaque $\varphi_k(U_k \cap U_j)$ on a un difféomorphisme holomorphe

$$\varphi_{jk} \colon \varphi_k\big(U_k \cap U_j\big) \longrightarrow \varphi_j\big(U_k \cap U_j\big)$$

tel que $\varphi_j = \varphi_{jk} \circ \varphi_k$ sur $U_k \cap U_j$. Notons

$$\mathcal{M}_j = \varphi_j\big(U_j \cap \mathcal{M}\big)$$

l'image de $\mathcal{M}$ dans V_j.

On dira qu'une collection de mesures (de Borel, finies) $\{\mu_j\}_{j=1}^{\ell}$ sur $\{V_j\}_{j=1}^{\ell}$ est une *mesure conforme d'exposant* α *(*$\alpha > 0$*) adaptée à* $\mathcal{M}$ si:

(i) $\mathrm{Supp}\,(\mu_j) \subset \mathcal{M}_j$ pour tout j ;

(ii) $\varphi_{jk}^*(\mu_j) = |\varphi'_{jk}|^\alpha \cdot \mu_k$, pour tout j, k.

$\big($ou, plus exactement: $\varphi_{jk}^*(\mu_j|_{\varphi_j(U_k \cap U_j)}) = |\varphi'_{jk}|^\alpha \cdot \mu_k|_{\varphi_k(U_k \cap U_j)}\big)$.

Par exemple, si chaque $\mathcal{M}_j$ a mesure de Hausdorff α-dimensionnelle $\mathcal{H}^\alpha(\mathcal{M}_j)$ finie, alors $\{\mu_j = \mathcal{H}^\alpha|_{\mathcal{M}_j}\}_{j=1}^{\ell}$ est une mesure conforme d'exposant α, car $\varphi^*(\mathcal{H}^\alpha) = |\varphi'|^\alpha \cdot \mathcal{H}^\alpha$ pour tout difféomorphisme holomorphe.

Dans la suite on fixe aussi une forme d'aire hermitienne ω sur les feuilles de $\mathcal{M}$, qui soit transversalement continue. Par exemple, si toutes les feuilles de $\mathcal{M}$ sont hyperboliques (ce qui est toujours le cas si $X = \mathbb{C}P^2$, voir [CLS]), on peut choisir ω égale à l'aire hyperbolique des feuilles: la continuité transverse est un théorème de Candel [Ghy].

Soit maintenant m une *mesure harmonique* pour $\mathcal{M}$. On renvoie à [Gar], [Ghy] et [Can] pour la théorie générale, ici on rappelle seulement que dans chaque carte U_j la mesure m admet une décomposition

$$m|_{U_j} = h_j \cdot \omega \wedge \varphi_j^*(\mu_j)$$

où μ_j est une mesure sur V_j, avec $\mathrm{Supp}(\mu_j) \subset \mathcal{M}_j$, et h_j est une fonction sur U_j, intégrable par rapport à $\omega \wedge \varphi_j^*(\mu_j)$ et telle que la restriction à μ_j-presque toute feuille est harmonique positive.

Bien sûr, cette décomposition locale n'est pas unique: on peut toujours multiplier μ_j par e^{b_j}, b_j fonction bornée, et par conséquent multiplier h_j par $e^{-b_j \circ \varphi_j}$, pour obtenir une nouvelle décomposition de m dans U_j.

On dira que la mesure harmonique m est une *mesure harmonique conforme d'exposant* α ($\alpha > 0$) si elle admet des décompositions locales comme ci-dessus telles que:

(i) $\{\mu_j\}_{j=1}^{\ell}$ est une mesure conforme d'exposant α, adaptée à $\mathcal{M}$;

(ii) $\log h_j$ est bornée, pour tout $j = 1, ..., \ell$.

Par exemple, dans [Der] on considère des mesures harmoniques satisfaisant $\mu_j = \mathcal{H}^1|_{\gamma_j}$, $\gamma_j \subset V_j$ courbe de classe C^1, et $\log h_j$ bornée. Ce sont donc des mesures harmoniques conformes d'exposant 1. Signalons toutefois que [Der] reste à un niveau de généralité différent, car on y traite des laminations compactes qui ne sont pas nécessairement "plongées" dans un feuilletage holomorphe.

Il nous semble bien possible que les feuilletages définis par suspension d'une représentation $\pi_1(C) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}P^1)$ (C courbe compacte) pourraient fournir des exemples de mesures harmoniques conformes (voir [Mar], et aussi [Gar] pour le cas des groupes Fuchsiens).

Voyons maintenant les règles de transformation des fonctions $\{h_j\}$. Introduisons le cocycle $g_{jk} = \varphi'_{jk} \circ \varphi_k \in \mathcal{O}^*(U_k \cap U_j)$, qui relie les différentielles des submersions φ_j:

$$d\varphi_j = g_{jk} \cdot d\varphi_k \qquad \text{sur} \quad U_k \cap U_j .$$

On a alors, sur $U_k \cap U_j$,

$$\begin{aligned} h_k \cdot \varphi_k^*(\mu_k) &= h_j \cdot \varphi_j^*(\mu_j) = h_j \cdot \varphi_k^* \varphi_{jk}^*(\mu_j) \\ &= h_j \cdot \varphi_k^*\big(|\varphi_{jk}'|^\alpha \cdot \mu_k\big) = h_j \cdot |g_{jk}|^\alpha \cdot \varphi_k^*(\mu_k) \end{aligned}$$

et donc

$$-\frac{2}{\alpha}\log h_j + \frac{2}{\alpha}\log h_k = \log|g_{jk}|^2 \qquad \text{sur} \quad U_k \cap U_j \cap \mathcal{M}.$$

On peut interpréter ce calcul de la manière suivante. Le cocycle $\{g_{jk}\}$ définit un fibré $N_{\mathcal{F}}$ (le fibré normal de $\mathcal{F}$), et les fonctions $\{-\frac{2}{\alpha}\log h_j\}$ définissent une métrique hermitienne sur $N_{\mathcal{F}}|_{\mathcal{M}}$. La courbure de cette métrique le long des feuilles de $\mathcal{M}$ est donnée par

$$\Theta = i\partial_{\mathcal{F}}\bar{\partial}_{\mathcal{F}}\left(-\frac{2}{\alpha}\log h_j\right)$$

(où $i\partial_{\mathcal{F}}\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$ indique qu'on différentie seulement dans la direction des feuilles).

Or, les fonctions h_j sont définies localement, mais chaque $h_j|_{\{\varphi_j=c\}}$ admet un prolongement, en tant que fonction harmonique positive, au revêtement universel de la feuille correspondante à $\{\varphi_j = c\}$. C'est juste une conséquence immédiate du fait que les quotients $\frac{h_j}{h_k}$ sont constants sur les feuilles, voir les références ci-dessus pour plus de détails. Si toutes les feuilles de $\mathcal{M}$ sont hyperboliques, et si on utilise la métrique hyperbolique pour ω, on peut alors appliquer à ces fonctions l'inégalité d'Harnack (§1):

$$i\partial_{\mathcal{F}}\bar{\partial}_{\mathcal{F}}\big(\log h_j\big) \geq -\frac{1}{2}\cdot\omega$$

c'est-à-dire

$$\Theta \leq \frac{1}{\alpha}\cdot\omega.$$

On peut aussi comparer avec [Der, Lemme 4.7]: dans notre situation, ce Lemme devient $\frac{1}{\alpha}A(C) = \pi n(C)$.

4 Preuve du Théorème

Supposons dorénavant que $X = \mathbb{C}P^2$. Rappelons que le *degré* de $\mathcal{F}$ est défini comme le nombre de points de tangence de $\mathcal{F}$ avec une droite générique. Un calcul simple [Bru] montre que si $\mathcal{F}$ est de degré d, alors son fibré normal $N_{\mathcal{F}}$ et son fibré cotangent $T^*_{\mathcal{F}} = K_{\mathcal{F}}$ sont de degré $d+2$ et $d-1$:

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{F}} &= \mathcal{O}(d+2) \\ K_{\mathcal{F}} &= \mathcal{O}(d-1). \end{aligned}$$

On supposera aussi que $d \geq 2$.

On peut choisir les cartes de la section précédente de façon que sur tout U_j on a un champ de vecteurs holomorphe v_j, sans zéros, qui engendre $\mathcal{F}$. Donc

$$v_j = f_{jk} \cdot v_k \qquad \text{sur} \quad U_k \cap U_j$$

et $\{f_{jk}\}$ est un cocycle qui définit $T^*_{\mathcal{F}}$ sur U_j. Les fonctions

$$F_j = \log \omega\big(i \bar{v}_j \wedge v_j\big),$$

où ω est l'aire hyperbolique des feuilles, définissent donc une métrique hermitienne sur $K_{\mathcal{F}}|_{\mathcal{M}}$, car

$$F_j - F_k = \log |f_{jk}|^2 \qquad \text{sur} \quad U_k \cap U_j \cap \mathcal{M}.$$

La courbure le long des feuilles de cette métrique est alors (§1):

$$\Omega = i \partial_{\mathcal{F}} \bar{\partial}_{\mathcal{F}} \big(\log \omega (i \bar{v}_j \wedge v_j)\big) = \omega.$$

Revenons à $N_{\mathcal{F}}$. Puisque $N_{\mathcal{F}}^{\otimes(d-1)} = K_{\mathcal{F}}^{\otimes(d+2)}$, on a

$$g_{jk}^{(d-1)} = f_{jk}^{(d+2)} \frac{r_j}{r_k},$$

pour certaines fonctions holomorphes $r_j \in \mathcal{O}^*(U_j)$. Donc les fonctions

$$G_j = \frac{d+2}{d-1} \cdot F_j + \frac{1}{d-1} \log |r_j|^2$$

définissent une métrique hermitienne sur $N_{\mathcal{F}}|_{\mathcal{M}}$,

$$G_j - G_k = \log |g_{jk}|^2 \qquad \text{sur} \quad U_k \cap U_j \cap \mathcal{M},$$

et sa courbure le long des feuilles de $\mathcal{M}$ est

$$\Theta' = i \partial_{\mathcal{F}} \bar{\partial}_{\mathcal{F}} G_j = \frac{d+2}{d-1} \cdot \omega.$$

Considérons alors la fonction (globale) $H\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ définie dans chaque carte par

$$H|_{U_j \cap \mathcal{M}} = G_j + \frac{2}{\alpha} \log h_j,$$

qui est un potentiel pour $\Theta' - \Theta = i\partial_{\mathcal{F}}\bar{\partial}_{\mathcal{F}} H$. On a

$$i\partial_{\mathcal{F}}\bar{\partial}_{\mathcal{F}} H \geq \left(\frac{d+2}{d-1} - \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \omega.$$

Nous affirmons que $\varepsilon = \frac{d+2}{d-1} - \frac{1}{\alpha}$ ne peut pas être strictement positif (d'où la conclusion du Théorème). Observons que H est bornée sur $\mathcal{M}$, et donc elle induit sur le revêtement universel de chaque feuille (le disque) une fonction bornée dont le $i\partial\bar{\partial}$ est minoré par $\varepsilon \cdot \omega$. Le principe du maximum donne facilement une contradiction avec la positivité stricte de ε, par comparaison avec la fonction $\varepsilon \log \frac{2}{(1-|z|^2)^2}$ qui diverge à $+\infty$ vers le bord et dont le $i\partial\bar{\partial}$ est égal à $\varepsilon \cdot \omega$. Un argument alternatif se trouve aussi dans [Der, Lemme 4.1].

Observons que ce dernier argument utilise seulement le fait que H est *supérieurement* bornée. Cela signifie que le Théorème reste valable sous l'hypothèse un peu plus générale (mais peut-être moins naturelle) que les fonctions h_j (et non plus $\log h_j$) soient bornées.

Terminons en remarquant que cette preuve s'adapte sans problèmes pour montrer l'énoncé suivant. Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage sur une surface arbitraire X, si $\mathcal{M}$ est un compact invariant nonsingulier ayant une mesure harmonique conforme d'exposant α, et si $N_{\mathcal{F}}^{\otimes p} \geq K_{\mathcal{F}}^{\otimes q}$ (p et q entiers positifs) au voisinage de $\mathcal{M}$, alors $\alpha \leq \frac{p}{q}$. Ici, $L_1 \geq L_2$ signifie que le fibré L_1 est "plus positif" que L_2 (par exemple, $L_1 \otimes L_2^{-1}$ admet une métrique hermitienne à courbure semipositive, mais des variations sont possibles).

Références

[Bru] M. Brunella. *Birational geometry of foliations*. IMPA (2000).

[CLS] C. Camacho, A. Lins Neto and P. Sad. *Minimal sets of foliations on complex projective spaces*. Publ. Math. IHES, **68** (1988), 187–203.

[Can] A. Candel. *The harmonic measures of Lucy Garnett*. Adv. Math., **176** (2003), 187–247.

[Der] B. Deroin. *Hypersurfaces Levi-plates immergées dans les surfaces complexes de courbure positive*. Ann. Sci. ENS, **38** (2005), 57–75.

[D-K] B. Deroin and V. Kleptsyn. *Random conformal dynamical systems*, prépublication (2005).

[F-S] J.E. Fornaess and N. Sibony. *Harmonic currents of finite energy and laminations*. Geom. Funct. Anal., **15** (2005), 962–1003.

[Gar] L. Garnett. *Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion*. J. Funct. Anal., **51** (1983), 285–311.

[Ghy] É. Ghys. *Laminations par surfaces de Riemann*. Panoramas et Synthèses, **8** (1999), 49–95.

[Mar] M. Martínez. *Measures on hyperbolic surface laminations*. Ergod. Th. and Dynam. Sys., **26** (2006), 847-867.

[Ran] T. Ransford. *Potential theory in the complex plane*. Cambridge (1995).

[Sul] D. Sullivan. *Conformal dynamical systems*. Springer Lecture Notes in Mathematics, **1007** (1983), 725–752.

Marco Brunella
IMB – CNRS UMR 5584
9 Avenue Savary
21078 Dijon
FRANCE

E-mail: brunella@u-bourgogne.fr