

Estudio Global de Sistemas Mecánicos*

ERNESTO LACOMBA ZAMORA

Sección 1 - Introducción

Este artículo tiene como propósito el dar una descripción de las variedades invariantes en 3 sistemas mecánicos con simetrías, como una ilustración de la teoría de Smale para tales sistemas. Dicha teoría fué desarrollada y aplicada con éxito al problema de los n cuerpos en el plano (Mecánica Celeste), y otros problemas más sencillos en Smale [10], [11]. Recientemente han aparecido otras aplicaciones importantes en Iacob [4] y Lacomba Z. [6].

La mayoría de los resultados obtenidos son conocidos, pero los métodos empleados permiten comprender la estructura topológica global de los problemas relativamente simples que aquí se estudian.

Usaremos el lenguaje de variedades diferenciables y su haz tangente, así como grupos de Lie y sus álgebras de Lie. Todas las variedades y funciones se supondrán C^∞ diferenciables.

La idea del método de Smale se puede resumir como sigue:

Sea M una variedad que representa las configuraciones posibles de nuestro sistema mecánico. Supongamos que sobre M actúa un grupo (de Lie) G , determinando las simetrías naturales del problema. Las ecuaciones de Newton para nuestro sistema determinan un campo vectorial X en el haz tangente TM . Se define $I = E \times J: TM \rightarrow \mathbb{R} \times W = W'$, donde $E: TM \rightarrow \mathbb{R}$ es la energía total del sistema, $J: TM \rightarrow W$ generaliza la noción de momento angular o de momento lineal (y depende esencialmente de la acción de G) y W, W' son espacios vectoriales sobre \mathbb{R} .

*Recibido pela SBM em 20 de fevereiro de 1973.

Desde un punto de vista práctico, las curvas integrales de X en TM describen la evolución de nuestro mecánico al transcurrir el tiempo (principio de mínima acción) para condiciones iniciales dadas.

Lo que interesa en el método topológico global es obtener una idea geométrica de cómo dichas curvas integrales "llenan" el espacio fase, independientemente de sus posiciones precisas en él, y de su parametrización con respecto al tiempo. Esto es lo que se conoce en Sistemas Dinámicos como estudio del *retrato fase*.

Ahora bien, es sabido que sobre cualquier curva integral de X , la energía E y el momento angular J son constantes (leyes de conservación). Esto implica que los conjuntos de energía y momento constantes $I_w = I^{-1}(w)$, $w \in W$ son "subvariedades" invariantes bajo el sistema dinámico determinado por X en TM .

De esta propiedad de I , resulta que el estudio del retrato fase podría seguir los siguientes pasos:

- (1.1a). Dado un valor fijo para la energía-momento $w \in W$, determinar la estructura topológica del I_w correspondiente.
- (1.1b). Determinar cómo está foliado el haz tangente TM por las I_w , cuando w recorre W .
- (1.1c). Determinar cómo llenan cada I_w las trayectorias individuales correspondientes.

Más precisamente, Smale analiza este problema dividiéndolo en las siguientes dos partes:

- (1.2a). El estudio topológico de la función I . Es decir, identificar el tipo topológico del conjunto I_w (en términos de espacios topológicos conocidos, o dando bastantes invariantes topológicos), para cada $w \in W$, y encontrar el conjunto de bifurcación $\Sigma(I)$, a definirse en la siguiente sección. Este conjunto es importante porque esencialmente contiene a todos los puntos de W donde I_w cambia de carácter topológico.

- (1.2b). Es estudio de los sistemas dinámicos más simples inducidos por X en cada I_w .

Además, las I_w resultan invariantes bajo ciertos subgrupos G_w del grupo de simetrías G , lo cual permite una reducción ulterior de nuestro problema (esta reducción generaliza el método de Jacobi de "eliminación del nodo" en Mecánica Celeste). Después de efectuar esta reducción, nos queda exactamente algo como en la reducción anterior, pero donde los I_w pueden ser más simples.

Aquí no nos ocuparemos de esta última, puesto que se obtiene gran cantidad de información de la primera reducción cuando el grupo de simetrías no es demasiado complicado, como es nuestro caso.

En este artículo se estudia topológicamente la función, $I = E \times J: TM \rightarrow \mathbb{R} \times V$ (problema 1.2) para los 3 sistemas mecánicos que se describen a continuación (ver Goldstein [3], para nociones elementares de Mecánica Clásica sobre este tipo de sistemas mecánicos), encontrando el conjunto de bifurcación $\Sigma(I)$, e I_w para cada $w \in W$:

- (1.3). Estudio del movimiento libre de una partícula sobre el disco cerrado unitario en el plano \mathbb{R}^2 . El grupo de simetrías es $\mathbf{SO}(2)$.
- (1.4). Estudio del movimiento de una partícula que se mueve libremente sobre un toro que se encuentra sumergido en \mathbb{R}^3 con el eje Z como eje de simetría, teniendo por consiguiente a las rotaciones respecto a un eje $\mathbf{SO}(2)$ como grupo de simetrías.
- (1.5). Estudio del movimiento de una partícula restringida a mover-se sobre la superficie de una esfera de dimensión 2 en \mathbb{R}^3 , que por lo demás se puede mover libremente allí (desde un punto de vista práctico se puede suponer que sobre la partícula sólo las fuerzas necesarias para mantenerla sobre la esfera). El grupo de simetrías es el de las rotaciones $\mathbf{SO}(3)$.

En Kaplan [5] se puede encontrar otra buena ilustración del Análisis Global en sistemas mecánicos para el problema de los 2 cuerpos y a nivel más elemental que el presente artículo.

En la próxima sección se definen en forma más precisa los conceptos a que nos hemos referido, y en las siguientes secciones se atacan los ejemplos específicos.

Sección 2. Sistemas Mecánicos con Simetría

2.1. Descripción de un sistema mecánico clásico

Un sistema mecánico clásico consta de 3 elementos (M, K, V) donde M es el espacio de configuración, K es la energía cinética y V la energía potencial del sistema.

El espacio de configuración M es una variedad diferenciable que representa todas las "posiciones" posibles del sistema, y su haz tangente TM representa los "estados" posibles del sistema, que contienen también información sobre "velocidades" del mismo.

La energía cinética K es la norma al cuadrado correspondiente a cierta métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$ en M , o sea

$$K(X_a) = \langle X_a, X_a \rangle_K \text{ para } X_a \in TM$$

(ver [10] y el capítulo 13 de [7]). K va a representar la energía almacenada en forma de movimiento.

La energía potencial V es simplemente una función diferenciable de M en los reales y va a representar fuerzas externas que actúan sobre nuestro sistema.

La energía total del sistema es una función $E: TM \rightarrow \mathbb{R}$ definida como la "suma" de la energía cinética con la energía potencial: $E = K + V \circ \pi$, donde $\pi: TM \rightarrow M$ es la proyección canónica.

EJEMPLO. Consideremos dos partículas de masas m_1 y m_2 que se mueven en el plano, sujetas sólo a la acción gravitacional entre ellas (problema de los 2 cuerpos en el plano).

El espacio de configuración M se construye como sigue: tomemos dos copias del plano \mathbb{R}^2 : $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$, para que en cada una de ellas representemos

la posición de una de las partículas. Finalmente, debemos evitar la posibilidad de que las dos partículas se encuentren en la misma posición, para lo cual excluirémos el conjunto

$$\Delta = \{(q_1, q_2, q'_1, q'_2) \in \mathbb{R}^4 \mid (q_1, q_2) = (q'_1, q'_2)\}$$

obteniendo finalmente nuestro espacio de configuración como la variedad diferenciable

$$M = \mathbb{R}^4 - \Delta = \{(q_1, q_2, q'_1, q'_2) \in \mathbb{R}^4 \mid q_1 \neq q'_1 \text{ ó } q_2 \neq q'_2\}$$

(abierto in \mathbb{R}^4). (Si $(q_1, q_2, q'_1, q'_2) \in M$, (q_1, q_2) y (q'_1, q'_2) representarán las posiciones en el plano de la primera y segunda partícula, respectivamente.)

En este caso TM es simplemente $M \times \mathbb{R}^4$, y la energía cinética está dada por

$$K(q_1, q_2, q'_1, q'_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}'_1, \dot{q}'_2) = \frac{1}{2} m_1 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}'_1^2 + \dot{q}'_2^2).$$

Es claro que K es una forma cuadrática definida positiva, para cada $(q_1, q_2, q'_1, q'_2) \in M$.

Finalmente, la energía potencial V es simplemente el potencial gravitacional:

$$V(q_1, q_2, q'_1, q'_2) = \frac{-km_1 m_2}{|(q_1 - q'_1)^2 + (q_2 - q'_2)^2|^{1/2}}$$

donde k es la constante gravitacional.

Se recomienda al lector ver Goldstein [3] para estos conceptos clásicos de Mecánica, y el capítulo 13 de Loomis-Sternberg [7] junto con MacLane [8] para el desarrollo formal de la teoría usando el lenguaje de variedades diferenciables.

(Cabe hacer notar aquí que en Goldstein está implícito el uso de variedades diferenciables como espacios de configuración cuando se habla de problemas con restricciones. Se utilizan, aunque en forma muy poco precisa y sin decirlo explícitamente, variedades definidas como el conjunto de ceros de una función diferenciable con dominio un abierto de \mathbb{R}^n , en base al teorema de la Función Implícita.)

2.2 Ecuaciones de movimiento

Regresemos a nuestro caso general de un sistema mecánico clásico (M, K, V) . Se puede definir un campo vectorial diferenciable X en TM , el cual puede describirse localmente por medio del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales (ecuaciones de Lagrange)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial X_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt} X_i = \dot{X}_i \quad i = 1, \dots, n$$

donde $L = K - V \circ \pi: TM \rightarrow \mathbb{R}$ es el lagrangiano del sistema y $(X_1, \dots, X_n, \dot{X}_1, \dots, \dot{X}_n)$ es un sistema canónico de coordenadas locales en TM .

Esto se llama las *ecuaciones de movimiento* del sistema, y sus trayectorias describen la evolución del mismo al transcurrir el tiempo.

En el presente artículo no trabajaremos con la forma explícita de estas ecuaciones, las cuales se pueden obtener también por medio de las ecuaciones de Hamilton (o de Newton, en problemas más clásicos), ver [3], [7], [8] o también [1]. En [1] o [7] puede verse también la relación entre campos vectoriales y ecuaciones diferenciales, así como los flujos locales por ellos definidos.

2.3. Descripción de un sistema mecánico con simetría

Un sistema mecánico con simetría consta de 4 elementos (M, K, V, G) , donde M, K, V son los componentes de un sistema mecánico clásico como en 2.1, y G es un grupo de simetrías del problema.

Más precisamente, G es un grupo de Lie que actúa por la izquierda como grupo de transformaciones de M preservando K y V .

Recordemos que una *acción* es una función diferenciable $G \times M \rightarrow M$, denotada $(g, a) \rightarrow g \cdot a$ y tal que (ver [2])

- i) $e \cdot a = a$ para todo $a \in M$, donde $e \in G$ es la identidad.
- ii) $g_1 \cdot (g_2 \cdot a) = (g_1 g_2) \cdot a$ para todo $g_1, g_2 \in G, a \in M$.

Para cada $g \in G$, la acción induce un difeomorfismo l_g de M por la regla $l_g(a) = g \cdot a$. Mediante las derivadas $g_* = Dl_g: TM \rightarrow TM$ se induce también una acción $G \times TM \rightarrow TM$ por $(g, X_a) \rightarrow g_* X_a$.

El que la acción *preserve* V significa que dado $a \in M$, V es constante en órbitas bajo G , o sea

$$(2.1) \quad V(g \cdot a) = V(a) \quad \text{para todo } g \in G.$$

El que la acción *preserve* V , significa que cada g_* es una isometría con respecto a la métrica de Riemann asociada, o sea

$$(2.2) \quad \langle g_* X, g_* Y \rangle_K = \langle X, Y \rangle_K \quad \text{para todo } X_a, Y_a \in TM, a \in M.$$

2.4. Definición del momento angular en un sistema mecánico con simetría (M, K, V, G)

Sea \mathcal{G} el álgebra de Lie de G , [2], que consideraremos identificada con el espacio tangente a G en la identidad, $T_e G$.

El momento angular para nuestro sistema será una función diferenciable $J: TM \rightarrow \mathcal{G}^*$, lineal en cada fibra $T_a M$ y definida a continuación, donde \mathcal{G}^* es el dual de \mathcal{G} como espacio vectorial.

Para $a \in M$, definimos la transformación lineal $\alpha_a: \mathcal{G} \rightarrow T_a M$ como sigue:

Dado $X \in \mathcal{G}$, consideremos el subgrupo de transformaciones de G a un parámetro que le corresponde, o sea el homomorfismo de grupos de Lie

$c_X: \mathbb{R} \rightarrow G$ con las propiedades $c_X(0) = e, c_X'(0) = X$ (ver [2]). Entonces

$$\alpha_a(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} C_X(t) \cdot a.$$

Para cada $X \in \mathcal{G}$ fijo, la correspondencia $a \rightarrow \alpha_a(X)$, para cada $a \in M$ define un campo vectorial en M , llamado campo vectorial de Killing, correspondiente a X .

El momento angular se define por medio de la siguiente proyección:

$$J(X_a)Y = \langle X_a, \alpha_a(Y) \rangle_K \quad \text{para } X_a \in TM, Y \in \mathcal{G}.$$

Para el cálculo de J en nuestros ejemplos, necesitaremos su representación siguiente (de Algebra Lineal):

(2.3) Dada una base fija $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ de \mathcal{G} , existe un isomorfismo $\mathcal{G}^* \approx \mathbb{R}^n$, definido enviando $\alpha \in \mathcal{G}^*$ en $(\alpha(Y_1), \dots, \alpha(Y_n)) \in \mathbb{R}^n$. Esto induce una representación del momento angular como una aplicación $J: TM \rightarrow \mathbb{R}^n$, $J(X_a) = (J(X_a) \cdot Y_1, \dots, J(X_a) \cdot Y_n)$.

2.5. La energía, E y el momento angular, J como integrales del sistema

Enunciaremos sin demostrar la siguiente proposición (ver [10], [1] y [7]):

Leyes de conservación de energía y momento angular: Si $\gamma(t)$ es una trayectoria en TM de las ecuaciones de movimiento descritas en 2.2, entonces $E(\gamma(t)) = \text{const}$ y $J(\gamma(t)) = \text{const}$ para todo real t en el dominio de definición de γ .

En otras palabras, la energía y el momento angular se conservan sobre trayectorias del sistema. Otra forma de describir esta propiedad es diciendo que las funciones E y J son *integrales* del sistema.

2.6. La función energía-momento angular

Ahora podemos definir la función I que será objeto principal de nuestro estudio:

$$I = E \times J: TM \rightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{G}^*,$$

o sea

$$I(X_a) = (E(X_a), J(X_a))$$

junto con los conjuntos $I_{c,p} = I^{-1}(c, p)$, para cada $(c, p) \in \mathbb{R} \times \mathcal{G}^*$.

Definimos el conjunto de *puntos críticos* de I como el subconjunto de TM donde la derivada $DI: TM \rightarrow T(\mathbb{R} \times \mathcal{G}^*)$ no es sobre, y el conjunto de

valores críticos de I se define como la imagen bajo I de los puntos críticos:

$$\Sigma'(I) = \{(c, p) \in \mathbb{R} \times \mathcal{G}^* \mid DI(w) \text{ no es sobre, para algún } w \in I^{-1}(c, p)\}.$$

Al complemento $\mathbb{R} \times \mathcal{G}^* - \Sigma'(I)$ se le llama el conjunto de *valores regulares* de I .

Por el teorema de Sard (Milnor, [9]), el conjunto de valores regulares de I es denso en $\mathbb{R} \times \mathcal{G}^*$, y un teorema muy conocido que generalmente se usa en conjunción con el de Sard ([9], de nuevo) asegura que siempre que $(c, p) \in \mathbb{R} \times \mathcal{G}^*$ es un valor regular en la imagen de I , el correspondiente $I_{c,p}$ resulta una subvariedad de TM con dimensión igual a $\dim(TM) - \dim(\mathbb{R} \times \mathcal{G}^*)$. Por esta propiedad, diremos que los $I_{c,p}$ generalmente son subvariedades.

NOTA. Aquí cabe el comentario de que desde un punto de vista práctico, entre más simetrías del problema estemos considerando (a mayor dimensión de G), mayor dimensión tendrá $\mathbb{R} \times \mathcal{G}^*$, y por lo tanto menor dimensión tendrán las $I_{c,p}$. En consecuencia, más simples será los sistemas dinámicos reducidos que resultan en las $I_{c,p}$.

Ahora bien, el grupo trivial $G = Id$ actúa sobre cualquier variedad M en la forma obvia, y en este caso las $I_{c,p}$ son las subariedades de energía constante que apenas tienen dimensión una unidad menor que la de TM . Por lo tanto se ve la importancia del grupo de simetrías como reductor de la dimensión de dichas subvariedades invariantes, a través del momento angular J .

Sólo nos falta definir el *conjunto de bifurcación* de I , denotado $\Sigma(I)$:

$$\Sigma(I) = \{(c, p) \in \text{Im}(I) = I(TM) \mid I \text{ no es localmente trivial en } (c, p)\},$$

donde I *localmente trivial* en un punto $(c, p) \in \text{Im}(I)$ quiere decir que existe una vecindad abierta W de (c, p) y una función diferenciable $g: I^{-1}(W) \rightarrow I_{c,p}$ tal que $h: I^{-1}(W) \rightarrow I_{c,p} \times W$, $h(x) = (g(x), I(x))$ es un difeomorfismo.

En otras palabras, salvo por difeomorfismo, I funciona allí localmente como la proyección de un producto cartesiano en uno de sus factores. En particular, $I^{-1}(W)$ se encuentra "foliado por $I_{c,p}$ ", es decir, $I^{-1}(W)$ es la unión disjunta de las imágenes inversas de los puntos de W bajo I , cada una de las cuales es difeomorfa a $I_{c,p}$ (ver Auslander y Mac Kenzie, [2]).

La importancia capital de $\Sigma(I)$ reside en que contiene a los puntos (c, p) donde $I_{c,p}$ cambia de carácter topológico en el siguiente sentido: de la definición $\Sigma(I)$ es un subconjunto cerrado de $Im(I)$ y aún más, define un haz fibrado (ver [2]) en cada componente conexa de $Im(I) - \Sigma(I)$. En particular, $I_{c,p}$ tiene el mismo tipo topológico para toda (c, p) en la misma componente conexa.

Por tanto, la imagen inversa de cada componente conexa se encuentra "foliada" por la $I_{c,p}$ que le corresponde.

COMENTARIOS. a) En general, el conjunto de puntos en $Im(I)$ donde $I_{c,p}$ cambia de carácter topológico está contenido en $\Sigma(I)$, pero no es necesariamente igual.

b) En general,

$$\Sigma'(I) \subset \Sigma(I) \subset Im(I) \subset \mathbb{R} \times \mathcal{G}^*,$$

y $\Sigma'(I)$ resulta más fácil de calcular en la práctica que $\Sigma(I)$.

En ciertos casos particulares se puede asegurar que $\Sigma(I) = \Sigma'(I)$, lo que simplifica enormemente el cálculo de $\Sigma(I)$. Por ejemplo, si M es conexa compacta, un teorema debido a Ehresman (Wolf, [12]) asegura que $\Sigma(I) = \Sigma'(I)$. Por lo tanto, como para nuestros problemas a considerar M es compacta, usaremos esta simplificación (Secciones 3 y 4).

c) Cuando el potencial, $V = 0$, como será el caso en los ejemplos por analizar, será útil considerar la función $J^* = J|_{T_1M}$, donde $T_1M = K^{-1}(1)$. Esta función permite cierta reducción para el cálculo de las subvariedades invariantes y de los conjuntos $\Sigma'(I)$, $\Sigma(I)$ e $Im(I)$ en virtud de las siguientes relaciones (teorema 3.3 en [6] sigue siendo válido en este caso más general):

$$\begin{aligned} I_{1,p} &= J_p^* \\ I^{-1}(\lambda^2, \lambda p) &\approx J_p^*, \lambda \neq 0 \quad (\text{topológicamente}) \\ (2.4) \quad \Delta(I) &= \{(\lambda^2, \lambda p) \in \mathbb{R} \times \mathcal{G}^* \mid p \in \Delta(J^*)\} \cup (0, 0), \end{aligned}$$

donde $J_p^* = J^{*-1}(p)$, el símbolo Δ representa ya sea Σ' , Σ ó Im , y los conjuntos correspondientes a J^* se definen exactamente como para I .

2.7. Potencial modificado

Consideremos de nuevo nuestro sistema mecánico con simetría (M, K, V, G) . Puesto que la energía total es una integral del sistema, deducimos que si $\gamma(t)$ es una órbita en TM de las ecuaciones de movimiento, que inicialmente tiene energía total c , este valor se conservará sobre toda la órbita.

Por tanto $c = E(\gamma(t)) = K(\dot{\gamma}(t)) + V \circ \pi(\gamma(t))$ a lo largo de $\gamma(t)$. Como $K(X_a) \geq 0$ para todo $X_a \in TM$, tendremos $V \leq c$ sobre $\gamma(t)$ y en general cualquier órbita con energía c , de donde se sigue

$$\pi(E^{-1}(c)) = V^{-1}(-\infty, c],$$

puesto que K es una norma en el espacio tangente a cada punto.

Esta ecuación significa que el valor de la energía nos da una estimación sobre la proyección de nuestra órbita en M , por intermedio del potencial V .

Resulta que si además se conoce el valor p del momento angular del sistema, se puede definir bajo ciertas condiciones un potencial modificado V_p que nos da una estimación más fina de la proyección de la órbita en M , como veremos a continuación. Todavía más, bajo ciertas circunstancias V_p permite calcular de una manera práctica los valores críticos $\Sigma'(I)$ (Proposición 6.5 en [10]).

La única desventaja es que V_p no siempre podrá definirse, y aún en caso afirmativo puede estar definido sólo en cierta subvariedad abierta de M .

Definimos el conjunto de *eclipses* de nuestro sistema como el siguiente subconjunto cerrado de M

$$\Lambda = \{a \in M \mid J_a : T_aM \longrightarrow \mathcal{G}^* \text{ no es sobre}\},$$

donde $J_a = J|_{T_aM}$.

Si $\Lambda \neq M$, podemos definir para cualquier $p \in \mathcal{G}^*$ el *potencial modificado* $V_p : M - \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}$, como sigue:

Dado $a \in M - \Lambda$, $J_a^{-1}(0)$ es un subespacio vectorial de T_aM y $J_a^{-1}(p)$ es un subespacio afín paralelo a $J_a^{-1}(0)$. Definimos

$$V_p(a) = \min\{E(X_a) \mid X_a \in J_a^{-1}(p)\}.$$

La estimación proporcionada por V_p a que nos referíamos está dada por la siguiente modificación de la parte e), en proposición 6.5 [10]:

(2.5). Si $\dim G < \dim M$, entonces $\pi(I_{c,p}) = V_p^{-1}(-\infty, c]$, sobre $M - \Lambda$, fórmula que aplicaremos en secciones 3 y 4.

2.8. Problema básico por estudiar

Dado un sistema mecánico con simetría, queremos estudiar topológicamente la función energía-momento angular $I = E \times J$, lo cual consta de dos partes como vimos en la introducción (problema 1.2a):

1) Encontrar la estructura del conjunto de bifurcación $\Sigma(I)$.

2) Encontrar el tipo topológico de las subvariedades invariantes $I_{c,p}$.

El objeto de las secciones 3, 4 y 5 de este trabajo será precisamente estudiar este problema básico para los 3 sistemas mecánicos descritos al final de la introducción. En cada uno de ellos se supondrá $V = 0$ (no hay fuerzas externas), razón por la cual las curvas integrales corresponderán precisamente al flujo geodésico de la variedad de configuración M .

Sección 3. Movimiento de una partícula sobre un disco

Considere el siguiente sistema mecánico:

$G = \text{SO}(2)$, actuando como grupo de simetría en la forma obvia, sobre

$$M = D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\},$$

variedad con frontera $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$ = producto interno euclidiano de \mathbb{R}^2 .

Puesto que (x, y) , para $x^2 + y^2 \leq 1$ son coordenadas (globales) para D^2 , entonces (x, y, \dot{x}, \dot{y}) son coordenadas globales correspondientes para $T(D^2) = D^2 \times \mathbb{R}^2$, donde $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \leq 1$, $\dot{x}, \dot{y} \in \mathbb{R}$.

Es conveniente describir G como $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, y entonces \mathcal{G} es el espacio tan-

gente a S^1 en $(1, 0)$, y la acción $G \times M \rightarrow M$ está definida analíticamente como

$$g \cdot a = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

para $g = (\cos \theta, \sin \theta) \in S^1$, y $a = (x, y) \in D^2$.

La acción inducida $G \times TM \rightarrow TM$ está dada por

$$g_*(a, v) = (g \cdot a, g \cdot v),$$

para $g = (\cos \theta, \sin \theta)$, $(a, v) = (x, y, \dot{x}, \dot{y})$.

Como es de esperarse para un sistema mecánico con simetría, esta acción deja invariante la energía cinética, definida por

$$K(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2.$$

De la definición de J y la propiedad 2.3, donde tomamos el vector unitario $(0, 1) \in \mathcal{G}$ como base, encontramos que $J: TM \rightarrow \mathcal{G}^* = \mathbb{R}$ es

$$(3.1) \quad J(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = x\dot{y} - y\dot{x},$$

que es el momento angular usual con respecto al origen.

Encontremos ahora el potencial modificado V_p :

En este caso $\Lambda = (0, 0)$ y para $(x, y) \in M - \Lambda$ y $p \in \mathcal{G}^* = \mathbb{R}$, tenemos

$$J_{(x,y)}^{-1}(p) = \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \in T_{(x,y)}M \mid x\dot{y} - y\dot{x} = p\}.$$

Usando la definición de V_p y multiplicadores de Lagrange, encontramos

$$(3.2) \quad V_p(x, y) = \frac{p^2}{x^2 + y^2}.$$

Puesto que $\dim G < \dim M$ en el caso presente, la fórmula 2.5 nos dice que $\tau_M(I_{c,p}) = V_p^{-1}(-\infty, c]$ sobre $M - \Lambda$.

El haz tangente unitario en este caso está definido por

$$T_1(D^2) = \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \mid x^2 + y^2 \leq 1, \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1\} = D^2 \times S^1,$$

el cual es un toro sólido.

Considere $J^* = J|_{T_1M}$. Calculando su Jacobiano en coordenadas locales encontramos que $\sigma(J^*) = \emptyset$ y por lo tanto $\Sigma'(J^*) = \emptyset$. De la fórmula 2.4, deducimos que trivialmente $\Sigma'(I) = (0, 0)$.

La conservación de energía y momento angular nos dice que se satisfacen las siguientes ecuaciones a lo largo de cualquier órbita del flujo geodésico en T_1M (p es el valor constante del momento angular para la órbita dada):

$$(3.3) \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= p. \end{aligned}$$

Afirmamos que para $p \in \mathbb{R}$, $J_p^* = J^{*-1}(p)$ está dado topológicamente por

a) $D^1 \times S^1$; si $|p| < 1$, donde $D^1 = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$;

b) S^1 , si $|p| = 1$;

c) \emptyset , si $|p| > 1$.

Prueba de la afirmación: Si $\gamma(t) = (x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t))$ es una órbita del flujo geodésico en T_1M para la cual $J^* = p$, la distancia de $\pi \circ \gamma(t)$ al origen es exactamente $|p|$.

Esto se sigue, observando que $\gamma(t)$ está contenido en J_p^* y haciendo $c = 1$ en 2.5 si $\pi \circ \gamma(t)$ no pasa por el origen, o por un cálculo directo si lo hace. Obtenemos de 3.2

$$V_p(x, y) = \frac{p^2}{x^2 + y^2} \leq 1 \text{ en } D^2 - 0$$

esto es, $|p| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ en $\gamma(t)$, y la igualdad es alcanzada.

Consideremos ahora los diversos casos enunciados en la afirmación

a) $|p| < 1$. La órbita $\gamma(t)$ a su máxima extensión es como $\pi \circ \gamma(t)$ una copia de D^1 . Como S^1 actúa sobre T_1M (restringiendo la acción en TM) preservando J^* (invariancia), tenemos

$$J_p^* = D^1 \times S^1 \quad (|p| < 1).$$

b) $|p| = 1$. Las órbitas son degeneradas y contienen solamente un punto. Aplicando el grupo de simetría S^1 , obtenemos $J_{\pm 1}^* = S^1$.

c) $|p| > 1$. Puesto que $|J^*(x, y, \dot{x}, \dot{y})| \leq 1$ en T_1M , o sea $Im(J^*) = [-1, 1]$, tenemos

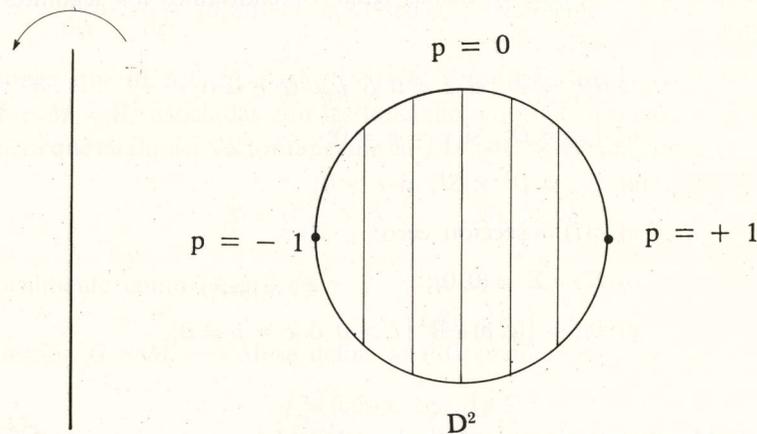
$$J_p^* = \emptyset \quad (|p| > 1). \quad \text{Q.E.D.}$$

De este resultado vemos inmediatamente que

$$\Sigma(J^*) = \{-1, 1\}.$$

La foliación de $T_1(D^2)$ por los conjuntos J_p^* puede describirse topológicamente como sigue: $T_1(D^2) = D^2 \times S^1$ es un toro sólido que puede generarse rotando D^2 con respecto a un eje como se muestra en la siguiente figura.

Las J_p^* son generadas por la rotación de los segmentos verticales indicados (o puntos en el caso $p = \pm 1$):



Generando Σ' , Σ e Im para la función I de acuerdo con fórmula 2.3, y las $I_{c,p}$ de las dos fórmulas anteriores a 2.4, obtenemos

- i) $I_{c,p} = \emptyset$, si $c < 0$ ó $p^2 > c \geq 0$;
- ii) $I_{c,p} = S^1$, si $p^2 = c > 0$;
- iii) $I_{c,p} = D^1 \times S^1$, si $p^2 < c$;
- iv) $I_{c,p} = D^2$, si $c = p = 0$;

- a) $\sigma(I) = \text{sección cero de } TM \text{ (trivial)}$;
- b) $\Sigma'(I) = (0, 0)$;
- c) $\Sigma(I) = \{(c, p) \in \mathbb{R}^2 \mid p^2 = c\}$;
- d) $Im(I) = \{(c, p) \in \mathbb{R}^2 \mid p^2 \leq c\}$.

OBSERVACIONES

- a) Aquí los puntos de bifurcación resultan principalmente porque M tiene una frontera que corta abruptamente los conjuntos $I_{c,p}$, pero I sólo tiene como punto crítico a $(0, 0)$.
- b) Si cambiáramos la variedad de configuración de D^2 a \mathbb{R}^2 completo, con acción por $\mathbf{SO}(2)$ y todo lo demás igual, obtendríamos los siguientes resultados:

- i) $I_{c,p} = \emptyset$, si $c < 0$ ó $p \neq 0$, $c = 0$;
- ii) $I_{c,p} = D^2$, si $c = p = 0$;
- iii) $I_{c,p} = D^1 \times S^1$, si $c > 0$;
- a) $\sigma(I) = \text{sección cero}$;
- b) $\Sigma' = \Sigma = (0, 0)$;
- c) $Im = \{(c, p) \in \mathbb{R}^2 \mid c > 0 \text{ ó } c = p = 0\}$.

Sección 4. Movimiento de una partícula sobre el toro

Consideremos el siguiente sistema mecánico, donde $G = \mathbf{SO}(2)$, actuando como rotaciones respecto al eje Z sobre el toro: $M = S^1 \times S^1 = T^2$, considerado como una superficie de revolución respecto al eje Z en \mathbb{R}^3 , por medio de la siguiente parametrización

$$\begin{aligned} x &= (2 + \cos \phi) \cos \theta \\ y &= (2 + \cos \phi) \sin \theta \\ z &= \sin \phi \end{aligned}$$

para $\theta, \phi \in \mathbb{R}$, mod 2π y $\langle \cdot, \cdot \rangle_K = \text{producto interno de } \mathbb{R}^3$.

La pareja (U, ψ) es un sistema coordenado local para M , donde U es cualquier intervalo abierto en \mathbb{R}^2 de la forma

$$U = (\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta_0 < \theta < \theta_1, \phi_0 < \phi < \phi_1$$

con $0 < \theta_1 - \theta_0 \leq 2\pi$ y $0 < \phi_1 - \phi_0 \leq 2\pi$; y $\psi^{-1}: U \rightarrow \psi^{-1}(U) \subset M$ está definido por

$$\psi^{-1}(\theta, \phi) = (\cos \theta (2 + \cos \phi), \sin \theta (2 + \cos \phi), \sin \phi).$$

Para este sistema coordenado

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial \theta}(\theta, \phi) = (-\sin \theta (2 + \cos \phi), \cos \theta (2 + \cos \phi), 0)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial \phi}(\theta, \phi) = (-\cos \theta \sin \phi, -\sin \theta \sin \phi, \cos \phi).$$

Suponga que $(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi})$, para $(\theta, \phi) \in U$ y $\dot{\theta}, \dot{\phi} \in \mathbb{R}$ son las coordenadas en $TM = M \times \mathbb{R}^2$ asociadas con las funciones coordenadas (θ, ϕ) en M , de tal manera que cualquier vector tangente en $TU = U \times \mathbb{R}^2$ puede escribirse como

$$X = \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \dot{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (\dot{\theta}, \dot{\phi} \in \mathbb{R})$$

y localmente como $(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi})$.

La acción $G \times M \rightarrow M$ se define analíticamente como sigue: Si

$$g = (\cos \alpha, \sin \alpha) \in S^1$$

y

$$a = ((2 + \cos \phi) \cos \theta, (2 + \cos \phi) \sin \theta, \sin \phi)$$

entonces,

$$g \cdot a = ((2 + \cos \phi) \cos(\theta + \alpha), (2 + \cos \phi) \sin(\theta + \alpha), \sin \phi).$$

Donde usamos la identificación $G = S^1$, como antes.

En términos de nuestras coordenadas locales $K, J: TM \rightarrow \mathbb{R}$ están dadas por

$$K(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \dot{\theta}^2 (2 + \cos \phi)^2 + \dot{\phi}^2$$

$$J(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \dot{\theta} (2 + \cos \phi)^2.$$

Es claro que en este caso tenemos $\Lambda = \phi$, así que para $p \in \mathcal{G}^* = \mathbb{R}$, $V_p: M \rightarrow \mathbb{R}$ está definido en toda la variedad. En términos de coordenadas locales, encontramos como en sección 3, que

$$V_p(\theta, \phi) = \frac{p^2}{(2 + \cos \phi)^2} \quad \text{para } (\theta, \phi) \in M.$$

NOTAS

- a) La función J es exactamente el momento angular usual con respecto al eje z en \mathbb{R}^3 , como era de esperarse.
- b) Puesto que $\dim G < \dim M$, tenemos $\tau_M(I_{c,p}) = V_p^{-1}(-\infty, c]$ como en la sección 3.

En este caso el haz tangente unitario en términos de coordenadas está definido por

$$T_1M = \{(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) \mid \dot{\theta}, \dot{\phi} \in \mathbb{R}; \theta, \phi \text{ mod } 2\pi, \dot{\theta}^2(2 + \cos \phi)^2 + \dot{\phi}^2 = 1\}.$$

Consideremos la función $J^* = J \mid T_1M$. Calculando Jacobianos con coordenadas locales como en la sección anterior, encontramos

$$\sigma(J^*) = \{(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) \in T_1M \mid \sin \phi = \dot{\phi} = 0\}$$

$$\Sigma(J^*) = \{\pm 1, \pm 3\}.$$

El conjunto $\sigma(J^*)$ consiste de exactamente 4 curvas cerradas en T_1M , una para cada valor $p \in \Sigma(J^*)$. Su proyección sobre M consiste de las siguientes geodésicas:

$$p = \pm 1: 3\theta(t) = \pm t, \phi(t) = 0 \quad (\text{paralelo interior de } T^2)$$

$$p = \pm 3: 3\theta(t) = \pm 3t, \phi(t) = \pi \quad (\text{paralelo exterior de } T^2),$$

todas ellas generadas por subgrupos a un parámetro de $\mathbf{SO}(2)$.

Las ecuaciones de conservación de energía y momento en un J_p^* dado, $p \in \mathbb{R}$ son ahora

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \dot{\theta}^2(2 + \cos \phi)^2 + \dot{\phi}^2 &= 1 \\ \dot{\theta}(2 + \cos \phi)^2 &= p. \end{aligned}$$

Afirmamos que para $p \in \mathbb{R}$, J_p^* es topológicamente

- a) $T^2 \times Z_2$, si $|p| < 1$;
 b) T , si $|p| = 1$;
 c) S^1 , si $|p| = 3$;
 d) T^2 , si $1 < |p| < 3$;
 e) \emptyset , si $|p| > 3$;

donde Z_2 es el espacio discreto consistente de 2 puntos y Y es un conjunto singular consistente de 2 toros concéntricos, pegados mediante la identificación de un círculo en cada uno.

Prueba de la afirmación. Puerto que $\text{Im}(J^*) = [-3, 3]$, no hay movimiento para $|p| > 3$ y e) es claro.

Sea $p \in [-3, 3]$ un valor regular.

En este caso sabemos que J_p^* es una variedad compacta orientable (ver Abraham [1], teorema 11.15) de dimensión 2, que es invariante bajo el flujo geodésico (un campo vectorial en T_1M que nunca se anula). Como es bien conocido (teorema de Hopf en [9]), sólo los toros satisfacen estas propiedades, así que J_p^* es un toro ó unión disjunta de toros.

Escribiendo las ecuaciones de conservación 4.1 en la forma

$$\dot{\theta} = \frac{p}{(2 + \cos \phi)^2}$$

$$\dot{\phi} = \pm \sqrt{1 - \frac{p^2}{(2 + \cos \phi)^2}},$$

vemos que cualquier J_p^* tiene a lo más dos puntos proyectándose sobre cada punto $a \in M$.

El resto de la afirmación se obtiene esencialmente usando este hecho y la nota b) acerca de V_p (arriba) para cada uno de los distintos casos. Q.E.D. Para entender mejor cómo llenan $T_1(T^2)$ los conjuntos J_p^* , observe que $T_1(T^2) = T^2 \times S^1$ es homomorfo al toro sólido hueco $T^2 \times D^1$ (donde $D^1 = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$) con las dos componentes de su frontera propiamente

Descripción del flujo en las subvariedades invariantes. Para ambos casos iii) y v) donde los $I_{c,p}$ son toros, tenemos un flujo de traslación que da vueltas alrededor de cada toro. Cuando p se aproxima a cero, el número de rotación (ver [10]) decrece y alcanza 0 cuando $p = 0$. Esto corresponde a que las circunferencias meridianas $\theta = \text{constante}$, recorridas con rapidez constante c son las geodésicas correspondientes para $p = 0$.

En el caso iv), ya vimos que la circunferencia singular que une los 2 toros para formar Y es una geodésica. Podemos pensar en Y como dos copias disjuntas de $D^1 \times S^1$ donde se identifican las cuatro circunferencias que constituyen la frontera para formar la circunferencia singular. Una geodésica en el interior de cualquiera de las dos componentes se aproxima como espiral hacia una de las componentes de la frontera cuando t va a $+\infty$, y hacia la otra cuando t va a $-\infty$. Al hacer la identificación, las geodésicas se aproximan en espiral hacia la circunferencia singular.

Sección 5. Movimiento de una partícula sobre una esfera

Considere finalmente el siguiente sistema mecánico: $G = \text{SO}(3)$, actuando como rotaciones en la forma obvia sobre

$$M = S^2, \text{ esfera unitaria en } \mathbb{R}^3$$

$$\langle, \rangle_K, \text{ producto euclidiano de } \mathbb{R}^3.$$

Denotemos por $\mathbf{M}(3)$ al grupo de matrices reales 3×3 , y recordemos que $\text{SO}(3)$ es su subgrupo de elementos que satisfacen $A^t A = I$, $\det A = 1$.

Usaremos la convención de que una matriz de $\mathbf{M}(3)$ colocada a la izquierda de un elemento $a \in \mathbb{R}^3$ indicará producto matricial, donde a se considera como vector columna 3×1 .

Entonces, la definición precisa de la acción $G \times M \rightarrow M$ y la inducida $G \times TM \rightarrow TM$ será como sigue para $A \in \text{SO}(3)$, $(a, v) \in TS^2$:

$$A \cdot a = Aa$$

y

$$A_*(a, v) = (Aa, Av).$$

Donde estamos considerando $TS^2 = \{(a, v) \in (\mathbb{R}^3)^2 \mid v \cdot a = 0, |a| = 1\}$.

Es claro que la última acción deja invariante la energía cinética $K(a, v) = |v|^2$, puesto que el producto euclidiano usual es invariante bajo rotaciones. Esto confirma que $(M, K, V = 0, G)$ es efectivamente un sistema mecánico con simetría.

Es sabido que el álgebra de Lie de $\text{SO}(3)$ consiste de las matrices antisimétricas 3×3

$$\mathcal{G}(\text{SO}(3)) = \{A \in \mathbf{M}(3) \mid A^t = -A\} = \text{Ant}(3).$$

y será útil considerar un isomorfismo de álgebras de Lie de $\text{Ant}(3)$ con \mathbb{R}^3 (donde \mathbb{R}^3 se considera como álgebra de Lie bajo el producto vectorial usual), definido como sigue:

$$\theta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{Ant}(3)$$

$$\theta(a)b = a \times b$$

para $a, b \in \mathbb{R}^3$.

Por lo tanto, podemos hablar de elementos en $\mathcal{G}(\text{SO}(3))$ indistintamente como vectores en \mathbb{R}^3 o matrices antisimétricas de acuerdo a nuestra conveniencia.

Sean e_1, e_2, e_3 los vectores unitarios a lo largo de los ejes en \mathbb{R}^3 , y consideremos la correspondiente base $\{\theta(e_i)\}$ de \mathcal{G} . Aplicando propiedad 2.3 para esta base, lo que permite considerar a $J: TS^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, resulta

$$(5.1) \quad I(a, v) = (|v|^2, a \times v) \text{ para } (a, v) \in TS^2.$$

NOTAS

- Obsérvese que J es precisamente la restricción del momento angular clásico en \mathbb{R}^3 .
- Para este sistema mecánico, el conjunto de eclipses es toda la variedad $\Lambda = M$, puesto que $\dim G > \dim M$.

c) En general si $p = a \times v$ para $(a, v) \in TS^2$, entonces $|p| = |a||v|$ y por tanto $|p|^2 = |v|^2 = c$.

El haz tangente unitario de S^2 es

$$T_1 S^2 = \{(a, v) \in TS^2 \mid a \in S^2, |v| = 1\}.$$

La aplicación que manda $(a, v) \in T_1 M$ en la matriz de $\mathbf{SO}(3)$ que tiene como filas, a , v y $a \times v$ respectivamente, es un difeomorfismo, así que podemos identificar $T_1 S^2 \approx \mathbf{SO}(3)$.

Consideremos $J^* = J|_{T_1 M}$. Por un cálculo de Jacobianos y la nota c), es fácil verificar que $J^*: \mathbf{SO}(3) \rightarrow S^2$ es sobre, no tiene valores críticos, y además se puede escribir como

$$5.2) \quad J^*(A) = A'(0, 0, 1), \quad A \in \mathbf{SO}(3).$$

De la definición 5.1 y c) de nuevo, obtenemos las siguientes relaciones:

$$(5.3) \quad J_p^* = J_p \quad \text{para} \quad |p| = 1;$$

$$(5.4) \quad J_p = I^{-1}(|p|^2, p) \quad \text{para todo} \quad p \in \mathbb{R}^3;$$

$$(5.5) \quad \text{Im}(I) = \{(c, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mid c = |p|^2\}.$$

Por otro lado, la linealidad de J en espacios tangentes nos permite escribir

$$(5.6) \quad J^{-1}(\lambda p) = \lambda J^{-1}(p).$$

Afirmamos que para el sistema mecánico en cuestión, se tiene

$$a) \quad J_p = S^1 \quad \text{para todo} \quad p \neq 0;$$

$$b) \quad J_0 = S^2 \approx \mathbf{M}.$$

En efecto, como $J^*: \mathbf{SO}(3) \rightarrow S^2$ no tiene valores críticos, J_p^* es una subvariedad de dimensión 1. De la ecuación 5.2 deducimos que J_p^* consiste de rotaciones de la forma $QP \in \mathbf{SO}(3)$, donde Q es una rotación fija tal que $Q'(0, 0, 1) = J^*(Q) = p$ y P es cualquier rotación de \mathbb{R}^3 dejando p fijo. Concluimos que J_p^* es topológicamente $S^1 = \mathbf{SO}(2)$.

Tomando en cuenta 5.6, esto prueba a), mientras que b) es trivial.

Finalmente, tomando en cuenta 5.4 y 5.6, tenemos

TEOREMA. Para nuestro sistema mecánico tenemos que

$$i) \quad I_{c,p} = S^1 \quad \text{para} \quad |p|^2 = c;$$

$$ii) \quad I_{0,0} = S^2;$$

$$iii) \quad I_{c,p} = \emptyset \quad \text{para} \quad |p|^2 \neq c;$$

$$iv) \quad \Sigma' = \Sigma = \text{Im} = \{(c, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mid c = |p|^2\}.$$

OBSERVACION. Geométricamente hablando, las $I_{c,p}$ para $(c, p) \in \text{Im} - (0, 0)$ son exactamente las curvas velocidad de geodésicas en TS^2 , así que la reducción del sistema dinámico original es total en este caso.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. ABRAHAM, *Foundations of Mechanics*, Benjamin, New York (1967).
- [2] L. AUSLANDER y R. MAC KENZIE, *Introduction to Differentiable Manifolds*, Mc Graw-Hill.
- [3] H. GOLDSTEIN, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Cambridge, Mass., (1951).
- [4] A. IACOB, *Invariant Manifolds in the motion of a rigid body*, Rev. Roumaine Math. Pures Apli., XVI, 1497-1521 (1971).
- [5] W. KAPLAN, *Topology of the two-body problem*. American Mathematical Monthly, 316-323 (Mayo 1942).
- [6] E. LACOMBA Z., *Geodesic on Homogeneous spaces with an Invariant metric*, se publicará en Anais da Academia Brasileira de Ciências, vol. 44, N.º 4.
- [7] L. H. LOOMIS y S. STEMBERG, *Advanced Calculus*, Addison-Wesley, Reading, Mass., (1968).
- [8] S. MAC LANE, *Hamiltonian Mechanics and Geometry*, American Mathematical Monthly (June-July 1970), pp. 570-586.
- [9] J. W. MILNOR, *Topology from a differentiable viewpoint*, Virginia (1969).

- [10] S. SMALE, *Topology and Mechanics I*, *Inventiones Math.*, vol. 10 (1970), pp. 305-331.
- [11] S. SMALE, *Topology and Mechanics II*, *Inventiones Math.*, vol. 11 (1970), pp. 45-64.
- [12] J. WOLF, *Differentiable fibre spaces and mappings compatible with Riemannian metrics*, *Michigan Math. Journal*, vol. 11 (1964), pp. 65-70.

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília
Brasília - BRASIL