Sur les Automorphismes des Corps Algébriquement Clos*

JEAN DIEUDONNÉ

A la mémoire de Carlos B. de Lyra (1928-1974)

1. Introduction.

Dans un travail récent [1], R. Baer a obtenu d'intéressants résultats sur le groupe d'automorphismes d'un corps algébriquement clos A de caractéristique 0, et particulièrement sur les *involutions* (automorphismes de période 2) appartenant à un tel groupe: elles sont liées, comme on sait, aux sous-corps ordonnés maximaux K de A tels que $A = K(i)$, et c'est en utilisant la théorie des corps ordonnés que R. Baer obtient ses résultats. Je me propose dans cette Note de compléter sur certains points les théorèmes de R. Baer, en utilisant des méthodes analogues.

Tous les corps dont il sera question seront supposés de caractéristique 0. J'utiliserai les notations et la terminologie du chapitre des *Éléments* de N. Bourbaki consacré aux corps ordonnés [2].

1. En vertu de la théorie d'Artin-Schreier, dans le groupe Aut(A) des automorphismes d'un corps algébriquement clos A de caractéristique 0, les seuls éléments autres que l'identité qui sont d'ordre fini sont les involutions: pour toute involution $\sigma \in$ Aut(A), le corps E des invariants de σ est ordonnable maximal et $A = E(i)$: l'unique structure d'ordre sur E est telle que les éléments ≥ 0 sont les carrés, et tout automorphisme de E conserve donc cet ordre. Le groupe Aut(E) des automorphismes de E est isomorphe au quotient du centralisateur $Z(\sigma)$ de σ dans Aut(A) par le groupe à 2 éléments $\{e, \sigma\}$. Pour que deux involutions σ, σ' dans Aut(A) soient conjuguées dans ce groupe, il faut et il suffit que leurs corps d'invariants E et E' soient isomorphes. La détermination des classes d'involutions conjuguées dans Aut(A) équivaut donc au problème suivant:

*Recebido pela SBM em 26 de março de 1975.

Déterminer les classes d'extensions ordonnables maximales isomorphes du corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels qui ont une base de transcendance sur $\mathbb{Q}$ de cardinal donné.

2. Soit L un ensemble quelconque: nous allons définir un corps ordonné maximal E ayant une base de transcendance sur $\mathbb{Q}$ indexée par L, de la façon suivante. Soit M une partie de L, dont nous supposons seulement que son cardinal soit *au plus égal* à celui de $\mathbb{R}$: il existe donc dans $\mathbb{R}$ une famille $(t_\lambda)_{\lambda\in M}$ algébriquement libre sur $\mathbb{Q}$: soit E_0 la fermeture algébrique dans $\mathbb{R}$ du corps $\mathbb{Q}((t_\lambda)_{\lambda\in M})$, qui est évidemment un corps ordonné maximal. Mettons ensuite une structure de bon ordre ayant un plus grand élément sur $L-M$, de sorte qu'on peut considérer les indices de $L-M$ comme des ordinaux $\alpha\geq 1$: nous définissons alors pour chaque $\alpha\in L-M$ un corps ordonné maximal E_α de la façon suivante: sur le corps $E_0(X_1)$ on prend la structure de corps ordonné pour laquelle X_1 est infiniment grand par rapport à E_0: E_1 est par définition une extension algébrique ordonnée de $E_0(X_1)$ qui est un corps ordonné maximal. Pour tout ordinal $\alpha>1$ de $L-M$, on définit ensuite E_α par récurrence: on suppose que les E_β pour $\beta<\alpha$ forment une suite croissante de corps ordonnés maximaux dont chacun est extension ordonnée des précédents: leur réunion E'_α est donc un corps ordonné maximal: on prend alors sur $E'_\alpha(X_\alpha)$ la structure de corps ordonné pour laquelle X_α est infiniment grand par rapport à E'_α: puis on prend pour E_α une extension algébrique ordonnée de $E'_\alpha(X_\alpha)$ qui est un corps ordonné maximal.

3. Le corps ordonné maximal E ainsi construit a les deux propriétés suivantes:

I. *Tout automorphisme u de* E *laisse invariants les éléments de* E_0. En effet, il laisse invariants les nombres rationnels, et tout élément x de E_0 non dans $\mathbb{Q}$ détermine une coupure de Dedekind (S, D), où S (resp. D) est l'ensemble des nombres rationnels $r<x$ (resp. $r>x$), et l'on a donc $u(x)>r$ pour $r\in S$ et $u(x)<r$ pour $r\in D$. Si l'on avait $u(x)\neq x$, par exemple $u(x)>x$, $1/(u(x)-x)$ serait infiniment grand par rapport à $\mathbb{Q}$ et le corps $u(E_0)$ ne serait pas archimédien, ce qui est absurde puisque u préserve la relation d'ordre: on a donc nécessairement $u(x)=x$.

II. *Il existe un automorphisme v de* E *tel que* E_0 *soit l'ensemble des éléments de* E *invariants par v*. On définit v dans chaque E_α par récurrence transfinie,

de façon que $v(E_\alpha)=E_\alpha$: il suffit de prendre $v(X_\alpha)=X_\alpha^2$, ce qui définit un isomorphisme de $E'_\alpha(X_\alpha)$ sur son sous-corps $E'_\alpha(X_\alpha^2)$; la théorie d'Artin-Schreier montre que cet isomorphisme se prolonge en un automorphisme de E_α. Montrons alors qu'il ne peut exister d'élément x n'appartenant pas à E_0 et invariant par v. En effet, soit α le plus petit ordinal ≥ 1 tel que $x\in E_\alpha$. Supposons d'abord que $x\notin E'_\alpha(X_\alpha)$, de sorte que x est algébrique de degré $n>1$ sur $E'_\alpha(X_\alpha)$; si q est le polynôme minimal de x sur $E'_\alpha(X_\alpha)$, le polynôme f^v obtenu en appliquant v aux coefficients de f est le polynôme minimal de x par rapport *à* $E'_\alpha(X_\alpha^2)$: mais cela est absurde, car

$$[E'_\alpha(X_\alpha, x) : E'_\alpha(X_\alpha^2)] = [E'_\alpha(X_\alpha, x) : E'_\alpha(X_\alpha)] \,.\, [E'_\alpha(X_\alpha) : E'_\alpha(X_\alpha^2)] = 2n.$$

On doit donc avoir $x\in E'_\alpha(X_\alpha)$, et par suite aussi $x\in E'_\alpha(X_\alpha^2)$ et par récurrence $x\in E'_\alpha(X_\alpha^{2^k})$. Mais en vertu du théorème de Lüroth, l'intersection des $E'_\alpha(X_\alpha^{2^k})$ est E'_α, puisque $E'_\alpha(X_\alpha)$ est de degré fini sur tout corps intermédiaire entre E'_α et $E'_\alpha(X_\alpha)$: on aurait donc $x\in E'_\alpha$, et par suite $x\in E_\beta$ pour un $\beta<\alpha$, contrairement à la définition de α.

4. A toute extension ordonnable maximale E du corps $\mathbb{Q}$ on peut attacher un invariant, à savoir le *plus petit* degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps des invariants d'un automorphisme de E. La construction du n.° 2 montre donc que pour tout entier r au plus égal au degré de transcendance de A sur $\mathbb{Q}$, il existe *au moins* $r+1$ corps ordonnés maximaux E *non isomorphes* contenus dans A et tels que $A=E(i)$, donc au moins $r+1$ involutions non conjuguées dans Aut(A). En particulier, les involutions de A ne peuvent être toutes conjuguées que si A est algébrique sur $\mathbb{Q}$, et les centralisateurs des involutions de A ne peuvent être tous finis que si A est algébrique sur $\mathbb{Q}$; ce sont là deux propriétés démontrées par R. Baer sous l'hypothèse supplémentaire que le cardinal de A est au plus égal à celui de $\mathbb{R}$, et l'on voit que cette hypothèse est superflue.

5. Dans l'article [1], R. Baer montre que pour tout corps algébriquement clos A de caractéristique 0, le *centre* de Aut(A) est réduit à l'élément neutre. On peut légèrement améliorer ce résultat en prouvant qu'en fait *l'intersection des centralisateurs des involutions de* A est réduite à l'élément neutre. On peut en effet se borner au cas où A n'est pas algébrique sur $\mathbb{Q}$: R. Baer montre alors que si $a\in A$ est transcendant sur $\mathbb{Q}$ et si $u\in$Aut(A) permute à toutes les involutions, a et $u(a)$ sont algébriquement dépendants sur $\mathbb{Q}$; pour toute extension algébrique E de $\mathbb{Q}(a)$ qui est un corps ordonnable maximal, on a nécessairement $u(a)\in E$, car si E' est une extension

ordonnable maximale de E telle que $E'(i) = A$, on a par hypothèse $u(E') = E'$, et E est l'ensemble des éléments de E' algébriques sur $\mathbb{Q}(a)$. Cela étant, en prenant dans la construction du n.º 2 les ensembles L et M réduits à un seul élément, on voit qu'il existe des extensions algébriques E de $\mathbb{Q}(a)$, qui sont des corps ordonnables maximaux et tels que la restriction de u à E soit nécessairement l'identité; on a donc $u(a) = a$, d'où l'on conclut comme R. Baer que u laisse invariants, non seulement les éléments de A transcendants sur $\mathbb{Q}$, mais aussi les éléments algébriques sur $\mathbb{Q}$, donc est l'identité.

Bibliography

[1] R. BAER, *Die Automorphismengruppe eines algebraisch abgeschlossenen Körpers der Charakteristik* 0, Math. Zeitschrift, 117 (1970), 7-17.

[2] N. BOURBAKI, Eléments de mathématique, Livre II: Algèbre, Chap. 6: Groupes et corps ordonnés, 2e éd., Paris (Hermann), 1964.

Villa Nancago
Nice – FRANCE