

## Singularites generiques des equations differentielles multiformes

Lak Dara

### Introduction

Etant donnée une équation différentielle:

$$(1.1) \quad F(x, y, y') = 0$$

ou  $F$  est une fonction  $C^\infty$  de trois variables réelles  $x$ ,  $y$  et  $p$ , on appelle point singulier pour une telle équation tout point de  $\mathbb{R}^3$  qui annule la dérivée de  $F$  par rapport à  $p$ . Au voisinage d'un point singulier, l'équation n'est pas résolue en  $y'$ , on dit alors qu'il s'agit d'une équation différentielle *multiforme*.

L'objet de ce travail est essentiellement l'étude locale de toutes les singularités génériques de ces équations différentielles.

Historiquement, le lieu singulier de (1.1) (la courbe  $J$  formée des points tels que  $F = \partial F / \partial p = 0$ , ou plutôt sa projection dans le plan  $\mathbb{R}^2$  des couples  $(x, y)$ ) a d'abord été appelée "solution singulière" de (1.1), et l'on croyait qu'en général, elle représentait l'enveloppe des "solutions générales" de (1.1); l'exemple type est celui des équations de Clairaut et c'est plus généralement le cas pour les équations différentielles attachées à une famille de courbes du plan. Darboux [1] a, le premier, mis fin à cette illusion, en montrant qu'en général  $J$  est lieu des points de rebroussement des solutions de (1.1). La première étude systématique des singularités a été faite par W. Dyck [2]. Il a donné une classification qualitative (pas tout à fait complète) des singularités les plus simples. Récemment, Thom [4] a repris cette question en la plaçant dans le contexte moderne de la théorie des singularités; la classification qu'il propose des singularités génériques de (1.1) est elle aussi incomplète.

Le présent travail peut se résumer en deux points suivants:

1) Nous démontrons, par application du théorème de transversalité de Thom, que l'équation (1.1) présente six types de singularités génériques; cette partie représente une mise au point des travaux antérieurs.

2) Nous cherchons à donner des prototypes des différentes singularités génériques. La liste d'équations différentielles suivantes représente probablement, du point de vue topologique, toutes ces singularités:

- a)  $x = y'^2$  : pli simple  
 b)  $y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2)$  où  $\chi \neq 0$  et  $\frac{1}{4}$ :  
     : pli-col si  $\chi < 0$   
     : pli noeud si  $0 < \chi < \frac{1}{4}$   
     : pli-foyer si  $\frac{1}{4} < \chi$ .  
 c)  $x = y'^3 - yy'$  : fonce elliptique  
      $x = y'^3 + yy'$  : fonce hyperbolique.

En fait, nous montrons seulement que la première équation de cette liste est un modèle différentiable de la singularité qu'elle représente.

Il est amusant d'observer que plusieurs de ces exemples ne figurent pas dans le traité de Kamke (Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen; Akad. Verl. Becker & Erler Kom-Ges. Leipzig, 1942).

Nous présentons aussi quelques remarques au sujet des équations de Clairaut, et montrons que l'équation  $y = y'^2$  est un modèle (différentiable) de la singularité la plus simple.

Monsieur Jean Martinet est à l'origine de cette étude et m'a donné les moyens de la mener à bien. Je suis heureux de lui exprimer ici toute ma gratitude.

## I — Generalites

### § 1. Equations différentielles du premier ordre.

1.1 D'une manière classique, on appelle équation différentielle ordinaire du premier ordre à une fonction inconnue  $y$ , toute relation de la forme:

$$(1) \quad F(x, y, y') = 0$$

où  $F$  est une fonction suffisamment différentiable, que nous supposons pour simplifier de classe  $C^\infty$  de trois variables  $x, y$  et  $p$ .

Usuellement, on appelle solution de (1.1), toute fonction  $f$  de la variable  $x$ , de classe  $C^1$  au moins, telle que la fonction:

$$x \rightarrow F(x, f(x), f'(x))$$

soit identiquement nulle.

Dans la suite, on ne suppose pas que (1.1) soit résolue en  $y'$ , i.e. il n'existe pas nécessairement de fonction  $\varphi$  de classe  $C^\infty$  de deux variables telle que l'équation (1.1) puisse se mettre sous la forme  $y' = \varphi(x, y)$ ; on dira alors que (1.1) est une *équation différentielle multiforme*.

### 1.2. Méthode de Lie.

L'espace  $\mathbb{R}^3$  des triplets  $(x, y, p)$  peut être considéré comme l'espace  $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des 1-jets de fonctions différentiables définies dans  $\mathbb{R}$  et à valeur dans  $\mathbb{R}$ . Il est muni d'une structure de contact canonique, celle définie par la forme différentielle:

$$\omega = dy - p dx.$$

La méthode de Lie consiste à remplacer l'équation (1.1) par le système différentiel de  $\mathbb{R}^3$  défini par:

$$(1.2) \quad \begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ dy - p dx = 0. \end{cases}$$

Ce système n'est autre que le champ de droites tangentes à la surface  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  définie par l'équation  $F(x, y, p) = 0$ , induit par la forme  $\omega$ . Dans la suite, on suppose toujours que  $S$  est une surface sans singularité soit, plus précisément, que 0 est une valeur régulière de  $F$ .

1.3. **Definition.** On appellera solution de (1.1), toute feuille de l'équation:

$$\omega|_S = 0.$$

### § 2. Singularites des equations différentielles.

2.1. Soit  $F(x, y, y') = 0$  une équation différentielle multiforme et  $S$  la surface correspondante. Posons:

$$\pi : S \rightarrow \mathbb{R}^2$$

la restriction de la projection canonique  $\pi$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2 : (x, y, p) \rightarrow (x, y)$ .

Dans la méthode de Lie, en remplaçant (1.1) par (1.2), il apparaît deux notions de singularités qui sont les suivantes:

- a) Singularité de la projection  $\pi : S \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 b) Singularité de  $\omega|_S$ .

Le cas a) représente les points de  $S$  où le plan tangent est vertical i.e. parallèle à l'axe  $Op$ . Le cas b) représente les points  $M$  de  $S$  tels que  $\omega|_S(M) = 0$ , i.e. le plan tangent en  $M$  à  $S$  est contenu dans le plan  $\omega(M) = 0$ , donc égal à ce dernier. Or, comme  $\omega(M) = 0$  est un plan vertical, il en résulte que  $S$  est à plan tangent vertical en  $M$ , donc le cas b) est contenu dans celui de a).

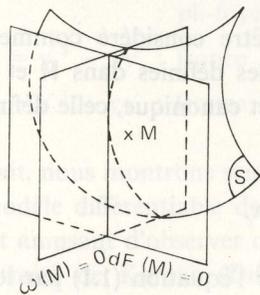


Fig. 1.a.

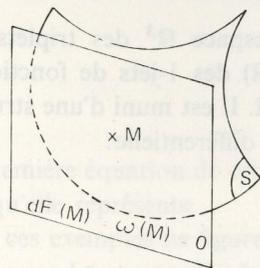


Fig. 1.b.

**2.2. Définition.** On dit qu'un point  $M$  de  $S$  est singulier pour l'équation (1.1) si le plan tangent à  $S$  en ce point  $M$  est vertical. Si, en plus, il est une singularité de  $\omega|_S$ , on dit qu'il est un point singulier à tangent non-transverse (à  $\omega = 0$ ). Dans le cas contraire, il est dit singularité à tangent transverse.

**2.3. Expression analytique d'une singularité.**

En tout point  $M$  de  $S$ , le plan tangent à  $S$  est défini par l'équation:

$$dF(M) = F_x(M)dx + F_y(M)dy + F_p(M)dp = 0$$

où  $F_x, F_y, F_p$  sont respectivement les dérivées de  $F$  par rapport à  $x, y, p$ . (Dans tout ce qui suit, nous adopterons cette notation pour toutes fonctions définies dans un espace numérique quelconque.)

Donc,  $M$  est singulier pour l'équation (1.1) si et seulement si  $F_p(M) = 0$ . Et dire que  $M$  est une singularité à tangent non-transverse revient à dire que,

$$\omega(M) \wedge dF(M) = 0.$$

Donc, on a simultanément:

$$\begin{cases} F_p(M) = 0 \\ F_x(M) + p F_y(M) = 0 \end{cases}$$

où  $p$  est la cote du point  $M$ .

**2.4. Equation de Clairaut.**

1) Nous allons considérer ici le cas des équations dont tous les points singuliers sont à tangent non-transverse. Ceci signifie que les solutions du système d'équations:

$$F = 0, F_p = 0$$

(qui définit le lieu singulier  $\Gamma$  de la projection  $\pi : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) vérifient l'équation:

$$F_x + p F_y = 0.$$

La situation la plus simple est celle où les fonctions  $F$  et  $F_p$  sont indépendantes en tout point de l'ensemble singulier  $\Gamma$ . Dans ce cas, la condition précédente équivaut trivialement au fait que la fonction  $F_x + p F_y$  appartienne à l'idéal engendré par  $F$  et  $F_p$  dans l'anneau des fonctions  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^3$ . On a alors la:

**Proposition.** Si les fonctions  $F$  et  $F_p$  sont indépendantes sur  $\Gamma$ , le feuilletage défini sur  $S - \Gamma$  par  $\omega|_S = 0$  se prolonge naturellement en un feuilletage  $\mathcal{F}$  non singulier sur  $S$ ; de plus, ce feuilletage est transverse à  $\Gamma$ .

**Démonstration:** Soit  $V$  le champ de vecteurs défini par:

$$V(x, y, p) = \begin{pmatrix} F_p(x, y, p) \\ p F_p(x, y, p) \\ -(F_x + p F_y)(x, y, p) \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que  $dF(V) = \omega(V) = 0$ . Donc toutes les trajectoires de  $V$  dans  $S$  sont les solutions de l'équation  $F(x, y, p) = 0$ . Or  $F_x + p F_y$  appartient à l'idéal engendré par  $F$  et  $F_p$ , il existe donc deux fonctions  $C^\infty$ ,  $A$  et  $B$  telles que:

$$-(F_x + p F_y) = A.F + B.F_p.$$

Par conséquent, en restriction à  $S$ ,  $V$  est de la forme  $F_p \cdot \bar{V}$  où  $\bar{V}$  est le champ de vecteurs de composantes  $(1, p, B)$  dans le système de coordonnées canoniques de  $\mathbb{R}^3$ . Il est donc clair que toutes les trajectoires de  $V$  dans  $S$  en-dehors de  $\Gamma$  coïncident exactement avec celle de  $\bar{V}$  et réciproquement.

La première partie est donc démontrée.

Pour voir que  $\Gamma$  est transverse aux orbites de  $\bar{V}$ , il suffit de montrer que  $dF_p(\bar{V}) \neq 0$  sur  $\Gamma$ . Sur  $S$ , on a:

$$dF_p(\bar{V}) = F_{px} + p F_{py} + BF_{p^2}.$$

Or la relation  $-(F_x + p F_y) = A \cdot F + B \cdot F_p$  donne en dérivant par rapport à  $p$ :

$$F_{px} + p F_{py} + BF_{p^2} = -F_y - (A_p \cdot F + A \cdot F_p + B_p \cdot F_p).$$

Sur  $\Gamma$ , on a donc  $dF_p(\bar{V}) = -F_y$ .

Comme 0 est une valeur régulière de  $F$  et que  $F_x + p F_y = F_p = 0$  sur  $\Gamma$  alors nécessairement  $dF_p(\bar{V})$  est sans zéro sur  $\Gamma$ .

La proposition est démontrée.

On déduit immédiatement de cette proposition que les projections dans  $\mathbb{R}^2$  des feuilles de  $\mathcal{F}$  sont tangentes à la courbe  $J$  projection de  $\Gamma$  (contour apparent de  $S$ ). Dans ce sens,  $J$  apparaît comme "enveloppe des solutions générales" de l'équation différentielle considérée; elle est appelée classiquement "solution singulière".

2) **Definition.** On appelle *équation de Clairaut* toute équation différentielle multiforme  $F(x, y, y') = 0$  telle que la fonction  $F_x + p F_y$  se trouve dans l'idéal de  $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  engendré par les fonctions  $F$  et  $F_p$ .

**Proposition.** Soit  $F(x, y, y') = 0$  une équation de Clairaut(\*). Si l'on suppose en plus que  $F_x + p F_y$  se trouve dans l'idéal engendré par  $F_p$ , alors il existe une submersion  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que  $F = G \circ \varphi$  où  $G$  est une fonction  $C^\infty$  de deux variables. En particulier, si  $F_x + p F_y = 0$  alors  $F = 0$  est de la forme  $y = xy' + g(y')$  où  $g$  est une fonction  $C^\infty$  telle que  $g(0) = g'(0) = 0$ .

**Démonstration:** Par hypothèse sur  $F$ , il existe une fonction  $B$  de classe  $C^\infty$  telle que:

$$F_x + p F_y + BF_p = 0.$$

Donc  $F$  est une intégrale première du champ de vecteurs:

$$\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} + B \cdot \frac{\partial}{\partial p}.$$

Par conséquent,  $F$  peut être mise sous la forme:

\*On suppose ici que  $F(0) = F_p(0) = 0$ .

$$F = G(I_1, I_2)$$

où  $I_1$  et  $I_2$  sont deux intégrales premières linéairement indépendantes de ce champ de vecteurs.

Lorsque la fonction  $B = 0$  i.e.  $F_x + p F_y = 0$ , alors on peut prendre  $I_1 = y - px$  et  $I_2 = p$ . Sous hypothèse que 0 est une valeur régulière de  $F$ , on vérifie que  $\partial G / \partial I_1$  est non nul sur  $\Gamma$ . Il existe donc une fonction  $g$  de classe  $C^\infty$  telle que:

$$y = xy' + g(y').$$

C'est cette équation  $y = xy' + g(y')$  qui est connue classiquement sous le nom d'équation de Clairaut.

### § 3. Définition intrinsèque d'une équation différentielle multiforme.

Soit  $M$  une variété  $C^\infty$  de dimension 2. Soit  $P \rightarrow M$  le fibré des éléments de contact de  $M$ , c'est-à-dire l'ensemble des couples  $(m, d)$  où  $m \in M$  et  $d \subset T_m(M)$  est une droite passant par l'origine; la variété  $P$  s'identifie canoniquement au fibré projectif  $P(T^*M)$  associé au fibré cotangent  $T^*M$ ; elle admet une structure de contact canonique  $\sigma$ .

Une équation différentielle (multiforme) sur  $M$  est par définition une sous-variété  $S \subset P$  de dimension 2. Les solutions de  $S$  sont par définition les feuilles du champ de directions défini par la restriction de  $\sigma$  à  $S$ .

En particulier, lorsque  $M$  est le plan  $\mathbb{R}^2$  des couples  $(x, y)$ , on retrouve toutes les équations différentielles (1.1). En effet, pour ce cas particulier, notons par

$$\pi : P^*(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

le fibré des éléments de contact de  $\mathbb{R}^2$  et  $\omega$  sa structure de contact canonique. En munissant  $\mathbb{R}^2$  du système de coordonnées naturelles  $(x, y)$ , l'espace  $\mathbb{R}^3$  des triplets  $(x, y, p)$  s'identifie canoniquement à un ouvert de  $P^*(\mathbb{R}^2)$  où un élément  $(x, y, p)$  s'interprète comme couple  $(m, d)$  dans lequel  $m \in \mathbb{R}^2$  est de coordonnées  $(x, y)$  et  $d$  est la droite de pente  $p$ . En prenant  $(x, y, p)$  comme système de coordonnées dans  $\mathbb{R}^3 \subset P^*(\mathbb{R}^2)$ , la structure de contact canonique est donc définie par la forme  $\omega = dy - p dx$ . Dans ce contexte, l'équation (1.1) n'est autre que celle définie par la surface  $S$  où:

$$S = \{(x, y, p) \in \mathbb{R}^3 / F(x, y, p) = 0\} \subset \mathbb{R}^3 \subset P^*(\mathbb{R}^2).$$

#### § 4. Equivalence des équations différentielles.

4.1. Soit  $G_2$  le groupe des difféomorphismes de  $\mathbb{R}^2$  et  $G_3$  le groupe des difféomorphismes de  $P^*(\mathbb{R}^2)$ .

Pour tout difféomorphisme  $\varphi$  dans  $G_2$ , il existe un difféomorphisme  $\bar{\varphi}$  unique dans  $G_3$  tel que

- i)  $\bar{\varphi}^*(\omega) \wedge \omega = 0$
- ii)  $\bar{\varphi} \circ \pi = \pi \circ \varphi$ .

Le difféomorphisme  $\bar{\varphi}$  s'appelle la transformation de contact de  $P^*(\mathbb{R}^2)$  induite par  $\varphi$ .

L'application qui à  $\varphi$  fait correspondre  $\bar{\varphi}$  identifie canoniquement  $G_2$  à un sous-groupe de  $G_3$ .

#### 4.2. Expression analytique de $\bar{\varphi}$ .

On se place toujours dans l'ouvert  $\mathbb{R}^3 \subset P^*(\mathbb{R}^2)$  du système de coordonnées naturelles  $x, y, p$ .

Soient  $g, h$  les composantes de  $\varphi$  dans  $\mathbb{R}^2$ . D'après ii),  $\bar{\varphi}$  aura pour composantes  $g, h$  et  $k$  où  $g$  et  $h$  sont celles de  $\varphi$  et  $k$  est une fonction qui dépend de toutes les variables  $x, y, p$ . Les calculs dans  $\mathbb{R}^3 \subset P^*(\mathbb{R}^2)$  donnent:

$$\bar{\varphi}^*(\omega) = (h_y - kg_y) dy + (h_x - kg_x) dx.$$

Dire que  $\bar{\varphi}^*(\omega) \wedge \omega = 0$  équivaut à dire que:

$$h_x - kg_x = -p(h_y - kg_y).$$

D'où l'on tire:

$$k(x, y, p) = \frac{h_x(x, y) + p h_y(x, y)}{g_x(x, y) + p g_y(x, y)}.$$

4.3. **Definition.** Soient  $S$  et  $S'$  deux équations différentielles de  $\mathbb{R}^2$  et  $M, M'$  deux points de  $S, S'$  respectivement. On dit que  $S$  en  $M$  est équivalente à  $S'$  en  $M'$ , s'il existe:

- i) un voisinage  $U$  de  $\pi(M)$  et  $U'$  de  $\pi(M')$  dans  $\mathbb{R}^2$ ,
- ii) un difféomorphisme  $\varphi$  de  $U$  dans  $U'$  tel que:
  - a)  $\varphi(M) = M'$
  - b)  $\varphi(S \cap \pi^{-1}(U)) = S' \cap \pi^{-1}(U)$ .

4.3.1. **Remarque:** Pour étudier localement une équation au voisinage d'un point  $M(x_0, y_0, p_0)$  de  $\mathbb{R}^3$ , grâce au difféomorphisme du type:

$$(x, y, p) \rightarrow (x - x_0, y - y_0 - p_0(x - x_0), p - p_0)$$

on peut toujours supposer que  $M$  est l'origine de  $\mathbb{R}^3$ .

4.4. **Remarque:** Soit  $G'_2$  le sous-groupe de  $G_3$  des difféomorphismes de  $P^*(\mathbb{R}^2)$  qui respectent les verticales relatives à la projection  $\pi$ :

$$G'_2 = \{\tilde{\varphi} \in G_3 / \exists \varphi \in G_2 \text{ tq } \pi \circ \tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi\}.$$

On a, de façon évidente:

$$G_2 \subset G'_2 \subset G_3.$$

On remarque que  $G_2$  est strictement contenu dans  $G'_2$  car un difféomorphisme de la forme:

$$\tilde{\varphi} : (x, y, p) \rightarrow (x, y, 2p)$$

est un élément de  $G'_2$  qui ne se trouve pas dans  $G_2$ .

Dans la suite, le groupe des difféomorphismes qui nous intéresse est  $G_2$  et non pas  $G'_2$ .

## II – Classification qualitative des singularités génériques

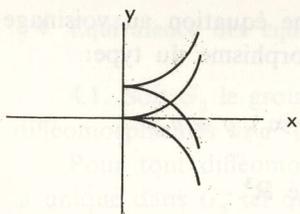
### § 1. Exemples de singularités à tangente transverse.

#### 1.1. Singularités avec pli simple.

Soit l'équation:

$$y^2 = x.$$

En chaque point du demi-plan des  $x > 0$ , on a deux tangentes possibles. Ces deux tangentes deviennent confondues et horizontales lorsque  $x = 0$ . Dans le demi-plan des  $x < 0$ , on n'a aucune tangente possible.



En intégrant, on obtient:

$$y = \pm \frac{2}{3} x^{3/2} + y_0.$$

Les courbes intégrales présentent donc des points de rebroussement le long de l'axe des  $y$ .

Pour cet exemple, considérons la surface  $S$  définie par l'équation  $x - p^2 = 0$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Les coordonnées naturelles sur  $S$  sont alors  $(p, y)$ . Et la projection  $\pi$  s'écrit  $\pi(p, y) = (p^2, y)$ . Donc

i) 0 est un point pli pour  $\pi$ .

D'autre part, la forme  $\omega$  restreinte à  $S$  est égale à  $dy - 2p^2 dp$ . Donc

ii) 0 est un point régulier de  $\omega$  sur  $S$ .

D'une manière générale, nous disons qu'un point  $M$  de  $\mathbb{R}^3$  est une *singularité à tangente transverse avec pli simple* (ou seulement *une singularité avec pli simple*) pour une équation  $F(x, y, y') = 0$  si i) et ii) sont satisfaites en  $M$  pour la surface  $S$ .

**1.2. Proposition.** 1) 0 est une singularité avec pli simple pour l'équation  $F(x, y, y') = 0$  si et seulement si la fonction  $F$  vérifie les conditions suivantes:

$$F(0) = F_p(0) = 0 \text{ et } F_x(0) F_{p^2}(0) \neq 0.$$

2) Si  $\varphi$  est un élément de  $G_2$  et  $\bar{\varphi}$  la transformation de contact de  $\mathbb{R}^3$  induite par  $\varphi$ , alors l'équation  $F \circ \bar{\varphi}^{-1} = 0$  présente encore une singularité avec pli simple au point  $\bar{\varphi}(0)$ .

**Démonstration:** 1) est évident compte tenu de la définition d'une singularité avec pli simple.

2) est aussi très facile: en effet,  $\bar{\varphi}$  respecte les verticales, donc il transforme une singularité de  $\pi: S \rightarrow \mathbb{R}^2$  en une singularité de  $\pi: \bar{\varphi}(S) \rightarrow \mathbb{R}^2$ . En plus, un pli sera transformé en un pli car lorsque 0 est un point pli sur  $S$  alors la verticale passant par 0 est transverse à la ligne de pli dans  $S$  et comme la transversalité est conservée par difféomorphisme, cette affirmation est claire.

D'autre part, dire que 0 est un point régulier de  $\omega$  dans  $S$  veut dire que le plan tangent en 0 à  $S$  est transverse à  $\omega = 0$  en ce point. Par la même raison que tout à l'heure et en tenant compte du fait que  $\bar{\varphi}$  laisse invariant  $\omega = 0$ , ceci démontre la proposition.

**1.3. Première espèce de singularité avec fronce (elliptique).**

Soit l'équation:

$$x = y^3 - yy'.$$

La surface  $S$  dans ce cas, a pour équation  $p^3 - py - x = 0$  sur laquelle l'équation  $\omega = 0$  s'écrit dans le système de coordonnées naturelles  $(p, y)$ , de la manière suivante:

$$(1 + p^2) dy - p(3p^2 - y) dp = 0.$$

On a donc un feuilletage sans singularité sur  $S$  dont les feuilles sont:

$$\begin{cases} p = tg t \\ y = a \cos t + tg^2 t - 2 \end{cases}$$

où  $t$  variant de  $-\frac{\pi}{2}$  à  $\frac{\pi}{2}$  et  $a$  de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

La projection  $\pi$  est définie par  $\pi(p, y) = (p^3 - py, y)$ . Son lieu singulier  $\Gamma$  est la parabole  $y - 3p^2 = 0$  dont la projection dans  $\mathbb{R}^2$  est la parabole semi-cubique  $(x = 2t^3, y = 3t^2)$ ,  $\pi$  présente donc une fronce de Whitney à l'origine. Pour les solutions de l'équation dans  $\mathbb{R}^2$ , on obtient la famille des courbes suivantes:

$$\begin{cases} x = tg t \cdot (2 - a \cos t) \\ y = tg^2 t - (2 - a \cos t). \end{cases}$$

La solution passant par 0, celle qui correspond à la valeur de  $a = 2$  est une sorte de parabole dont la concavité est tournée dans le sens de l'axe des  $y > 0$ . Donc par rapport à l'axe des  $x$ , elle est située du même côté que le contour apparent de la surface  $S$  (cf. fig. 2).

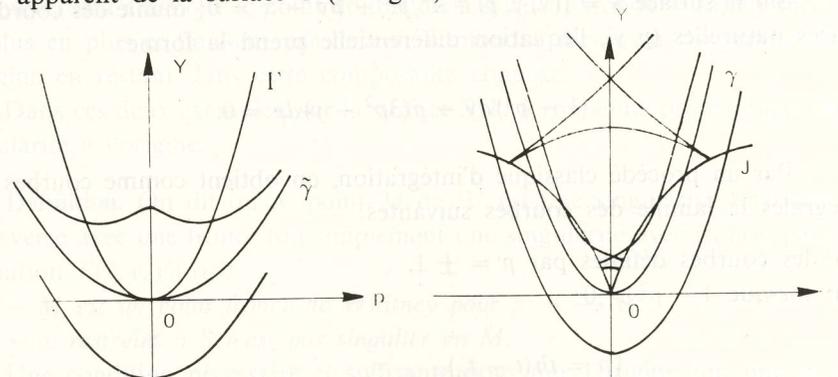


Fig. 2.a.

Fig. 2.b.

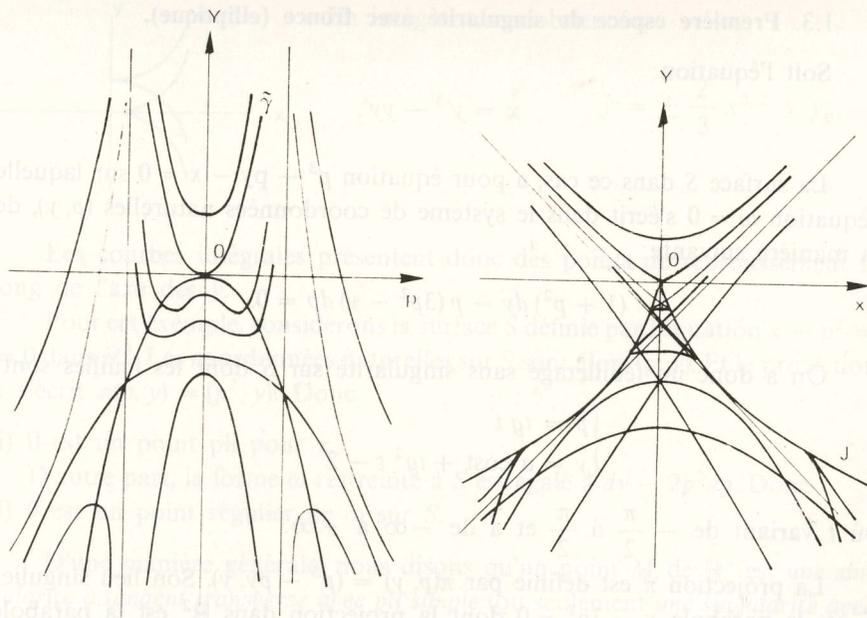


Fig. 3.a.

Fig. 3.b.

#### 1.4. Deuxième espèce de singularité avec fronce (hyperbolique).

On considère maintenant l'équation:

$$x = y'^3 + yy'.$$

Sur la surface  $S = \{(x, y, p) \in \mathbb{R}^3 / p^3 + py - x = 0\}$  munie des coordonnées naturelles  $(p, y)$ , l'équation différentielle prend la forme:

$$(1 - p^2)dy - p(3p^2 - y)dp = 0.$$

Par un procédé classique d'intégration, on obtient comme courbes intégrales la famille des courbes suivantes:

- i) les courbes définies par  $p = \pm 1$ ,
- ii) lorsque  $1 - p^2 > 0$ :

$$\begin{cases} p = th(t - t_0) \\ y = a ch(t - t_0) - 2 - th^2(t - t_0), \end{cases}$$

iii) lorsque  $1 - p^2 < 0$ :

$$\begin{cases} p = \coth(t - t_0) \\ y = b sh(t - t_0) - 2 - \coth(t - t_0). \end{cases}$$

Dans ce cas, la projection  $\pi$  a pour équation  $\pi(p, y) = (p^3 + py, y)$ . Son lieu singulier est la courbe  $y + 3p^2 = 0$  qui se projette elle aussi en un rebroussement classique  $(x = 2t^3, y = -3t^2)$ . Et la projection des courbes intégrales donne respectivement:

- deux droites  $y = \pm x - 1$ ,
- deux familles indexées par  $a$  et  $b$  des courbes:

$$\begin{cases} x = th(t - t_0) \cdot (a ch(t - t_0) - 2) \\ y = a ch(t - t_0) - 2 - th^2(t - t_0) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = \coth(t - t_0) \cdot (b sh(t - t_0) - 2) \\ y = b \cdot sh(t - t_0) - 2 - \coth(t - t_0). \end{cases}$$

La solution passant par 0, celle qui correspond à  $a = 2$  et le contour apparent de  $S$  sont situés de part et d'autre de l'axe des  $x$  (cf. fig. 3).

#### 1.5. Commentaires et définitions.

Premons les équations de 1.3. et de 1.4. Considérons un voisinage connexe  $U$  de 0 assez petit dans  $\mathbb{R}^2$ . Les solutions passant par 0 partagent respectivement  $U$  en deux composantes connexes. Dans la première composante connexe, on a un feuilletage sans singularité, alors que dans la seconde, celle qui contient le contour apparent de  $S$ , la situation est plus compliquée que dans la première. Chaque courbe intégrale fait une queue d'aronde dont les points de rebroussement se trouvent sur le contour apparent de  $S$ . Ces deux points de rebroussement ainsi que le point double de la queue d'aronde se rapprochent de plus en plus et finissent par devenir confondus lorsqu'on s'approche de l'origine en restant dans cette composante connexe.

Dans ces deux exemples, sur la surface  $S$ , la forme  $\omega$  ne présente pas de singularité à l'origine.

**Définition.** On dit qu'un point  $M$  de  $\mathbb{R}^3$  est une singularité à tangent transverse avec une fronce (ou simplement une singularité avec fronce) pour l'équation  $F(x, y, y') = 0$  si

- $M$  est un point fronce de Whitney pour  $\pi: S \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,
- $\omega$  restreint à  $S$  n'est pas singulier en  $M$ .

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'origine soit une singularité avec fronce pour l'équation  $F(x, y, y') = 0$  est que:

$F(0) = F_p(0) = F_{p^2}(0) = 0$  et  $(F_x(0) F_{py}(0) - F_y(0) F_{px}(0)) F_{p^3}(0) F_x(0) \neq 0$ .

La démonstration de cette affirmation est évidente.

**Proposition.** Si 0 est une singularité avec fronce pour l'équation  $F = 0$ , alors le signe de l'expression:

$$\rho = \det \begin{pmatrix} F_x(0) & F_y(0) \\ F_{px}(0) & F_{py}(0) \end{pmatrix} = \rho(F)$$

est invariant sous l'action de  $G_2$ .

**Définition.** On dit qu'une singularité avec fronce est une singularité (avec fronce) de première espèce ou de type elliptique si et seulement si  $\rho$  est positif. Dans le cas contraire, on dira que la singularité est de seconde espèce ou de type hyperbolique.

Avec cette définition la proposition précédente s'énonce de la manière suivante:

Si 0 est une singularité avec fronce de type elliptique (resp. hyperbolique) pour l'équation  $F(x, y, y') = 0$ , alors quel que soit  $\bar{\varphi}$  dans  $G_2 \subset G_3$ ,  $\bar{\varphi}(0)$  est une singularité avec fronce de type elliptique (resp. hyperbolique) pour l'équation  $F \circ \bar{\varphi}^{-1} = 0$ .

**Démonstration de la proposition:** Il suffit de montrer que le signe  $\rho$  a une interprétation géométrique naturelle.

On remarque d'abord que ce signe ( $sg(\rho)$ ) ne dépend que de la surface  $S$  représentative de l'équation:  $sg(\rho(F)) = sg(\rho(\beta \cdot F))$  dès que  $\beta$  est une fonction  $C^\infty$  sans zéro.

L'interprétation géométrique de  $sg(\rho)$  réside dans la comparaison des singularités, à l'origine, des courbes  $J$  (contour apparent de  $S$ ) et  $\gamma$  (projection de la solution  $\tilde{\gamma}$  de  $\omega|_S = 0$  passant par l'origine).

D'après la définition d'une singularité avec fronce et le théorème de fonctions implicites, l'équation peut être supposée, au voisinage de 0, de la forme:

$$x - G(p, y) = 0,$$

où  $G(0, 0) = G_p(0, 0) = G_{p^2}(0, 0) = 0$  et  $G_{py}(0, 0) \cdot G_{p^3}(0, 0) \neq 0$ .

Dans ces conditions, la courbe  $\Gamma \subset S$ , lieu singulier de  $\pi$ , a pour équation:

$$\Gamma \begin{cases} x - G(p, y) = 0 \\ G_p(p, y) = 0. \end{cases}$$

Compte tenu des conditions sur  $G$ ,  $J$  est alors défini paramétriquement, au voisinage de 0 par:

$$J \begin{cases} x = G(p, h(p)) \\ y = h(p) \end{cases}$$

où  $h(p)$  est l'unique solution de l'équation implicite  $G_p(p, y) = 0$  vérifiant  $h(0) = 0$ .

D'autre part, la solution  $\tilde{\gamma}$  de  $\omega|_S = 0$ , passant par l'origine vérifie par définition l'équation différentielle:

$$(1 - p G_y) dy - p G_p dp = 0.$$

C'est le graphe d'une fonction:

$$y = f(p).$$

Et  $\gamma$  est définie paramétriquement par:

$$\gamma \begin{cases} x = G(p, f(p)) \\ y = f(p). \end{cases}$$

Un calcul simple fournit alors pour  $J$  et  $\gamma$  les développements limités suivants:

$$J \begin{cases} x = -\frac{3aG_y(0)}{b} \cdot p^2 + \dots \\ y = -\frac{3a}{b} \cdot p^2 + \dots \end{cases}$$

$$\gamma \begin{cases} x = ap^3 + \lambda \cdot p^4 + \dots \\ y = \frac{3a}{4} \cdot p^4 + \dots \end{cases}$$

où  $a = G_{p^2}(0)$ ,  $b = G_{py}(0)$  et  $\lambda$  est une constante arbitraire qui n'interviendra pas dans la suite. Remarquons que  $\rho = -b$ .

Soit  $q : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  la projection sur une transversale quelconque de  $\gamma$  en 0 qui annule le vecteur tangent  $(1, 0)$  à  $\gamma$  en ce point. Alors, d'après le développement limité de  $\gamma$ ,  $q$  restreint à  $\gamma$  définit une singularité  $(\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  d'ordre égal à 4. De façon plus précise,  $q$  restreint à  $\gamma$  a pour développement limité :

$$q \circ \gamma(p) = \frac{3a}{4} \cdot q_y(0) \cdot p^4 + \dots$$

(car  $q_x(0) = 0$ , du fait que  $q$  annule le vecteur  $(1, 0)$ ).

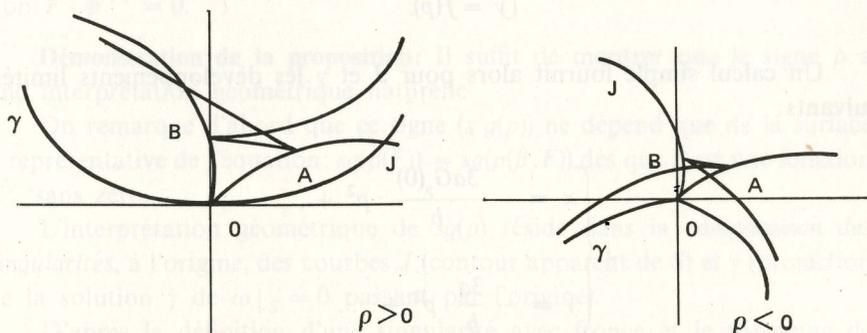
D'autre part, en restriction à  $J$ ,  $q$  est singulier d'ordre 2 à l'origine et son développement limité à l'origine s'écrit :

$$q \circ J(p) = -\frac{3a}{b} \cdot q_y(0) \cdot p^2 + \dots$$

Et dire que  $\rho$  est positif équivaut à dire que les images de  $\gamma$  et  $J$  par la projection  $q$  coïncident au voisinage de l'origine.

La proposition est donc démontrée.

**Remarque:** En fait le signe de  $\rho$  est même un *invariant topologique*. En effet, on voit sans difficulté que pour  $\rho > 0$  (resp.  $\rho < 0$ ) le point double d'une solution passant par 0 qui rencontre  $J$  se trouve à l'extérieur (resp. à l'intérieur) du triangle curviligne  $AOB$ .



## § 2. Exemples de singularités à tangent non transverse. Classification des équations $y = \alpha y'^2 + \beta xy' + \gamma x^2$ .

### 2.1. Considérons une équation

$$F(x, y, y') = 0,$$

dont 0 est une singularité à tangent non transverse. Alors  $F_x(0) = F_p(0) = 0$ . Par hypothèse sur  $S$ ,  $dF(0) \neq 0$ , donc  $F_y(0)$  est nécessairement non nul. Et on peut alors écrire l'équation  $F = 0$  sous la forme :

$$y = G(x, y'),$$

où  $G$  est une fonction  $C^\infty$  de deux variables  $(x, p)$  telle que  $G(0) = G_x(0) = G_p(0) = 0$ . Pour simplifier, on suppose dans la suite que  $G_{p^2}(0) \neq 0$ , c'est-à-dire que la projection  $\pi : S \rightarrow \mathbb{R}^2$  présente un pli à l'origine.

Les coordonnées naturelles sur  $S$  sont  $(x, p)$ . Dans ce système, l'équation sur  $S$  s'écrit :

$$\omega' = \omega|_S = (G_x - p) dx + G_p dp = 0.$$

Par construction, la forme  $\omega'$  s'annule à l'origine.

Remarquons que  $d\omega'(0) = -dp \wedge dx \neq 0$ ; ceci signifie que l'équation différentielle  $\omega' = 0$  n'admet jamais d'intégrale première locale au voisinage du point singulier.

La *partir linéaire* du développement de Taylor de  $\omega'$  à l'origine ne dépend que de la *hessienne* de  $G$ . (Notons que le déterminant  $\chi$  de cette partie linéaire est un *invariant* à l'équation.) Ceci suggère l'étude détaillée des équations de la forme :

$$y = \alpha y'^2 + \beta xy' + \gamma x^2$$

correspondant au cas où  $G$  est une forme quadratique.

Nous ferons cette étude sous les hypothèses additionnelles, qui seront justifiées par des arguments de généricité du § 4.

1)  $\alpha \neq 0$ ;  $\pi : S \rightarrow \mathbb{R}^2$  a une singularité pli à l'origine.

$$2) \chi = \det \begin{pmatrix} G_{px}(0) & G_{p^2}(0) \\ -G_{x^2}(0) & 1 - G_{px}(0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \beta & 2\alpha \\ -2\gamma & 1 - \beta \end{pmatrix} \neq 0.$$

Ceci signifie que la jacobienne de  $\omega'$  en 0 est inversible.

Commençons par regarder les trois exemples suivants :

### 2.2. Singularité du type pli-col.

On considère l'équation :

$$y = y'^2 + 2xy'.$$

La surface  $S$  est dans ce cas définie par l'équation  $p^2 + 2px - y = 0$ . La projection  $\pi$  s'écrit  $\pi(x, p) = (x, p^2 + 2px)$ , donc le lieu singulier est la droite

$x + p = 0$ . Et les courbes intégrales sont engendrées par le groupe à un paramètre:

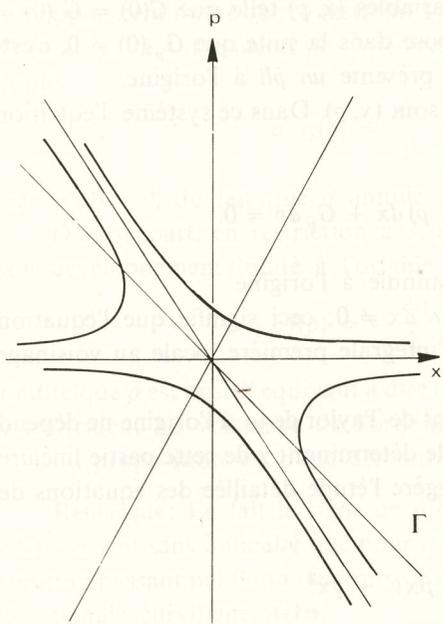


Fig. 4.a.

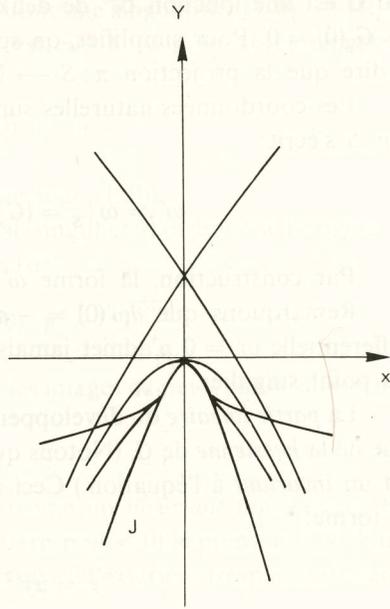


Fig. 4.b.

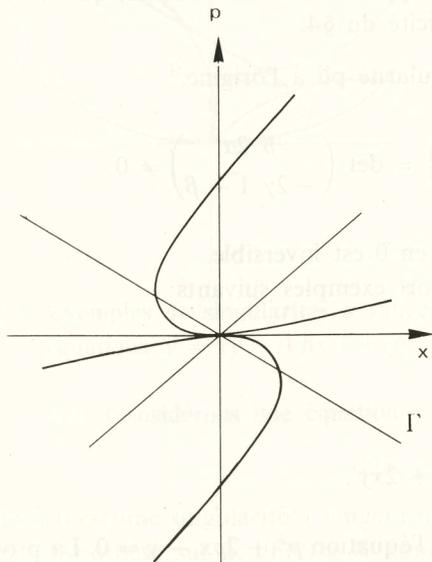


Fig. 5.a.

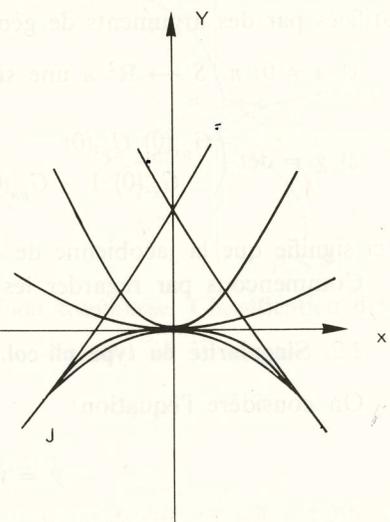


Fig. 5.b.

$$\varphi_t(x, p) = \begin{cases} \frac{(3x + 2p)e^{2t} - 2pe^{-t}}{3} \\ p e^{-t}. \end{cases}$$

On a donc un point col sur  $S$ .

En projetant dans le plan  $(x, y)$ , on obtient:

$$\begin{cases} x(t) = (x_0 - 2a)e^{2t} + 2a e^{-t} \\ y(t) = 6a(2a - x_0)e^t - 3a^2 e^{-2t} \end{cases}$$

où  $a$  est racine de l'équation  $9a^2 - 6x_0a - y_0 = 0$  lorsque la solution passe par le point  $(x_0, y_0)$  à l'instant  $t = 0$ . A l'intérieur du domaine  $y + x^2 \geq 0$  par un point passent deux courbes intégrales qui se groupent en deux familles, la première est formée par des courbes qui font des rebroussements sur le contour (cf. fig. 4) et les autres sont des courbes qui planent au-dessus du contour. Les deux séparatrices du col se projettent respectivement en solutions  $y = 0$  et  $y = -3x^2/4$ .

Désormais, nous appellerons *singularité de type pli-col* tout point d'une équation  $S$  qui est un point pli pour  $\pi$  et un point col pour  $\omega$  restreint à  $S$ .

#### 2.4. Singularités de type pli-noeud.

Cette fois, on se donne l'équation:

$$y = y'^2 + \frac{1}{3} xy'.$$

L'équation de  $S$  est  $p^2 + 1/3 px - y = 0$  et celle de la projection  $\pi$  est dans ce cas  $\pi(x, p) = (x, p^2 + 1/3 px)$ . On a donc un pli à l'origine. Avec ces coordonnées  $(x, p)$  de  $S$ , l'équation a pour courbes intégrales, les trajectoires du groupe à un paramètre:

$$\varphi_t(x, p) = \begin{cases} 2p e^{2t/3} + (x - 3p) e^{t/3} \\ p e^{2t/3}. \end{cases}$$

Le lieu singulier de  $\pi$ , la droite  $x + 6p = 0$  se projette dans  $\mathbb{R}^2$  en donnant la parabole  $36y + x^2 = 0$  et les projections des courbes intégrales sont devenues:

$$\begin{cases} x(t) = (x_0 - 3a) e^{t/3} + 3a e^{2t/3} \\ y(t) = \frac{a(x_0 - 3a)}{3} e^{t/3} + 2a^2 e^{4t/3} \end{cases}$$

où  $a$  est une racine de l'équation  $a^2 + x_0 a/3 - y_0 = 0$  quand  $x(0) = x_0$  et  $y(0) = y_0$ . Comme dans le cas précédent par un point intérieur au domaine  $36y + x^2 > 0$ , il passe deux solutions (cf. fig. 5).

**Definition.** On appelle singularité de type pli-noeud toute singularité  $M$  de l'équation  $F(x, y, y') = 0$  qui est un point pli pour  $\pi$  et un noeud pour la forme  $\omega$  sur  $S$ .

2.4. Singularité de type pli-foyer.

Soit l'équation:

$$y = \frac{1}{2}(y'^2 + x^2).$$

$S$  est la surface d'équation  $y = 1/2(p^2 + x^2)$  sur laquelle le lieu singulier de la projection est l'ensemble  $p = 0$  qui se projette en la parabole  $y = x^2/2$ . Les courbes intégrales sur cette surface sont engendrées par le groupe à un paramètre:

$$\varphi_t(x, p) = \begin{cases} (x \cos \omega t + \frac{2p - x}{2\omega} \sin \omega t) e^{t/2} \\ (p \cos \omega t + \frac{p - 2x}{2\omega} \sin \omega t) e^{t/2} \text{ avec } \omega = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

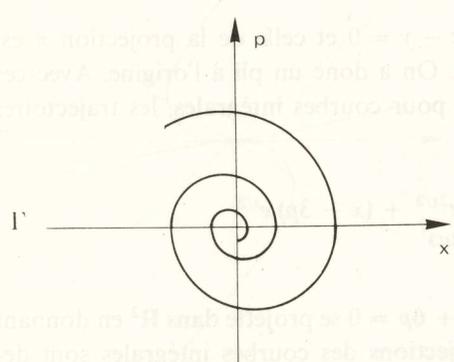


Fig. 6.a.

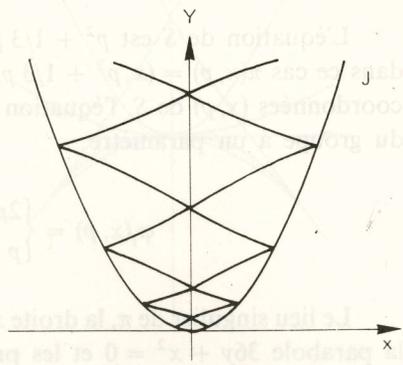


Fig. 6.b.

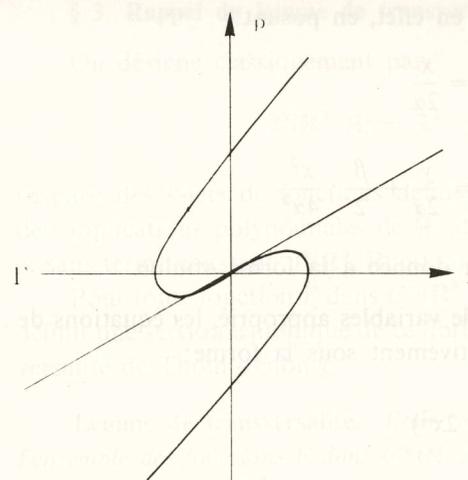


Fig. 7.a.

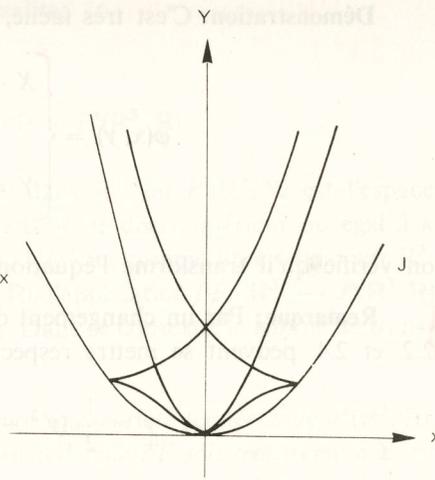


Fig. 7.b.

Elles se projettent dans le plan  $(x, y)$  en donnant:

$$\begin{cases} x(t) = (x_0 \cos \omega t + \frac{2p_0 - x_0}{2\omega} \sin \omega t) e^{t/2} \\ y(t) = \frac{1}{2} \|\varphi_t(x_0, p_0)\|^2 \end{cases}$$

où  $p_0 = \pm \sqrt{2y_0 - x_0^2}$  lorsque la courbe passe par le point  $(x_0, y_0)$  pour  $t = 0$ . Il est donc clair que par un point du domaine  $y - x^2/2 > 0$ , il passe deux solutions et deux seules. Sur le contour apparent, on observe, en-dehors de 0 des singularités avec pli-simple et 0 est le point limite de toutes les autres solutions (cf. fig. 6).

**Definition.** On appelle singularité de type pli-foyer toute singularité  $M$  de l'équation  $F(x, y, y') = 0$  telle que  $M$  soit à la fois un point pli pour  $\pi$  et un foyer pour  $\omega = 0$  sur  $S$ .

2.5. Proposition. Toute équation  $y = \alpha y'^2 + \beta xy' + \gamma x^2$  où  $\alpha \neq 0$ , est équivalente à l'une des équations suivantes:

$$y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2)$$

où  $\chi$  est un nombre réel arbitraire.

**Démonstration:** C'est très facile, en effet, en posant:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} X = \frac{x}{2\alpha} \\ Y = \frac{y}{2\alpha} + \frac{\beta}{2} \cdot \frac{x^2}{4\alpha^2} \end{cases}$$

on vérifie qu'il transforme l'équation donnée à la forme voulue.

**Remarque:** Par un changement de variables approprié, les équations de 2.2. et 2.4. peuvent se mettre respectivement sous la forme:

$$y = \frac{1}{2} (y'^2 - 2x^2)$$

$$y = \frac{1}{2} \left( y'^2 + \frac{2}{9} x^2 \right).$$

Cependant, pour des raisons de commodité de calcul, j'ai préféré les présenter sous leur forme initiale.

### 2.6. Discussion générale.

Si, dans l'énoncé précédent:

$\chi < 0$ : on reconnaît qu'on a affaire à un pli-col; la situation est analogue à celle de l'exemple 2.2.,

$0 < \chi < \frac{1}{4}$ : on a un pli-noeud, analogue à 2.3.,

$\chi > \frac{1}{4}$ : on a un pli-foyer, analogue à 2.4.

Si  $\chi = 1/4$ , la jacobienne de  $\omega|_S$  en 0 a une valeur propre double; il s'agit donc d'un cas dégénéré illustré par la figure 7.

**Remarque:** Dans le cas des plis-cols et des plis-noeuds, la jacobienne de  $\omega|_S$  en 0 admet deux directions propres de pentes respectives:

$$m_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\chi}}{2} \text{ et } m_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\chi}}{2},$$

lorsque  $S$  est muni des coordonnées naturelles  $x, p$ . Donc, les hypothèses  $\alpha \neq 0$  et  $\chi \neq 0$ , dans l'équation donnée, suffisent à impliquer que ces directions propres sont transverses au lieu singulier de  $\pi$  qui est la droite  $p = 0$ .

### § 3. Rappel du lemme de transversalité.

On désigne classiquement par:

$$J^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times P^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$$

l'espace des  $k$ -jets de fonctions définies dans  $\mathbb{R}^3$ , où  $P^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  est l'espace des applications polynômiales de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  de degré inférieur ou égal à  $k$  et sans terme constant.  $J^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  est considéré ici comme fibré trivial sur  $\mathbb{R}^3$ .

Pour toute fonction  $F$  dans  $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ , l'application  $j^k F : \mathbb{R}^3 \rightarrow J^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  définit une section canonique de ce fibré. Dans ce contexte, le lemme de transversalité de Thom s'énonce:

**Lemme de transversalité.** *Pour toute sous-variété fermée  $\Sigma$  de  $J^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ , l'ensemble des fonctions  $F$  dans  $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  telle que  $j^k F$  soit transverse à  $\Sigma$  est un ouvert partout dense pour la  $C^r$ -topologie, quel que soit  $r \geq k + 1$ .*

La topologie considérée est la topologie fine de Whitney.

Un cas particulier est celui où  $\text{codim}(\Sigma) \geq 4$  dans  $J^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ . Dans ce cas, le lemme signifie trivialement que  $j^k F(\mathbb{R}^3) \cap \Sigma = \emptyset$ .

### § 4. Généricité.

4.1. **Theoreme.** *L'ensemble des fonctions  $F$  dans  $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  telles que les seules singularités de l'équation:*

$$F(x, y, y') = 0$$

soient l'un des six types suivants:

- singularité avec pli simple,
- singularités de type pli-col, pli-noeud, pli-foyer,
- singularités avec fronce de type elliptique ou hyperbolique,

est un ouvert partout dense dans  $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  pour la  $C^r$ -topologie, quel que soit  $r \geq 3$ .

On exprime ce fait en disant que les singularités évoquées dans ce théorème sont les singularités génériques des équations  $F(x, y, y') = 0$ .

La démonstration de ce théorème exige d'abord quelques préliminaires.

4.2. L'espace  $J^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^{13}$  muni du système de coordonnées suivantes:

$$(x, y, p, \zeta, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_{11}, \zeta_{22}, \zeta_{33}, \zeta_{23}, \zeta_{31}, \zeta_{12})$$

de telles sortes que les composantes de  $j^2F$ , pour un  $F$  dans  $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  soient exactement:

$$(x, y, p, F, F_x, F_y, F_p, F_{x^2}, F_{y^2}, F_{p^2}, F_{yp}, F_{px}, F_{xy}).$$

Considérons dans  $J^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  les quatre sous-variétés fermées suivantes:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{\zeta = \zeta_3 = \zeta_{33} = 0\} \\ \Sigma' &= \{\zeta = \zeta_3 = \zeta_1 + p \zeta_2 = 0\} \\ \Sigma'' &= \{\zeta = \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 0\} \\ \Sigma''' &= \Sigma \cap \Sigma' = \{\zeta = \zeta_3 = \zeta_1 + p \zeta_2 = \zeta_{33} = 0\}. \end{aligned}$$

Soit, d'autre part, le sous-ensemble fermé (réunion finie de sous-variétés de codimension supérieure ou égal à 4):

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \{\zeta = \zeta_3 = \zeta_1 + p \zeta_2 = \zeta_2^2 \\ &\quad + 4[(\zeta_{31} + p \zeta_{23})(\zeta_2 + \zeta_{31} + p \zeta_{23}) \\ &\quad - \zeta_{33}(\zeta_{11} + 2p \zeta_{12} + p^2 \zeta_{22})] = 0\}. \end{aligned}$$

Le groupe  $G_2$  opère sur  $J^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  de la façon suivante, pour tout  $\bar{\varphi}$  dans  $G_2$  et  $\hat{a}$  dans  $J^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ , on associe le jet à  $\hat{a} \circ j^2 \bar{\varphi}^{-1}$  de façon canonique.

**Lemme.** Les sous-variétés  $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \Sigma'''$  ainsi que l'ensemble fermé  $\Sigma_0$  sont invariants sous l'action de  $G_2$  ainsi définie.

**Preuve:** Soit  $\bar{\varphi}$  un élément de  $G_2 \subset G_3$ .

Appelons  $(g, h, k)$  les composantes de  $\bar{\varphi}^{-1}$ . Si  $\hat{a}$  est un élément de  $J^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  de coordonnées:

$$(g(x, y), h(x, y), k(x, y, p), \zeta, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_{11}, \zeta_{22}, \zeta_{33}, \zeta_{23}, \zeta_{31}, \zeta_{12})$$

alors  $\hat{a} \circ j^2 \bar{\varphi}^{-1}$  sera  $\hat{a}'$  de coordonnées:

$$(x, y, p, \zeta, \zeta'_1, \zeta'_2, \zeta'_3, \zeta'_{11}, \zeta'_{22}, \zeta'_{33}, \zeta'_{23}, \zeta'_{31}, \zeta'_{12})$$

avec (je n'écris que les composantes qui interviennent dans  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ )

$$\begin{aligned} \zeta'_1 &= g_x \cdot \zeta_1 + h_x \cdot \zeta_2 + k_x \cdot \zeta_3 \\ \zeta'_2 &= g_y \cdot \zeta_1 + h_y \cdot \zeta_2 + k_y \cdot \zeta_3 \\ \zeta'_3 &= k_p \cdot \zeta_3 \\ \zeta'_{33} &= k_{p^2} \cdot \zeta_3 + k_p^2 \cdot \zeta_{33}. \end{aligned}$$

Il est donc clair que  $\Sigma$  et  $\Sigma''$  sont deux parties invariantes. Pour  $\Sigma'$ , on a:

$$\zeta'_1 + p \zeta'_2 = (g_x + p g_y) \zeta_1 + (h_x + p h_y) \zeta_2.$$

Comme  $\bar{\varphi}$  est une transformation de contact provenant du plan, on a:

$$k(g_x + p g_y) = (h_x + p h_y).$$

Donc  $\zeta'_1 + p \zeta'_2 = 0$  dès que  $\zeta_1 + k \zeta_2 = 0$ . Donc  $\Sigma'$  est aussi invariante. Et  $\Sigma''' = \Sigma \cap \Sigma'$  est aussi invariante.

On démontre de la même façon que  $\Sigma_0$  est aussi invariante, seulement le calcul est plus long que ceux que nous venons de faire.

**4.3. Démonstration du théorème:** L'ensemble  $\mathcal{U}$  des fonctions  $F$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$  telles que:

$$j^2F : \mathbb{R}^3 \rightarrow J^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$$

soit transverse simultanément à  $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \Sigma'''$  ainsi qu'à  $\Sigma_0$  est un ouvert dense de  $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  pour la  $C^r$ -topologie pour tout  $r \geq 3$ .

C'est une conséquence triviale du lemme de transversalité.

Prenons une fonction  $F$  dans  $\mathcal{U}$ .

1) Dire que  $j^2F$  est transverse à  $\Sigma''$  signifie que  $j^2F(\mathbb{R}^2) \cap \Sigma'' = \emptyset$ . Donc les équations  $F = F_x = F_y = F_p = 0$  ne sont jamais vérifiées simultanément; autrement dit, 0 est une valeur régulière de  $F$ ; ceci justifie l'hypothèse faite au paragraphe 1.2. du chapitre I que l'ensemble  $S = \{F = 0\}$  est une surface sans singularité.

2) Considérons maintenant un point singulier de  $F(x, y, y') = 0$ . D'après la remarque 4.3.1. du chapitre I, nous pouvons supposer que ce soit l'origine  $x = y = p = 0$ .

a) Si  $j^2F(0)$  n'appartient ni à  $\Sigma$  ni à  $\Sigma'$ , il est clair que la singularité est un pli simple.

b) Si  $j^2F(0)$  se trouve dans  $\Sigma$ , alors  $j^2F(0)$  n'appartient pas à  $\Sigma'$  par transversalité de  $j^2F$  à  $\Sigma'' = \Sigma \cap \Sigma'$  qui est de codimension 4, donc évité génériquement. Ceci signifie que:

$$F(0) = F_p(0) = F_{p^2}(0) = 0 \text{ et } F_x(0) \neq 0.$$

Remarquons que si  $j^2F$  est transverse à  $\Sigma$  (resp.  $\Sigma', \Sigma'', \Sigma''', \Sigma_0$ ) en 0, alors pour toute fonction  $u$  dans  $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  telle que  $u(0) \neq 0$ , il est évident que

$j^2(uF)$  est aussi transverse à  $\Sigma$  (resp.  $\Sigma'$ ,  $\Sigma''$ ,  $\Sigma'''$ ,  $\Sigma_0$ ) en ce point. Par conséquent, l'inégalité  $F_x(0) \neq 0$  permet de supposer que  $F$  soit de la forme  $F(x, y, p) = G(p, y) - x$ .

Dans ce cas, la condition de transversalité à  $\Sigma$  donne:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & G_y(0) & 0 \\ 0 & G_{py}(0) & 0 \\ * & * & G_{p^3}(0) \end{pmatrix} \neq 0,$$

soit  $G_{p^3}(0) G_{py}(0) \neq 0$ . Ceci montre alors que 0 est l'une des singularités avec fronce de type elliptique ou hyperbolique.

c) Si  $j^2F(0)$  appartient à  $\Sigma'$ , alors par la même raison que dans b),  $j^2F(0)$  n'appartient pas à  $\Sigma$ . Ceci signifie que:

$$F(0) = F_p(0) = 0 \text{ mais } F_{p^2}(0) \neq 0;$$

donc la projection  $\pi: S \rightarrow \mathbb{R}^2$  a une singularité pli à l'origine.

D'autre part,  $F_x(0) = 0$ , donc il s'agit d'une singularité à tangent non transverse. D'après 1),  $F_y(0)$  est non nul et d'après la remarque dans b), on peut supposer  $F$  de la forme:

$$F(x, y, p) = G(x, p) - y.$$

La transversalité à  $\Sigma'$  se traduit par la condition:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ G_{px}(0) & 0 & G_{p^2}(0) \\ G_{x^2}(0) & 0 & G_{px}(0) - 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

par retour aux notations du paragraphe 2, ceci signifie que  $\chi \neq 0$  et la transversalité à  $\Sigma_0$  signifie  $\chi \neq 1/4$  par définition de  $\Sigma_0$ , ceci montre qu'on a affaire à une singularité pli-col, pli-noeud ou pli-foyer.

Le théorème est donc démontré.

### III — Recherche de modèles locaux

#### § 1. Remarques préliminaires sur l'équivalence locale des équations différentielles.

1.1. On a défini au chapitre I la notion d'équivalence de deux équations différentielles, via un difféomorphisme du plan. Nous allons considérer dans ce chapitre quelques problèmes locaux de classification d'équations différentielles, pour cette notion d'équivalence.

Nous travaillons donc sur l'espace des germes en  $0 \in \mathbb{R}^3$  de surfaces  $S = \{F(x, y, p) = 0\}$ , ( $F(0) = 0$ ). Le groupe  $H$  opérant sur cet espace est le groupe des difféomorphismes locaux  $\varphi: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  tels que  $\bar{\varphi}$  (transformation de contact induite par  $\varphi$ ) conserve l'origine de  $\mathbb{R}^3$ ; ceci signifie que la jacobienne  $D\varphi(0)$  laisse invariante la tangente en 0 à l'axe des  $x$ . Un germe  $\varphi = (g, h)$  se trouve dans  $H$  si et seulement si  $h_x(0) = 0$ .

Pratiquement, on pourra parfois définir un germe en  $0 \in \mathbb{R}^3$  d'équation différentielle par un germe d'immersion  $f: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  (représentation paramétrique de la surface  $S$ ). Dans ce cas, il est clair que deux germes d'immersion  $f$  et  $f'$  définiront deux équations différentielles équivalentes si et seulement s'il existe un élément  $\varphi$  appartenant à  $H$  et un difféomorphisme local  $\psi: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ , de la source de  $f$  à celle de  $f'$  tels que:

$$f = \bar{\varphi}^{-1} \circ f' \circ \psi.$$

1.2. **Proposition.** Soient  $f$  et  $f': (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  deux germes d'immersions tels que les lieux singuliers de  $\pi f = \pi \circ f$  et  $\pi f'$  soient respectivement des germes d'ensembles fermés sans point intérieur. Alors pour que  $f$  et  $f'$  définissent deux équations différentielles équivalentes, il faut et il suffit qu'il existe un difféomorphisme  $\psi$  de  $(\mathbb{R}^2, 0)$  et un élément  $\varphi$  de  $H$  tels que:

$$\begin{cases} \pi f = \varphi^{-1} \circ \pi f' \circ \psi \\ f^*(\omega) \wedge (f' \circ \psi)^*(\omega) = 0. \end{cases}$$

**Démonstration:** La condition nécessaire résulte immédiatement de la définition d'équivalence et de celle d'une transformation de contact induite par un difféomorphisme du plan.

Pour démontrer la condition suffisante, il suffit de montrer que si  $\bar{\varphi}$  est une transformation de contact induite par  $\varphi \in H$ , alors le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow \psi & & \downarrow \bar{\varphi} & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f'} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Par construction de ce diagramme, on n'a qu'à vérifier la commutativité du rectangle de gauche. Pour cela, les relations  $\bar{\varphi}^*(\omega) \wedge \omega = 0$  et  $f^*(\omega) \wedge (f' \circ \psi)^*(\omega) = 0$  impliquent:

$$(\bar{\varphi} \circ f)^*(\omega) \wedge (f' \circ \psi)^*(\omega) = 0.$$

Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  les composantes de  $\bar{\varphi} \circ f$  et  $\alpha, \beta, \gamma'$  celles de  $f' \circ \psi$ . Alors, on a:

$$(d\beta - \gamma d\alpha) \wedge (d\beta - \gamma' d\alpha) = 0.$$

Or, par hypothèse, en travaillant sur les représentants de  $f, f' \dots$  définis dans un voisinage assez petit de 0,  $d\alpha \wedge d\beta$  est non nul dans un ouvert partout dense. Donc  $\gamma = \gamma'$  dans cet ouvert dense, alors, par continuité  $\gamma$  est partout égal à  $\gamma'$ . La proposition est donc démontrée.

## § 2. Modèle local d'une singularité avec pli simple.

**2.1. Theoreme.** Toute singularité à tangente transverse avec pli simple est équivalente à la singularité définie en 0 par l'équation:

$$x = y^2.$$

Nous exprimons ce théorème en disant que les singularités avec pli simple admettent un modèle local  $x = y^2$ . En outre, il est clair que si 0 est une singularité avec pli simple pour une équation  $F(x, y, y') = 0$ , alors pour toute fonction  $F'$  suffisamment voisine de  $F$ , il existe un point  $Q$  voisin de 0 tel que l'équation  $F'(x, y, y') = 0$  présente une singularité avec pli simple au point  $Q$ : on exprime ce fait en disant que les singularités de ce type sont différentiablement stables.

**2.2. Lemme.** Pour toute forme de Pfaff  $\bar{\omega}$  de  $\mathbb{R}^2$  de la forme:

$$\bar{\omega} = dv - 2u k(u, v) du$$

telle que  $k(0) = 0$  et  $\partial k / \partial u(0) \neq 0$ , il existe un difféomorphisme local  $\psi$  de  $(\mathbb{R}^2, 0)$  de la forme

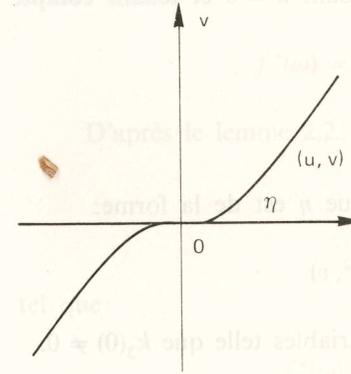
$$\begin{cases} \bar{u} = \alpha(u^2, v)u \\ \bar{v} = \beta(u^2, v) \end{cases}$$

tel que:

$$\bar{\omega} \wedge \psi^*(d\bar{v} - 2\bar{u}^2 d\bar{u}) = 0.$$

**Démonstration:** Considérons le difféomorphisme local de  $(\mathbb{R}^2, 0)$  qui transforme les courbes intégrales de  $\bar{\omega}$  en droites parallèles à l'axe des  $u$ . Il est de la forme:

$$(u, v) \rightarrow (u, \eta)$$



où  $(0, \eta)$  est l'intersection de la feuille passant par  $(u, v)$  avec l'axe des  $v$  (dans le système de coordonnées initiales).

$\eta$  est donc une fonction de  $(u, v)$  telle que  $\partial \eta / \partial v(0) \neq 0$ . Par application du théorème de préparation, on peut

écrire:

$$\eta = k_1(u^2, v)u + k_2(u^2, v),$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont des fonctions de classe  $C^\infty$  de deux variables. Et, par hypothèse sur  $\eta$ , on vérifie que  $\partial k_2 / \partial v(0) \neq 0$ .

En écrivant que  $\eta$  est une intégrale première de  $\bar{\omega}$ , on a:

$$d\eta = \mu \bar{\omega}.$$

où  $\mu$  est une fonction  $C^\infty$  de  $(u, v)$  telle que  $\mu(0) \neq 0$ .

Considérons maintenant la courbe intégrale de  $\bar{\omega}$  passant par 0. Compte tenu de la forme de  $\bar{\omega}$ , elle est graphe d'une fonction  $v = h(u)$  où  $h$  est de classe  $C^\infty$  en  $u$  telle que:

$$h(0) = h'(0) = 0$$

et que  $h'(u) = 2k(u, h(u))u$ .

En développant  $k$  à l'ordre 2, on trouve que

$$h'(u) = au^2 + u^3 \varepsilon(u) \quad \text{avec } a \neq 0.$$

D'où  $h''(0) = 0$  et  $h'''(0) \neq 0$ .

En restreignant  $\eta$  à la trajectoire de  $\bar{\omega}$  passant par 0, on a :

$$0 \equiv k_1(u^2, h(u))u + k_2(u^2, h(u)).$$

Donc, en écrivant que toutes les dérivées du second membre de cette dernière égalité sont toutes nulles, puis en faisant  $u = 0$  et tenant compte du fait que :

$$\frac{\partial k_2}{\partial v}(0) \text{ et } h''(0)$$

sont simultanément non nuls, on s'aperçoit que  $\eta$  est de la forme :

$$\eta = k_3(u^2, v)u^3 + k_2(u^2, v)$$

avec  $k_3$  une fonction de classe  $C^\infty$  de deux variables telle que  $k_3(0) \neq 0$ .

Donc, en posant :

$$\begin{cases} \bar{u} = [3/2 \cdot k_3(u^2, v)]^{1/3} u \\ \bar{v} = -k_2(u^2, v), \end{cases}$$

on obtient un difféomorphisme local  $\psi$  de la forme voulue tel que :

$$\eta = \psi^* \left( \frac{2\bar{u}^3}{3} - \bar{v} \right).$$

Comme  $d\eta = \mu\bar{\omega}$ , le lemme est donc démontré.

**2.3. Démonstration du théorème.** Par hypothèse, l'équation donnée peut être mise sous la forme :

$$f : (u, v) \rightarrow (g(u, v), v, u)$$

où  $g$  est une fonction  $C^\infty$  régulière d'ordre 2 en  $u$ .

D'après [5], il existe des systèmes de coordonnées dans le plan  $(u, v)$  et  $(x, y)$  tels que :

$$\pi f(u, v) = (u^2, v).$$

Dans ces coordonnées,  $f$  devient :

$$f : (u, v) \rightarrow (u^2, v, k(u, v))$$

où  $k$  est une fonction  $C^\infty$  en  $u$  et  $v$ .

Comme  $S$  est une surface régulière, on a  $\partial k / \partial u(0) \neq 0$ .

Dans ce système de coordonnées  $(u, v)$ , l'équation différentielle sur la surface s'écrit :

$$f^*(\omega) = \bar{\omega} = dv - 2u k(u, v)du = 0.$$

D'après le lemme 2.2., il existe un difféomorphisme  $\psi$

$$\begin{cases} \bar{u} = \alpha(u^2, v)u \\ \bar{v} = \beta(u^2, v) \end{cases}$$

tel que :

$$f^*(\omega) \wedge \psi^*(d\bar{v} - 2\bar{u}^2 d\bar{u}) = 0.$$

Prenons  $\varphi$  l'inverse du difféomorphisme local en 0 du plan  $(x, y)$  défini par :

$$\begin{cases} \bar{x} = \alpha^2(x, y)x \\ \bar{y} = \beta(x, y). \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} \pi f = \varphi^{-1} \circ \pi f_0 \circ \psi \\ f^*(\omega) \wedge (f_0 \circ \psi)^*(\omega) = 0 \end{cases}$$

où  $f_0(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}^2, \bar{v}, \bar{u})$ . La proposition 1.2. permet de conclure le théorème.

**Remarque :** A priori, les difféomorphismes locaux du plan  $(x, y)$  utilisés dans cette démonstration ne sont pas forcément permis i.e. ne se trouvent pas dans  $H$ . Cependant une vérification élémentaire montre que c'est bien le cas.

### § 3. Modèle local d'une équation de Clairaut avec un pli.

3.1. Considérons maintenant une équation différentielle

$$F(x, y, y') = 0$$

où  $F_x + pF_y$  se trouve dans l'idéal de  $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  engendré par  $F$  et  $F_p$  et  $F(0) = 0$ . Nous disons que  $F(x, y, y') = 0$  est une "équation de Clairaut avec un pli" à l'origine 0 de  $\mathbb{R}^3$  si ce point est un point pli de la projection  $\pi : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

D'autre part, l'hypothèse que 0 est une valeur régulière de  $F$  montre que  $F_{y'}(0)$  est différent de 0 pour une telle équation. Elle peut donc s'écrire:

$$y = g(x, y')$$

où  $g(x, p)$  est une fonction de classe  $C^\infty$  telle que  $g(0) = g_p(0) = 0$  et  $g_{p^2}(0) \neq 0$ .

Pour les équations de ce type, on a le:

**Theoreme.** *Toute équation de Clairaut avec un pli est équivalente à l'équation:*

$$y = y'^2.$$

**3.2. Démonstration.** On vient de voir que l'équation donnée peut se mettre sous forme:

$$f(u, v) = (u, g(u, v), v)$$

où  $g$  est une fonction régulière d'ordre 2 en  $v$ , à l'origine. D'après [5], il existe des coordonnées  $(u, v)$  et  $(x, y)$  telle que  $S$  soit l'image de l'application:

$$(u, v) \rightarrow (u, v^2, k(u, v)).$$

Et dans ces coordonnées, l'équation différentielle sur  $S$  devient:

$$f^*(\omega) = 2v dv - k(u, v) du = 0.$$

Mais l'hypothèse sur  $F$  montre le lieu singulier  $\Gamma$  de  $\pi f$  est aussi le lieu des points critiques de  $f^*(\omega)$  (cf. 2.4., chapitre I). Or,  $\Gamma$  n'est autre que l'ensemble  $v = 0$ , ceci revient à dire que  $k(u, 0)$  est identiquement nul. Donc,  $k$  est de la forme:

$$k(u, v) = 2k_1(u, v)v.$$

D'où, en-dehors de  $v = 0$ , l'équation sur  $S$  se met:

$$\bar{\omega} = dv - k_1(u, v) du = 0.$$

D'autre part, la régularité de  $S$  en 0 montre que  $k_1(0) \neq 0$ . Avec ces notations, on a:

**Lemme.** *Il existe un difféomorphisme  $\psi$  de  $(\mathbb{R}^2, 0)$  de la forme:*

$$\begin{cases} \bar{u} = \alpha(u, v^2) \\ \bar{v} = \beta(u, v^2)v \end{cases}$$

tel que:

$$\bar{\omega} \wedge \psi^*(2d\bar{v} - d\bar{u}) = 0.$$

La démonstration de ce lemme consiste, comme dans le cas du lemme 2.2. de ce chapitre, à décomposer une intégrale première de  $\bar{\omega}$  en fonction paire et impaire.

Pour terminer la démonstration du théorème, on pose:

$$\varphi^{-1}(x, y) = \begin{cases} \alpha(x, y) \\ \beta(x, y)^2 y. \end{cases}$$

Puis, on applique la proposition 1.2. pour tirer la conclusion.

#### § 4. Remarques sur les autres singularités génériques.

**4.1. Singularités composées avec un pli.** On a vu au § 2 du chapitre II que toute équation de la forme:

$$y = \alpha y'^2 + \beta xy' + \gamma x^2 \text{ avec } \alpha \neq 0$$

est équivalente à l'une des équations  $y = 1/2(y'^2 + \chi x^2)$  où  $\chi \in \mathbb{R}$ .

Il est clair que pour  $\chi' \neq \chi$  l'équation  $y = 1/2(y'^2 + \chi' x^2)$  n'est pas équivalente en 0 à l'équation  $y = 1/2(y'^2 + \chi x^2)$ ; par conséquent, les singularités de type pli-col, pli-noeud et pli-foyer ne sont pas stables différemment.

Par contre, pour la raison que les cols, noeuds et foyers sont structurellement stables et que le pli est une singularité stable, il est probable que les singularités de type pli-col, pli-noeud et pli-foyer sont topologiquement stables.

**4.2. Singularités avec fronce.** Pour ces types de singularité, les renseignements que nous avons sont encore très incomplets. Cependant rien n'empêche de penser qu'on a aussi la stabilité, au moins topologique dans ce cas. Les raisons, bien que non suffisantes, sont les suivantes:

1) Avec les notations de 1.5. du chapitre II,  $\rho$  est une fonction qui dépend continûment de  $F$ ; par conséquent, son signe l'est également. (On suppose que 0 est une singularité avec fronce pour  $F(x, y, y') = 0$ .)

D'autre part, si  $F'$  est une autre fonction assez voisine de  $F$ , il est évident qu'il existe un point  $Q$  voisin de 0 tel que  $Q$  est une singularité avec fronce pour  $F'(x, y, y') = 0$ , et que  $Q$  dépend aussi continûment de  $F'$ . Donc, le signe de  $\rho$  ne change pas. ceci montre que  $Q$  pour  $F' = 0$  a le même type que 0 pour  $F = 0$ .

2) Pour une forme particulière de la singularité fronce, on a la:

**Proposition.** Pour tous  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $\mathbb{R}^*$ , les équations

$$\begin{cases} F = y'^3 + \lambda yy' - x = 0 \\ F' = y'^3 + \mu yy' - x = 0 \end{cases}$$

sont équivalentes si et seulement si  $\lambda\mu > 0$ , autrement dit  $\rho(F)$  et  $\rho(F')$  sont de même signe.

**Preuve:** La condition nécessaire résulte de la définition de  $\rho$ . Réciproquement, si  $\lambda = \alpha^2\mu$ , prenons  $\varphi$  le difféomorphisme:

$$\begin{cases} g(x, y) = \alpha^3 x \\ h(x, y) = \alpha^4 y. \end{cases}$$

Il transforme  $F'$  en:

$$\alpha^3 p^3 + \mu \alpha^5 p y - \alpha^3 x = \alpha^3 (p^3 + \lambda p y - x).$$

La proposition est donc démontrée.

### Bibliographie

- [1] Darboux M. G., *Sur les solutions singulières des équations aux dérivées ordinaires du premier ordre.* Bull. Sciences Math. & Astron., t. IV (1873) 158-176.
- [2] Dyck W., *Ueber die Gestaltlich Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variablen definierten Curvensysteme.* Bay. Akad. der Wissenschaften München. Sitzungberichte der Mathem. Phys. Classe. Band XXI (1891) 23-57.
- [3] Levine H. I., *Singularities of differentiable mappings.* Proc. of Liverpool Sing. Symposium I. Lect. Notes in Math. 192 (1971) 1-89.
- [4] Thom R., *Sur les équations différentielles multiformes et leurs intégrales singulières.* Colloque E. Cartan. Paris (1971).
- [5] Whitney H., *On singularities of mappings of Euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane.* Ann. of Math., 62, n.° 3. (1955) 374-410.