Deploiements Stables des Germes de Type Fini, et Determination Finie des Applications Differentiables

Jean Martinet.

Introduction.

Cet article concerne la théorie locale des singularités d'applications différentiables. Il a un double but:

- 1) Exposer dans quelques détails la théorie relative aux déploiements stables d'un germe de type de singularité fini (*t. s. f*)
- 2) Exploiter les mécanismes de cette théorie pour donner un théorème de détermination finie des germes de A codimension finie.

Le premier point est classique; il a été mis au point et utilisé par J. MATHER [4] pour établir la densité des applications différentiables topologiquement stables. Dans le cadre local considéré ici, les aspects essentiels en sont les suivants:

Soit $f_0 : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0)$ un germe d'application t.s.f (nous dirons ici : de V -codimension finie). Il admet un déploiement stable $F : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t, 0)$ ayant la propriété suivante: tout germe g_0 , V -isomorphe à f_0 (K -isomorphe au sens de J. Mather), est A -isomorphe à i^*F , où $i : (\mathbb{R}^t, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t, 0)$ est une immersion convenable, transverse à F ; i^*F a ici le sens d'un produit fibré. Si l'on connaît l'application $i \rightarrow i^*F$ d'une part, et l'action du groupe d'isotropie de F (défini au 4) sur les sous-variétés de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t$, de dimension t et transverses à F en 0 , on est en mesure d'expliquer la A -classification dans la V -orbite (ou K -orbite) de f_0 .

C'est cette stratégie qui est mise en oeuvre pour aborder le second point, qui est la partie originale de ce travail, au moins dans son aspect technique. On y établit le résultat suivant:

Si $f_0 : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0)$ est un germe de A -codimension finie, tel que:

- 1) $T_A f_0 \supset \mathcal{M}_y^r \cdot (\mathcal{E}_x)^l$ ($T_A f_0$ est le A -espace tangent à f_0)
- 2) $J(f_0) \subset \mathcal{M}_x^l$, où $J(f_0)$ est l'idéal engendré par les composantes de f_0 , et les mineurs $t \times t$ de la matrice jacobienne de f_0 , alors f_0 est déterminé à l'ordre $(r+2)l$.

Le premier résultat relatif à la détermination finie des germes d'applications est celui de J. MATHER [6]; dans son théorème, l'ordre de détermination était mal contrôlé. Un énoncé beaucoup plus précis figure dans le

beau travail de GAFFNEY [1], qui utilise des améliorations du théorème de préparation, et conserve par ailleurs la méthode de Mather. Le théorème obtenu ici est difficilement comparable à celui de Gaffney; son intérêt principal réside probablement dans la méthode employée, qui peut conduire à des descriptions explicites de A-orbites.

1. Notations et Rappels.

1.1. Soit $f : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0)$ un germe d'application $C^\infty(f(0) = 0)$.

$$x \rightarrow y = f(x)$$

On désigne par $\mathcal{E}_x$ (resp. $\mathcal{E}_y$) l'anneau des germes de fonctions C^∞ à l'origine de $\mathbb{R}^s$ (resp. $\mathbb{R}^t$), et par $f^* : \mathcal{E}_y \rightarrow \mathcal{E}_x$ l'homomorphisme $\lambda \rightarrow \lambda \circ f$. L'idéal maximal de $\mathcal{E}_x$ (resp. $\mathcal{E}_y$) est noté $\mathcal{M}_x$ (resp. $\mathcal{M}_y$); l'idéal de $\mathcal{E}_x$ engendré par les composantes de f sera désigné par $I(f)$, ou $f^* \mathcal{M}_y$, et appelé *idéal de f* .

Si M est un $\mathcal{E}_x$ -module, il hérite d'une structure de $\mathcal{E}_y$ -module via f^* ; si $m_1, \dots, m_k$ sont des éléments de M , le sous- $\mathcal{E}_x$ -module engendré par les m_i sera noté $\mathcal{E}_x\{m_1, \dots, m_k\}$, et le sous- $\mathcal{E}_y$ -module engendré par les m_i sera noté $f^* \mathcal{E}_y\{m_1, \dots, m_k\}$ ou plus simplement $\mathcal{E}_y\{m_1, \dots, m_k\}$ lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre.

1.2. Soient deux germes d'applications:

$$f, g : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0)$$

Ils sont dits *V-isomorphes* (ou *K-isomorphes* dans les notations de J. Mather) si les germes de "variétés" $f^{-1}(0)$ et $g^{-1}(0)$ sont isomorphes dans $\mathbb{R}^s$, c'est-à-dire s'il existe un difféomorphisme local φ à l'origine de $\mathbb{R}^s$ tel que:

$$\varphi^*[I(f)] = I(g)$$

Les germes f et g sont dits *A-isomorphes* s'il existe des difféomorphismes locaux φ et ψ à la source et au but, tels que

$$g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

Deux germes A-isomorphes sont V-isomorphes, mais la réciproque est fautive en général.

L'ensemble des germes V-isomorphes (resp. A-isomorphes) à un germe f sera appelé la *V-orbite* (resp. *A-orbite*) de f .

L'étude des V-orbites est considérablement plus facile que celle des A-orbites; le but principal de cet article est de détailler une méthode d'étude des A-orbites contenues dans une V-orbite donnée.

1.3. Un des outils essentiels sera la notion de *V-déformation verselle* d'un germe $f_0 : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0)$, telle qu'elle est développée par exemple dans [2]. Rappelons rapidement ce dont il s'agit:

On appelle *déformation de base $\mathbb{R}^p$ d'un germe $f_0 : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0)$* tout germe $f : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0)$ tel que $f(0, x) = f_0(x)$.

$$(u, x) \rightarrow f(u, x)$$

Deux déformations f et g , de base $\mathbb{R}^p$, de germes f_0 et g_0 , sont dites *V-isomorphes* si f et g sont V-isomorphes (au sens de 1.2) via un difféomorphisme local Φ à l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s$, de la forme:

$$\Phi(u, x) = [u, \varphi(u, x)]$$

Si f est une déformation de f_0 , de base $\mathbb{R}^p$, et si $h : (\mathbb{R}^q, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ est une application de C^∞ donnée, on désigne par h^*f (*image réciproque de f par h*) la déformation de base $\mathbb{R}^q$ définie $h^*f(v, x) = f(h(v), x)$.

Une déformation f de f_0 , de base $\mathbb{R}^p$, est dite *V-verselle*, si toute déformation de f_0 , de base $\mathbb{R}^q$ (q quelconque), est V-isomorphe à h^*f pour une application h convenable de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$.

Voici le résultat essentiel concernant l'existence et la construction de V-déformations verselles:

Le *V-espace tangent* au germe f_0 est le sous- $\mathcal{E}_x$ -module

$$T_v f_0 = \mathcal{E}_x \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_0}{\partial x_s} \right\} + I(f) \cdot (\mathcal{E}_x)^t \subset (\mathcal{E}_x)^t$$

La *V-codimension* de f_0 est la codimension de $T_v f_0$ dans $(\mathcal{E}_x)^t$, comme sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Avec ces définitions, f_0 admet une V-déformation verselle si et seulement si il est de V-codimension finie; de plus, $f : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0)$, $(u, x) \rightarrow f(u, x)$ est V-verselle si et seulement si:

$$T_v f_0 + \mathbb{R}\{\dot{f}_1, \dots, \dot{f}_p\} = (\mathcal{E}_x)^t$$

où $\dot{f}_i(x) = \partial f / \partial u_i(0, x)$ ("vitesses initiales" de la déformation f).

Si f_0 et g_0 sont V-isomorphes, deux V-déformations verselles f et g de f_0 et g_0 , de même base, sont toujours *V-équivalentes*: g est V-isomorphe à h^*f , où h est un *difféomorphisme* local de la base; c'est le principe d'*unicité* des déformations verselles.

Rappelons enfin qu'un germe f_0 de V-codimension finie est de *V-détermination finie*; plus précisément, si

$$T_v f_0 \supset \mathcal{M}_x^k (\mathcal{E}_x)^t$$

alors tout germe g_0 , ayant le même $(k + 1)$ jet que f_0 à l'origine, est V -isomorphe à f_0 ([3] ou [2]).

1.4. L'étude de la A -classification des germes d'applications conduit à la notion de *déploiement*. Un déploiement, de base $\mathbb{R}^p$, d'un germe $f_0 : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0)$ est un germe d'application:

$$F : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t, 0)$$

$$(u, x) \rightarrow (u, f(u, x)) \quad \text{où } f(0, x) = f_0(x)$$

(F commute avec les projections canoniques de la source et du but sur la base $\mathbb{R}^p$).

Deux déploiements F et G sont A -isomorphes si l'on a:

$$G = \psi \circ F \circ \Phi^{-1}$$

où Φ (resp. ψ) est un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s$ (resp. $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t$) de la forme $\Phi(u, x) = (u, \varphi(u, x))$ (condition analogue pour ψ).

Un germe f_0 est dit *stable* si tous ses déploiements sont triviaux, i.e. A -isomorphes au déploiement constant de f_0 , ou *suspension* de f_0 .

On est amené naturellement à introduire le A -espace tangent à un germe f_0 ; c'est le sous-espace:

$$T_A f_0 = \mathcal{E}_x \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_0}{\partial x_s} \right\} + \mathcal{E}_y \{e_1, \dots, e_t\} \subset (\mathcal{E}_x)^t$$

où $e_1, \dots, e_t$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^t$.

Remarquons que $T_A f_0$ n'est pas, au contraire de $T_v f_0$, un sous $\mathcal{E}_x$ -module de $(\mathcal{E}_x)^t$, mais seulement un sous $\mathcal{E}_y$ -module, pour la structure induite via f_0^* .

La A -codimension de f_0 est par définition la codimension de $T_A f_0$ dans $(\mathcal{E}_x)^t$, comme sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Si f_0 est de A -codimension finie, le lemme de Nakayama montre aisément l'existence d'un entier k tel que:

$$T_A f_0 \supset \mathcal{M}_y^k \cdot (\mathcal{E}_x)^t$$

Rappelons enfin que f_0 est *stable* si et seulement si il est de A -codimension nulle, i.e. $T_A f_0 = (\mathcal{E}_x)^t$.

Si f_0 est de A -codimension finie, il est a fortiori de V -codimension finie, mais la réciproque est fautive; par exemple:

$$1) f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (\text{rebroussement "plat"})$$

$$x \rightarrow (x^2, 0)$$

est de V -codimension 3, et de A -codimension infinie.

Par contre, $g_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (rebroussement ordinaire)

$$x \rightarrow (x^2, x^3)$$

qui est V -isomorphe à f_0 , est de A -codimension 1.

$$2) f_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^2, x_2^2)$$

est de V -codimension 4, et de A -codimension infinie.

Mais $g_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^2 + x_2^3, x_2^2 + x_1^3)$$

est V -isomorphe à f_0 , et de A -codimension 2.

1.5. Considérons maintenant un germe $f_0 : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0)$ de V -codimension finie.

Etant donnée une déformation quelconque de f_0 :

$$f : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0)$$

$$(u, x) \rightarrow f(u, x)$$

nous poserons:

$$\bar{f} : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0)$$

$$(u, y, x) \rightarrow -y + f(u, x)$$

et

$$F : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t, 0)$$

$$(u, x) \rightarrow (u, f(u, x))$$

Remarquons que, par construction, le déploiement F a pour "graphe" la variété $\{\bar{f} = 0\}$; plus précisément, F s'identifie à la restriction à $\{\bar{f} = 0\}$ de la projection canonique de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^s$ sur l'espace des paramètres $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t$.

On a alors la facile, mais importante

Proposition ([2], chapitre III). *Le germe F est stable si et seulement si f est une V -déformation verselle de f_0 .*

On vérifie aisément que la valeur minimale de p réalisant ces conditions est la V -codimension de f_0 diminuée du corang au but de f_0 en 0.

Soit maintenant g_0 un germe V -isomorphe à f_0 ; on peut donc construire une V -déformation verselle de g_0 de la forme:

$$\bar{g} : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0)$$

$$(u, y, x) \rightarrow -y + g(u, x)$$

Le principe d'unicité des V -déformations verselles (cf. 1.3) dit que $\bar{f}$ et $\bar{g}$ sont alors V -équivalentes; ceci signifie qu'il existe un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \{\bar{f}=0\} \subset (\mathbb{R}^{p+t} \times \mathbb{R}^s, 0) & \xrightarrow{\Phi} & (\mathbb{R}^{p+t} \times \mathbb{R}^s, 0) \supset \{\bar{g}=0\} \\ \downarrow F & & \downarrow \pi \\ (\mathbb{R}^{p+t}, 0) & \xrightarrow{h} & (\mathbb{R}^{p+t}, 0) \\ & & \uparrow \pi \\ & & (\mathbb{R}^{p+t} \times \mathbb{R}^s, 0) \end{array}$$

(où h et Φ sont des difféomorphismes locaux, π est la projection canonique) tel que Φ transforme la sous-variété $\{\bar{f}=0\}$ en la sous-variété $\{\bar{g}=0\}$. Mais ceci signifie que les déploiements F et G sont A -isomorphes (pas comme déploiements, mais seulement comme germes d'applications de $\mathbb{R}^{p+s}$ dans $\mathbb{R}^{p+t}$). Soit alors $\Sigma_0 = \{0\} \times \mathbb{R}^t \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t$; posons $\Sigma = h^{-1}(\Sigma_0)$; Σ est donc un germe de sous-variété de dimension t dans $(\mathbb{R}^{p+t}, 0)$; il est clairement transverse à F en 0, et $S = F^{-1}(\Sigma)$ est un germe de sous-variété de dimension s dans $\{\bar{f}=0\} \simeq \mathbb{R}^{p+s}$; la construction ci-dessus montre que $F_\Sigma = F|_S : (S, 0) \rightarrow (\Sigma, 0)$ est un germe A -isomorphe à g_0 . On peut aussi dire que g_0 est A -isomorphe à i^*F , au sens des produits fibrés, où $i : (\mathbb{R}^t, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{p+t}, 0)$ est un germe d'immersion transverse à F .

Nous avons donc établi le

Theoreme Soit $f_0 : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0)$ un germe de V -codimension finie. Soit $F : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t, 0)$ un déploiement stable de f_0 , où $p = V$ -codimension de f_0 -corang de f_0 au but. Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des germes de sous-variétés de $(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t, 0)$ de dimension t , transverses à F . L'application $\Sigma \rightarrow F_\Sigma$ est une surjection de $\mathcal{G}$ sur la V -orbite de f_0 , au A -isomorphismes près.

1.6. Exemples.

1) Soit $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$x \rightarrow (0, x^2)$$

Soit le déploiement stable ("parapluie de Whitney")

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \\ (u, x) \rightarrow (u, \xi, \eta) = (u, ux, x^2)$$

Considérons par exemple $g_0(x) = (x^3, x^2)$; on a

$$g_0 = F_\Sigma \text{ où } \Sigma \text{ est la surface } u - \eta = 0$$

Si $g_0(x) = (x^5, x^2)$, on a $g_0 = F_\Sigma$ où Σ est la surface $u - \eta^2 = 0$.

2) Considérons $f_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^2, x_2^2)$

et le déploiement stable (ombilic hyperbolique):

$$F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

$$(u_1, u_2, x_1, x_2) \rightarrow (u_1, u_2, x_1^2 + u_1x_2, x_2^2 + u_2x_1)$$

Le germe $g_0(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^3, x_2^2 + x_1^3)$ est A -isomorphe à F_Σ , pour une surface convenable du but; on peut choisir $u_1 - y_2 = 0, u_2 - y_1 = 0$ (Exercice).

3) Soit $f_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_2^3)$

La V -codimension est 2, le corang au but est 1. Soit le déploiement stable:

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \\ (u, x_1, x_2) \rightarrow (u, x_1, x_2^3 + ux_2)$$

Le germe $g_0(x_1, x_2) = (x_1, x_2^3 + x_1x_2)$ (fronce de Whitney) est égal à F_Σ , où Σ est la surface d'équation $u - x_1 = 0$.

1.7. Reprenons les notations du paragraphe 1.5. Etant donnés $\Sigma, \Sigma' \in \mathcal{G}$, on vérifie aisément que F_Σ et $F_{\Sigma'}$ sont A -isomorphes si et seulement si il existe des difféomorphismes locaux Φ et ψ à l'origine de $\mathbb{R}^{p+s}$ et $\mathbb{R}^{p+t}$, tels que

- a) $\psi \circ F \circ \Phi^{-1} = F'$
- b) $\psi(\Sigma) = \Sigma'$

Désignons par G_F le groupe des difféomorphismes locaux ψ de $\mathbb{R}^{p+t}$ (but de F), tels qu'il existe Φ , difféomorphisme local de $\mathbb{R}^{p+s}$, avec $\psi \circ F \circ \Phi^{-1} = F$; ce groupe sera appelé naturellement *groupe d'isotropie de F* ; il opère sur $\mathcal{G}$. La remarque ci-dessus, jointe au Théorème 1.5. donne l'important.

Theoreme: L'application $\Sigma \rightarrow F_\Sigma$ définit une bijection entre l'ensemble des A -orbites contenues dans la V -orbite de f_0 , et l'ensemble des orbites de G_F dans $\mathcal{G}$.

Le chapitre 2 va tendre à préciser la nature de l'application $\Sigma \rightarrow F_\Sigma$, en en donnant une propriété de "continuité".

Les chapitres 3 et 4 donneront des informations, sous certaines hypothèses, sur les orbites de G_F dans $\mathcal{G}$.

2. Quelques Précisions Sur Les V-Deformations Verselles.

2.1. Soit $f_0 : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0)$ un germe d'application.

Nous avons déjà considéré l'idéal de f_0 , $I(f_0) \subset \mathcal{E}_x$, qui est, par définition, un V-invariant: deux germes V-isomorphes ont des idéaux isomorphes.

Un autre V-invariant important est l'idéal $J(f_0) \subset \mathcal{E}_x$ engendré d'une part par les composantes de f_0 (donc $J(f_0) \supset I(f_0)$), et d'autre part par les mineurs d'ordre t de la matrice jacobienne de f_0 ; bien sûr, $J(f_0) = I(f_0)$ si $s < t$. La vérification de la V-invariance est facile et laissés au lecteur.

L'intérêt de l'idéal $J(f_0)$ provient de la classique.

Proposition (cf. par exemple [7] p. 41-42) *Un germe d'application f_0 est de V-codimension finie si et seulement si $J(f_0)$ est de codimension finie dans $\mathcal{E}_x$. Plus précisément, on a*

$$T_v f_0 \supset J(f_0) \cdot (\mathcal{E}_x)^t$$

et $T_v f_0 \supset \mathcal{M}_x^k \cdot (\mathcal{E}_x)^t$ implique $J(f_0) \supset \mathcal{M}_x^{kt}$.

Cet énoncé signifie "géométriquement" que f_0 est de V-codimension finie si et seulement si:

- a) $f_0^{-1}(0)$ est réduit à un point dans le cas $s < t$.
- b) $f_0^{-1}(0)$ est une "sous-variété" admettant l'origine comme singularité isolée, dans le cas $s \geq t$.

2.2. Exemples.

$$1) f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \rightarrow (0, x^2)$$

Alors $J(f_0) = I(f_0) = \mathcal{M}_x^2$.

$$2) f_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) \rightarrow (x_1^2, x_2^2)$$

$J(f_0) = \mathcal{M}_x^2$ car c'est l'idéal engendré par x_1^2, x_2^2 , composantes de f_0 , et $4x_1x_2$, déterminant de la jacobienne de f_0 .

$$3) f_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \rightarrow x_1^3 + x_2^3$$

$J(f_0)$ est engendré par $\partial f_0 / \partial x_1 = 3x_1^2, \partial f_0 / \partial x_2 = 3x_2^2$ et f_0 ; c'est donc en fait l'idéal engendré par x_1^2 et x_2^2 ; on a

$$J(f_0) \supset \mathcal{M}_x^3$$

2.3. Les modules $T_v^k f$.

$$\text{Soit } f : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0) \\ (u, x) \rightarrow f(u, x)$$

une déformation d'un germe $f_0 : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0)$.

Nous désignons par $\hat{J}(f)$ l'idéal de $\mathcal{E}_{u,x}$ engendré par $u_1, \dots, u_p$ et $J(f_0)$. Remarquons que, si $J(f_0) \supset \mathcal{M}_x^r$, alors évidemment $\hat{J}(f) \supset \mathcal{M}_{u,x}^r$, quelle que soit la déformation f de f_0 .

Définissons maintenant le sous-espace:

$$T_v^k f = \mathcal{E}_{u,x} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_s} \right\} + I(f) \cdot (\mathcal{E}_{u,x})^t + \mathcal{M}_u^k \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_p} \right\} \subset (\mathcal{E}_{u,x})^t.$$

Dans cette définition, les premiers termes sont des sous $\mathcal{E}_{u,x}$ -modules de $(\mathcal{E}_{u,x})^t$; le troisième est seulement un sous $\mathcal{E}_u$ -module, pour la structure induite par la projection canonique $(u, x) \rightarrow u$.

Nous allons établir la

Proposition *Supposons que f soit une V-déformation verselle de f_0 .*

Alors:

- 1) $T_v^k f$ est un sous $\mathcal{E}_{u,x}$ -module de $(\mathcal{E}_{u,x})^t$. Plus précisément:

$$T_v^k f = \mathcal{E}_{u,x} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_s} \right\} + I(f) \cdot (\mathcal{E}_{u,x})^t + \mathcal{M}_u^k \cdot (\mathcal{E}_{u,x})^t$$

- 2) $T_v^k f$ est un V-invariant, en ce sens que si f et g sont deux V-déformations verselles à p paramètres de deux germes f_0 et g_0 V-isomorphes, alors $T_v^k f$ et $T_v^k g$ sont isomorphes via un automorphisme de $(\mathcal{E}_{u,x})^t$.

- 3) $T_v^k f$ est de codimension finie dans $(\mathcal{E}_{u,x})^t$, et:

$$T_v^k f \supset [J(f)]^k \cdot (\mathcal{E}_{u,x})^t.$$

Remarque Si $J(f_0) \supset \mathcal{M}_x^l$ alors $J(f) \supset \mathcal{M}_{u,x}^l$, donc $T_v^k f \supset \mathcal{M}_{u,x}^{k \cdot l} \cdot (\mathcal{E}_{u,x})^t$.

Démonstration de la proposition.

- 1) Comme f est V-verselle, on a ([2], lemme 6.2):

$$(1) \quad \mathcal{E}_{u,x} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_s} \right\} + I(f) \cdot (\mathcal{E}_{u,x})^t + \mathcal{E}_u \left\{ \frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_p} \right\} = (\mathcal{E}_{u,x})^t.$$

Multipliant chaque membre par l'idéal $\mathcal{M}_u^k \subset \mathcal{E}_u$, en considérant tous les espaces ci-dessus comme $\mathcal{E}_u$ -modules, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_u^k \cdot \mathcal{E}_{u,x} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_s} \right\} + \mathcal{M}_u^k \cdot I(f) \cdot (\mathcal{E}_{u,x})^t + \mathcal{M}_u^k \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_p} \right\} = \\ = \mathcal{M}_u^k \cdot (\mathcal{E}_{u,x})^t. \end{aligned}$$

Ajoutons à chaque membre le $\mathcal{E}_{u,x}$ -module:

$$\mathcal{E}_{u,x} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_s} \right\} + I(f) \cdot (\mathcal{E}_{u,x})^t.$$

Nous obtenons, en tenant compte d'inclusions évidentes

$$(2) \quad T_v^k f = \mathcal{E}_{u,x} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_s} \right\} + I(f) \cdot (\mathcal{E}_{u,x})^t + \mathcal{M}_u^k \cdot (\mathcal{E}_{u,x})^t.$$

C'est la formule que nous voulions établir; elle montre que $T_v^k f$ est un sous $\mathcal{E}_{u,x}$ -module de $(\mathcal{E}_{u,x})^t$.

2) Soit g une V -déformation verselle, à p paramètres, d'un germe g_0 V -isomorphe à f_0 . Nous savons alors que ([1], §2) que f et g sont V -équivalentes, c'est-à-dire qu'on peut écrire

$$f(u, x) = M(u, x) \cdot g[h(u), \varphi(u, x)]$$

$$\text{où} \quad \begin{aligned} \Phi : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \\ (u, x) &\rightarrow (h(u), \varphi(u, x)) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme local, et

$$M : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \rightarrow GL(\mathbb{R}, t) \quad (\text{groupe linéaire de } \mathbb{R}^t)$$

est un germe d'application C^∞ convenable.

Considérons alors l'application:

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_{u,x})^t &\rightarrow (\mathcal{E}_{u,x})^t \\ \xi &\rightarrow M \cdot (\xi \circ \Phi) \end{aligned}$$

Il s'agit d'un automorphisme de $\mathcal{E}_{u,x}$ -module au-dessus de Φ^* , et d'un automorphisme de $\mathcal{E}_u$ -module au-dessus de h^* .

Il laisse invariant $\mathcal{M}_u^k \cdot (\mathcal{E}_{u,x})^t$ quel que soit l'entier k ; il transforme $I(g) \cdot (\mathcal{E}_{u,x})^t$ en $I(f) \cdot (\mathcal{E}_{u,x})^t$; enfin, on a:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial M}{\partial x_i} \cdot (g \circ \Phi) + M \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial x_j} \circ \Phi \right]$$

Ceci montre que $\mathcal{E}_{u,x} \{ \partial g / \partial x_1, \dots, \partial g / \partial x_s \} + I(g) \cdot (\mathcal{E}_{u,x})^t$ est transformé en

$$\mathcal{E}_{u,x} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_s} \right\} + I(f) \cdot (\mathcal{E}_{u,x})^t.$$

Il en résulte que $T_v^k g$ est transformé en $T_v^k f$, ce que nous voulions démontrer. Dans ce sens, $T_v^k f \subset (\mathcal{E}_{u,x})^t$ ne dépend que de la V -orbite de f_0 (et du nombre de paramètres de la déformation f).

3) L'égalité (1) ci-dessus signifie que le $\mathcal{E}_{u,x}$ -module:

$$M = (\mathcal{E}_{u,x})^t / \mathcal{E}_{u,x} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_s} \right\} + I(f) \cdot (\mathcal{E}_{u,x})^t$$

est un $\mathcal{E}_u$ -module de type fini, engendré par les projections dans M de $\partial f / \partial u_1, \dots, \partial f / \partial u_p$; donc $\mathcal{M}_u^k \cdot M$ est de $\mathbb{R}$ -codimension finie dans M ; ainsi $T_v^k f$, image inverse de $\mathcal{M}_u^k \cdot M$, est de codimension finie dans $(\mathcal{E}_{u,x})^t$.

Pour plus de précision, remarquons d'abord que la codimension de

$$T_v^1 f = \mathcal{E}_{u,x} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_s} \right\} + I(f) \cdot (\mathcal{E}_{u,x})^t + \mathcal{M}_u \cdot (\mathcal{E}_{u,x})^t$$

est évidemment égale à la V -codimension de f_0 ; de plus, on a

$$(3) \quad T_v^1 f \supset \hat{J}(f) \cdot (\mathcal{E}_{u,x})^t$$

d'après la proposition 2.1.

On vérifie facilement que, plus généralement:

$$T_v^k f \supset \hat{J}(f) \cdot T_v^{k-1} f \quad \text{pour } k \geq 1.$$

on a donc bien

$$T_v^k \supset [\hat{J}(f)]^k \cdot (\mathcal{E}_{u,x})^t$$

2.4. Proposition. Soit $f : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0)$
 $(u, x) \rightarrow f(u, x)$

une V -déformation verselle de f_0 ; supposons que $T_v^k f \supset \mathcal{M}_{u,x}^l \cdot (\mathcal{E}_{u,x})^t$ pour un certain entier l . Soient $\varepsilon \in \mathcal{M}_{u,x}^{l+1} \cdot (\mathcal{E}_{u,x})^t$ et $g(u, x) = f(u, x) + \varepsilon(u, x)$; alors g est V -isomorphe à $h^* f$ où $h : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ est un difféomorphisme local $(k-1)$ plat en 0 par rapport à l'identité de $\mathbb{R}^p$.

Ceci signifie que $h - 1 \in \mathcal{M}_u^k \cdot (\mathcal{E}_u)^p$.

Démonstration: Elle est, en partie, voisine de la démonstration du Théorème des V -déformations verselles (cf. [2]).

1) Considérons le germe d'application:

$$\begin{aligned} \bar{f} : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, \mathbb{R} \times \{0\}) &\rightarrow (\mathbb{R}^t, 0) \\ (\lambda, u, x) &\rightarrow (f(u, x) + \lambda \cdot \varepsilon(u, x)) \end{aligned}$$

Supposons avoir montré l'existence d'un germe de champ de vecteurs C^∞ le long de $\mathbb{R} \times \{0\}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s$, de la forme:

$$X(\lambda, u, x) = \frac{\partial}{\partial \lambda} + \sum_{j=1}^p \xi_j(\lambda, u) \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{i=1}^s X_i(\lambda, u, x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

tel que

- a) $X \cdot f = Df \cdot X \in I(\bar{f}) \cdot (\mathcal{E}_{\lambda, u, x})^t$
- b) $\xi_j \in \mathcal{M}_u^k \cdot \mathcal{E}_{\lambda u}$; $X_i \in \mathcal{M}_{u, x} \cdot \mathcal{E}_{\lambda, u, x}$.

L'axe des λ ($\mathbb{R} \times \{0\}$) est une trajectoire de X ; l'intégration de X définit donc une famille de difféomorphismes locaux $\Phi_\lambda : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0)$; de la même façon, le champ $\xi = \frac{\partial}{\partial \lambda} + \sum_{j=1}^p \xi_j \frac{\partial}{\partial u_j}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ définit une famille de difféomorphismes locaux $h_\lambda : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$: comme les ξ_j sont $(k-1)$ -plats le long de $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$, les h_λ sont $(k-1)$ -plats à l'origine, par rapport à l'identité, pour tout λ (théorie de l'équation aux variations). Enfin, comme X est un relèvement de champ ξ , on a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) & \xrightarrow{\Phi_\lambda} & (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{R}^p, 0) & \xrightarrow{h_\lambda} & (\mathbb{R}^p, 0) \end{array}$$

et la condition a) signifie que $\Phi_\lambda^* [I(\bar{f}_\lambda)] = I(f)$, où $\bar{f}_\lambda(u, x) = \bar{f}_\lambda(\lambda, u, x)$; donc f est V -isomorphe à $h^* \bar{f}_\lambda$. La proposition est alors établie en prenant $\lambda = 1$.

2) Reste à établir l'existence du champ X utilisé ci-dessus. Il suffit en fait de montrer, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'existence d'un germe de champ au point $(\lambda, 0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s$ satisfaisant a) et b); on pourra alors conclure par un argument de partition de l'unité le long de $\mathbb{R} \times \{0\}$. Nous allons indiquer brièvement le raisonnement pour $\lambda = 0$; nous montrerons ensuite qu'il est le même pour les autres valeurs de λ .

La condition a) s'écrit:

$$X \cdot \bar{f} = \varepsilon + \sum_{j=1}^p \xi_j \frac{\partial \bar{f}}{\partial u_j} + \sum_{i=1}^s X_i \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \in I(\bar{f}) \cdot (\mathcal{E}_{\lambda, u, x})^t$$

La propriété désirée sera établie si l'on montre que:

$$\begin{aligned} E &= \mathcal{M}_{u, x} \cdot \mathcal{E}_{\lambda, u, x} \left\{ \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_s} \right\} + I(\bar{f}) \cdot (\mathcal{E}_{\lambda, u, x})^t + \mathcal{M}_{\lambda, u}^k \cdot \mathcal{E}_{\lambda, u} \left\{ \frac{\partial \bar{f}}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \bar{f}}{\partial u_p} \right\} \\ &\supset \mathcal{M}_{u, x}^{l+1} \cdot (\mathcal{E}_{\lambda, u, x})^t \end{aligned}$$

Or, on a:

$$E = \mathcal{M}_{u, x} \cdot \mathcal{E}_{\lambda, u, x} \left\{ \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_s} \right\} + I(\bar{f}) \cdot (\mathcal{E}_{\lambda, u, x})^t + \mathcal{M}_{\lambda, u}^k \cdot (\mathcal{E}_{\lambda, u, x})^t$$

Ceci se démontre par un argument analogue à celui de 2.3.1).

L'inclusion énoncée résulte ensuite facilement du lemme de Nakayama, et de l'hypothèse $T_v^k f \supset \mathcal{M}_{u, x}^l \cdot (\mathcal{E}_{u, x})^t$

3) Posons $\bar{f}_{\lambda, 0}(x) = \bar{f}_\lambda(0, x)$. On vérifie, en utilisant le lemme de Nakayama, et la caractérisation des V -déformations verselles, que:

- Pour tout λ , $\bar{f}_{\lambda, 0}$ est V -isomorphe à f_0 , et $T_v \bar{f}_{\lambda, 0} = T_v f_0$
- $\bar{f}_\lambda$ est une V -déformation verselle de $\bar{f}_{\lambda, 0}$.
- $T_v^k \bar{f}_\lambda \supset \mathcal{M}_{u, x}^l \cdot (\mathcal{E}_{u, x})^t$.

Ainsi, l'argument de 2) peut être repris pour toutes les valeurs de λ , et ceci achève la démonstration de la Proposition.

2.5. Nous sommes maintenant en mesure de préciser le comportement de l'application $\Sigma \rightarrow F_\Sigma$ de 1.7.

Soient donc $f_0 : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0)$ un germe de V -codimension finie, et

$$\begin{aligned} \bar{f} : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^s, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^t, 0) \\ (u, y, x) &\rightarrow -y + f(u, x) \end{aligned}$$

une V -déformation verselle de f_0 .

Définissons $l(k)$, pour $k \geq 1$, comme le plus petit entier tel que

$$T_v^k \bar{f} \supset \mathcal{M}_{u, y, x}^{l(k)-1} \cdot (\mathcal{E}_{u, y, x})^t$$

La fonction $l(k)$ ne dépend (Proposition 2.3) que de la V -orbite Γ de f_0 .

Si $J(f_0) \supset \mathcal{M}_x^q$, on a (cf. 2.3)

$$l(k) \leq k \cdot q + 1$$

la croissance de $l(k)$ est donc au plus linéaire.

Ceci posé, soit $\varepsilon \in \mathcal{M}_x^{l(k)} \cdot (\mathcal{E}_x)^t$, et posons

$$\bar{g}(u, y, x) = \bar{f}(u, y, x) + \varepsilon(x)$$

D'après la proposition 2.4., $\bar{g}$ est une V -déformation verselle de $g_0 = f_0 + \varepsilon$; et elle est V -isomorphe à $h^* \bar{f}$, où h est un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^{p+t}$, $(k-1)$ -plat par rapport à l'identité.

Ceci signifie que les germes stables F ($F(u, x) = (u, f(u, x))$) de f_0 et G ($G(u, x) = (u, f(u, x) + \varepsilon(x))$) de g_0 sont isomorphes:

$$F = h \circ G \circ \varphi^{-1}$$

où φ est un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^{p+s}$, et h un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^{p+t}$ ($k-1$)-plat par rapport à l'identité.

En d'autres termes (voir 1.5), g_0 est A -isomorphe à F_Σ , où $\Sigma \in \mathcal{G}$ est un germe de sous-variété de dimension t ayant avec $\Sigma_0 = \{0\} \times \mathbb{R}^t$ ($f_0 = F_{\Sigma_0}$) un contact d'ordre $(k-1)$ à l'origine; ceci veut dire que Σ a une équation de la forme $u = \psi(y)$, où $\psi \in \mathcal{M}_y^k(\mathcal{E}_y)^p$.

Le Théorème 1.5. admet donc l'amélioration suivante:

Theoreme. Soit $F : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t, 0)$ un déploiement stable d'une V -orbite Γ de codimension finie, où $P = \text{codimension de } \Gamma - \text{corang au but des éléments de } \Gamma$. Pour toute sous-variété $\Sigma \subset (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t, 0)$, $\Sigma \in \mathcal{G}$, l'image du k -voisinage de Σ , par l'application $\Sigma \rightarrow F_\Sigma$, contient le $l(k)$ -voisinage de F_Σ (au A -isomorphisme près).

2.6. Exemples.

1) Partons de $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$x \rightarrow (0, x^2)$$

Comme $J(f_0) = \mathcal{M}_x^2$, on a $l(k) \leq 2k + 1$.

Soit le déplacement stable

$$F : (u, x) \rightarrow (u, ux, x^2)$$

On obtiendra, à A -isomorphisme près toutes les perturbations de f_0 à l'ordre $2k + 1$, en faisant varier la surface Σ dans $\mathbb{R}^3$ à l'ordre k par rapport à Σ_0 .

2) $f_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^2, x_2^2)$$

$$F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

$$(u, u_2, x_1, x_2) \rightarrow (u_1, u_2, x_1^2 + u_1, x_2^2 + u_2 x_1)$$

On a encore: $l(k) \leq 2k + 1$, car $I(f_0) \supset \mathcal{M}_x^2$.

3. Un Lemme Technique.

3.1. On se place ici sur un espace produit $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t$ ($u \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^t$). On suppose donné un $\mathcal{E}_{u,y}$ -module M de germes de champs de vecteurs C^∞ , nuls à l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t$; tout champ $Z \in M$ s'écrira

$$Z = \sum_{i=1}^p \eta_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^t \gamma_j \frac{\partial}{\partial y_j} = (\eta, \gamma)$$

où $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_p)$ désigne la composante "horizontale" de Z (sur le facteur $\mathbb{R}^p$) et $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_t)$ la composante "verticale", sur le facteur $\mathbb{R}^t$.

On désigne par G_M le groupe de difféomorphismes locaux à l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t$, engendré par les difféomorphismes obtenus de la manière suivante:

On forme une combinaison linéaire finie quelconque

$$Z_\lambda = \sum \alpha_i(\lambda, u, y) \lambda \in \mathbb{R}$$

où les $Z_i \in M$, et les α_i sont des fonctions C^∞ des variables λ, u, y ; on intègre le champ Z_λ , pour obtenir des difféomorphismes locaux φ_λ de $(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t, 0)$; ce sont les générateurs de G_M .

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des germes de sous-variétés $\Sigma \subset (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t, 0)$ de dimension t . On s'intéresse à l'action de G_M sur $\mathcal{G}$. Plus particulièrement, soit $\Sigma_0 = \{0\} \times \mathbb{R}^t \in \mathcal{G}$; nous allons donner un critère simple assurant que l'orbite $G_M(\Sigma_0)$ contient le k -voisinage de Σ_0 , k étant un entier donné. Répétons que le k -voisinage de Σ_0 est constitué des sous-variétés Σ d'équation $u = \psi(\lambda)$, où $\psi \in \mathcal{M}_y^k(\mathcal{E}_y)^p$.

Pour énoncer ce critère, introduisons le module:

$$M_0 \subset (\mathcal{E}_y)^p$$

formé par les restrictions à $\Sigma_0 = \{0\} \times \mathbb{R}^t$ des composantes horizontales η des éléments de M (en langage intrinsèque, ce sont les projections, dans le fibré normal à Σ_0 , des éléments de M).

Proposition Si $M_0 \supset \mathcal{M}_y^{k-1}(\mathcal{E}_y)^p$, alors $G_M(\Sigma_0)$ contient le k -voisinage de Σ_0 .

La démonstration est facile, et représente un joli exercice utilisant essentiellement le lemme de Nakayama. Commençons par le

3.2. **Lemme** Soit $\Sigma_\lambda \in \mathcal{G}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) une famille C^∞ d'équation $u - \psi(\lambda, y) = 0$ ($\psi(\lambda, 0) = 0$); soient $Z_\lambda = (\eta_\lambda, \gamma_\lambda)$ une famille C^∞ de champs de vecteurs nuls en $0 \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t$, et φ_λ la famille de difféomorphismes locaux correspondante. Les conditions suivantes sont équivalentes:

a) $\varphi_\lambda(\Sigma_0) = \Sigma_\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

b) $\partial\psi/\partial\lambda = \eta_\lambda - \partial\psi/\partial y \cdot \gamma_\lambda|_{\Sigma_\lambda}$ (restriction à Σ_λ).

Démonstration On considère sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t$ le champ de vecteurs $\bar{Z} = \partial/\partial\lambda + Z_\lambda$, comme germe le long de $\mathbb{R} \times \{0\}$, et la sous-variété $\bar{\Sigma}$ d'équation $u - \psi(\lambda, y) = 0$. La condition a) équivaut trivialement au fait que $\bar{Z}$ est tangent à $\bar{\Sigma}$ en tous ses points, c'est-à-dire $\bar{Z} \cdot (u - \psi(\lambda, y)) = 0$ sur $\bar{\Sigma}$, ce qui donne b).

3.3. Démonstration de la Proposition 3.1.

Soit Σ une sous-variété d'équation $u - \psi(y) = 0$ où $\psi \in \mathcal{M}_y^k \cdot (\mathcal{E}_y)^p$. Formons la famille $\Sigma_\lambda : u - \lambda\psi(y) = 0, \lambda \in \mathbb{R}$.

Au vu du lemme précédent, la proposition sera démontrée si on trouve une famille $C^\infty Z_\lambda = (\eta_\lambda, \gamma_\lambda) \in M$ telle que la condition b) ci-dessus soit vérifiée, c'est-à-dire:

$$(1) \quad \psi(y) = \eta_\lambda - \lambda \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \gamma_\lambda \Big|_{\Sigma_\lambda}$$

Pour cela, considérons l'anneau $\mathcal{E}$ des germes de fonctions C^∞ de λ, y le long de $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^t$. Soit T le sous $\mathcal{E}$ -module de $\mathcal{E}^p$ constitué des vecteurs de la forme $\eta_\lambda - \lambda \partial \psi / \partial y \cdot \gamma_\lambda \Big|_{\Sigma_\lambda}$, où $(\eta_\lambda, \gamma_\lambda) = Z_\lambda$ parcourt l'ensemble des champs de la forme $\Sigma \alpha_i(\lambda, u, y) Z_i, Z_i \in M$.

Je dis que $T \supset \mathcal{M}_y^{k-1} \cdot \mathcal{E}^p$; ceci achèvera la démonstration, puisque $\psi \in \mathcal{M}_y^k \cdot \mathcal{E}^p$. Soit donc $\xi \in \mathcal{M}_y^{k-1} \cdot \mathcal{E}^p$; pour $\lambda = 0$ on obtient $\xi_0 \in \mathcal{M}_y^{k-1} \cdot (\mathcal{E}_y)^p$; par hypothèse $\xi_0(y) = \eta(0, y)$, où $\eta(u, y)$ est la composante horizontale d'un champ $Z = (\eta, \gamma) \in M$. Considérons alors le vecteur $\xi - [\eta - \lambda \partial \psi / \partial y \cdot \gamma \Big|_{z_\lambda}] \in \mathcal{E}^p$. On vérifie facilement que cette différence appartient à $\mathcal{M}_y^k \cdot \mathcal{E}^p$. On a donc montré que

$$T \supset \mathcal{M}_y^{k-1} \cdot \mathcal{E}^p \text{ modulo } \mathcal{M}_y^k \cdot \mathcal{E}^p$$

et le lemme de Nakayama l'inclusion cherchée.

4. Groupe et Algèbre D'Isotropie D'un Stable.

4.1. Soit $f : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0)$ un germe d'application C^∞ , quelconque pour l'instant.

Un couple (φ, ψ) où φ (resp. ψ) est un difféomorphisme local à l'origine de $\mathbb{R}^s$ (resp. $\mathbb{R}^t$) est dit *f-isotrope* si:

$$f = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}.$$

Soit $(\varphi_\lambda, \psi_\lambda)$ une famille C^∞ de couples *f-isotropes*; soit X_λ (resp. γ_λ) la famille de germes de champs de vecteurs C^∞ à l'origine de $\mathbb{R}^s$ (resp. $\mathbb{R}^t$), nuls en 0, définissant φ_λ (resp. ψ_λ) par intégration; il est trivial que

$$(1) \quad Df \cdot X_\lambda = \gamma_\lambda \circ f \text{ pour tout } \lambda.$$

La réciproque est aussi évidente.

En particulier, si X et γ sont des germes de champs de vecteurs (nuls à l'origine de $\mathbb{R}^s$ et $\mathbb{R}^t$) tels que $Df \cdot X = \gamma \circ f$, les groupes à un paramètre φ_λ et ψ_λ définis par X et γ représentent un groupe à un paramètre de couples *f-isotropes*.

On vérifie facilement que l'ensemble des couples $(X, \gamma) \in (\mathcal{M}_x)^s \times (\mathcal{M}_y)^t$ satisfaisant (1) constitue un $\mathcal{E}_y$ -module et une $\mathbb{R}$ -algèbre de Lie; cette algèbre est, heuristiquement, l'algèbre de Lie du groupe des couples *f-isotropes*.

4.2. Pour nos besoins, c'est en fait ce qui se passe au but de f qui nous intéresse; c'est pourquoi nous définirons le *groupe d'isotropie* de f comme l'ensemble des difféomorphismes locaux $\psi : (\mathbb{R}^t, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0)$ "relevables" (on considère ici f comme une "fibration" éventuellement singulière) en un difféomorphisme local φ de $\mathbb{R}^s$, c'est-à-dire tel que $f \circ \varphi = \psi \circ f$.

De même, nous définirons l'*algèbre d'isotropie* de f comme le $\mathcal{E}_y$ -module des germes de champs de vecteurs γ , nuls à l'origine de $\mathbb{R}^t$, tels qu'il existe un champ X , nul à l'origine de $\mathbb{R}^s$, avec $Df \cdot X = \gamma \circ f$. (X est donc un "relèvement" de γ par rapport à la fibration f).

Nous noterons $\mathcal{S}(f)$ cette algèbre de Lie.

4.3. **Lemme.** Soit $f : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0)$ un germe de V -codimension finie. Pour qu'un germe de champ de vecteurs γ nul en 0 appartienne à $\mathcal{S}(f)$, il faut et il suffit qu'il existe un champ de vecteurs X à la source, tel que $Df \cdot X = \gamma \circ f$.

Démonstration. La seule chose à démontrer est que, si l'équation en X : (1) $Df \cdot X = \gamma \circ f$ admet une solution non nulle en 0, elle en admet aussi une nulle en 0. Or, (1) implique (2) $f \circ \varphi_\lambda = \psi_\lambda \circ f$ où φ_λ et ψ_λ sont les groupes locaux à un paramètre définis par X et γ ; $\psi_\lambda(0) = 0$ car $\gamma(0) = 0$; la trajectoire de X passant par 0 est contenue dans $f^{-1}(0)$, et (2) implique que le rang de f est constant le long de cette trajectoire; si ce rang était inférieur à t , les points de cette trajectoire seraient des points singuliers de $f^{-1}(0)$, ce qui contredit le fait que f est de V -codimension finie (cf. 2.1); donc, f est un germe de submersion, et il est alors clair que (1) admet une solution nulle en 0.

4.4. **Remarque** Supposons que f satisfasse de plus à la simple condition de transversalité:

l'application jacobienne $Df : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow L(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^t)$ (espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^s$ dans $\mathbb{R}^t$) est transverse à la stratification naturelle de cet espace, définie par le rang.

Dans ce cas, $\mathcal{A}(f)$ est exactement l'ensemble des champs de vecteurs nuls à l'origine de $\mathbb{R}^t$, tels que, pour tout $y \in \mathbb{R}^t$, assez voisin de 0, on ait:

$$\gamma(y) \in \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} \text{Im } Df(x)$$

En effet, si γ vérifie cette condition, l'équation linéaire $Df \cdot X = \gamma \circ f$ peut être résolue ponctuellement sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^s$; l'hypothèse de transversalité implique qu'elle admet une solution C^∞ , grâce à un Théorème de J. MATHER [5]; le lemme précédent achève la démonstration.

Exemple Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u, x) \rightarrow (u, ux, x^2) = (u, \xi, \eta)$$

est le parapluie de Whitney, ce critère montre que l'algèbre d'isotropie de f est l'ensemble des champs de vecteurs tangents à la stratification naturelle au but de f :

- l'origine comme 0-strate
- le demi-axe des $\eta > 0$ comme 1-strate
- le "parapluie" $\xi^2 - \eta u^2 = 0$ privé de l'axe des η comme 2-strate
- le reste de l'espace comme 3-strate.

4.5. *Algèbre d'isotropie du déploiement stable d'un germe de A-codimension finie.*

4.5.1. Considérons d'abord un germe $f_0: (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0)$ de V-codimension finie; soit (cf. 1.5):

$$F: (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t, 0) \\ (u, x) \rightarrow (u, f(u, x))$$

un déploiement stable de f_0 .

Ceci équivaut à (voir par exemple [3] chap. XV § 2)

$$(1) \quad \mathcal{E}_{u,x} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_s} \right\} + \mathcal{E}_{u,y} \left\{ e_1, \dots, e_t, \frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_p} \right\} = (\mathcal{E}_{u,x})^t$$

Cherchons à relier l'algèbre d'isotropie de F aux éléments de ce déploiement. Soit $Z = (\eta, \gamma)$ un germe de champ de vecteurs à l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t$ (nous utilisons ici les notations du § 3).

La résolution du système linéaire

$$Df \cdot \bar{X} = Z$$

où $\bar{X} = (\xi, X)$ est un germe de champ de vecteurs à l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s$, est équivalente à celle du système:

$$\begin{cases} \xi = \eta \circ F \\ \sum_{j=1}^p \xi_j \frac{\partial f}{\partial u_j} + \sum_{i=1}^s X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \gamma \circ F \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \xi = \eta \circ F \\ - \sum_{j=1}^p (\eta_j \circ F) \frac{\partial f}{\partial u_j} + \gamma \circ F = \sum_{i=1}^s X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{cases}$$

On en déduit, compte tenu du lemme 4.3, que $\mathcal{A}(F)$ est constituée des champs $(\eta, \gamma) \in \mathcal{M}_{u,y} \cdot (\mathcal{E}_{u,y})^{p+t}$ tels que:

$$(2) \quad \sum_{j=1}^p (\eta_j \circ F) \frac{\partial f}{\partial u_j} + \gamma \circ F \in \mathcal{E}_{u,x} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_s} \right\}$$

4.5.2. Supposons maintenant que f_0 est de A-codimension finie, et, plus précisément, que:

$$(3) \quad T_{\mathcal{A}f_0} = \mathcal{E}_x \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_0}{\partial x_s} \right\} + \mathcal{E}_y \{e_1, \dots, e_t\} \supset \mathcal{M}_y \cdot (\mathcal{E}_x)^t$$

le germe f_0 est donc a fortiori de V-codimension finie, et nous pouvons en former un déploiement stable comme en 4.5.1.

Proposition Sous l'hypothèse (3), $G_F(\Sigma_0)$ contient le $(r+2)$ -voisinage de Σ_0 , où $\Sigma_0 = \{0\} \times \mathbb{R}^t \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t$, et G_F est le groupe d'isotropie de F .

Démonstration. Le groupe G_F contient évidemment le groupe $G_{\mathcal{A}(F)}$; il suffit donc de montrer que, avec les notations de 3:

$$\mathcal{A}(F)_0 \supset \mathcal{M}_y^{r+1} \cdot (\mathcal{E}_y)^p$$

le résultat annoncé sera alors conséquence de la Proposition 3.1.

Considérons le module

$$N = (\mathcal{E}_{u,x})^t / \mathcal{E}_{u,x} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_s} \right\} + \mathcal{E}_{u,y} \{e_1, \dots, e_t\}$$

D'après (1) c'est un $\mathcal{E}_{u,y}$ -module de type fini (via F^*), engendré les projections de $\partial f / \partial u_1, \dots, \partial f / \partial u_p$.

Formons ensuite:

$$N_0 = N / \mathcal{M}_u \cdot N \simeq (\mathcal{E}_x)^t / \mathcal{E}_x \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_0}{\partial x_s} \right\} + \mathcal{E}_y \{e_1, \dots, e_t\}$$

c'est d'après (3) un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et l'on a:

$$\mathcal{M}_y^r \cdot N_0 = 0$$

Soit alors $\eta \in \mathcal{M}_y^r \cdot (\mathcal{E}_y)^p$, $\bar{\eta} = (\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_p)$; on a donc

$$\sum_{j=1}^p \bar{\eta}_j \frac{\partial f}{\partial u_j} = 0 \text{ dans } N_0$$

En remontant dans N , il vient

$$\sum_{j=1}^p \eta_j \frac{\partial f}{\partial u_j} \in \mathcal{M}_u \cdot N \text{ où } \eta_i(u, y) = \bar{\eta}_i(y)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^p \eta_j \frac{\partial f}{\partial u_j} = \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial f}{\partial u_j} \text{ où } \lambda_j \in \mathcal{M}_u \cdot \mathcal{E}_{u,y}$$

soit

$$\sum_{j=1}^p (\eta_j - \lambda_j) \frac{\partial f}{\partial u_j} = 0 \text{ dans } N$$

Ceci signifie qu'il existe un champ de vecteurs $Z = (\eta, \gamma)$ à l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t$ tel que:

$$\sum_{j=1}^p (\eta_j \cdot F) \frac{\partial f}{\partial u_j} + \gamma \cdot F \in \mathcal{E}_{u,x} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_s} \right\}$$

et $\bar{\eta}_i(y) = \eta_i(0, y)$

On en déduit immédiatement que

$$\mathfrak{A}(F)_0 \supset \mathcal{M}_y^{r+1} \cdot (\mathcal{E}_y)^p \quad \text{C.Q.F.D.}$$

5. Un Théorème de Détermination Finie.

5.1. Theoreme. Soit $f_0 : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0)$ un germe d'application de A -codimension finie, tel que:

$$T_A(f_0) \supset \mathcal{M}_y^r \cdot (\mathcal{E}_x)^t$$

Alors f_0 est déterminé à l'ordre $l(r+2) - 1$.

La fonction l a été définie en 2.5.

Si $J(f_0) \supset \mathcal{M}_x^q$, on a $l(r+2) \leq (r+2) \cdot q + 1$ et f_0 est déterminé à l'ordre $(r+2) \cdot q$.

Démonstration. On considère un déploiement stable $F : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t, 0)$ de f_0 , défini comme en 2.5.

Soit $g_0 = f_0 + \varepsilon$, où $\varepsilon \in \mathcal{M}_x^{l(r+2)} \cdot (\mathcal{E}_x)^t$; par le théorème 2.5, g_0 est A -isomorphe à F_Σ , où Σ appartient au $(r+2)$ -voisinage de $\Sigma_0 = \{0\} \times \mathbb{R}^t \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t$. Maintenant, d'après la proposition 4.5, $\Sigma = \varphi(\Sigma_0)$ où φ est un élément du groupe d'isotropie de F ; donc F_Σ est isomorphe à $F_\Sigma = f_0$ d'après 1.7.

C.Q.F.D.

5.2. Exemples.

1) $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $x \rightarrow (x^3, x^2)$

On vérifie facilement que $T_A f_0 \supset \mathcal{M}_y^1 \cdot (\mathcal{E}_x)^2$.
 Donc f_0 est certainement 6-déterminé ($J(f_0) = \mathcal{M}_x^2$)

2) $f_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^2 + x_2^3, x_2^2 + x_1^3)$

On vérifie (moins facilement) que $T_A f_0 \supset \mathcal{M}_y^1 \cdot (\mathcal{E}_x)^2$
 (voir par exemple [3] chap. XIII § 7).

Donc f_0 est au moins 6- $(J(f_0) = \mathcal{M}_x^2)$.

References

[1] T. GAFFNEY: *Properties of finitely determined map germs* Thesis - Brandies University - June 1975.
 [2] J. MARTINET: *Déploiements versels des applications différentiables et classification des applications stables*. A paraître aux Springer Lecture Notes in Math. (Colloque des Plans sur Bex - Février 1975).
 [3] J. MARTINET: *Singularités des fonctions et applications différentiables* - Notes multi-graphiées - PUC - Rio de Janeiro - 1974.
 [4] J. MATHER: *Stratifications and mappings in Dynamical Systems*, edited by M. Peixoto - Acad. Press - 1973, 195 - 232.
 [5] J. MATHER: *Solutions of generic linear equations* - même volume, 185 - 193.
 [6] J. MATHER: *Finitely determined map germs* Pub. Math. I.H.E.S. Paris, 35, 1968 - 127 - 156.
 [7] F. RONGA ER D. CERVEAU: *Applications topologiquement stables* - Séminaire de Topologie - Dijon - 1975.