BOL. SOC. BRAS. MAT. 7.2(1976), 111 – 120

Existence D'Integrales Premieres pour un Germe de Forme de Pfaff C^∞, Non Dégénéré.

R. Moussu

Introduction

Soit $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i\, dx_i$ le germe au point $0 \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, d'une forme différentielle de classe C^∞, *intégrale*, i.e. $\omega \wedge d\omega = 0$. Un élément $f \in \mathscr{E}_n$, l'anneau des germes en $0 \in \mathbb{R}^n$ de fonctions C^∞, est une *intégrale première* de ω s'il existe $g \in \mathscr{E}_n$ tel que $\omega = g\, df$ avec $g(0) \neq 0$. Lorsque 0 est un *zéro algébriquement isolé* de ω, i.e.
$dim_{\mathbb{R}}\ \mathscr{E}_n/(a_1, a_2, \ldots, a_n)\ \mathscr{E}_n < \infty$ on a les résultats suivants:

Théorème formel [4] *ω possède une intégrale première formelle; c'est-à-dire, il existe $f, g \in \mathscr{E}_n$ tels que:*

$$J^\infty \omega = J^\infty g\, df \text{ avec } g(0) \neq 0.$$

Théorème analytique [5]. *Si ω est un germe analytique, alors ω possède une intégrale première analytique; c'est-à-dire, il existe deux germes de fonctions analytiques f,g tels que:*

$$\omega = g\, df, \text{ avec } g(0) \neq 0.$$

Soit toujours $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i\, dx_i$, un germe C^∞ intégrable. On dit que $0 \in \mathbb{R}^n$ est un *zéro non dégénéré* de ω si la matrice $(\partial a_i/\partial x_j(0))$ est de rang n. Lorsque 0 est un zéro non dégénére de ω, c'est évidemment un zéro algébriquement isolé de ω et, d'après le théorème formel, le jet d'ordre 1 de ω est la différentielle de la forme quadratique $g(0)\, J^2 f = q_\omega$. Notons $i(\omega)$ son indique. Le but de ce travail est de démontrer le résultat suivant:

Théorème C . *Si 0 est un zéro non dégénére d'un germe de forme différentielle C^∞, intégrable, alors ω possède une intégrale première C^∞ dans les cas suivants:*

(i) *l'indice* $i(\omega)$ *de* ω *est différent de* 2 *et* $n-2$.

(ii) *l'indice* $i(\omega)$ *de* ω *est égal à* 2 *ou* $n-2$ *et le germe de feuilletage défini par* ω *est sans holonomie.*

Dans les deux cas, les intégrales premières de ω sont évidemment des fonctionsde Morse d'indice $i(\omega)$. Il existe des coordonnés $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $x \in \mathbb{R}^n$ et $g \in \mathscr{E}_n$ tels que:

$$\omega = g\left(\sum_{i=1}^{i(\omega)} x_i\, dx_i - \sum_{i=i(\omega)+1}^{n} x_i\, dx_i\right)$$

On a donc le corollaire suivant.

Corollaire *Soit* ω *un germe de forme différentielle* C^∞, *intégrable, non dégénéré d'indice* $i(\omega) \neq 2, n-2$. *Alors* ω *est de l-détermination finie et* C^∞*-stable (au sens de* [2]).

Dans le cas (ii) du théorème C^∞, l'hypothèse supplémentaiee "le germe de feuilletage défini par ω est sans holonomie" est nécessaire comme le prouve l'exemple suivant: soit $\psi : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ de classe C^∞, nulle sur $[-\infty, 0]$. La fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\psi(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - \ldots - x_n^2)}{x_1^2 + x_2^2}$$

est clairement C^∞. On vérifie que:

$$\omega = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 - x_3 dx_3 \ldots - x_n dx_n + \varphi(x)\,(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$$

est intégrable. Son germe ω en 0 est non dégénéré, et $i(\omega) = 2$. Le feuilletage régulierde $\mathbb{R}^n - \{0\}$ défini par $\omega/\mathbb{R}^n - \{0\}$ a une holonomie non nulle portée par la feuille d'équation $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \ldots - x_n^2 = 0$ et ainsi ω ne peut pas avoir d'intégrale première.

Les théorèmes analytiques et C^∞ et l'exemple suivant non amène à proposer la conjecture suivante:

Conjecture *Un germe* ω *de classe* C^∞, *intégrable dont* 0 *est un zéro algébriquement isolé, possède une intégrale première* C^∞ *si le germe de feuilletage qu'il définit n'a pas d'holonomie (en un sens évident).*

D'après le théorème formel, $J^\infty\, \omega = J^\infty\, (gdf)$, et 0 est un zéro algèbriquement isolé de df. Le germe f est donc de détermination finie. On peut donc supposer que

$$J^\infty \omega = J^\infty g \,.\, dP$$

où P est un polynome en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On peut alors distinguer deux cas:

(i) $P^{-1}(0) = 0$

(ii) $P^{-1}(0)$ est un ensemble algébrique non réduit a 0. Une première étape dans la démonstration de la conjecture serait de montrer l'existence d'un germe de difféomorphisme en $0 \in \mathbb{R}^n$ qui applique $P^{-1}(0)$ sur "la feuille singulière" du feuilletage défini par ω.

Le théorème C^∞ sera démontré dans la partie III à partir des propositions 1 et 2qui sont l'objet des parties I et II.

I. Existence D'Integrales Premieres Pour Certains Germes.

Dans toute la suite $\Lambda^1_\infty(n)$ désigne le $\mathscr{E}_n$-module des germes en $0 \in \mathbb{R}^n$ des 1-formes différentielles de classe C^∞ sur un voisinage de 0. Si $(x, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, un élément de $\Lambda^1_\infty(n+p)$ qui s'écrit:

$$\omega_s = \sum_{i=1}^{n} a_i(x, s)\, dx_i \text{ avec } a_i \in \mathscr{E}_{n+p}$$

est appelé un germe de l-forme en $0 \in \mathbb{R}$ à paramètre $s \in \mathbb{R}^p$ et l'ensemble de ces germes est noté $\Lambda^1_\infty(n, p)$. Si $f \in \mathscr{E}_{n+p}$, on note

$$d_x f(x, s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, s)\, dx_i \in \Lambda^1_\infty(n, p).$$

Un élément ω_s de $\Lambda^1_\infty(n, p)$ est dit intégrable si $\omega_s \wedge d_x\omega_s = 0$. Avec ces notations on a la proposition suivante:

Proposition 1: *Soit* $\omega_s \in \Lambda^1_\infty(n, p)$, *intégrable qui s'écrit:*

$$\omega_s = dq(x') + a(x', x_n)\, dx_n$$

où $a \in \mathscr{E}_{n+p}$ *et* q *est une forme quadratique en* $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ *d'indice différent de* l *et* $n-1$. *Alors il existe* f, $g \in \mathscr{E}_{n+p}$ *tels que:*

$$\omega_s = g(x, s) f(x, s) \text{ avec } g(0, 0) \neq 0.$$

Cette proposition est une conséquence du lemme suivant:

Lemme 1: *Soit* $q(x)$ *une forme quadratique d'indice différent de* $l, n-1$. *Alors pour* $f \in \mathscr{E}_{n+p}$ *les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Il existe* $\psi \in \mathscr{E}_{1+p}$ *tel que* $f(x, s) = \psi(q(x), s)$

Preuve: Soit f un représentant de f sur le produit $B_x \times B_s$ de 2 boules de centres respectifs $0 \in \mathbb{R}^n$ et $0 \in \mathbb{R}^p$, tels que $d_x f(x, s) \wedge dq(x) = 0$ si $(x, s) \in B_x \times B_s$.

Supposong $s \in B_s$ fixé et soit f_s l'application partielle correspondante. La condition $df_s \wedge dq = 0$ signifie que f_s est constante sur les composantes connexes des fibres $q^{-1}(t)$ de q pour $t \in q(B_u)$. L'indice de q étant différent de 1, $n-1$, ces fibressont connexes. Il existe une application ensembliste $\psi_s : q(B_x) \to \mathbb{R}$ telle que:

$$f_s(x) = \psi_s(q(x)) \text{ si } x \in B_x.$$

Pour montrer que ψ définie par $\psi(t, s) = \psi_s(t)$ est C^∞ distinguons deux cas:

1. Si l'indice de q est différent de n, alors $q(B_x) = q(B_x - \{0\})$. Or en un point $t = q(x)$ avec $x \neq 0$, q étant une submersion, elle possède une section locale de classe C^∞. Il est alorsclair que ψ est C^∞.

2. Si l'indice de q est n, q(B_x) est un segment $[0, \alpha]$ et pour $t \in [0, \alpha]$, $s \in B_s$ $\psi(t, s) = f(\sqrt{t}, 0, \ldots, 0, s)$:
Mais f étant constante sur les sphères de centre 0 pour s fixé, c'est une fonction paire en x_1. D'après le lemme de Whitney [6] c'est une fonction de x_1^2 et ψ est C^∞.

Démonstration de la proposition 1. La condition d'intégrabilité $\omega_s \wedge d\omega_s = 0$ est équivalent à $dq(x') \wedge d_x$, $a(x', x_n, s) = 0$. D'après le lemme précédent, il existe $\psi \in \mathscr{E}_{2+p}$ tel que:
$a(x', x_n, s) = \psi(q(x'), x_n, s)$. Soit $\alpha_s \in \Lambda^1_\infty(2, p)$ la 1-forme définie par ... $\alpha_s = dt + \psi(t, x_n, s)\, dx_n$. Le théorème classique sur les équations différentielles dépendant d'un paramètre permet d'affirmer qu'il existe $g, f \in \mathscr{E}_{2+p}$ tels que:

$$\alpha_s = g(t, x_n, s)\, d_{(t,xn)} f(t, x_n, s) \text{ avec } g(0) \neq 0.$$

On obient ainsi $\omega_s = g(q(x'), x_n, s)\, d_x f(q(x'), x_n, s)$.

II. Existence D'Integrales Premieres dans des 2-Plans

La proposition suivante est le point de départ de la démonstration du théorème C^∞.

Proposition 2: *Soit $\omega \in \Lambda^1_\infty(n)$ intégrable dont 0 est Zéro non dégénéré vérifiant une des hypothèses (i) ou (ii) du théorème C^∞. Alors il existe des coordonnées $(x_1, x_2, s_1, s_2, \ldots, s_{n-2}) = (x, s) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ telles que*

$$\omega = g(x, s)(x_1 dx_1 + x_2 dx_2) + \sum_{i=1}^{n-2} b_i(x, s)\, ds_i$$

où g et les b_i appartiennent à $\mathscr{E}_n$ et $g(0, 0) \neq 0$.

Montrons tout d'abord que cette proposition est vraie formellement avec le leme suivant.

Lemme 2. *Soit $\omega \in \Lambda^1_\infty(n)$ qui vérifie les hypothèses de la proposition 2. Il existe des coordonnées $(x, s) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ et un représentant $\underline{\omega}$ de ω défini sur le produit $B_x \times B_s$ de 2 boules de centres respectifs $0 \in \mathbb{R}^2$, $0 \in \mathbb{R}^{n-2}$ tel que*

$$\omega = g[(x_1 + \underline{a}_1)dx_1 + (x_2 + \underline{a}_2)dx_2] + \sum_{i=1}^{n-2} \underline{b}_i\, ds_i$$

où g, a_1, a_2 et les b_1 sont des fonctions C^∞ sur $B_x \times B_s$, $g(0) \neq 0$, et a_1, a_2 sont des fonctions plates en x sur $\{0\} \times B_s$.

Démonstration. D'après le théorème formel [4] il existe f, $g \in \mathscr{E}_n$ tel que

$$J^\infty \omega = J^\infty g df \text{ avec } g(0) \neq 0.$$

Puisque $J^2 f$ est une forme quadratique de rang maximum, (et en changeant éventuellement g en $-g$), il existe des coordonnées $(x_1, x_2, s_1, s_2, \ldots, s_{n-2})$ du point $(x, s) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ telles que

$$f(x, s) = x_1^2 + x_2^2 + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i s_i^2$$

Ainsi ω s'écrit dans ces coordonnées:

$$= g[(x_1 + a_1)dx_1 + (x_2 + a_2)dx_2] + \sum_{i=1}^{n-2} b_i\, ds_i$$

où les a_1, $b_i \in \mathscr{E}_n$, les a_i étant des germes plats en 0. On en déduit, en appliquant le théorème des fonctions implicites à $x_1 + a_1(x, s) = 0$, $x_2 + a_2(x, s) = 0$ qu'il existe un représentant $\underline{\omega}$ de ω sur le produit de deux boules $B_x \times B_s$ qui s,écrit:

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}_s + \sum_{i=1}^{n-2} \underline{b}_i\, ds_i$$

$$\underline{\omega}_s = \underline{g}(x, s)\,[(x_1 + \underline{a}_1(x, s))\, dx_1 + (x_2 + \underline{a}_2(x, s))\, dx_2]$$

où $\underline{g}$, les $\underline{a}_i$, les $\underline{b}_i$ sont des fonctions C^∞ sur $B_x \times B_s$ et les $\underline{a}_i$ sont plates en $(0, 0)$ et $\underline{a}_1(0, s) = \underline{a}_2(0, s) = 0$ *si* $s \in B_s$. Soit $J^\infty \underline{\omega}_s$ le jet d'ordre infini de $\underline{\omega}_s$

en x, pour s fixé, au point $(0, s)$. D'après la remarque 2 – III de [4], $J^\infty \underline{\omega}_s$ possède une intégrale première qui dépend de façon C^∞ de $s \in B_s$. Plus précisément, il existe des séries formelles $\hat{g}_s(x), \hat{f}_s(x)$ en $x = (x_1, x_2)$ dont les coefficients sont des fonctions C^∞ en $s \in B_s$ telles que $J^\infty \underline{\omega}_s = \hat{g}_s \, d\hat{f}_s$ avec $\hat{g}_s(0) \neq 0$. Et, on peut toujours supposer que $J^1 \hat{f}_s(x) = 0$. Soient f et g deux fonctions C^∞ sur $B_x \times B_s$ (fournies par le théorème de Borel à paramètres s) tellesque pour tout $s \in B_s$ $J^\infty \underline{f}_s(x) = \hat{f}_s(x)$ et $J^\infty \underline{g}_s(x) = \hat{g}_s(x)$ avec $\underline{f}_s(x) = \underline{f}(x, s)$ et $\underline{g}_s(x) = \underline{g}(x, s)$. La différence $\underline{\omega}_s - \underline{\hat{g}} d_x \underline{f}$ est une 1-forme Π sur $B_x \times B_s$ que nous écrirons encore $\Pi(x, s) = a_1(x, s)\, dx_1 + a_2(x, s)\, dx_2$ qui est plate en x sur $\{0\} \times B_s$. Ainsi on a

$$\underline{\omega} = \underline{g}\, d_x \underline{f} + \Pi + \sum_{i=1}^{n-2} \underline{b}_i \, ds_i.$$

D'après le lemme de Morse à paramètres, il existe un difféomorphisme H d'un voisinage de $(0, 0)$ dans $B_x \times B_s$ du type $H = (X, s) \to (h(X, s), s)$ tel que $\underline{f} \circ H^{-1}(X, s) = X_1^2 + X_2^2$ et $h(0, s) = 0$ puisque $J^1 f(x, 0) = 0$. Un calcul simple montre que

$$H^*(\omega) = G(X_1\, dX_1 + X_2\, dX_2) + A_1\, dX_1 + A_2\, dX_2 + \sum_{i=1}^{n-2} B_i\, ds_i.$$

où G, les A_i, les B_i sont des fonctions C^∞ sur un voisinage de $(0, 0) \neq 0$ et les $A_i(x, s)$ sont plates en x aux points $(0, s)$.

Le lemme suivant que nous écrivons en termes de formes différentielles montre en fait l'existence d'intégrales premières pour des germes de champs de vecteurs d'un certain type.

Lemme 3: *Soit $\omega_s \in \Lambda^1_\infty(2, n-2)$ qui possède un représentant $\underline{\omega}_s$ sur le produit de 2 boules $B_x \times B_s$ tel que pour $s \in B_s$:*

(i) $J^\infty_0 \omega_s = x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2$

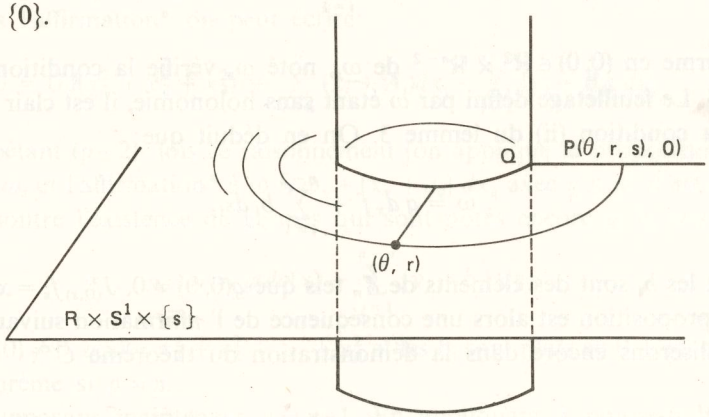
ii) Pour x assez petit, la courbe intégrale de $\underline{\omega}_s$ passant par x est homéomorphe à S^1.

Alors, il existe $g, f \in \mathscr{E}_n$ tel que

$$\omega_s = g\, f \quad \text{avec} \quad g(0, 0) \neq 0.$$

Démonstration: Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \times S^1 \times \mathbb{R}^{n-2} \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ définie par $\phi(r, \theta, s) = (r \cos \theta, r \sin \theta, s)$. On a $\phi^*(\omega_s) = (r + \lambda(r, \theta, s))dr + \mu(r, \theta, s)d\theta$. L'hypothèse (i) entraine que λ et μ sont des fonctions C^∞ sur $[0, \beta] \times S^1 \times B_s$, plates en r sur $\{0\} \times S^1 \times B_s$, où β est le rayon de la boule B_x. Pour x assez

petit, les courbes intégrales de $\phi^*(\omega_s)$ sont des cercles (hypothèse (ii)). Pour $\gamma < \beta$ assez petit, on peut définir une application $P : [0, \gamma] \times S^1 \times B_s \to [0, \beta]$ de la façon suivante: pour $s \in B_s$ fixé $(P(r, \theta, s), 0)$ est le point d'intersection de la coube intégrale de $\phi^*(\omega_s)$ (située dans la couronne $[0, \beta] \times S^1$) avec $[0, \beta] \times \{0\}$.



Or $\phi^*(\omega_s)$ a les mêmes courbes intégrales que

$$\omega^*_s = \phi^*(\omega_s)/(r + \lambda(r, \theta, s)) = dr + \nu(r, \theta, s)\, d\theta$$

et ν est encore une fonction C^∞ sur $[0, \beta] \times S^1 \times \mathbb{R}^{n-2}$ plate en r sur $(0) \times S^1 \times B_s$. La théorie habituelle de la dépendance des conditions initiales et d'un paramètre appliquée à l'équation différentielle $dr/d\theta = -\nu(r, \theta, s)$ permet d'affirmer que $P^2(r, \theta, s)$ est une fonction telle que $P^2 - r^2 = \eta$ est une fonction C^∞, plate en r sur $\{0\} \times S^1 \times B_s$. Un calcul élémentaire montre que, B'_x désignant la boule de centre $0 \in \mathbb{R}^2$ et de rayon γ, l'application $\underline{\psi}$ de $B'_x \times B_s$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\underline{\psi}(r \cos \theta, r \sin \theta, s) = \eta(r, \theta, s)$ est C^∞. Soit alors $\underline{f} : B'_x \times B_s \to \mathbb{R}^2$, avec $\underline{f}(x, s) = x_1^2 + x_2^2 + \underline{\psi}(x_1, x_2, s)$.

C'est une application C^∞ qui pour $s \in B_s$ fixé, est constante sur les courbes intégrales de $\underline{\omega}_s / B'_x \times B_s$. Son germe $f \in \mathscr{E}_n$ en 0 vérifie la relation $\omega_s \wedge d_x f(x, s) = 0$.

Puisque $\eta(r, \theta, s)$ est plate en r sur $\{0\} \times S^1 \times B_s$, $\underline{\psi}$ est plate en x sur $\{0\} \times B_s$ et on a

$$\frac{1}{2} J^\infty d_x \underline{f}(x, s) = J^\infty \underline{\omega}_s = x_1 dx + x_2 dx_2$$

Le théorème de division par une 1-forme ([1] et [4]) permet d'addirmer que la relation $\omega_s \wedge d_x f = 0$ est équivalente à l'existence de $g \in \mathscr{E}_n$ tel que $\omega_s = g\, d_x f$ avec $g(0) \neq 0$.

Démonstration de la proposition 2: Avec les notations du lemme 2, on sait que ω possède un représentant $\underline{\omega}$ sur $B_x \times B_s$ qui s'écrit:

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}_s + \sum_{i=1}^{n-2} \underline{b}_i \, ds_i$$

où le germe en $(0,0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ de $\underline{\omega}_s$, noté ω_s vérifie la condition (i) du lemme 3. Le feuilletage défini par ω étant sans holonomie, il est clair que $\underline{\omega}_s$ vérifie la condition (ii) du lemme 3. On en déduit que:

$$\omega = g \, d_x f + \sum_{i=1}^{n-2} b_i \, ds_i$$

où g, f et les b_i sont des éléments de $\mathscr{E}_n$ tels que $g(0,0) \neq 0$, $J^{\infty}_{(0,s)} f_s = x_1^2 + x_2^2$.

La proposition est alors une conséquence de l' affirmation suivante que nous utiliserons encore dans la démonstration du théorème C^{∞}:

Affirmation. *Soit $\omega \in \Lambda^1_{\infty}(n)$ intégrable que s'écrit dans des coordonnées $(x, s) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-q}$*

$$\omega = g \, d_x f + \sum_{i=1}^{n-q} b_i \, ds_i, \; g(0) \neq 0$$

où $f(x, 0)$ est une fonction de Morse. Alors il existe de nouvelles coordonnées $X = X(x, s)$ dans $\mathbb{R}^q$ telles que

$$\omega = G . d \, q \, (X) + \sum_{i=1}^{n-q} B_i \, ds_i, \; G(0) \neq 0$$

où q est une forme quadratique en $(X_1, X_2, \ldots, X_q)$ de même indice que $f(x, 0)$.

Pour démontrer cette affirmation, il suffit d'écrire que la déformation $f_s(x) = f(x, s)$ de $f_0(x) = f(x, 0)$ est triviale.

III. Demonstration Du Theoreme C .

Soit p l'indice de ω. D'après le théorème formel et la proposition 2, il existe des coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, y_2, \ldots y_{n-p}) = (x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ et des germes g, a_i, $b_j \in \mathscr{E}_n$ tels que les a_i et les b_i sont plats en 0, $g(0) \neq 0$ et

$$\omega = g \, . \, d(x_1^2 + x_2^2) + \sum_{i=3}^{p} (x_i + a_i) \, dx_i - \sum_{j=1}^{n-p} (y_j + b_j) \; dy_j$$

Supposons tout d'abord $p \geq 3$ et soit $\omega_s = g \, d(x_1^2 + x_2^2) + (x_3 + a_3) \, dx_3$, $s = (x_4, \ldots x_p, \ldots)$. La proposition 1 fournit g', $f \in \mathscr{E}_n$ tels que $\omega_s = g' d_{(x_1, x_2, x_3)} f$ avec $g'(0) \neq 0$.

Le germe $f(x_1, x_2, x_3, 0, 0 \ldots 0)$ étant une fonction de Morse d'indice 3, d'après l'affirmation* on peut écrire:

$$\omega = G d(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \sum_{i=4}^{p} (x_i + A_i) dx_i - \sum_{j=1}^{n-p} (y_j + B_j) \, dy_j$$

En répétant $(p-2)$–fois ce raisonnement (on applique la proposition 1 à un cetain ω_s et l'affirmation* à $\omega = \omega_s + (x_q + a_q) \, dx_q$ avec $q \leq p$), il est clair que l'on montre l'existence de germes qui sont notés encore g, b_j tels que:

$$\omega = g(dq(x) - \sum_{j=1}^{n-p} (y_j + b_j) \, dy_j)$$

avec $g(0) \neq 0$, $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2$ et les b_j sont plats en 0. Ceci démontre le théorème si $p = n$.

Supposons maintenant $p = n-1$. En appliquant à nouveau la proposition 1 et l'affirmation* on obtient, en consevant les notations $\omega = g \, . \, d(q(x) - y_1^2)$. Ce qui démontre le théorème si $p = n-1$.

Supposons $p < n-1$; il n'est pas possible de continuer ce raisonnement par induction car la forme quadratique $q(x) - y_1^2$ n'a pas des fibres connexes. Revenons, alors, à la forme* de ω. Le germe $\omega_j \in \Lambda^1_{\infty}(p-1, n-p)$ défini par:

$$\omega_j = dq(x) - (y_j + b_j) \, dy_j \quad \text{où } j = 1, \ldots, n-p$$

est intégrable. La condition d'intégrabilité est équivalente à

$$d_x b_j \wedge dq(x) = 0.$$

D'après le lemme 1, il existe $c_j \in \mathscr{E}_{1+p}$ tel que

$$b_j(x, y) = c_j(q(x), y)$$

Notons (u, y) les points de $\mathbb{R}^{1+n-p} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-p}$ et soit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-p}$ définie par $h(x, y) = (q(x), y)$. Le germe $\alpha \in \Lambda^1_{\infty}(n- + 1)$ défini par:

$$\alpha = - \, udu + \sum_{j=1}^{n-p} (y_j + c_j(u^2, y) \, dy_j$$

possède les proporiétés suivantes.

(i) $\omega = - \, g \, . \, h^* (\alpha)$

(ii) α est intégrable, non dégénéré, d'indice $n-p$ (comme $-1/g \, \omega$)

(iii) le feuilletage défini par α est sans holonomie (comme celui associé à ω).

D'après (ii), (iii), α vérifie les hypothèses du théorème C^∞ que nous avons déjà montrélorsque l'indice de α est égal à la dimension de l'espace moins un. Il existe donc $f' \in \mathscr{E}_{n+p-1}$ tel que:

$$\alpha \wedge df' = 0 \text{ et } J^2 f' = -u^2 + \sum_{i=1}^{p} y_i^2$$

Puisque α est invariante par la symétrie $S : (u, y) \to (-u, y)$, on a

$$\alpha \wedge df = 0 \text{ avec } f(u, y) = f'(u, y) + f'(-u, y).$$

Il existe, d'après le théorème de division par une l-forme ([1], [4]) $g \in \mathscr{E}_{1+n-p}$ tel que $\alpha = g\, df$ avec $g(0) \neq 0$ et g est invariante par S. D'après le lemme de Whitney, il existe G, $H \in \mathscr{E}_{1+n-p}$ tel que

$$\alpha = G(u^2, y)\ dF(u^2, y),\ G(0) \neq 0$$
$$\omega = -g.G(q(x), y)\ dF(q(x), y).$$

Remarque. Les arguments que nous avons utilisés dans la démonstration du théorème permettent de montrer l'existence d'intégrales premières dans d'autres cas. Par exemple, soit $\omega \in \Lambda^1_\infty$ (n) intégrable, dont 0 est un zéro algébriquement isolé alors:
(i) si la forme quadratique q telle que $J^1_\omega = dq$ est de rang et d'indice n – 1.
(ii) si $n > 3$ ou, si $n = 3$ le feuilletage associé à ω est sans holonomie. Il existe des coordonnés $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un entier p et $g \in \mathscr{E}_n$ els que

$$\omega = g\, d(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \pm x_n^p).$$

References

[1] G. De Rham: *Sur la division des formes et des courants par une forme linéaire.* Comment. Math. Helev. 28 (1954)
[2] I. Kupka: *Singularities of integrable stable Pfaffian forms.* Proc. Nat. Acad. Sci. – 52 – (1969)
[3] B. Malgrange: *Frobenius avec singularités. I codimension 1* (à paraitre).
[4] R. Moussu: *Sur l'existence d'intégrales premières pour un germe de forme de Pfaff.* Ann. Inst. Fourier – Fasc. 2 – T. 26 (1976).
[5] G. Reeb: *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées.* (Thèse 1952) – Hermann.
[6] H. Whitney: *Differentiable even functions.* Duke Math. J. 10 (1943).

Université de Dijon