BOL. SOC. BRAS. MAT. 7.2(1976), 127 – 144

Singularites des Champs de Vecteurs et Existence D'Integrales Premieres

R. Roussarie

On désigne par X un germe de champ de vecteurs, de classe $\mathscr{C}^\infty$, en $0 \in \mathbb{R}^n$. Ce germe est dit singulier si $X(0) = 0$. L'aspect d'un germe non singulier est décrit par le théorème suivant: si X est un germe de champ de vecteurs en $0 \in \mathbb{R}^n$, tel que $X(0) \neq 0$, ce germe coincide avec celui de $\partial/\partial x_1$ pour un certain choix de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$.

Dans la suite, on ne considérera que des germes singuliers. Soit

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ un tel germe; } a_i(0) = 0 \text{ pour } i = 1, \ldots, n.$$

Considérons la matrice $\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(0)\right)$ associée au 1-jet de X en 0: $j^1X(0) = \sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(0)\, x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$. Les valeurs propres de cette matrice sont invariantes par l'action du groupe des difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^n$ fixant 0, sur le germe X. Ceci implique qu'un germe singulier n'est jamais stable au sens $\mathscr{C}^1$.

Par contre, on peut se poser la question de savoir si X est de k-détermination finie au sens suivant:

Définition 1. On dit que le germe X est de k-détermination finie si pour tout germe Y, tal que $j^kX(0) = j^kY(0)$ il existe un difféomorphisme local g tel que $g_*X = Y$.

Si un germe de champ est de k-détermination finie, il est en particulier équivalent au champ polynomial représentant $j^kX(0)$.

On peut introduire entre les champs de vecteurs, une comparaison plus grossière que l'équivalence à un difféomorphisme près. Tout d'abord, rappelons qu'à un champ de vecteurs X sur $\mathbb{R}^n$ est associé un flot local $\varphi_\tau(x)$ définissant un groupe local à 1 paramètre τ, vérifiant: $d\varphi_\tau/d\tau\,(x) = X(\varphi_\tau(x))$.

Définition 2. On dit que deux germes X et Y sont topologiquement équivalents s'il existe un voisinage ouvert U de 0, un homéomorphisme h

de U dans $\mathbb{R}^n$, tel que $h(0) = 0$, des représentants de X et Y sur U et $h(U)$, de flots $\varphi_\tau^U(x)$ et $\eta_\theta^{h(U)}(x)$, tels que si $x \in U$ et $\tau > 0$ une valuer réelle pour laquelle le segment $\sigma = \varphi_{[-\tau,+\tau]}^U(x)$ soit contenu dans U, alors le segment $h(\sigma)$ est contenu dans l'orbite de Y par $h(x)$ avec la même orientation.

En d'autres termes, h doit envoyer les trajectoires de X sur celles de Y en respectant l'orientation mais pas nécessairement le parmétrage.

Avec cette notion, on peut donner une définition de la k-détermination finie topologique:

Définition 3. On dit que le germe X est de k-détermination finie topologique si tout germe Y tel que $j^k X(0) = j^k Y(0)$ est topologiquement équivalent à X. On dit également que le k-jet de X est $\mathscr{C}^0$ (topologiquement)-déterminé.

Le paragraphe 1 contient des énoncés de quelques résultats de détermination finie de classe $\mathscr{C}^\infty$, démontrés dans [R] et le paragraphe II, ceux de quelques résultats de détermination finie topologique düx à F. Takens et F. Dumortier concernant des germes singuliers davantage dégénérés. On obtient une analyse suffisante de ces singularités en utilisant des éclatements successifs de l'origine. L'usage de tels éclatements permet d'étudier dans le paragraphe III l'existence d'intégrales premières $\mathscr{C}^\infty$ non triviales pour un germe de champ dans le plan, ou, ce qui revient au même, l'existence d'un facteur intégrant pour un germe de l-forme différentielle dans le plan. On démontrera ci-dessous un résultat plus général que celui obtenu dans [R].

1. Champs de Détermination Finie en Classe $\mathscr{C}^\infty$.

Tout germe hyperbolique est topologiquement équivalent à son 1-jet: on peut encore dire que tout 1-jet hyperbolique est $\mathscr{C}^0$-déterminé.

L'exemple suivant montre qu'il n'est pas en général $\mathscr{C}^\infty$ déterminé:

Soit $X = x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2} + x_1 x_2 \left(x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2} \right)$

Alors X n'est pas $\mathscr{C}^\infty$-équivalent à $X_1 = x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2}$.

En effet si $G = (f, g)$ est un difféomorphisme tel que:
$G_*(X) = X_1$, on a $x(1 + xy) \dfrac{\partial f}{\partial x} - y(1 - xy) \dfrac{\partial f}{\partial y} = f.$

En développant cette relation en série formelle, on trouve que: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$ donc que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0) \neq 0$ (en considérant les termes de degré +1) puis $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0) = 0$ (en considérant les termes de degré 3).

Nous allons voir que $j^1 X(0)$ est $\mathscr{C}^\infty$ déterminé (c'est-à-dire que X est linéarisable) si certaines relations sont vérifiées entre les valeurs propres λ_i de la matrice $(\partial a_i / \partial x_j(0))$.

Soit $X_1 = \sum_{i,j} a_{ij} x_j \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ un champ linéaire et $\lambda_1, \ldots \lambda_n$, les valeurs propres de la matrice (a_{ij}).

Désignons par $\tilde{V}(n)$, $\tilde{V}_\tau(n)$ les champs formels et les chemins de champs formels (Un élément $\tilde{Y} \in \tilde{V}(n)$ s'écrit $\sum_{\substack{i \in \sigma_n \\ j \in [1,\ldots,n]}} a_i x^i \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ et un élément

$\tilde{Y}_\tau \in \tilde{V}_\tau(n) : Y_\tau = \sum_{i,j} a_i(\tau) x^i \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ avec $i = (i_1, \ldots, i_n) \in \sigma_n$, ensemble des n-indices; $(x^i = x_1^{i_1} \ldots x_n^{i})$.

Considérons tout d'abord l'action par crochet de X_1 sur $\tilde{Y} \in \tilde{V}(n)$. Si l'on décompose $\tilde{V} = \bigoplus_k V^k$ où V^k désigne l'espace des champs polynomiaux homogènes de degré k, on a:

$$[X_1, V^k] \subset V^k.$$

Ainsi $\tilde{Y} \in V^k \to [X_1, \tilde{Y}] \in V^k$ est une application linéaire que l'on notera $\rho_k^{X_1}$.

Lemme 4. *L'application $\rho_k^{X_1}$ a pour valeurs propres les nombres $(-\lambda_j + \sum_{l=1} i_l \lambda_l)$ pour tout $j \in 1, \ldots, n$ et $(i_1 \ldots i_n) \in \sigma_n$ tel que $|i| = i_1 + \ldots + i_n = k$.*

Ce résultat conduit à poser:

Definition 5. Le champ X_1 vérifie les conditions (P) si et seulement si pour tout $j \in 1, \ldots, n$ et tout n-indice $i = (i_1, \ldots, i_n)$ tel que $|i| \geq 2$ on a $\lambda_j - \sum_{k=1}^n i_k \lambda_k \neq 0$.

Remarque. Si X_1 vérifie les conditions (P), alors X_1 est hyperbolique. Le lemme 4 montre que les conditions (P) pour X_1 sont équivalentes à l'existence d'un opérateur linéaire $0 = \bigoplus_{k \geq 2} \sigma_k$, où $\sigma_k : V^k \to V^k$ est l'inverse à droite $\rho_k^{X_1}$. Ainsi, pour $\tilde{Z} \in \tilde{\mathscr{M}}^2\ \tilde{V}(n) : [X_1, \sigma\tilde{Z}] = \tilde{Z}$.

Il est facile maintenant de montrer que l'on peut construire un opérateur σ_τ à partir de σ, lorsque X_1 est remplacé par $\tilde{X}_\tau = X_1 + \tilde{P}_\tau$ avec $\tilde{P}_\tau$, $\tilde{P}_\tau \in \tilde{\mathscr{M}}_\tau^2\ \tilde{V}_\tau(n)$. On en déduit:

Lemme 6. *Soit X_1 un champ vérifiant les conditions (P) et $\tilde{P}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^2\, \tilde{V}_\tau(n)$. Posons $X_\tau = X_1 + \tilde{P}_\tau$. Alors pour tout $\tilde{Z}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^2\, \tilde{V}_\tau(n)$ il existe $\tilde{Y}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^2\, \tilde{V}_\tau(n)$ unique tel que $[\tilde{X}_\tau, \tilde{Y}_\tau] = \tilde{Z}_\tau$.*

Ce lemme implique que si un germe X a un 1-jet vérifiant les conditions (P), X est formellement équivalent à X_1. Pour passer à la classe $\mathscr{C}^\infty$ on doit résoudre l'équation: $[X_\tau, Y_\tau] = Z_\tau$ avec $X_\tau = X_1 + \tau(X - X_1)$ et $Z_\tau = \dot{X}_\tau \in \mathcal{M}_\tau^2\, V_\tau(n)$. (La conjugaison entre X et X_1 étant trouvée par intégration de Y_τ).

Si $\tilde{Y}_\tau$ est la solution de l'équation formelle $[\tilde{X}_\tau, \tilde{Y}_\tau] = \tilde{Z}_\tau$, et Y_τ un prolongement $\mathscr{C}^\infty$ de $\tilde{Y}_\tau$, on a: $H_\tau = [X_\tau, Y_\tau] - Z_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty V_\tau(n)$.

Supposons qu'il existe $G_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty V_\tau(n)$ solution de:

$$(\infty) \qquad [X_\tau, G^\tau] = H_\tau$$

Alors $[X_\tau, Y_\tau - G_\tau] = Z_\tau$ et $Y_\tau - G_\tau \in \mathcal{M}_\tau^2\, V_\tau$.

Effectivement, l'équation (∞) admet bien une solution, mais il est à noter que cette solution ne peut pas être déduite de la solution formelle; les conditions de son existence sont d'ailleurs plus faibles comme le montre le résultat suivant:

Théorème 7. *Soit X_τ un chemim de germes hyperboliques (pour $\forall\tau$, X_τ a une singularité hyperbolique). Alors pour tout $Z_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty V_\tau^\infty\, V_\tau(n)$, il existe $Y_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty V_\tau(n)$ solution de l'équation $[X_\tau, Y_\tau] = Z_\tau$.*

Ce théorème et le lemme 6 impliquent le résultat suivant:

Théorème 8 [St. 2] *Soit $X = \sum_1^n a_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ un germe en $0 \in \mathbb{R}^n$ dont le l-jet X_1 vérifie les conditions (P). Alors X est $\mathscr{C}^\infty$ équivalent à X_1.*

Que se passe-t-il si certaines inégalités de (P) ne sont pas vérifiées? Supposons que ce inégalités (P) soient vérifiées pour $|i| \geq k$. Alors ρ^{X_1} est inversible pour $k' \geq k$ et X sera formellement de k-détermination finie. Mais il est facile de vérifier que X est encore hyperbolique. Le théorème 7 étant valable, le germe X est donc de k-détermination finie. Un cas particulier important est celui d'un champ strictement contractant ou dilatant: ...

Théorème 9. St. 1] *Soit $X = \sum_{i=1}^n a_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ un germe de champ tel que toutes les valeurs propres de $\left.\dfrac{\partial a_i}{\partial x_j}(0)\right)$ aient des parties réelles différentes de zéro et de même signe.*

Soit k *le plus petit entier strictement supérieur à $\dfrac{\operatorname{Sup}_{jj} \lambda_j}{\operatorname{Inf}_j |\lambda_j|}$.*

Alors X est de k-détermination finie.

Il peut se faire, même si X est hyperbolique, qu'une infinité d'inégalités (P) ne soient pas vérifiées. Considérons la situation en dimension 2. Pour qu'il existe une infinité de telles relations, il faut et il suffite qu'il existe un couple d'entiers positif $(p, q) \neq (0, 0)$ tels que $p\lambda_1 + q\lambda_2 = 0$.

Les formes réduites de Jordam de la matrice $(\partial a_i/\partial x_j(0))$ sont de l'un des trois types suivants:

a) *Une rotation $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{smallmatrix}\right)$ avec les valeurs propres $\pm i\lambda$.*
b) *Une matrice diagonale: $\left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et (p, q) tel que $p\lambda_1 + q\lambda_2 = 0$, c'est-à-dire, soit que $\lambda_1 . \lambda_2 = 0$ soit $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{Q}^-$.*
c) *Les valeurs propres sont nulles et la matrice est équivalente à:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$$

Dans de tels cas on peut utiliser le résultat suivant:

Proposition 10 *(Forme normale formelle)* [T. 1]. *Soit X_1 un champ linéaire en dimension n quelconque. Pour tout $k \geq 2$, choisis sons un facteur direct G_k de l'image $[X_1, V^k]$ dans V^k. Alors tout champ formel $\tilde{X}$ dont le 1-jet est X_1 est formellement équivalent à un champ d'écriture: $X_1 + g_2 + \ldots + g_k + \ldots$ avec $g_k \in G_k$.*

Appliquée içi, cette proposition donne les résultats suivants:

a) $X_1 = -\lambda x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \lambda x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_2}$

$$\tilde{X} \simeq X_1 + \sum_{k\geq 1} (a_k(x_1^2 + x_2^2)^k \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\right) + b_k (x_1^2 + x_2^2)^k \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right)$$

b) $X_1 = \lambda_1 x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_2 x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2}$, λ_1 ou $\lambda_2 \neq 0$ et il existe (p, q), premier entre eu tels que $p\lambda_1 + q\lambda_2 = 0$.

$$\tilde{X} \simeq X_1 + \sum_{k\geq 1} (x_1^p x_2^q)^k \left(\alpha_k x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \beta_k x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

c) $X_1 = \mu x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_2}$

$$\tilde{X} \simeq X_1 + \sum_{k\geq 1} x_2^k \left(a_k x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + b_k x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right).$$

On peut maintenant regarder, sur ces expressions, quels sont les champs de détermination finie. La réponse formelle est donnée par le théorème suivant:

Théorème 11 [*T*. 2], [*R*] *Considérons les formes normales a) et b) données ci-dessus. Alors:*

a) Si pour: $1 \leq k \leq l-1$, $a_k = 0$ *et que* $a_l \neq 0$, *il existe une série formelle* $\tilde{f}$, $\tilde{f}(0) = 1$, *telle que* $\tilde{f}\tilde{X}$ *soit équivalent au champ:*

$$X_1 + (\delta(x_1^2 + x_2^2)^l + \mu(x_1^2 + x_2^2)^{2l}) \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

qui est formellement déterminé.

b) Si pour $1 \leq k \leq l-1$ $p\alpha_k + q\beta_k = 0$ *et que* $p\alpha_l + q\beta_l \neq 0$, *il existe une série formelle* $\tilde{f}$, $\tilde{f}(0) = 1$, *telle que* $\tilde{f}\tilde{X}$ *soit équivalent au champ:*

$$X_1 + (\delta(x_1^p\, x_2^q)^l + \mu(x_1^p\, x_2^q)^{2l}) \left(-\lambda_2 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

qui est formellement déterminé.

Il est facile de déduire du théorème précédent qu'il existe sous les hypothèses du théorème une filtration par des ensembles semi-algébriques $\Sigma_i(X_1)$, de codimension i:

$\Sigma_0(X_1) = V_{X_1} = \{\tilde{X} \in \tilde{V} \mid j^1 \tilde{X} = X_1\}$

et

$\Sigma_0(X_1) \supset \Sigma_1(X_1) \supset \ldots \supset \Sigma_i(X_1) \supset \ldots \ldots \supset \Sigma_\infty(X_1) = \bigcap_i \Sigma_i(X_1)$

où $\Sigma_i(X_1)$ est contre-image d'un ensemble algébrique dans $J^{(p+q)i+1}V$, telle que si $\tilde{X} \in \Sigma_i(X)/\Sigma_{i+1}(X_1)$, alors, à une série formelle près, $\tilde{X}$ est de $2(p+q)i+1$ détermination finie formelle.

Ceci pour l'aspect formel. Qu'en est-il en classe $\mathscr{C}^\infty$? Les résultats sont les suivants:

a) Dans le cas où X_1 est une rotation et que $\tilde{X} \in \Sigma_i(X_1)$, les conclusions du théorème sont vraies en classe $\mathscr{C}^\infty$, si i est fini. Pour $i = \infty$, les conclusions $\mathscr{C}^\infty$ seraient fausses, car un germe qui est formellement une rotation n'est pas en général topologiquement équivalent à une rotation.

b) Dans le cas hyperbolique, $\lambda_1 . \lambda_2 \neq 0$, les conclusions sont vraies pour tout i en classe $\mathscr{C}^\infty$ grâce au théorème 7. Dans le cas semi-hyperbolique, $\lambda_1 . \lambda_2 = 0$, un calcul très laborieux montre que le résultat en classe $\mathscr{C}^\infty$ est encore vrai pour i fini. (Il est trivialement faux pour $i = \infty$).

2. Champs de détermination finie topologique.

Pour étudier des singularités plus dégénérées que celles du paragraphe précédent, une méthode efficace, utilisée systématiquement en premier par F. Takens, consiste à "éclater" l'origine, c'est-à-dire, à passer en coordonnées polaires. Le champ ainsi obtenu peut être alors parfois simplifié par division par une puissance convenable de la distance à l'origine.

Par éclatement, on entend ici, le passage en coordonnées polaires: $\Phi : A_1 = S^1 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$

$$\Phi(\theta, r) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \text{ pour } \theta \in S^1,\ r \geq 0.$$

Si X est un germe de champ en $0 \in \mathbb{R}^2$, $X(0) = 0$, il existe un germe de champ $\hat{X}$ sur $S^1 \times \mathbb{R}^+$, le long de $S^1 \times \{0\}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ tel que:

$$\Phi_*(\hat{X}) = X.$$

Si de plus $j^k X(0) = 0$, le champ $\hat{X}$ est divisible par $F_1(r, \theta) = r^k$. Par résultat de l'éclatement on entend le champ $\bar{X} = 1/r^k\, \hat{X}$ où k est le plus grand entier tel que $j^k X(0) = 0$.

Si le champ $\bar{X}$ présente une singularité en $p \in \partial A_1 = S^1 \times \{0\}$ on peut itérer l'éclatement en p. (En choisissant une carte au voisinage de p). Plus généralement on pourra effectuer éventuellment une suite finie d'éclatements $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$. Le résultat de cette suite d'éclatements sera un germe de champ $\bar{X}_n$ défini sur un domaine A_n homéomorphe à $S^1 \times \mathbb{R}^+$, au voisinage de ∂A_n; ∂A_n est formé d'un nombre fini d'arcs lisses à raccord anguleux. De plus, par construction, on obtient une fonction F_n sur A_n, de classe $\mathscr{C}^\infty$, telle que $F_n(m) > 0$ pour $m \notin \partial A_n$, $F_n(m) = 0$ pour $m \in \partial A_n$, telle que F_n a un jet non nul en chaque point de ∂A_n, et telle que $(\Phi_1 o \ldots o \Phi_n)_*\, F_n \bar{X}_n = X$. (Voir [*D*] pour plus de détails).

Je vais donner un résultat général obtenu grâce à cette technique d'éclatement et à la connaissance des formes normales du paragraphe précédent.

Définition Nous dirons qu'un champ formel $\tilde{X} = \tilde{a}_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \tilde{a}_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2}$ est à singularité algébriquement isolée, s'il existe $k < \infty$ tel que $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) \supset \tilde{\mathscr{U}}^k$.

Notons A le complémentaire de l'ensemble des champs à singularité algébriquement isolée dans l'espace $\tilde{V}_0(2)$ des champs formels en 0, s'annulant en 0.

Il est facile de montrer que:

Proposition 12 [*D*] *L'ensemble* $A \subset \tilde{V}_0(2)$ *est un sous-ensemble proalgébrique (intersection d'ensembles algébriques) de codimension infinie.*

D'autre parte, disons qu'un germe de champ en $0 \in \mathbb{R}^2$ a un degré de dégénérescence nul si $X(0) = 0$, $j^1 X(0) \neq 0$ et est non équivalent à $x_1\, \partial/\partial x_2$. On a alors, en utilisant les notations de Dumortier:

Théorème 13 $[D]$ *Soit X un germe en $0 \in \mathbb{R}^2$, $X(0) = 0$ tel que $\tilde{X} \notin A$. Alors il existe une suite finie d'éclatements $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ conduisant à un champ $\bar{X}_n$, et une fonction $\mathscr{C}^\infty$ f_n sur A_n, domaine de l'éclatement positive sur $A_n/\partial A_n$ et de jet non nul en chaque point de ∂A_n telle que $\hat{X}_n = F_n . \bar{X}_n$ et que $\bar{X}_n$ ait pour seules singularités sur ∂A_n:*
ou bien 1) des singularités isolées p où X_n a un degré de dégenérescence 0 et où $j(\bar{X}_n \mid W_c)_p \neq 0$ (W_c: variété centrale en p).
Ou bien 2) des intervalles fermés (peut-être ∂A_n si $n = 1$) de singularités de degré de dégénérescence 0.

De plus, la position et les propriétés des singularités mentionnées ci-dessu ne dépendent que d'un jet fini de X en 0.

Chacune de ces singularités de $\bar{X}_n$ est de détermination topologique finie. Cela peut suggérer le résultat suivant:

Théorème 14 $[D]$ *Soit X un germe en $0 \in \mathbb{R}^2$ tel que $\tilde{X} \in \tilde{V}_0(2)\backslash A$. Alors, ou bien X ne possède pas de séparatrices en 0, ou bien X est topologiquement de détermination finie (Rappelons qu'une séparatrice est une trajectoire tendant vers 0 avec une direction limite).*

Un autre résultat déduit du théorème 13 est le suivant:

Théorème 15 $[D]$ *Il existe une suite d'ensembles semi-algébriques $\tilde{V}_0 \supset \tilde{V} \supset \tilde{V} \supset \ldots \supset \tilde{V}_5$ de codimension $0, \ldots, 5$ respectivement, tels que pour $i = 0, \ldots, 4$ chaque $\tilde{V}_i \backslash \tilde{V}_{i+1}$ soit une réunion finie de variétés ouvertes de codmension i : $\tilde{V}_i \backslash \tilde{V}_{i+1} = \bigcup_{j=1}^{n_i} M_{ji}$. A un ensemble semi-algébrique ouvert $R_3 \subset \tilde{V}_3$ près, ouvert dans V_3, chaque X, tel que $\tilde{X} \in (\tilde{V}_0 \backslash R_3) \cap M_{ji}$ est $M_{ji} - \mathscr{C}^0$–stable. (c'est-à-dire en restriction à M_{ji}).*

Ces résultats complètent des résultats antérieurs de F. Takens, valables en dimension $n > 2$, que je rappelle également:

Théorème 16 $[T. 1]$ *Pour tout n, il existe des ensembles fermés semi-algébriques $\tilde{V}_1 \supset \tilde{V}_2 \supset \tilde{V}_3$ dans $\tilde{V}(n)$, de codimension 1,2 et 3 respectivement, tels que, avec $\tilde{V}_0 = \tilde{V}(n)$, $i = 1,2,3$, chaque $X, \tilde{X} \in \tilde{V}_{i-1}$–faiblement– $\mathscr{C}^\infty$–stable; De plus, chaque $\tilde{V}_{i-1} \backslash \tilde{V}_i$ est une variété ouverte non singulière de codimension $(i-1)$.*

(Voir la définition de faiblement $\mathscr{C}^0$–stable dans $[T. 1]$; Il est d'ailleurs vraisemblable que si $X, \tilde{X} \in \tilde{V}_{i-1} \backslash \tilde{V}_i$, alors X est $\tilde{V}_{i-1}$ $\mathscr{C}^0$–stable).

Théorème 17 $[T. 1]$ Si $n \geq 5$, il n'existe pas de suite $\tilde{V}_1 \supset \tilde{V}_2 \supset \tilde{V}_3 \supset \tilde{V}_4$ d'ensemble fermés semi-algébriques comme dans le théorème 16.

3. Existence D'Intégrales Premières.

Définition Soit X un germe de champ de vecteurs en $0 \in \mathbb{R}^n$. Par intégrale première ($\mathscr{C}^\infty$), on entend un germe de fonction $f \in \mathscr{M}$ (idéal des germes nuls en 0) tel que $X . f = 0$, et par intégrale première formelle, une série formelle $\alpha \in \mathscr{M}$ telle que $\tilde{X} . \alpha = 0$. On désignera par $\mathscr{F}_X$ et $\mathscr{F}_X$ les algèbres des intégrales premières $\mathscr{C}^\infty$ et formelles du champ X.

L'étude de l'algèbre des intégrales formelles d'un champ formel $\tilde{X}$ donné, semble difficile à priori. Par exemple, le problème suivant est ouvert: dans l'espace $\tilde{V}(n)$ de champs formels en $0 \in \mathbb{R}^n$, l'existence pour $\tilde{X}$ d'au moins une intégrale première formelle α est-elle une condition de codimension ∞ pour $\tilde{X}$?

Par contre, nous allons voir que sous des conditions assez générales (du moins en dimension 2), on peut prolonger chaque intégrale première formelle en une intégrale première $\mathscr{C}^\infty$. (Autrement dit, l'application de jet $\Pi : \mathscr{F} \to \tilde{\mathscr{F}}$ est sujective).

Nous avons pour commencer le critère suivant, conséquence immédiate du théorèmede Borel:

Lemme 18. *Soit X un germe de champ en $0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathscr{F}$ et $\tilde{\mathscr{F}}$ les algèbres d'intégrales premières $\mathscr{C}^\infty$ et formelles de X. Alors pour que $\Pi : \mathscr{F} \to \tilde{\mathscr{F}}$ soit surjective il suffit que la dérivation par X soit une application surjective de $\mathscr{M}^\infty$ dans $\mathscr{M}^\infty$. ($X . \mathscr{N}^\infty \supset \mathscr{M}^\infty$).*

Dans $[R]$, il est démontré que les germes hyperboliques vérifie ce critère:

Théorème 19. *Soit X un germe de champ hyperbolique, en $0 \in \mathbb{R}^n$. Alors $X . \mathscr{M}^\infty \supset \mathscr{M}^\infty$.*

Il est naturel de se préoccuper ensuite du noyau de la dérivation de X sur $\mathcal{M}^\infty$, c'est-à-dire de l'algèbre $\mathcal{F}^\infty$ des intégrales première plates (en 0). Nous allons donner une caractérisation des éléments de $\mathcal{F}^\infty$ pour un germe hyperbolique X en $0 \in \mathbb{R}^n$. On peut toujours supposer que X est représenté par un champ $X_{\mathbb{R}^n}$ défini sur $\mathbb{R}^n$, ayant $0 \in \mathbb{R}^n$ comme unique singularité, et pour variété stable et instable: $W^s = \mathbb{R}^p \times \{0\}$ et $W^u = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-p}$). D'autre part, chaque intégrale première étant constante le long des trajectoires de X, il est facile de montrer que $\mathcal{F}^\infty$ s'identifie avec les germes d'intégrales premières de $X_{\mathbb{R}^n}$ le long de $W^u \cup W^s$.

Le champ $X_{\mathbb{R}^n}$ en restriction à W^s est une contraction hyperbolique. On peut donc trouver une sphère $S^{p-1} \subset \mathbb{R}^p$, telle que S^{p-1} soit transverse aux trajectoires. Par continuité de $X_{\mathbb{R}^n}$, il existe aussi un disque $D^{n-p} \subset \mathbb{R}^{n-p}$, centré en $0 \in \mathbb{R}^{n-p}$ tel que $V = S^{p-1} \times D^{n-p} \subset \mathbb{R}^n$ soit transverse aux trajectoires de $X_{\mathbb{R}^n}$

Chaque germe de fonctions le long de $W^u \cup W^s$ se restreint sur V en un germe de fonction le long de $S^{p-1} \times \{0\}$. Soit r cette application de restriction: $r(f) = f_{|V}$; cette application induit une application, encore notée r: $r : \mathcal{F}^\infty \to \mathcal{M}^\infty(V, S)$, espace des germes de fonctions de V, le long de $S = S^{p-1}$, plate le long de S.

ALors, la proposition suivante caractérise $\mathcal{F}^\infty$:

Proposition 20 *L'application de restriction $r : \mathcal{F}^\infty \to \mathcal{M}^\infty(V, S)$ est un isomorphisme. De plus chaque élément de $\mathcal{F}^\infty$ est une fonction de jet nul en chaque point de $W^u \cup W^s$.*

Démonstration Remarquons tout d'abord que r est trivialement injective: en effet chaque trajectoire coupe V en un point au plus et chaque intégrale première est nécessairement nulle sur $W^u \cup W^s$.

Désignons par $\varphi_u(p)$, $u \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$ le flot de $X_{\mathbb{R}^n}$. Soit $u(p)$, l'unique valeur telle que $\varphi_{u(p)}(p) \in V$. La réunion de l'ensemble des trajectoires coupant V et de W^u forme un voisinage W de $W^u \cup W^s$.

Maintenant, si $f \in \mathcal{M}^\infty(V, S)$ est représentée par une fonction définie sur V, il existe au plus une intégrale première F de $X_{\mathbb{R}^n}$ qui, dans W est définie par:

$$(1) \qquad \begin{cases} F(p) = 0 \text{ si } p \in W^u \\ F(p) = f(\varphi_{u(p)}(p)) \text{ si } p \in W \setminus W^u \end{cases}$$

Pour montrer que r est surjective, et la dernière affirmation de la proposition, il suffit de prouver que les formules (1) définissent une fonction F, plate le long de $W^u \cup W^s$.

Remarquons que, trivialement, F est $\mathscr{C}^\infty$ sur $W \setminus W^u$. Le résultat suit donc de l'affirmation suivante: pour $\forall$ ordre de dérivation α et pour tout $p_0 \in W^u$, $\dfrac{\partial^\alpha F}{\partial m^\alpha}(p) \to 0$ si $p \to p_0$ par valeur $p \notin W^u$.

Dans [R], on trouvera une démonstration de ce dernier point pour les points hyperboliques en dimension 2. La démonstration en dimension plus grande ne présente pas de difficultés supplémentaires. En voici une brève esquisse.

On désigne par $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ des coordonnés et par $\|x\|$, $\|y\|$ des normes de $\mathbb{R}^p$ *et* $\mathbb{R}^{n-p}$ respectivement.

Ecrivons : $\varphi_u(p) = (x_u(p), y_u(p))$.

La fonction $u(p)$ est définie par la condition:

$$\| x_{u(p)}(p) \| = a \text{ où } a \text{ est le rayon de } S.$$

Si $f(q)$ est une fonction sur V, on a:

$$F(p) = f(\varphi_{u(p)}(p)).$$

En utilisant le caractère hyperbolique de X, on peut montrer que:

$$(2) \qquad \| y_{u(p)}(p) \| \leq C_0 \| x \|^k$$

où k et C_0 sont des constantes ne dépendant que d'une norme de X sur un compact K sur lequel p est supposé choisi dorénavant.

Il résulte alors de la nullité de f sur $S \times \{0\}$, que F est continue sur W^u. Si maintenant α est un ordre de dérivation quelconque, $|\alpha| \geq 1$, la dérivée $\dfrac{\partial^\alpha F}{\partial m^\alpha}(p)$, $p \notin W^u$, est une somme de termes de la forme:

$$\frac{\partial^\beta f}{\partial m^\beta}(\varphi_{u(p)}(p)) \cdot \frac{\partial^\gamma \varphi}{\partial u^\gamma} u(p)(p) \cdot \frac{\partial^\delta u}{\partial p^\delta}(p)(p) \cdot \frac{\partial^\nu u}{\partial p^\nu} \text{ avec } |\beta| \geq 1.$$

Toujours en utilisant le caractère hyperbolique de X, on peut établir les inégalités de la forme: $(p = (x, y))$

$$(3) \qquad \left\| \frac{\partial^\gamma \varphi_{u(p)}}{\partial u^\gamma}(p) \right\| \leq C_\gamma \| x \|^{-P_\gamma}$$

$$(4) \qquad \left\| \frac{\partial^\delta u}{\partial p^\delta}{}^{(p)}(p) \right\| \leq D_\delta \| x \|^{-Q_\delta}$$

$$(5) \qquad \left\| \frac{\partial^\nu u}{\partial p^\nu}(p) \right\| \leq E_\nu \| x \|^{-R_\nu}$$

où les constantes positives $C_\gamma, D_\delta, E_\nu, P_\gamma, Q_\delta, R_\nu$ ne dépendent que de γ, δ, ν respectivament et d'une norme assez grande de X sur le compact K fixé.

L'affirmation à démontrer résulte immédiatement des inégalités (2), (3), (4) et (5) ainsi que de la nullité des dérivées de f aux points de $S \times \{0\} \subset V$.

Le théorème 19 et la proposition 20 ramènent la description des intégrales premières $\mathscr{C}^\infty$ d'un point hyperbolique à celle des intégrales premières formelles. Précisons celà en dimension 2. Constatons tout d'abord qu'il est très facile de déterminer l'algèbre des intégrales premières formelles d'un champ X de degréde dégénérescence nul.
J'énonce le résultat sans démonstration:

Proposition 21. *Soit $\tilde{X}$ un champ formel à deux variables de degré de dégénérescence nul (c'est-à-dire dont le l-jet n'est pas équivalent à $x_1\,\partial/\partial c_2$). Pour que X admette au moins une intégrale première formelle $\alpha \neq 0$, il est nécessaire que les valeurs propres du 1-jet X_1 de $\tilde{X}$ soit rationnellement dépendantes (C'est-à-dire que X soit l'un des champs considérés dans le théorème il ci-dessus).*

Sous cette condition et avec les notations du théorème 11, le champ X admet une intégrale première formelle $\alpha \neq 0$ si et seulement si $\tilde{X} \in \Sigma_\infty(X_1)$.

La proposition précédente montre que $\tilde{\mathscr{F}} \neq \{0\}$ pour un champ $\tilde{X}$ si et seulement si $\tilde{X}$ est équivalent, à un facteur régulier près, à un des champs linéaires X_1 considéré dans le théorème 11. Pour un tel champ linéaire on a:

Proposition 22. *Soit X_1 un champ linéaire comme dans le théorème 11. Alors l'algèbre $\tilde{\mathscr{F}}$ de X_1 est égale à:*

a) $\tilde{\mathscr{F}} = \{\tilde{\varphi}(x_1^2 + x_2^2) \mid \tilde{\varphi}$ série formelle à une variable, $\tilde{\varphi}(0) = 0\}$ si X_1 est une rotation.

b) $\tilde{\mathscr{F}} = \{\tilde{\varphi}(x_1^p x_2^q) \mid \tilde{\varphi}$ série formelle à 1 variable, $\tilde{\varphi}(0) = 0\}\}$, dans le cas d'un champ hyperbolique, ou semi-hyperbolique. (p et q sont définis dans le paragraphe II).

Soit X un germe $\mathscr{C}^\infty$. Si $X_1 = j^1X(0)$ est une rotation, on ne peut pas, en général, prolonger les intégrales premières formelles.

Ainsi, le champ $X = x_1\,\partial/\partial x_2 - x_2\,\partial/\partial x_1 + \psi\,(x_1^2 + x_2^2)\,(x_1\,\partial/\partial x_1 + x_2\,\partial/\partial x_2)$ où ψ est une fonction $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\psi(t) > 0$ pour $t > 0$, plate en 0 ne possède pas d'intégrale première $\mathscr{C}^\infty$ autre que la fonction nulle. Par contre $x_1^2 + x_2^2$ est une intégrale première formelle.

Au contraire, si X_1 est hyperbolique le champ X est linéarisable [R] à une fonction régulière près. Les algèbres de X et de X_1 sont équivalentes (à un changement de coordonnées près). Nous allons décrire l'algèbre $\mathscr{F}$ du champ hyperbolique $X_1 = \lambda_1 x_1\,\partial/\partial x_1 + \lambda_2 x_2\,\partial/\partial x_2$ où $p\,\lambda_1 + q\,\lambda_2 = 0$

pour p,q membres premiers entre eux. Pour celà on traduit en dimension 2 la proposition 20:

Lemme 22. *Les intégrales premières de $X_1 = \lambda_1 x_1\,\partial/\partial x_1 + \lambda_2 x_2\,\partial/\partial x_2$ plates en 0, s'écrivent, dans le ler quadrant $H = \{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$:*

$$f(x_1, x_2) = \varphi(x_1^p\, x_2^q) \text{ avec } \varphi \text{ fonction réelle, plate en } 0.$$

Démonstration Soit un intervalle $I = \{a\} \times [0, \varepsilon]$, $a > 0$. Si (a, y) est le point de I situé sur l'orbite de $(x_1, x_2) \in H$ on a:

$$x_1^p\, x_2^q = a^p\, y^q,$$

formule qui définit y en fonction de (x_1, x_2) pour $(x_1, x_2) \in H$.

La proposition 20 affirme que toute l'intégrale première sur H s'écrit:

$$F(x_1, x_2) = f(y) \quad \text{où } f \text{ est plate en } 0.$$

Mais une fonction $f(y)$ définie sur $\mathbb{R}^+$, plate en zéro, s'écrit toujours $f(y) = f(y^q)$ où f est plate en 0. D'où le résultat.

Des deux nombres p et q, l'un des deux au moins est impair; supposons pour fixer les idées que q soit impair. Alors, du lemme précédent on déduit facilement:

Proposition 23. *Soit le champ linéaire hyperbolique $X_1 = \lambda_1 x_1\,\partial/\partial x_1 + \lambda_2 x_2\,\partial/\partial x_2$ tel qu'il existe p,q nombres premiers entre eux, q impair. Alors l'algèbre des germes d'intégrales premières est formée des germes de fonctions de la forme:*

$$\varphi_1(x_1^p\, x_2^q) + Y(x_1, x_2)\,\varphi_2(x_1^p\, x_2^q)$$

Où φ_1, φ_2 sont des germes de fonctions réelles quelconques, plates en 0 et $Y(x_1, x_2)$ est la fonction caractéristique du demi-espace $\{x_2 \geq 0\}$.

Déterminons maintenant l'algèbre $\mathscr{F}$ des germes d'intégrales premières du champ X_1. Si f est une intégrale première de classe $\mathscr{C}^\infty$, le jet $\tilde{f}$ de f s'écrit en vertu du lemme 22, sous la forme:

$$\tilde{f} = \tilde{\varphi}(x_1^p\, x_2^q)$$

où $\tilde{\varphi}$ est une série à 1 variable.
Soit φ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ prolongeant $\tilde{\varphi}$.
Alors $\varphi(x_1^p\, x_2^q)$ est aussi une intégrale première $\mathscr{C}^\infty$ de X_1. La fonction $f - \varphi(x_1^p\, x_2^q)$ est un élément de $\mathscr{F}^\infty$. D'où le résultat.

Proposition 24 *Soit X_1 un champ linéaire hyperbolique comme dans la proposition 23. Alors l'algèbre $\mathscr{F}$ est germes d'intégrales premières de X_1 est formée des fonctions de la forme:*

$$\varphi_1 (x_1^q x_2^q) + Y(x_1, x_2)\varphi_2 (x_1^p x_2^q)$$

où φ_1 est une fonction quelconque $\mathscr{C}^\infty$ quelconque à une variable nulle en 0,φ_2 est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à une variable, plate en 0, et $Y(x_1, x_2)$ la fonction caractéristique du demi-espaçe $\{x_2 \geq 0\}$.

Si un germe X en $0 \in \mathbb{R}^2$n'est hyperbolique, il est difficile de donner un résultat analoque à celui obtenu dans la proposition 24 pour les points hyperboliques. Nous allons cependant montrer que sous des conditions assez larges toute intégrale première formelle admet un prolongement en une intégrale première $\mathscr{C}^\infty$. Nous allons supposer que X est à singularité algébriquement isolée. En utilisant le théorème 13, il est facile de voir qu'un tel champ est de l'un des deux types suivants:

i) Il existe au moins une séparatrice par 0.

ii) Il a'existe pas de séparatrice par 0. On peut alors construire un arc de courbe Γ, $\mathscr{C}^\infty$ en $0 \in \mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire une application Γ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^2$, $(0) = 0$), sur laquelle les orbites de X définissent en 0 un germe d'application de retour γ, se prolongeant continuement en 0 par $\gamma(0) = 0$. (Il est à noter que cette application n'est pas en général différentiable en 0).

Définition Le germe X a singularité algébriquement isolée est dit être *sans holonomie* si X possède une séparatrice par 0 ou bien dans le cas contraire, le germe d'application de retour γ sur un arc transverse Γ en 0, est ègal à l'application identique. Dans ce dernier cas, nous dirons que X est un centre.

Remarque Si le germe X est sans holonomie, le feuilletage défini par les orbites de X en dehors de l'origine, est un feuilletage sans holonomie, au sens traditionel.

Lemme 28. *Soit X un germe de champ en $0 \in \mathbb{R}^2$, à singularité algèbriquement isolée. Alors l'existence d'une intégrale première Ω^∞, de jet non nul en 0, implique que X est sans holonomie.*

Démonstration Supposons au contraire que X ne possède pas de séparatrice par l'origine et que l'application de retour γ ne soit pas l'identité. Si γ n'a pas de point fixe en dehors de l'origine, toutes les orbites de X adhérent à 0 et la seule intégrale première de X est la fonction identiquement nulle. Dans le cas contraire, γ a une infinité de points fixes, extrémités d'arcs formés

de point non fixes. Géométriquement, cela signifie qu'il existe une infinité de bandes M_i difféomorphes à $S^1x[0, 1]$, invariante par un représentant X_U de X, tendant vers 0 pour $i \to 0$, et dont l'intérieur ne contient pas d'orbite compacte.

Si f_U est une intégrale première de X_U, f_U est constante dans chaque bande M_i : il en résulte que le jet de f_U est nul en 0.

Nous allons montrer qu'inversement:

Théorème 29. *Soit X un germe de champ en $0 \in \mathbb{R}^2$, à singularité algébriquement isolée et sans holonomie. Alors toute intégrale première formelle de X se prolonge en une intégrale première $\mathscr{C}^\infty$.*

Démonstration. On trouvera dans [*R*] une démonstration de ce résultat dans le cas où X possède une séparatrice par 0. Je rappelle les grandes lignes de cette démonstration et donnerai ensuite l'argument pour établir le résultat lorsque X est un centre. Dans toute la suite, on suppose que l'intégrale première formelle de X n'est pas nulle.

On a tout d'abord:

Lemme 30. *Soit X un germe en $0 \in \mathbb{R}^2$ à singularité algébriquement isolée. Supposons que X possède une intégrale première formelle non nulle. Soit $\bar{X}_n$ le champ défini dans l'énoncé du théorème 13. Alors les seules singularités possibles de ce champ sont des points de selle hyperboliques, ou bien $\bar{X}_n = X$ et le l-jet de X est une rotation.*

Démonstration. Si $\bar{\bar{X}}_n = X$, le jet d'ordre 1 de X est non dégénére ou bien $k \geq 2$ tel que $j^k X(0) \simeq \lambda x_1\, \partial/\partial x_1 + \mu x_2^k\, \partial/\partial x_2$ avec λ et $\mu \neq 0$. Mais un tel champ ne possède pas d'intégrale première formelle comme le montre une vérification directe.

Si $\bar{X}_n$ est obtenu au bout de $n \geq 1$ éclatements $\Phi_1, \ldots \Phi_n$, ces éclatements étant analytiques, le champ taylorien $\alpha \circ \tilde{\Phi}_1 \ldots \circ \tilde{\Phi}_n$ est une intégrale première formelle de $\hat{X}_n$ et donc de $\bar{X}_n$ qui est différente de 0 en tout point de ∂A_n. Si l'on examine la liste des singularités possibles pour $\bar{X}_n$, on voit que seul un point de selle est susceptible d'avoir une intégrale première formelle $\neq 0$.

D'autre part, il est facile de vérifier que l'opérateur de dérivation X de $\mathscr{M}^\infty$ dans $\mathscr{M}^\infty$ est surjectif si et seulement la dérivation par $\bar{X}_n$, opérant de $\mathscr{M}^\infty(\partial A_n)$ dans $\mathscr{M}^\infty(\partial A_n)$ est surjectif ($\mathscr{M}(\partial A_n)$ désignant les germes de fonctions sur A_n, le long de ∂A_n, nulles sur ∂A_n).

Donc en vertu du lemme 18 ci-dessus le théorème 29 résulte de la proposition suivante dans le cas où X possède une séparatrice:

Proposition 31. *Soit X un germe algébriquement isolé, possèdant au moins une séparatrice par l'origine.*

Supposons que X possède une intégrale première formelle non nulle. Soit $\bar{X}_n$ le germe de champ associé à X par le théorème 13. Alors la dérivation par $\bar{X}_n$ est un opérateur surjectif de $\mathscr{M}^\infty(\partial A_n)$ sur $\mathscr{M}^\infty(\partial A_n)$.

Démonstration Voici l'esquisse de la démonstration dont on trouvera les détails dans [R]. D'après le lemme 30, les seules singularités de $\bar{X}_n$ sont des points hyperboliques. Si $h \in \mathscr{M}^\infty(\partial A_n)$, on peut donc résoudre localement l'équation $\bar{X}_n f = h$, d'après le théorème 19. Maintenant ces solutions locales ont un prolongement bien défini grâce à l'hypothèse d'existence d'une séparatrice, et ce prolongement est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au veisinage de chaque point de ∂A_n grâce à la proposition 20.

Venons-en maintenant au cas central. Le théorème 29 résulte dans ce cas de la proposition suivante:

Proposition 32 *Soit X un germe algébriquement isolé de type central (Toutes les trajectoires au voisinage de l'origine sont compactes). Soit Γ un arc transverse par l'origine, image par l'application d'éclatement $\Phi_1 o \ldots o \Phi_n$ fournie par le théorème 13, d'un arc Γ_n transverse à ∂A_n en un point lisse de ∂A_n. Soit α une intégrale première formelle de X. Si g est un prolongement quelconque de $\alpha | \Gamma$ en un germe $\mathscr{C}^\infty$ défini sur Γ, il existe une et une seule intégrale première $\mathscr{C}^\infty$ f de X telle que $f | \Gamma = g$ et que $f = \alpha$.*

Démonstration L' unitcité de f est triviale. Il suffit de montrer que la fonction définie par les conditions:

i) $f | \Gamma = g$.

ii) f est constante sur les trajectoires (c'est-à-dire $X.f = 0$) est bien $\mathscr{C}^\infty$ en 0 et de jet égal à α à l'origine.

Soit F un germe en $0 \in \mathbb{R}^2$, $\mathscr{C}^\infty$, tel que $\tilde{F} = \alpha$ et que $F | \Gamma = g$. On va chercher une fonction $h \in \mathscr{M}^\infty$ telle que:

$$Xh = X.F \quad \text{et} \quad h_{|\Gamma} = 0 \tag{1}$$

La fonction f est alors égale à $F - h$.

Soit $\Phi = \Phi_1 o \ldots o \Phi_n$ l'application d'éclatement associée X par le théorème 13. Posons $\bar{F} = F \circ \Phi$. Alors, trouver h vérifiant (1) est équivalent à trouver $\bar{h} \in \mathscr{M}^\infty(\partial A_n)$:

$$\bar{X}_n \bar{h} = \bar{X}_n \,.\, \bar{F} \quad \text{et} \quad \bar{h}_{|\Gamma_*} = 0. \tag{2}$$

Désignons par $\varphi_u(p)$ le flot de $\bar{X}_n$ et par $u(p)$ la période de l'orbite par $p \notin \partial A_n$.

Pour tout $p \in A_n \backslash \partial A_n$, il existe une valeur $v(p)$ unique $0 \leq v(p) < u(p)$ telle que $\varphi_{v(p)}(p) \in \Gamma_n$.

Posons $\bar{k} = \bar{X}_n \,.\, \bar{F}$; nécessairement $\bar{h}$ est donné par la formule:

$$\begin{cases} \bar{h}(p) = -\int_0^{v(p)} \bar{k}(\varphi_u(p))\, du & \text{pour } p \notin \partial A. \\ \bar{h}(p) = 0 \text{ si } p \in \partial A_n. \end{cases}$$

La fonction h est bien définie car $-\int_0^{u(p)} \bar{k}(\varphi_u(p))\, du = 0$. La différentiabilité de $\bar{h}$, suit, comme dans la proposition précédente de la proposition 20: chaque singularité de X_n sur ∂A_n étant un point de selle hyperbolique.

On peut en déduire également un résultat voisin pour les l-formes différentielles. Soit $\omega = a\, dx_1 + b\, dx_2$ un germe de l-forme en $0 \in \mathbb{R}^2$. Un facteur intégrant f pour ω est un germe de fonction tel que $\omega = g\, df$ où g est un germe de fonction tel que $g(0) \neq 0$. Soit $X = -b\, \partial/\partial x_1 + a\, \partial/\partial x_2$ le champ tangent à ω. Dire que $X.f = 0$ est équivalent à dire que $df \wedge \omega = 0$. Supposons maintenant que $(a, b) \supset \mathscr{M}^l$ pour un certain l. Alors il est connu que l'équation $df \wedge \omega = 0$ est équivalente à la divisibilité de df par ω. [M].

Supposons maintenant que ω possède un facteur intégrant formel: $\tilde{\omega} = \tilde{g} d\tilde{f}$ avec $\tilde{g}(0) \neq 0$. Alors nécessairement $\tilde{X} . \tilde{f} = 0$. Si f' est une intégrale première de X telle que $\tilde{f}' = \tilde{f}$, d'après ce qui précède $df' = g'\, \omega$. d'où: $\tilde{g}'\, \tilde{\omega} = 1/\tilde{g}\, \tilde{\omega}$. Il en résulte que $\tilde{g}'(0) \neq 0$ et donc que $\omega = 1/g'\, df'$. D'où le résultat:

Théorème 33. *Soit $\omega = a\, dx_1 + b\, dx_2$ un germe de l-forme différentielle tel que $(a, b) \supset \mathscr{M}^l$ pour un certain l et que le feuilletage défini par ω soit holonomie, y compris à l'origine. Alors si ω possède un facteur intégrant formel, ω possède aussi un facteur intégrant de classe $\mathscr{C}^\infty$.*

Si maintenant ω est un germe de l-forme différentielle $\mathscr{C}^\infty$ en $0 \in \mathbb{R}^n$ pour $n \geq 3$, singularité algébriquement isolée, on sait que l'existence d'un facteur intégrant formel est impliquée par la condition d'intégrabilité $\omega \wedge d\omega = 0$ [M]. Le théorème 33 suggère la conjecture suivante:

Conjecture. *Si ω est un germe $\mathscr{C}^\infty$ de l-forme différentielle en $0 \in R^n$, $n \geq 3$, algébriquement isolé, sans holonomie et intégrable, alors ω possède un facteur intégrant $\mathscr{C}^\infty$.*

Bibliographie

[D] F. DUMORTIER: *Singularities of vectofields on the plane* – Jour. Diff. Equations – Vol. 23, 1. (1977)

[M] R. MOUSSU: *Sur l'existence d'intégrale première pour un germe de forme de Pfaff* (Préprint).

[R] R. ROUSSARIE: *Modèles locaux de formes différentielles et de champs de vecteurs.* Astérisque, Vol. 30 (1975).

[So] J. SOTOMAYOR: *Generic 1-parameter families of flows on 2-manifolds,* Publ. Math. IHES n° 43 (1973), 5–46.

[St.1] S. STENBERG: *Local contractions and a theorem of Poincaré* – Amer. J. Math. vol LXXIX (1957), 809–824.

[St.2] S. STENBERG: *On the structure of local homéomorphisms of euclidien n-space* II – Amer. J. Math., 80 (1958) 623–631.

[T.1] F. TAKENS: *Singularities of vectorfields* – Publ. Math. IHES n° 43 (1973) 47–100.

[T.2] F. TAKENS: *Normal forms for certain singularities of vectorfields* – Ann. Inst. Fourier Tome 23, Fasc. 2 (1973), 163–195.

Université de DIJON.