Remarques sur un article de J. W. Robbin

D. Luna

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. Pour toute norme sur V , on peut considérer le plus grand sous-groupe de $GL(V)$ qui la conserve. Dans [1] sont caractérisées les sous-algèbres de Lie de $\text{End}(V)$ qui sont l'algèbre de Lie de tels groupes.

Dans ce qui suit, on améliore cette caractérisation de deux façons: on l'étend aux groupes eux-mêmes, et l'on montre qu'on peut choisir la norme strictement convexe et analytique.

1. Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie, G un sous-groupe de $GL(V)$. Le groupe $GL(V)$ opère de façon naturelle dans l'ensemble des fonctions réelles sur V ; si $f: V \rightarrow \mathbb{R}$, on notera $G(f)$ le sous-groupe des éléments de G qui fixent f . Désignons par $\hat{G}$ l'ensemble des éléments de $GL(V)$ qui conservent une à une les orbites de G dans V ; c'est le plus grand sous-groupe de $GL(V)$ ayant mêmes orbites que G dans V ; si $\hat{G} = G$ on dira que G est saturé. Il est clair que, pour toute fonction $f: V \rightarrow \mathbb{R}$, $GL(V)(f)$ est saturé.

Théorème. *Soit G un sous-groupe de $GL(V)$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) G est compact, saturé et contient -1 (la symétrie par rapport à l'origine);

(2) G est le groupe des isométries d'une norme sur V . De plus, dans (2) on peut choisir la norme strictement convexe et analytique (en dehors de l'origine).

2. Soit n un entier ≥ 2 . Désignons par $\mathcal{P} = \mathcal{P}(n, \mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions polynômes sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles; $\mathcal{P}$ est une algèbre graduée par le degré total, dans laquelle $GL(n, \mathbb{R})$ opère en respectant le degré. Écrivons q pour le polynôme $q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. Comme d'habitude, notons $\| \cdot \|$ la norme euclidienne standard de $\mathbb{R}^n$ ($\|x\| = \sqrt{q(x)}$), $\mathcal{O} = \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ le groupe orthogonal correspondant, S_{n-1} la sphère unité standard de $\mathbb{R}^n$ ($S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$). Désignons par $\mathcal{H}$ l'ensemble des polynômes

harmoniques (c'est-à-dire, les polynômes annulés par le laplacien $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$); $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel gradué de $\mathcal{P}$, stable par $\mathcal{O}$.

Lemme 1. *Tout $p \in \mathcal{P}$ s'écrit d'une et d'une seule façon*

$$p = h_0 + h_1 q + \dots + h_k q^k,$$

où les h_i sont des polynômes harmoniques. L'application qui, à tout $p \in \mathcal{P}$ associe $p|_{S_{n-1}}$ (la restriction de p à S_{n-1}), est injective en restriction à $\mathcal{H}$.

Pour une démonstration du lemme 1, voir par exemple [2], § 134.

Lemme 2. *Soit G un sous-groupe compact et saturé de $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$. Il existe un polynôme harmonique h sans terme constant, tel que $G = \mathcal{O}(n, \mathbb{R})(h)$.*

Puisque G est compact, les fonctions polynômes invariantes par G séparent les orbites de G dans $\mathbb{R}^n$ (soient T_1, T_2 deux orbites distinctes de G dans $\mathbb{R}^n$; puisque T_1 et T_2 sont compactes, d'après le théorème de Weierstrass-Stone, il existe $p \in \mathcal{P}$ voisin de 1 sur T_1 et voisin de 0 sur T_2 ; pour obtenir un polynôme invariant par G avec les mêmes propriétés, il suffit de remplacer p par sa moyenne sur G par rapport à une mesure de Haar). Il est également classique que les polynômes invariants par G forment une algèbre de type fini sur $\mathbb{R}$; désignons par $p_1, \dots, p_k$ un système de générateurs de cette algèbre. Puisque G est saturé, on a $G = \mathcal{O}(p_1) \cap \dots \cap \mathcal{O}(p_k)$: en effet, $\mathcal{O}(p_1) \cap \dots \cap \mathcal{O}(p_k)$ est un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$ qui contient G et qui a les mêmes orbites que G dans $\mathbb{R}^n$. Vu la façon dont $\mathcal{O}$ opère dans $\mathcal{P}$ (lemme 1), il est clair qu'on a aussi

$$\mathcal{O}(p_1) \cap \dots \cap \mathcal{O}(p_k) = \mathcal{O}(h_1) \cap \dots \cap \mathcal{O}(h_m),$$

où $h_1, \dots, h_m$ sont des polynômes harmoniques homogènes non constants convenablement choisis. Montrons qu'il existe $h \in \mathcal{H}$ tel que

$$\mathcal{O}(h_1) \cap \dots \cap \mathcal{O}(h_m) = \mathcal{O}(h).$$

Désignons par (q) l'idéal de $\mathcal{P}$ engendré par q . D'après le lemme 1, l'application naturelle $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{P}/(q)$ est un isomorphisme qui commute à l'opération de $\mathcal{O}$. Désignons par $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_m$ les images de $h_1, \dots, h_m$ dans $\mathcal{P}/(q)$. Il suffit de montrer qu'il existe $\bar{h} \in \mathcal{P}/(q)$ tel que

$$\mathcal{O}(\bar{h}_1) \cap \dots \cap \mathcal{O}(\bar{h}_m) = \mathcal{O}(\bar{h}).$$

Le polynôme q étant homogène, la graduation de $\mathcal{P}$ passe au quotient en une graduation de $\mathcal{P}/(q)$, et les éléments $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_m$ sont homogènes pour cette graduation. Pour tout $\bar{p} \in \mathcal{P}/(q)$ et pour tout entier naturel N , on a

$$\mathcal{O}(\bar{p}^N) \cap \mathcal{O}(\bar{p}^{N+1}) = \mathcal{O}(\bar{p});$$

en effet, cela résulte aussitôt du fait que q est un polynôme irréductible si $n \geq 2$, donc que $\mathcal{P}/(q)$ est un anneau intègre. Quitte à remplacer certains $\bar{h}_i$ par $\bar{h}_i^N$ et $\bar{h}_i^{N+1}$, N grand, on peut alors supposer que les $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_m$ aient des degrés tous différents. Dans ce cas enfin, en posant $\bar{h} = \bar{h}_1 + \dots + \bar{h}_m$, on a visiblement

$$\mathcal{O}(\bar{h}) = \mathcal{O}(\bar{h}_1) \cap \dots \cap \mathcal{O}(\bar{h}_m).$$

Lemme 3. *Soit G un sous-groupe compact de $GL(n, \mathbb{R})$ (a priori non nécessairement contenu dans $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$). Soit p un polynôme, non divisible par q , et soit N un entier strictement positif. Si G fixe p/q^N , alors G fixe aussi q (c'est-à-dire $G \subset \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$).*

Pour tout $s \in G$, on a $s \cdot (p/q^N) = p/q^N$, donc $(s \cdot p)q^N = p(s \cdot q)^N$. Puisque q ne divise pas p , et que $\mathcal{P}$ est un anneau factoriel, q divise $s \cdot q$, autrement dit il existe $\lambda(s) \in \mathbb{R}^*$ tel que $s \cdot q = \lambda(s)q$. On vérifie sans peine que $\lambda : G \rightarrow \mathbb{R}^*$ est un homomorphisme de groupes. Du fait que G est compact et que q est une fonction positive, résulte alors aussitôt que $\lambda \equiv 1$. Autrement dit, G fixe q .

3. Démontrons maintenant le théorème. Soit G un sous-groupe de $GL(V)$. On vérifie sans la moindre peine que (2) $\Rightarrow$ (1).

Inversement, supposons que G vérifie (1). Il est bien connu et classique, G étant compact, que G laisse invariante une norme euclidienne dans V . Quitte à choisir convenablement une base de V , on peut donc identifier V à $\mathbb{R}^n$ et supposer que $G \subset \mathcal{O} = \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$. Le cas $n = 0, 1$ étant trivial, on peut également supposer $n \geq 2$.

D'après le lemme 2, G étant compact et saturé, il existe un polynôme harmonique h sans terme constant, tel que $G = \mathcal{O}(h)$. Posons $f_\varepsilon = q + \varepsilon h$, et

$$\tilde{f}_\varepsilon(x) = \begin{cases} \|x\| f_\varepsilon(x/\|x\|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Il est clair que $\tilde{f}_\varepsilon$ est analytique en dehors de l'origine et que $\tilde{f}_\varepsilon(\lambda x) = \lambda \tilde{f}_\varepsilon(x)$, quels que soient $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Puisque $-1 \in G$ et que $G = \mathcal{O}(h)$, h est nécessairement une fonction symétrique par rapport à l'origine

de $\mathbb{R}^n$; par suite, il en est de même de f_ε et $\tilde{f}_\varepsilon$. Par ailleurs, il est clair que, pour $\varepsilon \rightarrow 0$, $\tilde{f}_\varepsilon$ tend vers $\| \cdot \|$, au sens de la topologie $\mathcal{C}^\infty$ sur tout compact de $\mathbb{R}^n - \{0\}$. D'un argument classique résulte alors que, pour ε petit, $\tilde{f}_\varepsilon$ est une norme strictement convexe.

Montrons que, pour ε petit, $GL(n, \mathbb{R})(\tilde{f}_\varepsilon) = \mathcal{O}(\tilde{f}_\varepsilon)$. Il est clair que $GL(n, \mathbb{R})(\tilde{f}_\varepsilon) \supset \mathcal{O}(\tilde{f}_\varepsilon)$. Inversement, soit $s \in GL(n, \mathbb{R})(\tilde{f}_\varepsilon)$; s fixe alors également $\tilde{f}_\varepsilon^2$. Ecrivons $h = h_2 + h_4 + \dots + h_{2N}$, où les h_i sont homogènes de degré i et où $h_{2N} \neq 0$ (le cas $h = 0$ ne présente pas de difficultés). Alors

$$\tilde{f}_\varepsilon^2 = q((q^N + \varepsilon h_2 q^{N-1} + \dots + \varepsilon h_{2N})/q^N)^2.$$

Puisque q ne divise aucun polynôme harmonique non nul (conséquence facile du lemme 1), q ne divise pas $q^N + \varepsilon h_2 q^{N-1} + \dots + \varepsilon h_{2N}$ (du moins si $\varepsilon \neq 0$, mais le cas $\varepsilon = 0$ ne présente pas de difficultés). Nous avons vu que, pour ε petit, $\tilde{f}_\varepsilon$ est une norme, $GL(n, \mathbb{R})(\tilde{f}_\varepsilon)$ est donc compact; nous pouvons alors appliquer le lemme 3: il s'ensuit que $s \in \mathcal{O}$, d'où l'inclusion

$$GL(n, \mathbb{R})(\tilde{f}_\varepsilon) \subset \mathcal{O}(\tilde{f}_\varepsilon).$$

Montrons maintenant que $\mathcal{O}(\tilde{f}_\varepsilon) = \mathcal{O}(h)$, si $\varepsilon \neq 0$. Soit $s \in \mathcal{O}$. Puisque $\tilde{f}_\varepsilon$ est homogène, s fixe $\tilde{f}_\varepsilon$ si et seulement si s fixe $\tilde{f}_\varepsilon|_{S_{n-1}}$ (la restriction de $\tilde{f}_\varepsilon$ à la sphère S_{n-1}). Par définition de $\tilde{f}_\varepsilon$, on a $\tilde{f}_\varepsilon|_{S_{n-1}} = f_\varepsilon|_{S_{n-1}}$. Vu la forme de f_ε , pour que s fixe $f_\varepsilon|_{S_{n-1}}$, il faut et il suffit que s fixe $h|_{S_{n-1}}$. Mais cette dernière condition n'est remplie que si s fixe h , car l'application $h \mapsto h|_{S_{n-1}}$ est injective en restriction aux polynômes harmoniques (voir le lemme 1).

En résumé, si ε est petit et $\neq 0$, $\tilde{f}_\varepsilon$ est une norme strictement convexe et analytique en dehors de l'origine, et

$$GL(n, \mathbb{R})(\tilde{f}_\varepsilon) = \mathcal{O}(\tilde{f}_\varepsilon) = \mathcal{O}(h) = G.$$

Bibliographie

- [1] J. W. Robbin, *Lie algebras of infinitesimal norm isometries*, Linear algebra and Appl. 10, 95-102 (1975).
- [2] D. P. Zelobenko, *Compact Lie groups and their representations*, Translations of mathematical monographs, volume 40.

Laboratoire de Mathématiques Pures
Université de Grenoble