BOL. SOC. BRAS. MAT., VOL. 9 N.º 2 (1978), 19 - 38

Sur quelques problèmes de Géométrie Globale des Géodésiques

René Michel

1. Introduction.

Cet article a pour but essentiel de présenter *ensemble* trois résultats sur le Géométrie Globale des Géodésiques où apparaissent d'importantes analogies. Les deux premier sont les remarquables théorèmes de rigidité de E. HOPF [1] et de L. W. GREEN [2]; ils correspondent respectivement au cas tu Tore Euclidien T^2 et du plan projectif canonique $\mathbb{R}P^2$. Précisons bien que les preuves de ces résultats [1] [2] ne souffrent d'aucune ambiguité et que, mis à part de légères modifications techniques, il s'agit essentiellement de mettre en évidence leur parenté et leur genèse après la résolution par M. BERGER de la conjecture de Blaschke pour toutes les dimensions paires. Le troisième résultat est un analogue dans le plan hyperbolique $\mathbb{R}H^2$ de ces deux théorèmes; sa démonstration imite les précédentes. Précisons ces théorèmes:

1.1. Théorème (E. HOPF) (1948). *Toute métrique Riemannienne sur un tore T^2, telle qu'il n'existe pas de couple de points conjugués, est nécessairement Euclidienne plate.*

1.2. Théorème (L. W. GREEN) (1963). *Toute métrique Riemannienne sur le plan projectif $\mathbb{R}P^2$ telle que toutes les géodésiques soient simplement fermées et de même longueur π est nécessairement isométrique à la métrique canonique g_o de courbure constante* 1.

Ce théorème résoud la conjecture de Blaschke sur les "wiedersehensflächen".

1.3. Cas hyperbolique. Considérons $\mathbb{R}H^2$ muni de sa métrique standart g_o à courbure constante -1; soit f un difféomorphisme C^∞ de $\mathbb{R}H^2$ qui se réduise à l'identité en dehors d'un compact K; si on pose $g = f^* g_o$, f devient une isométrie de $(\mathbb{R}H^2, g)$ sur $(\mathbb{R}H^2, g_o)$ et on a les propriétés suivantes:

a) Pour toute géodésique γ_o de $(\mathbb{R}H^2, g_o)$, il existe un intervalle compact I et une géodésique γ de $(\mathbb{R}H^2, g)$ tels que $\gamma \,|\, (\mathbb{R} - I) = \gamma_o \,|\, (\mathbb{R} - I)$.

b) g est sans points conjugués, tout comme g_o.

L'analogue hyperbolique de 1.1 et 1.2 en est la réciproque.

1.4. Théorème. *Soit $(\mathbb{R}H^2, g)$ tel que g coincide avec la métrique standart g_o en dehors d'un compact K et tel que les propriétés a) et b) soient vérifiées. Alors $(\mathbb{R}H^2, g)$ et $(\mathbb{R}H^2, g_o)$ sont isométriques.*

1.5. Remarque. Le Théorème 1.4, posé comme question dans [3] est *vrai aussi pour le plan Euclidien*; il n'est dans ce cas qu'une application immédiate du théorème de E. HOPF: Il suffit d'enfermer le compact K dans l'intérieur d'un parallélogramme et d'identifier les cotés parallèles, ce qui est permis puisque la métrique est Euclidienne au voisinage du bord.

On peut donner une interprétation optique du Théorème 1.4 en imaginant le compact K comme un système optique introduit dans un milieu homogène: si la vision lointaine à travers K est inchangée, le système optique ne peut que coincider avec le milieu ambiant.

1.6 *Plan de l'article.* Au §2 on donne une description formelle de la méthode des théorèmes 1.1, 1.2 et 1.4. Au §3 on précise les notations en donnant les propriétés essentielles du fibré unitaire, celles de la variété des Géodésiques et particulier la relation entre leurs volumes. On donne aussi une formule utile d'intégration d'un champ de polynomes sur le fibré unitaire (voir (3.5)). Aux §4, §5 on donne les grandes lignes des démonstrations de E. HOPF et L. W. GREEN. Au §6 on démontre le Théorème 1.4. Au §7 on donne des références sur les mêmes problèmes en dimension supérieure on égale à 3, en particulier sur la résolution de la conjecture de Blaschke en dimension paire (M. BERGER 1977) et sur la linéarisation des problème précédents. Au §8 on montre, en appendice, le résultat d'analyse géométrique suivant, qui a un rapport formel avec le §7:

1.7. Théorème. *Dans l'espace Euclidien E^n, un tore Euclidien T^n, l'espace projectif standart $\mathbb{R}P^n$, l'espace Hyperbolique standart $\mathbb{R}H^n$, toute 1-forme différentielle de classe C^1, à support compact, dont l'intégrale est nulle sur toutes les géodésiques est exacte.*

1.8 L'auteur tient à remercier le CNPq, le CNRS et le Ministère des affaires étrangères. Il est très reconnaissant à l'IMPA, et en particulier à M. do CARMO, de l'accueil qu'il a reçu et de la bonne ambiance de travail qu'il y a trouvé.

2. Description formelle de la méthode.

La démonstration fonctionne dans le fibré unitaire U de M où M désigne T^2, $\mathbb{R}P^2$, on une boule convenable de $\mathbb{R}H^2$, correspondant à une métrique g, dont le champ géodésique a des propriétés analogues au champ géodésique canonique. Le fibré U a une struture naturelle de contact et est fibré d'une part sur M les fibres étant isométriques à S_1, d'autre part sur la variété C des géodésiques qui a une structure symplectique naturelle. La formule de Fubini pour les fibrations et la formule de Gauss-Bonnet pour les surfaces sont les résultats utilisés pour conclure à la courbure constante; le théorème

de rigidité assure alors l'isométrie avec la structure canonique. En gros, le méthode consiste dans un premier temps à obtenir une inégalité au sens large le long de chaque géodésique γ, l'égalité étant caractéristique du fait que la courbure de Gauss doit être constante le long de γ; dans un deuxième temps à obtenir par intégration suivant la fibration de U sur C de l'inégalité correspondante sur U, l'égalité caractérisant la courbure constante sur M; après application de la formule de Gauss-Bonnet cette inégalité équivaut à:

$$\text{(2.1)}\quad \begin{aligned} &\text{Volume } (M,g) \geq \text{Volume } (M,g_o) \text{ dans le cas elliptique, et à} \\ &\text{Volume } (M,g) \leq \text{Volume } (M,g_o) \text{ dans le cas hyperbolique.} \end{aligned}$$

Dans un dernier temps, en calculant Volume $(U(g))$ et Volume $(U(g_o))$ suivant les fibrations par les géodésiques, on montre qu'on a effectivement l'égalité dans (2.1).

3. Le fibré unitaire et la variété des géodésiques.

On pourra se référer à [4] [5] [6].

3.1. On dénote respectivement par (M,g), $T(M)$, $U = U(g)$ une variété Riemannienne, son fibré tangent et son fibré des vecteurs unitaires. On appelle Ω, $\Omega \times \mathbb{R}^n$. $\Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ des trivialisations de M, $T(M)$, $T(T(M))$; des éléments correspondant sont notés m, (m,a), (m,a,b,c). On rappelle ici la définition des éléments essentiels de la géometrie de $T(M)$ et U, et leur écriture locale, sans en vérifier l'invariance: on caractérise $T(U)$ ainsi: (m,a,b,c) est dans $T(U)$ si et seulement si $g_m(a,a) = 1$ et $g_m(a,c) = 0$. La variété $T(M)$ a une métrique associée à g, soit $\bar{g}$, qui en coordonnées locales s'écrit:

$$\text{(3.1.1)}\qquad \bar{g}((m,a,b,c),\ (m,a,b',c')) = g_m(b,b') + g_m(c,c');$$

la métrique induite sur U est notée $\bar{\bar{g}}$. La forme de Liouville θ sur $T(M)$ est bien définie par l'expression:

$$\text{(3.1.2)}\qquad \theta(m,a,b,c) = g_m(a,b).$$

la 2-forme $d\theta$ est partout non dégénérée; elle définit la structure symplectique de $T(M)$ associée à g et s'écrit localement:

$$\text{(3.1.3)}\qquad d\theta((m,a,b,c),\ (m,a,b',c')) = g_m(c,b') - g_m(b,c') - \sum_{i,j,k,l} \Gamma^i_{jk}(b^j b'^l - b'^j b^l) g_{li} a^k$$

Appelons E la fonction Energie sur $T(M)$: $E(m, a) = g_m(a, a)$. Puisque la forme $d\theta$ réalise un isomorphisme $j: T(TM) \to T^*(TM)$ il existe un unique champ G sur $T(M)$ tel que

(3.1.4) $$j(G) = -\frac{1}{2}\, dE \quad \text{c'est à dire}$$

$$\forall z \in C^\infty(T(T(M))), \quad d\theta(G, z) = -\frac{1}{2}\, dE(z);$$

localement G s'écrit

(3.1.5) $$G(m, a) = \left(m, a, a, \left(\cdot \sum_{j,k} \Gamma^1_{jk}\, a^j a^k, \ldots, \sum_{j,k} \Gamma^n_{jk}\, a^j a^k\right)\right)$$

ce qui traduit le fait que G est une gerbe. Il est clair que $\theta(G) = E$ et que G est tangent à U puisque $dE(G) = 0$; on note encore G cette restriction à U D'autre part, le forme $d\theta$ est invariante par G car (avec les notations classiques):

$$\mathcal{L}_G(d\theta) = (i(G) \circ d)(d\theta) + (d \circ i(G))(d\theta) = d(i(G)d\theta) = -\frac{1}{2}\, d^2 E = 0.$$

On considère la restriction α à U de $\theta : \alpha = \theta|U$, donc $\alpha(G) = 1$; la forme α est invariante par la restriction à U de G:

$$\mathcal{L}_G(\alpha) = (i(G) \circ d)(\alpha) + (d \circ i(G))(\alpha)$$

donc pour tout champ z tangent à U:

$$\mathcal{L}_G(\alpha)(z) = d\alpha(G, z) + d(\alpha(G))(z) = 0.$$

Donc α définit une struture de contact sur U (voir [6] p. 123) et on sait que la forme $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$ est non dégénérée et invariante par G (résultat connu sous le nom de théorème de Liouville de l'invariance du volume). De plus la $(2n-1)$-forme $\mu = \dfrac{\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}$ sur U est une forme volume pour la métrique $\bar{g}$. On note $(G_t)_{t \in I}$ le groupe local à 1 paramètre de difféomorphismes de U associé à G, *c. a. d* le flot géodésique sur U; les propriétés d'invariance de α et μ sont équivalentes à:

(3.1.6) $$\forall t \in I. \qquad G^*_t\alpha = \alpha \quad \text{et} \quad G^*_t\mu = \mu.$$

3.2. La variété des géodésiques.

3.2.1 On suppose maintenant que (M, g) est une C_π-variété, $c \cdot a \cdot d$ une variété Riemannienne dont toutes les géodésiques sont simplement fermées et de même longueur que l'on normalise à π comme pour les projectifs standarts, ou une variété strictement géodésiquement convexe. L'ensemble des trajectoires de G sur U, c.a.d. des classes de géodésiques orientées, paramétrées par leur arc, a une structure naturelle de variété, soit C, de dimension $(2n-2)$ (voir par ex. [5] chap. 2) en sorte que la projection $\pi : U \to C$ définit une fibration localement triviale telle que $\pi \circ G_t = \pi$ et qui est principale dans le cas où (G_t) est un groupe c.a.d. si M est complète; dans ce cas $(G_t) = \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ on $(G_t) = \mathbb{R}$. Il résulte de 3.1 que les distributions définies par Ker α et Ker $d\alpha$ sont invariantes par G et respectivement transverses et tangentes aux fibres; donc il existe sur C une 2-forme φ, non dégénérée, telle que $\pi^* \varphi = d\alpha$ c.a.d une structure symplectique et une forme volume φ^{n-1}.

3.2.2 It est important de remarquer que si (M, g) est une C_π-variété la forme $\dfrac{1}{\pi}\alpha$ définit une connexion sur le fibré principal $(U, C, \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \pi)$; A. WEINSTEIN [18] utilise ce fait pour montrer que *le rapport*

$$\mathrm{vol}(M, g)/\mathrm{vol}(\mathbb{R}P^n, g_o)$$

est un entier k dépendant de n et g qui est tel que

$$\frac{1}{\pi^{n-1}} \int_C \varphi^{n-1} = 2k.$$

De plus si n est pair alors k = 1 (voir [5] chap 2 pour une démonstration).

3.2.3 On fait un usage intensif par la suite d'un théorème d'intégration qui est une variante du théorème de Fubini, pour les fibrations (voir [7] p. 169-170, [8] p. 298). Pour la fibration $\pi : U \to C$ on a la formule

(3.2.4) $$\int_U f(x)(\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}) = \int_C \left(\int_{\pi^{-1}(\gamma)} f(x) \cdot (\alpha \,|\, \pi^{-1}(\gamma)) \right) \cdot \varphi^{n-1} = \int_C \left(\int_\gamma f(t)dt \right) \cdot \varphi^{n-1}$$

où f est une fonction intégrable sur U, les orientations positives de U et C étant fournies par $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$, φ^{n-1} et les fibres ayant l'orientation induite.

3.2.5 Considérons la fibration initiale p: $U \to M$ et explicitons la formule correspondante d'intégration sur les fibres; ici on ne fait pas d'hypothèse spéciale sur g et M n'est pas nécessairement orientable; soit $|\sigma|$ l'élément de volume de (M, g) et $|\omega|$ la mesure Euclidienne de la fibre S^{n-1}. Pour une fonction intégrable f sur U, on a au sens de l'intégrale des fonctions relativement à une mesure,

$$(3.2.6) \qquad \int_U f(x) \cdot \frac{|\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}|}{(n-1)!} = \int_M \left(\int_{p^{-1}(m) \cong S^{n-1}} f(x) \cdot |\omega| \right) |\sigma|$$

Il est montré dans [4] (p. 163-166) que $\dfrac{|\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}|}{(n-1)!}$ est la mesure sur U associée la structure Riemannienne $\bar{g}$; il en résulte, si M est compacte:

$$(3.2.7) \qquad \int_U \frac{|\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}|}{(n-1)!} = \text{Vol}\, U = \text{Vol}(S_{n-1}) \cdot \text{Vol}\, M.$$

3.3 On revient au cas d'une structure g de C_π-variété sur $\mathbb{R}P^2$. Vérifions directement l'égalité:

$$(3.3.1) \qquad \text{Vol}\,(\mathbb{R}P^2, g) = \text{Vol}(\mathbb{R}P^2, g_o).$$

Dans la preuve donnée par [2] ou [4] de ce résultat, est utiliseé une formule de Santalo où la variété des géodésiques joue un role implicite.

Démonstration de (3.3.1): On vérifie d'abord par des arguments géométriques qu'une C_π-structure sur $\mathbb{R}P^2$ n'a pas de couples de points conjugués (p, q) avec $p \neq q$ et que deux géodésiques distinctes quelconques se coupent en un point et un seul: en fait les axiomes des plans projectifs sont alors vérifiés (voir [4] p. 294). Il est commode ensuite de considérer $(S^2, \tilde{g})$, le revêtement Riemannien de $(\mathbb{R}P^2, g)$; les géodésiques de $(S^2, \tilde{g})$ sont donc fermées, de longueur 2π et la veriété des géodésiques C de $(S^2, \tilde{g})$ coincide avec celle de $(\mathbb{R}P^2, g)$. Soit S une géodésique orientée de $(S^2, \tilde{g})$ et Γ la sous-variété de $\tilde{U}$ formée des vecteurs tangents en un point de S et dirigés dans une même composante connexe de S^2 par rapport à S. On voit que Γ fournit une paramétrisation de C, privé de la trajectoire de S et de la trajectoire opposée c.a.d. $C - \{S, -S\}$; de plus la forme $d\alpha \mid \Gamma$ est l'expression dans Γ de la forme symplectique φ. Soit $(S'_{(t)}, n_{(t)})$ un champ de base orthonormale le long de S avec $n(t) \in \Gamma$, $t \in [0, 2\pi[$; si $x \in \Gamma$, on a $x = (S(t), v)$ avec $v = \cos\theta \cdot S'(t) + \sin\theta \cdot n(t)$, $\theta \in]0, \pi[$. Considérons les mêmes éléments S_o, Γ_o, C_o, $\tilde{U}_o$ pour le sphère standart $(S^2, \tilde{g}_o)$. On réalise un difféomorphisme symplectique de Γ_o sur Γ, et par continuité de C_o sur C, en faisant correspondre les points de mêmes coordonnées (x, θ); d'autre part d'après

(3.1.3) $d\varphi \mid \Gamma \cong \sin\theta\, d\theta \wedge dt \cong d\varphi_o \mid \Gamma_o$. On a donc:

$$\text{Vol}\, C = \text{Vol}\, C_o = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \right) dt = 4\pi$$

et d'après (3.2.4) et puisque $\alpha(G) = 1$:

$$\text{Vol}\, U = \int_U \alpha \wedge d\alpha = \int_C \left(\int_{\pi^{-1}(\gamma)} \alpha \right) \varphi = \int_\Gamma \left(\int_{\pi^{-1}(\gamma)} \alpha \right) (d\alpha \mid \Gamma) = \pi \text{ Vol}\, C$$

de façon identique: $\text{Vol}\, U_o = \pi \text{ Vol}\, C_o$.

Il en résulte (3.3.2): $\text{Vol}\, U = \text{Vol}\, U_o = 4\pi^2$ et d'après (3.7.2): $\text{Vol}(\mathbb{R}P^2, g) = \text{Vol}(\mathbb{R}P^2, g_o) = 2\pi$.

3.4 De façon un peu plus générale on a le résultat suivant: (Voir dans [9] l'article de L. SANTALO).

Proposition. *Soit B une sous-variété ouverte convexe bornée d'une variété Riemannienne (M, g) de bord S. On suppose que chaque géodésique de B coupe S en 2 points distincts. Soit U le fibré unitaire de B et Γ le sous-ensemble du bord de U formé des vecteurs dirigés vers B; on a la formule suivante:*

$$(3.4.1) \qquad \text{Vol}\, U = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x \in \Gamma} (\text{longueur } \gamma_x) \cdot |(d(\alpha \mid \Gamma))|^{n-1}$$

où γ_x désigne géodésique de B tangente à x.

Démonstration. Soit l'application $\bar{\omega} : U \to \Gamma$ définie par $\bar{\omega}(x) = y$ si et seulement si il existe $t \geq 0$ tel que $x = G_t(y)$; on vérifie que $\bar{\omega}$ est une projection telle que $d\alpha = \bar{\omega}^*(d\alpha \mid \Gamma)$ et que $(\Gamma, d\alpha \mid \Gamma)$ s'identifie en tant que variété symplectique à (C, φ). La formule (3.4.1) est ainsi une conséquence immédiate de (3.2.4) et (3.2.7).

3.4.2 *Conséquence.* Dans les hypothèses du Théorème 1.4 on a de toute évidence "coïncidence" pour $(\mathbb{R}H_2, g)$ et $(\mathbb{R}H_2, g_o)$ des variétés symplectiques (C, φ) et (C_o, φ_o); il résulte donc de ci-dessus que $\text{Vol}(U, \bar{g}) = \text{Vol}(U_o, \bar{g}_o)$. Il faut remarquer aussi que le 2[e] membre de (3.4.1) ne dépend que de la fonction: longueur (γ_x) et, d'après (3.1.3), de la métrique g au voisinage du bord.

3.5. Intégration d'une forme différentielle sur le fibré unitaire. On s'intéresse au calcul d'une intégrale de le forme $\int_U \phi(x, \dots, x)\,\mu$ où ϕ est un forme différentielle de degré d sur M. D'après (3.2.6) ce calcul se remène à

$$\int_{S^{n-1}} \phi(x, \dots, x)\cdot|\omega|.$$

Cette intégrale s'exprime naturellement à l'aide des coefficient du polynome $\tilde{\phi}$ tel que $\tilde{\phi}(x) = \phi(x, \dots, x)$ et de façon moins évidente *à l'aide des coefficients de* ϕ, qui eux sont tensoriels:

3.5.1. Théorème. *L'integrale* $\int_{S^{n-1}} \phi(x, \dots, x)\cdot|\omega|$ *où* ϕ *est une forme d-linéaire sur* $\mathbb{R}^n$ *est égale au produit du coefficient* $C(n, d)$ *par le somme des résultats de toutes les opérations de traces 2 à 2 possibles sur les coefficients de* ϕ*; on a*

$$C(n, d) = \frac{\mathrm{Vol}(S_{n-1})}{n(n+2)\dots(n+d-2)}$$

Dans [13] on a justifié cette formule par des arguments sur les invariants des groupes symétrique et orthogonal. La démonstration ci-dessous est élémentaire.

Démonstration. Dans une base orthonormée ϕ s'écrit:

$$\phi(X_1, \dots, X_d) = \Sigma a_{i_1 \cdots i_d} X_1^{i_1} \dots X_d^{i_d} \text{ avec } 1 \le i_1, \dots, i_d \le n,$$

$$= \sum_{i \in \mathscr{A}(d, n)} a_i X_1^{i_1} \dots X_d^{i_d}$$

où $\mathscr{A}(d, n)$ est l'ensemble des applications de $\{1, \dots, d\}$ dans $\{1, \dots, n\}$; d'où

$$\tilde{\phi}(X) = \sum_{i \in \mathscr{A}(d, n)} a_i X^{i_1} \dots X^{i_d}$$

soit $A \subset \{0, 1, \dots, d\}^n$ ainsi défini:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A \Leftrightarrow \forall i, \quad 1 \le i \le n, \quad \alpha_i \ge 0 \text{ et } \alpha_1 + \dots + \alpha_n = d.$$

On pose:

$$a_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = \Sigma a_i \text{ pour } i \in \mathscr{A}(d, n) \text{ et card } i^{-1}(j) = \alpha_j,\ 1 \le j \le n;$$

d'où l'écriture:

$$\tilde{\phi}(X) = \sum_A a_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \cdot (X^1)^{\alpha_1} \dots (X^n)^{\alpha_n}$$

donc:

$$\int_{S^{n-1}} \tilde{\phi}(X) = \sum_A a_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \int_{S^{n-1}} (X^1)^{\alpha_1} \dots (X^n)^{\alpha_n} \cdot |\omega|$$

or il est connu que (voir H. WEYL [19]):

(3.5.2) $$\int_{S^{n-1}} (X^1)^{\alpha_1} \dots (X^n)^{\alpha_n} \cdot |\omega| = \alpha_1) \cdot \dots \alpha_n) \cdot C(n, d)$$

où le symbole $\alpha)$ signifie:

$\alpha) = (\alpha - 1)\cdot(\alpha - 3) \dots 3 \cdot 1$ si α est pair,

$0) = 1$ et $\alpha) = 0$ si α est impair.

On a donc:

(3.5.3) $$\int_{S^{n-1}} \tilde{\phi}(X) = \sum_A a_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \cdot \alpha_1) \dots \alpha_n) \cdot C(n, d)$$

Interprétons la quantité: $s = \sum_A a_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \cdot \alpha_1) \dots \alpha_n)$. On a:

$$s = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A} \left[\sum_{\substack{i \in \mathscr{A}(d, n) \\ \mathrm{Card}\ i^{-1}(1) = \alpha_1 \\ \vdots \\ \mathrm{Card}\ i^{-1}(n) = \alpha_n}} a_i \cdot \alpha_1) \dots \alpha_n) \right]$$

Soit T l'ensemble des applications $t : \{1, \dots, d\} \to \{1, \dots, d\}$ involutives et sans point fixe.

Pour i fixé, on voit que le nombre d'éléments t de T tels que $i \circ t = i$ est exactement $\alpha_1) \dots \alpha_n)$; on a donc

$$s = \sum_A \sum_{\substack{i \in \mathscr{A}(d, n) \\ \mathrm{Card}\ i^{-1}(1) = \alpha_1 \\ \vdots \\ \mathrm{Card}\ i^{-1}(n) = \alpha_n}} \left(\sum_{\substack{t \in T \text{ et} \\ i \circ t = i}} a_{i \circ t} \right) = \sum_{t \in T} \left(\sum_{\substack{i \in \mathscr{A}(d, n) \\ \text{et} \\ i \circ t = i}} a_i \right)$$

Pour chaque $t \in T$ le terme $\sum_{\substack{i \in \mathscr{A}(d, n) \\ \text{et} \\ i \circ t = i}} a_i$ est le résultat d'une opération de traces sur les indices accouplés 2 à 2 par t; d'où finalment la formule:

$$\text{(3.5.4)} \qquad \int_{S^{n-1}} \phi(X, \dots, X) \cdot |\omega| = C(n, d) \cdot \sum_{t \in T} \Bigg(\sum_{\substack{i \in \mathscr{A}(d,n) \\ \text{et} \\ i \circ t = i}} a_i \Bigg)$$

Il est clair que la formule est sans intérêt si ϕ possède de l'antisymétrie; d'autre part si d est impair, T est vide; et l'intégrale est bien nulle.

3.5.5. Par exemple dans le calcul de l'intégrale

$$\int_{\S} (D\rho \otimes D\rho)(X, X, X, X, X, X) \cdot |\omega|,$$

où $D\rho$ désigne la dérivée convariante du tenseur ρ de Ricci, il faut exprimer 15 traces: On obtient pour l'intégrale dans chaque fibre:

$$\int_{S^{n-1} \cong p^{-1}(m)} [D_X \rho(X, X)]^2 \, |\omega| =$$

$$= \frac{\mathrm{Vol}(S^{n-1})}{n(n+2)(n+4)} [-4(\delta\rho, d\tau)_m + 4|\delta\rho|_m^2 + |d\tau|_m^2 + 2|D\rho|_m^2 + 4D_i \rho_{uv} D^u \rho^{iv}]$$

Dans le 2^e^ membre $(\ ,\ )_m$ et $|\ \ |_m$ désignent les produits scalaires et les Euclidiennes associées à g_m, δ l'opérateur de divergence et τ la courbure scalaire. Si l'on calculait

$$\int_U \langle (D_X R)(X, JX)X, JX \rangle^2 \cdot |\omega|,$$

dans une veriété Hermitienne (M, g, J) il faudrait patiemment écrire $945 = 9 \times 7 \times 5 \times 3$ traces portant sur des tenseurs dérivés de la courbure.

4. **Le théorème de E. HOPF** (Théorème 1.1).

On considère (M, g) une surface sans couple de points conjugués. Considérons l'équation de Jacobi le long d'une géodésique γ paramétrée par l'arc de longueur:

$$\text{(4.1)} \qquad y'' + Ky = 0$$

K désignant la courbure de Gauss de la surface (M, g). D'après l'hypothèse de non conjugaison, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$, la solution notée $y(t; a, b)$ est bien determinée par les conditions $y(a; a, b) = 1$, $y(b; a, b) = 0$. Les faits remarquables suivants sont démontrés dans [1]:

— $\lim_{b \to \infty} y(t; a, b) = y(t, a)$ existe pour $\forall\, t$ et $\forall\, a$ dans $\mathbb{R}$;

— $\forall\ t \in \mathbb{R}$, $y(t, a) > 0$ et $y(t, a)$ est solution de (4.1);

— le rapport $u(t) = \dfrac{y'(t, a)}{y(t, a)}$ ne dépend pas de a, mais seulement de $\gamma'(t)$.

— u vérifie l'équation de Riccati:

$$\text{(4.2)} \qquad u' + u^2 + K = 0.$$

Ainsi u définit une fonction sur le fibré unitaire U, dont la restriction à chaque géodésique est C^∞; il est de plus montré dans [1] que cette fonction est mesurable et bornée. Dans le cas d'une métrique Euclidienne on a évidemment $u \equiv 0$ et $y(t, a) = 1$. L'idée d'intégrer (4.2) sur tout segment de géodésique de longueur 1:

$$\forall\ x \in U, \int_0^1 (u' + u^2 + K \circ \pi)(G_t(x)) dt = 0$$

donc

$$\forall\ x \in U,\ u(G_1(X)) - u(X) + \int_0^1 u^2(G_t(X)) dt + \int_0^1 (K \circ \pi)(G_t(X)) dt = 0.$$

On intègre cette égalité sur U relativement à la mesure de Liouville μ en supposant M compacte. On a donc:

$$\int_U u(G_1(X))\mu - \int_U u(X)\mu + \int_U \left(\int_0^1 (u^2 + K \circ \pi)(G_t(X)) dt \right) \mu = 0$$

or d'après (3.1.6):

$$\int_U u(G_1(X))\mu = \int_{G_1(U)} u(G_1(X))\mu = \int_U u(X)\, G_1^*(\mu) = \int_U u(X)\mu;$$

Il reste donc en utilisant le théorème de Fubini sur $U \times [0, 1]$ et l'invariance de μ par G_t:

$$\int_U u^2(X)\mu = \int_U \left(\int_0^1 u^2(G_t(X))dt\right)\mu = -\int_U (K\circ\pi)(x)\mu$$

on encore:

$$\int_U (K\circ\pi)(X)\mu \leq 0. \tag{4.3}$$

L'égalité dans la relation (4.3) équivaut à ce que $\int_0^1 u^2(G_t(X))dt$ et u soient nuls presque partout; donc si $u(X)=0$ alors $u(G_t(X))=0$, $\forall t\in[0,1]$ et d'après (4.2), $(K\circ\pi)(G_t(X)) = 0$. Ainsi K s'annule sur un ensemble dense de M et est donc identiquement nulle par continuité. Or, d'après (3.2.7),

$$\int_U (K\circ\pi)(X)\mu = 2\pi\int_M K\cdot|\sigma|.$$

Si on suppose que M est un 2-tore ou une bouteille de Klein, dont on sait qu'ils possèdent une structure Euclidienne canonique, on a d'après le théorème de Gauss-Bonnet:

$$\int_M K\cdot|\sigma| = \int_M 0\cdot|\sigma_o| = 0 = 2\pi\cdot\chi(M).$$

Donc l'égalité a lieu dans (4.3), d'où K est identiquement nul et (M,g) localement Euclidienne.

5. Le théorème de L. GREEN (Théorème 1.2).

(Voir [2] et [4] où la démonstration de la conjecture de Blaschke sur les "Wiedersehenflachen" est ramenée à celle du Théorème 1.2).

Considérons sur $(\mathbb{R}P^2, g)$ une C_π-structure. On commence par utiliser le fait que g n'a pas de points conjugués en se servant du théorème de comparaison suivant (voir par ex. [9] p. 111): Soit γ une géodésique sans points conjugués sur l'intervalle $[o,s[$, J un champ de Jacobi normal à γ, V un champ normal le long de γ tels que $J(0)=V(0)=0$, $J(s)=V(s)$; dans ces conditions

$$\int_0^s \left(\left\|\frac{DV}{dF}\right\|^2 - \langle R(\gamma_t', V)\gamma_t', V\rangle\right)dt \geq \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}(\|J_t\|^2)_{(t=s)}$$

de plus l'égalité a lieu si et seulement si J est identique à V. En prenant $V(t) = \sin t\cdot U(t)$, $t\in[0,\pi]$, avec $U(t)$ champ unitaire normal le long de γ on obtient l'inégalité:

$$\int_0^\pi K(\gamma(t))\sin^2 t\, dt - \frac{\pi}{2} \leq 0 \tag{5.1}$$

avec égalité si et seulement si l'équation $y'' + Ky = 0$ admet la solution $\sin t$, ce qui équivaut à $K\equiv 1$ le long de γ. Par un changement d'origine sur γ cette inégalité s'écrit:

$$\int_s^{s+\pi} K(\gamma(t)\sin^2(t-s)dt - \frac{\pi}{2} \leq 0. \tag{5.2}$$

En intégrant par rapport à s sur $[0,\pi]$ on a:

$$\int_0^\pi\int_s^{s+\pi} K(\gamma(t))\sin^2(t-s)dt\, ds - \frac{\pi^2}{2} \leq 0; \tag{5.3}$$

il reste en effectuant

$$\int_0^\pi (K(\gamma(t)-1)dt \leq 0 \tag{5.4}$$

avec égalité si et seulement si K est identique à 1 sur γ. On intègre (5.4) suivant le fibration de U sur les géodésiques d'aprés (3.2.4):

$$\int_U (K\circ\pi - 1)(X)\mu = \int_C\left(\int_\gamma (K(\gamma(t)-1)dt)\right)\mu \leq 0 \tag{5.5}$$

avec égalité si et seulement la courbure vaut 1 sur $\mathbb{R}P^2$. On a d'autre part:

(5.6) $\qquad \mathrm{Vol}\, U = \mathrm{Vol}\, U_o \qquad$ d'après (3.3.2).

En appliquant le théorème de Gauss-Bonnet et (3.2.7) on a aussi

$$\int_U (K\circ\pi)(X)\mu = 2\pi\int_{\mathbb{R}P^2} K\cdot|\sigma| = 2\pi\int_{\mathbb{R}P^2}|\sigma_o| = \mathrm{Vol}\,\mathrm{U}_o. \tag{5.7}$$

Il résulte de (5.5), (5.6), (5.7) que $(\mathbb{R}P^2, g)$ est à courbure constante 1 et donc isométrique à $(\mathbb{R}P^2, g_o)$.

6. Le cas hyperbolique (Théorème 1.4).

L'idée est de reprendre la fonction u introduite par E. HOPF (Voir §4). Dans le cas de $(\mathbb{R}H^2, g_o)$ et, pour $|t|$ assez grand dans le cas de $(\mathbb{R}H^2, g)$ on a $y(t, a) = e^{a-t}$ et $u(t) \equiv -1$; on utilise pour cela l'hypothèse $a)$ de 1.3. Soit B une boule ouverte de $(\mathbb{R}H^2, g_o)$ qui contient le compact K et U (respectivement U_o) le fibré unitaire de $(B, g \mid B)$ (resp. $(B, g_o \mid B)$). On pose $V = u + 1$ dans l'équation de Riccati (4.2) qui devient:

$$(6.1) \qquad V' + V^2 - 2V + K + 1 = 0.$$

Si la géodésique γ coupe B, soient t_o et t_1, $t_o < t_1$, les valeurs correspondantes du paramètre; on a donc en intégrant dans (6.1):

$$V(t_1) - V(t_o) + \int_{t_0}^{t_1} V^2(t)\,dt - 2\int_{t_0}^{t_1} V(t)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} (K+1)(\gamma(t))\,dt = 0$$

avec $V(t_1) = V(t_o) = 0$ et

$$\int_{t_0}^{t_1} V\,dt = \int_{t_0}^{t_1} (u+1)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{y'(t,a)}{y(t,a)}\,dt + (t_1 - t_o) =$$

$$= \Big[\log|y(t,a)|\Big]_{t_0}^{t_1} + (t_1 - t_o) = (a - t_1) - (a - t_o) + t_1 - t_o = 0$$

Il reste:

$$(6.2) \qquad \int_\gamma V^2(\gamma(t))\,dt + \int_\gamma (K+1)(\gamma(t))\,dt = 0.$$

On intègre la relation (6.2) sur U en utilisant (3.2.4):

$$(6.3) \qquad \int_U V^2(X)\cdot\mu + \int_U [(K+1)\circ\pi](X)\cdot\mu = 0$$

on a alors successivement:

$$(6.4) \qquad \int_U -(K\circ\pi)(X)\mu \geq \text{Vol } U, \text{ d'après (6.3).}$$

$$(6.5) \qquad \int_U -(K\circ\pi)(X)\cdot\mu = \text{Vol } U_o,$$

$$(6.6) \qquad \text{Vol } U = \text{Vol } U_o, \text{ d'après (3.4.2).}$$

La relation (6.5) équivaut en effet d'après (3.2.6) et (3.2.7) a

$$(6.7) \qquad \int_B (-K)\,|\sigma| = \int_B |\sigma_o|.$$

Pour vérifier (6.7) il suffit de confronter les formules de Gauss-Bonnet avec bord sur B pour g et g_o, tenant compte de ce que g et g_o coïncident dans un voisinage de ∂B. Donc, d'après (6,3), (6.4), (6.5), (6.6), on doit avoit v nul presque partout; on conclut que v est identiquement nul comme au §4 et d'après l'équation (6.1) on a $K \equiv -1$ pour $(\mathbb{R}H^2, g)$. C.Q.F.D.

7. Ridigité géodésique en dimension supérieure à 2.

On donne ici des indications sur la validité du Théorème 1.1 (resp. th 1.2), (resp. th 1.3) pour le tore T^n (resp. l'espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$), (resp. l'espace Hyperbolique réel $\mathbb{R}H^n$) avec $n \geq 2$. Pour le cas de $\mathbb{R}P^n$ la question est presque résolue par le

7.1. Théorème (M. BERGER) (5) (App. D). *Toute métrique Riemannienne sur l'espace Projectif $\mathbb{R}P^n$, sans points conjugués, pour laquelle les géodésiques sont simplement fermées et de longueur π, est isométrique à la métrique standart si n est pair; Pour n impair le résultat est vrai si la métrique est assez voisine de la métrique standard.*

La technique utilise encore, mais de façon bien plus fine, les mêmes théorèmes de Liouville, de Fubini, et un argument plus général que le théorème de Gauss-Bonnet concernant l' invariant d'Euler du fibré principal: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to U \to C$ (3.2.2). On utilise aussi une inégalité universelle sur les fonctions conjecturée par M. BERGER et prouvée par J. KAZDAN. (Voir. [10]).

Pour la généralisation du théorème de E. HOPF on a le résultat suivants:

7.2. Théorème (L. GREEN) [11]. *Pour une variété Riemannienne compacte sans points conjugués l'intégrale de la courbure scalaire est négative ou nulle; elle s'annule si et seulement si la métrique est plate.*

La méthode employée généralise celle de E. HOPF. On a aussi le

7.3. Théorème (A. AVEZ) [12]. *Toute métrique Riemannienne sans points focaux sur un tore T^n est nécessairement plate.*

D'autres résultats partiels figurent dans [12].

Pour le Théorème 1.4 il est clair que le problème tel qu'il est posé — avec des conditions au bord très fortes — est de même nature que celui de E. HOPF. En décalquant la preuve du Théorème 7.2, en dimension supérieure à 2, on obtient, exactement comme au §6, le

7.4. Théorème. *Soit $(\mathbb{R}H^n, g)$ tel que g coincide avec la métrique standart g_o en dehors d'un compact K et tel que les propriétés a) b) soient vérifiées. Alors pour une boule B qui contient K on a*

$$\operatorname{Vol}(B, g_o) \leq \frac{1}{n(n-1)} \int_B (-\tau) \cdot |\sigma|$$

où τ désigne la courbure scalaire de $(\mathbb{R}H^n, g)$; l'égalité implique que g est à courbure constante -1.

7.5. Le point de vue infinitésimal. Il s'agit essentiellement de considérer les problèmes de rigidité précédents sous la forme plus faible de la linéarisation autour du cas canonique g_o: Si $(g_\lambda)_{\lambda \varepsilon [0, \varepsilon[}$ est une famille de métriques, de classe C^1 en λ, vérifiant une propriété (P), le fait pour g_λ d'être rigide signifie que $g_\lambda = (d_\lambda)^* g_o$, où les d_λ sont des difféomorphismes; en particulier on a

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (g_\lambda) \bigg|_{\lambda=0} = \mathscr{L}_X(g_o) \tag{7.6}$$

où X est le champ de vecteurs engendré par (d_λ). La métrique canonique est dite "infinitésimalement rigide" parmi les métriques vérifiant (P) si la relation (7.6) est vérifiée pour toute famille à un paramètre de métriques ayant la propriété (P). Il est démontré dans [13] [14] que, pourtout entier n, $(\mathbb{R}P^n, g_o)$ (resp $(\mathbb{R}H^n, g_o)$) sont infinitésimalement rigides dans les métriques considérées dans le Théorème 1.2 (resp. (th. 1.4)) (Voir une autre démonstration par J. P. BOURGUIGNON dans [5] chap 5).

D' ailleurs l'hypothèse d'être sans points conjugués n'est pas nécessaire dans ces cas.... D'autre part la rigidité infinitésimale pose des questions de nature Analyse Géométrique sur les tenseurs symétriques de decré 2, dont l'intérêt peut sembler, à priori, indépendant des problèmes globaux qui les ont motivés; En généralisant on est amené à considérer l'espace des tenseurs symétriques k de degré p à support compact vérifiant pour toute géodésique γ (géodésique fermée, dans le cas compact) la condition

$$\int_\gamma k(\gamma'_t, \ldots, \gamma'_t)\, dt = 0.$$

Le cas $p = 0$, celui des fonctions, est du domaine de l'analyse éventuellement associée à la théorie des groupes (transformation de Fourier, transformation de Radon). Dans l'appendice qui suit on s'intéresse au cas où $p = 1$. Voir assi [15].

8. Appendice. Le Théorème 1.7 pour le cas de l'espace Euclidien E^n est prouvé de façon simples dans [16]. Les cas de $\mathbb{R}P^n$ et $\mathbb{R}H^n$ s'y ramènent aproximativement car on peut appliquer un sous-ensemble dense de chacun d'eux sur E^n en sorte que les géodésiques se transforment en les droites de E^n, non paramétrées linéairement, mais avec conservations de l'intégrale. Voir par ex. [17], p. 156. Ainsi le théorème est trivialement le même pour $\mathbb{R}H^n$ que pour E^n. On vérifie ci-après de Théorème 1.7 pour $\mathbb{R}P^n$.

Théorème. *Une forme differentielle de degré 1 dont l'intégrale est nulle sur toutes les géodésiques du projectif réel standart $\mathbb{R}P^n$ est exacte (et réciproquement).*

Démonstration. Il suffit de la vérifier dans le cas de $\mathbb{R}P^2$ où on la ramène immédiatement; il est alors commode de considérer une forme φ, invariante par l'antipodie de S^2 canonique, d'équation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Soit Ω l'ouvert de S^2 défini par $x_3 > 0$ et H le plan d'équation: $x_3 = 1$. Soit ϕ: $H \to U$ le difféomorphisme tel que pour tout M de H, les points M, $\phi(M)$, 0 sont alignés; l'application ϕ^{-1} envoie les géodésiques γ de U sur les droites d de H. Soit $\psi = \phi^* \varphi$; on a alors

$$\int_\gamma \varphi = 0 = \int_d \psi. \tag{8.1}$$

Il suffit de montrer que ψ est exacte. Soit d une droite de H, on choisit un système de coordonnées dans H, d'origine $(0, 0, 1)$ tel que d ait pour équation $y = y_0$, $y_0 > 0$, et le système de coordonnées polaires sur Ω pour que ϕ soit représentée par $x = \operatorname{tg} u \cdot \cos t$, $y = \operatorname{tg} u \cdot \sin t$, $t \in]-\pi, +\pi[$, $u \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Soient les points $A(-x, y_o)$, $B(x, y_o)$, $C(x, y)$, $D(-x, y)$ et soit d' la droite DC. Posons $\psi = \psi_1 \cdot dx + \psi_2 \cdot dy$; On écrit, en supposant d et d' paramétrées par x:

$$\int_d \psi - \int_{d'} \psi = 0 = \int_{-\infty}^{-x} \psi_1(x, y_o)\, dx + \int_{-x}^{x} \psi_1(x, y_o)\, dx + \int_x^{+\infty} \psi_1(x, y_o) dx +$$

$$+\int_{+\infty}^{x}\psi_1(x,y)dx+\int_{x}^{-x}\psi_1(x,y)dx+\int_{-x}^{-\infty}\psi_1(x,y)dx.$$

On applique la formule de Green-Riemann sur $ABCD$, après avoir ajouté et retranché $\int_{BC}\psi+\int_{DA}\psi$. Il reste:

$$\int_{-\infty}^{-x}\psi_1(x,y_o)dx+\int_{x}^{+\infty}\psi_1(x,y_o)dx+\int_{\infty}^{x}\psi_1(x,y)dx+\int_{-x}^{-\infty}\psi_1(x,y)dx+$$

$$+\iint_{ABCD}d\psi-\int_{BC}\psi-\int_{DA}\psi=0.$$

Posons $f(x,y)=\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x}-\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y}$. En dérivant par rapport à y en y_o on obtient:

$$\int_{-x}^{x}f(x,y_o)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{\infty}^{x}\psi_1(x,y)dx\right)_{y=y_0}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{-x}^{-\infty}\psi_1(x,y)dx\right)_{y=y_0}-\psi_2(x,y_o)+\psi_2(-x,y_o)=0.$$

Lorsque $x\to+\infty$, les 4 derniers termes tendent vers 0, et il reste

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y_o)dx=0. \tag{8.2}$$

En effet, si on exprime ψ_1 et ψ_2 à l'aide de $\varphi=\varphi_1\cdot dt+\varphi_2\cdot du$, avec φ_1 et φ_2 bornées, on voit simplement que pour $(x,y)\in\mathbb{R}\times[-A,+A]$ on a:

$$|\psi_1(x,y)|\le\frac{K}{x^2+y^2},\quad|\psi_2(x,y)|\le\frac{K}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad\left|\frac{\partial}{\partial y}\psi_1(x,y)\right|\le\frac{K}{x^2+y^2};$$

Il s'ensuit qu'on peut commuter dérivée et intégrale généralisée dans la dernière équation: On a donc, pour toute droite d de H, $\int_d f=0$. On en déduit par transformation de Fourier que

$$\hat f(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-it}\left(\int_{<x,\xi>=t}f\right)dt=0.$$

Il en résulte par inversion de Fourier que la fonction f est identiquement nulle. Par conséquent $d\psi=0$ et on sait, sur $\mathbb{R}P^2$, que ψ est nécessairement exacte. C.Q.E.D.

8.3. Remarque. On peut vérifier de façon analogue une généralisation du Théorème 1.7 pour des p-formes différentielles extérieures dont l'intégrale est nulle sur tous les p-sous-espaces totalement géodésiques de E^n, T^n, $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{R}H^n$: une telle forme est nécessairement exacte (voir [16]).

Références

[1] E. HOPF, *Closed surfaces without conjugate points*, Proc. Nat. Ac. Sci. U.S.A. 34, 1948.

[2] L. W. GREEN, *Auf Wiedersehensflächen*, Ann. of Maths. Vol. 78 n.° 2 1963.

[3] R. MICHEL, *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris*, t 284 serie A-183, 1977.

[4] M. BERGER, *Lectures on Geodesics in Riemannian Geometry*, Tata Institute of Fund. Research, Bombay, 1965.

[5] A. BESSE, *Manifolds all of whose geodesics are closed* Ergebnisse der Mathematik, Band 93, Springer.

[6] C. GODBILLON, *Géométrie Differentielle et Mécanique Analytique*, 1969, Hermann, Paris.

[7] J. DIEUDONNÉ, *Elements d' analyse*, vol. 3, 1970, Gauthier-Villars, Paris.

[8] W. GREUB, S. HALPERIN, R. VANSTONE, *Connections, Curvature and Cohomology*, Ac. Press, Vol. I, 1972.

[9] S. S. CHERN (Editor), *Studies in Global Geometry and Analysis*, Math. Assoc. of America, prentice Hall, 1967.

[10] M. BERGER, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, t. 284 — serie A — 1221, 1977.

[11] L. GREEN, *A théorème of E. Hopf*, Michigan J. of Math. (vol. 5) 1958.

[12] A. AVEZ, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, t. 270 — serie A, 1970.

[13] R. MICHEL, Bull. S.M.F., 101, 1973.

[14] R. MICHEL, Journal de Math. Pures et Appliquées, 53, 1974.

[15] I.M. GELFAND, M.I. GRAEV, Z.Ya. SHAPIRO, Funct. Anal., 3, n.° 2, 1969.

[16] R. MICHEL, *Tenseurs symétriques et Géodésiques*, Comptes Rendus Acad. SC. Paris t. 284 serie A, 1065.

[17] D. LAUGWITZ, *Differential and Riemannian Geometry*, Academic Press, 1965.

[18] A. WEINSTEIN, *On the volume of manifolds all of whose geodesics are closed*, J. of Differential Geometry, 9, 1974.

[19] H. WEYL, *On the volume of tubes*, Am. J. of Math. 61, 1939.

Rene Michel
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
33, rue Louis Pasteur
8400 — AVIGNON —