Sur certaines variétés à géodésiques toutes fermées

Marcel Berger

Nous utilisons, en les rappelant en partie, sytématiquement les notations, définitions et résultats de [*B*], en particulier ceux du chapitre 5 et de l'appendice *D*.

Pour une point m d'une variété riemannienne complète (M, g), on *note* $S(m, r)$ l'ensemble des points situés à distance r du point m de M et $\mathrm{Cut}(m)$ le cut-locus du point m ([*B*], pages 130-132). La variété riemannienne (M, g) est *dite de Blachke* si elle est complète et s'il existe un réel r tel que $\mathrm{Cut}(m) = S(m, r)$ pour tout point m de M(cf. [*B*], 5.43).

Dans tout ce travail nous supposons dorénavant que (M, g) est une variété de Blaschke, normée en outre en sorte que la distance r vaille π.

On sait alors que toutes les géodésiques sont périodiques et de plus petite période égale à 2π (i.e. (M, g) est une $C_{2\pi}$-variété, voir [*B*], 2.3 et 5.42). De plus si l'on considère deux points quelconques m, n dont la distance $d(m, n)$ est égale à π, alors la réunion des plus courtes géodésiques joignant m à n forme une sous-variété de M, *notée* $\Sigma(m, n)$, qui est homéomorphe à une sphère, d'une dimension fixe k, que l'on peut appeler l'*entier de* la variété de Blaschke (M, g) (cf. [*B*], 5.37 à appliquer en m et en n).

Lorsque k vaut 1, la variété M est alors difféomorphe au projectif réel $\mathbb{R}P^d$ de dimension d; lorsque k vaut d, la dimension de M, alors M est difféomorphe à la sphère S^d (cf. [*B*], 5.57). Dans ces deux cas on sait ([*B*], *D*.1 et *D*.2) que (M, g) est nécessairement à courbure sectionnelle constante et donc isométrique, dans le premier cas à $(\mathbb{R}P^d, \mathrm{can})$, le projectif réel muni de sa structure riemannienne canonique, et dans le second à la sphère standard (S^d, can).

Les seules autres possibilités pour k sont 2, 4, 8 (cf. [*B*], 5.56) et la question ouverte actuellement (dite conjecture de Blaschke dans [*B*], p. 143) est de savoir si (M, g) est nécessairement ou non isométrique respectivement à l'un des $(\mathbb{C}P^n, \mathrm{can})$, (HP^n, can), $(\mathbb{C}a\ P^2, \mathrm{can})$, à savoir les espaces projectifs complexes, quaternioniens et le plan projectif des octaves de Cayley, munis de leur structure riemannienne canonique. Dans ce travail nous apportons une contribution partielle à cette question en faisant une hypothèse supplémentaire sur les sphères $\Sigma(m, n)$ considérées plus haut.

Recebido em 26-6-1978.

D'après ce qui précède nous pouvons supposer que k vaut 2, 4 ou 8; nous *noterons* (M_0, g_0) la variété riemannienne prise parmi $(\mathbb{C}P^n$, can), $(H P^n$, can), $(\mathbb{C}a P^2$, can) et qui a mêmes dimension et entier k que (M, g).

Définition. Une variété de Blaschke (M, g) est dite totalement géodésique si, quels que soient les deux points m, n de M tels que $d(m, n) = \pi$, la sphère $\Sigma(m, n)$ est une sous-variété totalement géodésique de (M, g).

Théorème. *Sur les variétés* $\mathbb{C}P^n$, HP^n, $\mathbb{C}a P^2$ *la structure riemannienne les volumes de* (M, g) *et* (M_0, g_0) *vérifient l'inégalité* $\mathrm{Vol}(g) \geq \mathrm{Vol}(g_0)$. *En outre si l'égalité est atteinte,* (M, g) *est alors nécessairement isométrique à* (M_0, g_0).

Par application du théorème de Weinstein (cf. [WEINSTEIN] ou [B], 2.21) qui affirme que le volume d'une variété riemannienne, dont toutes les géodésiques sont périodiques de plus petite période égale à 2π, est un multiple entier de celui de la sphère standard de même dimension, on déduit du théorème le

Corollaire. *Sur les variétés* $\mathbb{C}P^n$, HP^n, $\mathbb{C}aP^2$ *la structure riemannienne canonique est isolée parmi les structures riemanniennes qui sont de Blaschke totalement géodésiques.*

La démonstration du théorème est un raffinement de celle de D.1 dans [B], dont nous reprenons les notations et la démarche. Il nous semble que le lecteur a intérêt à bien avoir compris cette démonstration avant de lire ce qui suit.

Pour tout m la boule fermée $B(m, \pi)$, de centre m et de rayon π, coincide avec M donc $\mathrm{Vol}\,(B(m, \pi)) = \mathrm{Vol}(g)$. Comme le rayon d'injectivité de (M, g) est égale à π (cf. [B], 5.42), on peut calculer $\mathrm{Vol}(B(m, \pi))$ en coordonnées polaires $(u, y) \in U_mM \times \mathbb{R}_+$ de centre m, où U_mM *désigne* la sphère des vecteurs unités tangents à M en m; on *définit la fonction* $f(u, y)$ de volume en coordonnées polaires par l'égalité de mesures $d\mu = f(u, y)\, dy \otimes d\sigma$, où dy désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$, $d\sigma$ la mesure canonique sur U_mM et $d\mu$ la mesure canonique de (M, g). D'où, pour tout m de M:

$$\mathrm{Vol}(g) = \mathrm{Vol}(B(m, \pi)) = \int_{u \in U_mM} \int_{y=0}^{y=\pi} f(u, y)\, dy \otimes d\sigma.$$

En intégrant en m pour la mesure $d\mu$ on en déduit

$$\mathrm{Vol}^2(g) = \int_{m \in M} \int_{u \in U_mM} \int_{y=0}^{y=\pi} f(u, y)\, dy \otimes d\sigma \otimes d\mu =$$

$$= \int_{u \in UM} \int_{y=0}^{y=\pi} f(u, y)\, dy \otimes d\mu_1,$$

parce que (cf. [B], 1.123) $d\mu_1 = d\mu \otimes d\sigma$ si $d\mu_1$ désigne la mesure canonique du fibré unitaire total UM de (M, g). On intégre enfin l'égalité précédente par rapport à x parcourant $[0, \pi]$ pour la mesure de Lebesgue dx; grâce à l'invariance de $d\mu_1$ sous l'action du flot géodésique ζ de UM (théorème de Liouville, [B], 1.125) on obtient

$$\int_{x=0}^{x=\pi} \mathrm{Vol}^2(g)\, dx = \pi\, \mathrm{Vol}^2(g) = \int_{u \in UM} \int_{x=0}^{x=\pi} \int_{y=0}^{y=\pi} f(\zeta^x(u), y)\, dy \otimes dx \otimes d\mu_1.$$

Notons $f_0(u, y)$ la fonction volume en coordonnées polaires de (M_0, g_0); on sait (cf. par exemple [BOMB], lemma VI. 7.1 page 206) que $f_0(u, y)$ ne dépend en fait que de y et vaut

$$f_0(u, y) = f_0(y) = |\sin y|^{k-1} \sin^{d-k} \frac{y}{2} \quad \text{sur } [0, 2\pi]. \tag{1}$$

L'inégalité du théorème sera démontrée si nous pouvons démontrer qu pour tout u dans UM, on a l'inégalité

$$\int_{x=0}^{x=\pi} \int_{y=0}^{y=\pi} f(\zeta^x(u), y)\, dy \otimes dx \geq \int_{x=0}^{x=\pi} \int_{y=0}^{y=\pi} f_0(y)\, dy \otimes dx. \tag{2}$$

Fixons donc maintenant u dans UM, avec u tangent en m et soit γ la géodésique $y \to \exp_m(yu)$ de vecteur vitesse initial u. On sait (cf. par exemple [B], 6.4 et page 237) que l'on peut calculer $f(u, y)$ insi: prenons une base orthonormée $\{u, u_2, \ldots, u_d\}$ de T_mM qui complète u et soient $(Y_i)_{i=2,\cdots,d}$ les champs de Jacobi le long de γ définis par les conditions initiales $Y_i(0) = O$, $Y_i'(0) = u_i$ pour $i = 2, \ldots, d$. Alors $f(u, y) = |\mathrm{Det}(Y_2(y), \ldots, Y_d(y))|$. Les champs de Jacobi Y satisfont le long de γ le système différentiel de Sturm-Liouville

$$J'' + R \cdot J = 0, \tag{3}$$

où R est la fonction $y \to R(y)$ à valeurs dans l'espace des endomorphismes symétriques de l'orthogonal $u^\perp$ de u, définie par $R(y) \cdot v = R(\dot{\gamma}(y), v)\, \dot{\gamma}(y)$ (ici R désigne le tenseur de courbure et $\dot{\gamma}(y)$ le vecteur vitesse de γ au temps y).

Décomposition du système de Sturm-Liouville. (3)

Soit n le point $n = \exp_m(\pi u)$ et considérons la sphère associée $\Sigma(m, n)$. Par hypothèse c'est une sous-variété totalement géodésique de dimension

k de (M, g); donc si nous choisissons de plus les u_i précédents en sorte que $u_2, \ldots, u_k$ soient tangents à $\Sigma(m, n)$ en m, alors les champs de vecteurs $U_2, \ldots, U_k$, obtenus en transportant parallèlement $u_2, \ldots, u_k$ le long de γ, resteront toujours tangents à $\Sigma(m, n)$. D'autre part, $\Sigma(m, n)$ étant totalement géodésique dans une variété de Blaschke, est elle-même une variété de Blaschke; comme c'est une sphère, la solution de la conjecture de Blaschke pour les sphères ([B], appendice D) montre qu'elle est à courbure sectionnelle constante égalle à 1.

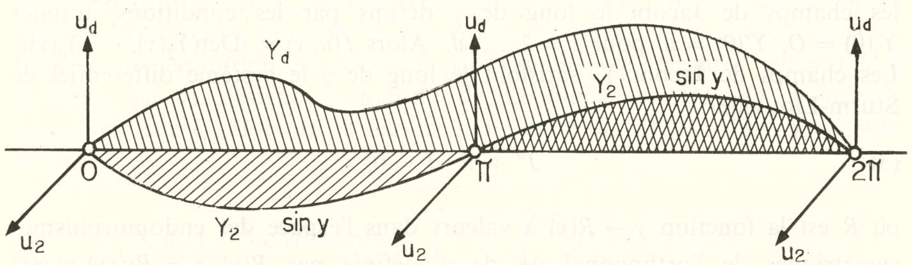
Les deux propriétés précédentes montrest que l'on a donc $R(y) \cdot u_i = u_i$ pour tous y et tous $i = 2, \ldots, k$. C'est donc d'abord que les champs Y_i pour $i = 2, \ldots, k$ sont connus et valent $Y_i(y) = \sin y \cdot u_i$. Puis que, pour tout $i \geq k + 1$, le champ Y_i reste constamment orthogonal à $\Sigma(m, n)$, c'est à dire à $u_2, \ldots, u_k$. Le système (3) se décompose donc en deux systèmes de Sturm-Liouville : l'un relatif à $\{u_2, \ldots, u_k\}$ et l'autre relatif à $\{u_{k+1}, \ldots, u_d\}$; on pourra donc écrire $J = U + V$ où U est le morceau dans $\{u_2, \ldots, u_k\}$ et V celui dans $\{u_{k+1}, \ldots, u_d\}$ et écrire

$$V'' + S \cdot V = 0 \tag{4}$$

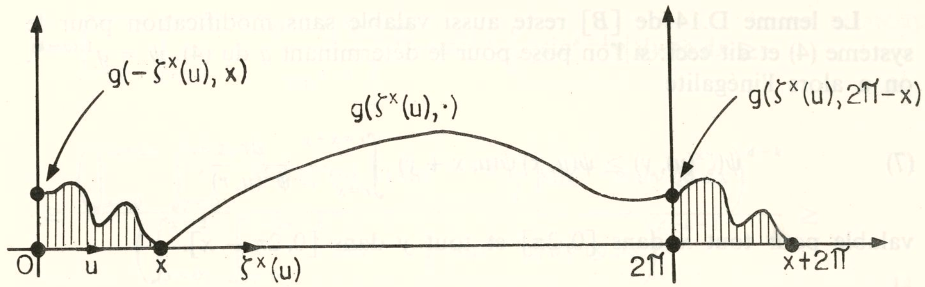
pour le second système.

Si l'on pose $g(u, y) = |\mathrm{Det}(Y_{k+1}(y), \ldots, Y_d(y))|$, on aura donc $f\zeta^x(u), y) = |\sin^{k-1} y| \cdot g(\zeta^x(u), y)$ sur $[0, 2\pi]$. L'important maintenant est que le système (4) est analoque à ceux des structures de Blaschke sur les sphères S^{d-k}, précisément (4) a la propriété suivante:

quel que soit $x \in \mathbb{R}$ et la solution Y de (4) vérifiant $Y(x) = 0$, alors $Y(x + 2\pi) = 0$ et $Y(y) \neq 0$ sur $]x, 2\pi - x[$.



Lemme. *Pour un système (4) vérifiant la condition précédente, sa fonction $g(u, y)$ vérifie pour tout x la propriété de périodicité $g(-\zeta^x(u), x) = g(\zeta^x(u), 2\pi - x)$.*



On ne peut pas démontrer ce lemme comme le lemme D.14 de [B], parce que nous ne disposons pas de l'involution antipodale σ. Procédons ainsi : introduisons l'équation résolvante

$$Z'' + S \circ Z = 0 \tag{5}$$

de (4), où les solutions $y \to Z(y)$ sont maintenant à valeurs dans les endomorphismes. Notons A la solution de (5) telle que $A(0) = 0$ et $A'(0) = I$, où I est l'identité; puis B une solution de (5) telle que $B(0) = I$. Pour tout ε voisin de 0 l'endomorphisme $B(\varepsilon)$ est donc inversible et la combinaison linéaire $C = A - B \circ B^{-1}(\varepsilon) \circ B(\varepsilon)$ est une solution de (5) qui est telle que $C(\varepsilon) = 0$; on a donc par hypothèse aussi $C(\varepsilon + 2\pi) = 0$ soit $A(2\pi + \varepsilon) = B(2\pi + \varepsilon) \circ B^{-1}(\varepsilon) \circ B(\varepsilon)$ pour tout ε. Dérivons cette relation par rapport à ε en $\varepsilon = 0$; on obtient $A'(2\pi) = B(2\pi)$.

Comme S est un endomorphisme symétrique. les deux solutions A et B de (5) vérifient la propriété de Sturm-Liouville

$$A'^*(y) \circ B(y)^{\cdot} - A^*(y) \circ B'(y) = \text{constante}$$

(cf. par exemple [GREEN], page 31 où l'étoile désigne la transposition des endomorphismes). En particulier $A'^*(2\pi) \circ B(2\pi) = I$, d'où enfin $A'(2\pi) \circ A'^*(2\pi) = I$. Ainsi $U = A'(2\pi)$ est il un endomorphisme orthogonal; comme toute solution de (5) se reproduit au temps 2π par la multiplication par U: $Z(y + 2\pi) = Z(y) \circ U$, on a finalement $g(u, y + 2\pi) = |\mathrm{Det}(Z(y + 2\pi)| = |\mathrm{Det}(y)|\ |\mathrm{Det}(U)| = |\mathrm{Det}(y)| = g(u, y)$, ce qu'il fallait démontrer.

Du lemme on déduit, comme dans la démonstration du lemme D.19 de [B], sans aucune modification, que

$$\int_{x=0}^{x=2\pi} \int_{y=0}^{y=2\pi} f(\zeta^x(u), y)\, dy \otimes dx = 2 \int_{x=0}^{x=2\pi} \int_{y=0}^{y=2\pi - x} f(\zeta^x(u), y)\, dy \otimes dx. \tag{6}$$

Le lemme D.14 de [B] reste aussi valable sans modification pour le système (4) et dit ceci: si l'on pose pour le déterminant g du (4): $\psi = g^{1/(d-k)}$, on a alors l'inégalité

$$\psi(\zeta^x(u), y) \geq \psi(u, x)\, \psi(u, x+y) \int_{r=x}^{r=x+y} \frac{dr}{\psi^2(u, r)}, \tag{7}$$

valable pour tout x dans $[0, 2\pi]$ et tout y dans $[0, 2\pi - x]$.

Fin de la démonstration du théorème.

L'égalité (6) nous montre que nous ne pouvons pas démontrer l'inégalité désirée (2) directement, car nous devons travailler sur $[0, 2\pi]$. Mais comme le lemme montre que le volume polaire $f = |\sin^{k-1} y| \cdot g$ est 2π-périodique, nous avons d'abord

$$\int_{u\varepsilon UM} \int_{y=0}^{y=\pi} f(u, y)\, dy \otimes d\mu_1 = \frac{1}{2} \int_{u\varepsilon UM} \int_{x=0}^{x=2\pi} f(u, y)\, dy \otimes d\mu_1,$$

puis

$$\pi \operatorname{Vol}^2(g) = \frac{1}{4} \int_{u\varepsilon UM} \int_{x=0}^{x=2\pi} \int_{y=0}^{y=2\pi} f(\zeta^x(u), y)\, dy \otimes dx \otimes d\mu_1.$$

Compte tenu en outre de (6), il suffit maintenant de montrer, pour obtenir l'inégalité du théorème, que l'on a pour tout u dans UM:

$$\int_{x=0}^{x=2\pi} \int_{y=0}^{y=2\pi-x} f(\zeta^x(u), y)\, dy \otimes dx \geq \int_{x=0}^{x=2\pi} \int_{y=0}^{y=2\pi-x} f_0(y) dy \otimes dx. \tag{8}$$

Pour ce faire nous procédons comme dans les pages 241-242 de [B], avec comme seules modifications: le remplacement de π par 2π, l'intervention du poids $|\sin^{k-1} y|$ et l'usage d'un poids différent donc dans l'inégalité de Kazdan. Nous appliquons l'inégalité (7) et l'inégalité de Holder pour la mesure $\sin^{d-k} \frac{y}{2} |\sin^{k-1} y|\, dy \otimes dx$:

$$\int_{x=0}^{x=2\pi} \int_{y=0}^{y=2\pi-x} f(\zeta^x(u), y)\, dy \otimes dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=2\pi} \int_{y=0}^{y=2\pi-x} g(\zeta^x(u), y)\, |\sin^{k-1} y|\, dy \otimes dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=2\pi} \int_{y=0}^{y=2\pi-x} \frac{\psi^{d-k}(\zeta^x(u), y)}{\sin^{d-k} \frac{y}{2}} \sin^{d-k} \frac{y}{2} |\sin^{k-1} y|\, dy \otimes dx \geq$$

$$\geq \frac{\left(\int_{x=0}^{x=2\pi} \int_{y=0}^{y=2\pi-x} \psi(\zeta^x(u), y) \sin^{d-k-1} \frac{y}{2} |\sin^{k-1} y|\, dy \otimes dx \right)^{d-k}}{\left(\int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=2\pi-x} \sin^{d-k} \frac{y}{2} |\sin^{k-1} y|\, dy \otimes dx \right)^{d-k-1}} \geq$$

$$\geq \frac{\left(\int_{x=0}^{x=2\pi} \int_{z=x}^{z=2\pi} \int_{t=x}^{t=z} \frac{\psi(u, x)\, \psi(u, z)}{\psi^2(u, t)} \sin^{d-k-1} \left(\frac{z-x}{2} \right) |\sin^{k-1}(z-x)| dt \otimes dz \otimes dx \right)^{d-k}}{\left(\int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=2\pi-x} \sin^{d-k} \frac{y}{2} |\sin^{k-1} y|\, dy \otimes dx \right)^{d-k-1}}.$$

Appliquons maintenant l'inégalité de Kazdan (théorème E.2 de [B]), où π est remplacé par 2π, pour la fonction $\varphi = \psi$ et le poids $\rho(t) = \sin^{d-k-1} \frac{t}{2} |\sin^{k-1} t|$, poids qui vérifie bien la condition de symétrie $\rho(2\pi - t) = \rho(t)$ pour tout t dans $[0, 2\pi]$. On obtient

$$\int_{x=0}^{x=2\pi} \int_{z=x}^{z=2\pi} \int_{t=x}^{t=z} \frac{\psi(u, x)\, \psi(u, z)}{\psi^2(u, t)} \sin^{d-k-1} \frac{z-x}{2} |\sin^{k-1}(z-x)| dt \otimes dz \otimes dx \geq$$

$$\geq \int_{x=0}^{x=2\pi} \int_{y=0}^{y=2\pi-x} \sin^{d-k} \frac{y}{2} |\sin^{k-1} y|\, dy \circ dx.$$

D' où résulte bien l'égalité (8) que nous voulions démontrer.

Reste maintenant à étudier le cas de l'égalité. Elle ne peut avoir lieu que si, et ce pour tout u dans UM, on a l'égalité dans l'inégalité de Hölder et l'égalité dans l'inégalité (7). Donc d'abord $g(u, y) = \sin^{d-k} \frac{y}{2}$ pour tous u et tous y. On joint ceci à l'étude faite dans [B], page 242, du cas où l'égalité est atteinte dans le lemme D.14 de [B]; ce qui implique que l'endomorphisme S de (5) vaut toujours $\frac{1}{4} I$; l'endomorphisme de courbure $R(y)$ est donc complétement connu; il vaut $R(y) \cdot u_i = u_i$ si $i = 2, \ldots, k$ et $R(y) \cdot u_i = \frac{1}{4} u_i$ si $i = k+1, \ldots, d$, ceci pour tout y. Comme rappelé dans la page 170 de [B], si cet endomorphisme de courbure est constant, alors (M, g) est un espace riemannien symétrique. Vue la classification de ces espaces (voir au besoin les références données page 242 dans [B]) et les valeurs de d et k, c'est que (M, g) est isométrique à l'espace symétrique de comparaison (M_0, g_0), ce qu'il fallait démontrer.

Bibliographie

[B] Arthur L. BESSE, *Manifolds all of whose Geodesics are Closed*, Ergebnisse des Mathematik, n.° 93, Springer.

[BOMB] Marcel BERGER, *Lectures on Geodesics in Riemannian Geometry*, Bombay, Tata Institute of Fundamental Research.

[GREEN] Leon W. GREEN, *A Theorem of E. Hopf*, Michigan Math. J., 5, (1958), 31-34.

[WEINSTEIN] Alan WEINSTEIN, *On the volume of manifolds all of whose geodesics are closed*, J. Differential Geometry, 9(1974), 513-517.

Marcel Berger
U. E. R. de Mathématiques
Universite de Paris