Sôbre Certas Classes de Sistemas Projetivos de Grupos

CONSTANTINO M. DE BARROS

1. Seja Θ um (σ^e)-morfismo, i.e. Θ é uma aplicação crescente $0 : (C, \leqq) \to (C_+, \leqq)$ tal que (σ^e) para todo $x \in C$, se $o \leqq 0(x)$, então existe um único elemento de C, indicado por $0^*_x(o)$, tal que $0^*_x(o) \leqq x$ e $0(0^*_x(o)) = o$.

Uma parte X de C é dita Θ-*compatível* se para todo $(x, x') \in X \times X$ tem-se: o ínfimo $o \wedge o'$ é definido e $0_x(o \wedge o') = 0_{x'}(o \wedge o')$, onde $o = 0(x)$ e $o' = 0(x')$. Diremos que Θ é *completo* se além do mais: (σ^{ec}) Se X é uma parte Θ-compatível de C e se $\mathrm{Sup}(0(X))$ é definido, então existe um único elemento de C, indicado por s_X, tal que $0(s_X) = \mathrm{Sup}(0(X))$ e $x = 0^*_{s_X}(0(x))$ para todo $x \in X$.

2. Um sistema projetivo $(C_{e'}, \mu_{e'e})$ relativo a um sistema de índices $(E, \leqq)$ é dito *soldado* se C_e e $C_{e'}$ são disjuntos se $e \neq e'$, e se $e \in C_e$ para todo $e \in E$. Seja $E' \subset E$ e $(s_e \mid e \in E')$ um elemento do produto cartesiano de $(C_e \mid e \in E')$. Diremos que $(s_e \mid e \in E')$ é μ-*compatível* se para todo $(e_i, e_j) \in E' \times E'$ tivermos $e_i \wedge e_j = e_{ij}$ é definido e $\mu_{e_{ij}e_i}(s_{e_i}) = \mu_{e_{ij}e_j}(s_{e_j})$. Diremos que $(C_e, \mu_{e'e})$ é *completo* se para tôda parte E′ de E e para todo elemento μ-compatível $(s_e \mid e \in E')$ de $\Pi(C_e \mid e \in E')$, se $\mathrm{Sup}(E')$ é definido, então existe um único elemento $s \in C_e$ tal que $e = \mathrm{Sup}(E')$ e $\mu_{e'e}(s) = s_{e'}$ se $e' \in E'$.

3. LEMA. *As noções de* (σ^e)*-morfismo* (*completo*) *e de sistemas projetivos soldados* (*completos*) *são equivalentes. Esta equivalência é estabelecida por intermédio das seguintes condições:* (*a*) C *é a reunião da família* $(C_e \mid e \in C)$, *onde* $C_e = 0^{-1}(e)$ *se* $e \in C_+$; (*b*) $\mu_{e'e}(s) = 0_s(e')$ *se* $e, e' \in C_+$, *e* $e' \leqq e = 0(s)$. *Além do mais, se* $s', s \in C$, *então* $s' \leqq s$ *se, e só se* $s' = \mu_{e'e}(s)$, $s' \in C_{e'}$ *e* $e' \leqq e$.

4. Seja (C, +) um *progrupóide*, i.e. + é uma lei de composição interna parcialmente definida sôbre C tal que (π_1) se $h, g, f \in C$ e $h + g$, $g + f$ são definidos, então

$(h + g) + f$, $h + (g + f)$ são definidos e iguais; (π_2) se $f \in C$, então existe $f' \in C$ tal que $f + f'$, $f' + f$ são definidos e $f = f + f' + f$; (π_3) se $(o, f) \in C_+ \times C$ e se $o + f$ é definido, então $f + o$ é também definido e $o + f = f + o$, onde $C_+ = \{o \mid o \in C$, $o + o$ é definido e $o + o = o\}$. Se $f \in C$, então existe um único elemento de C, indicado por $-f$, tal que $f + (-f)$, $-f + f$ são definidos e $f = f + (-f) + f$, $-f = -f + + f + (-f)$. Além do mais $f + (-f) = -f + f$, C_+ está contido no centro de $(C, +)$ e o elemento $0_f = f + (-f)$ pertence à C_+. Se para g, $f \in C$ puzermos $g \leqq f$ se, e só se $0_f + 0_g$ fôr definido e $g = f + 0_g$, então $f \to 0_f$ define um (σ^e)-morfismo de $(C, \leqq)$ para $(C_+, \leqq)$ e $(C_+, \leqq)$ é *sub-preindutivo*, i.e. se $o, o', o'' \in C_+$ e $o', o'' \leqq o$, então $o' \wedge o''$ é definido. Seja X uma parte de C. Diz-se que um elemento f de C *recola* X se para todo $x \in X$ tem-se $f + 0_x$ é definido e $x = f + 0_x$. Diz-se que X é *concordante* se para todo x, $y \in X$ tem-se $0_x + 0_y$ é definido e $x + 0_y = y + 0_x$. Diremos que $(C, +)$ é *completo* se tôda parte concordante X de C tal que $\{0_x \mid x \in X\}$ admita um único recolado 0_X admita também um único recolado r_X tal que $0_{r_X} = 0_X$. Seja $C[0] = \{f \in C$ e $0 = 0_f\}$. Se $(0', 0) \in C_+ \times C_+$, se $0' \leqq 0$ e se $f \in C[0]$, então $0' + f$ é definido, e $0' + f \in C[0']$. Seja $\mu_{0'0}$ a função de $C[0]$ para $C[0']$ definida por $f \to 0' + f$, então $g + f = \mu_{0' \wedge 0, 0'}(g) + \mu_{0' \wedge 0, 0}(f)$, onde $0' = 0_g$ e $0 = 0_f$.

TEOREMA. *O processo de dedução*

$$(C, +) \to ((C[0], \mu_{0'0}) \mid 0 \in C_+, (0', 0) \in C_+ \times C_+ \text{ e } 0' \leqq 0)$$

define uma equivalência entre a espècie de estrutura de progrupóide (completo) e a espécie de estrutura de sistemas projetivos soldados (completos) de grupos relativamente a sistemas ordenados subpreindutivos. Êste processo de dedução dá origem a uma equivalência entre a categoria dos morfismos de progrupóides e a categoria dos morfismos de sistemas projetivos soldados de grupos relativamente a sistemas ordenados sub-preindutivos.

Para que a lei de composição interna de um progrupóide $(C, +)$ seja totalmente definida é necessário e suficiente que $(C_+, \leqq)$ seja um inf-reticulado; nêste caso $(C, +)$ é dito progrupo.

5. A noção de sistema projetivo soldado e completo (de grupos) é uma adequada generalização da noção de "faisceaux" (de grupos), ela é uma formulação abstrata desta noção quando o sistema ordenado dos índices é um reticulado acabado inf-contínuo ou inf-complementado.

6. Aos sistemas projetivos soldados (completos) de anéis unitários e módulos unitários relativamente a inf-reticulados correspondem as noções de proanéis unitários e promódulos unitários respectivamente.