Ω – Explosões

J. Palis

Esta nota tem por finalidade a comunicação de resultados relativos à estabilidade de um sistema dinâmico, restrito a seu conjunto não-errante. As demonstrações serão publicadas nos Proceedings da American Mathematical Society.

Sejam M uma variedade diferenciável, compacta, sem bordo e χ (M) o conjunto dos campos de vetôres C^r ($r \geqq 1$) em M, munido com a topologia C^r. Para $X \in \chi$ (M) indicamos por Ω (X) o seu conjunto não-errante.

Definição 1: $X \in \chi$ (M) é dito Ω-estável se para qualquer $\varepsilon > 0$ existir uma vizinhança N (X) em χ (M) tal que para cada $Y \in N$ (X) existe um homeomorfismo $h : \Omega (X) \to \Omega (Y)$ que preserva trajetórias e é próximo da identidade de menos de ε.

Definição 2: $X \in \chi$ (M) satisfaz o AXIOMA A′ de Smale (veja [4]), se

(a) Ω (X) é hiperbólico

(b) As trajetórias periódicas são densas em Ω (X)

Se $X \in \chi$ (M) satisfaz o AXIOMA A′, então Ω (X) pode ser escrito como a união finita.

$$\Omega (X) = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$$

de conjuntos disjuntos, tais que $X \mid \Omega_i$ é topològicamente transitivo [1, 4]. Nêste caso, o conjunto estável de Ω_i, $W^s(\Omega_i)$, é a união das variedades estáveis dos pontos de Ω_i [2]. Isto é $W^s(\Omega_i) = \bigcup_{x \in \Omega_i} W^s(x)$

Definição 3. Suponhamos que $X \in \chi$ (M) satisfaça o AXIOMA A′. Dizemos que existe um k-ciclo ($k \geqq 2$) em $\Omega(X)$ se existir uma sequência $\Omega_1, \ldots, \Omega_k, \Omega_{k+1}$ (re-ordenando os índices se necessário) tal que

(a) $\Omega_{k+1} = \Omega_1$ e em qualquer outro caso $\Omega_i \neq \Omega_j$ para $i \neq j$

(b) $W^s(\Omega_i) \cap W^u(\Omega_{i+1}) \neq \phi$, $1 \leqq i \leqq k$.

Teorema 1: Se $X \in \chi(M)$ satisfaz o AXIOMA A′ e existe ciclo em $\Omega(X)$ então X não é Ω-estável.

Teorema 2: [Pugh-Palis] Se $X \in \chi(M)$ é Ω-estável e $\Omega(X)$ é uma união finita de pontos críticos e trajetórias periódicas então $\Omega(X)$ é hiperbólico.

Usando os Teoremas 1, 2 e [3] temos

Corolário: Se $X \in \chi(M)$ é tal que $\Omega(X)$ é a união finita de pontos críticos e trajetórias fechadas então X é Ω-estável se e sòmente se $\Omega(X)$ é hiperbólico e não admite ciclos.

Em [1] provou-se que se $X \in \chi(M)$ satisfaz o AXIOMA A′ e não existe ciclos em $\Omega(X)$ então X é Ω-estável. Êste resultado e o Teorema 1 acima levam à seguinte

Conjectura $X \in \chi(M)$ é Ω-estável se e sòmente se X satisfaz o AXIOMA A′ e não existem ciclos em $\Omega(X)$.

Referências

1) *Hirsch, Pugh, Shub* – Invariant Manifolds – a ser publicado
2) *Hirsch, Palis, Pugh, Shub* – Neighborhoods of Hyperbolic Sets – a ser publicado
3) *Palis* – On Morse-Smale Dynamical Systems – Topology, 1969, vol. 8
4) *Smale* – Differentiable Dynamical Systems – Bulletin of the Amer. Math. Soc., 1967, vol. 73