RESENHAS DE LIVROS

Elementary Differencial Geometry. **By Barret O'Neil. Academic Pren, 1966, 411 pags. US$ 10,75**

O presente livro cobre o material de Geometria Diferencial (curvas e superfícies no R^3) usualmente exigido de um candidato ao Mestrado. Em verdade, o livro é escrito tendo em vista um aluno nos últimos anos de um curso de graduação em Matemática. Concentrando-se nas idéias geométricas, e deixando de lado detalhes de mera formalização, o autor consegue transmitir os fatos fundamentais da Geometria Diferencial, com um mínimo de prerequisitos. Deve ser mencionado que, não obstante ser o estilo informal, os conceitos geométricos são apresentados de uma maneira clara e moderna. O autor obtém um meio têrmo extremamente delicado entre a apresentação descuidada e reconhecidamente obscura dos livros tradicionais e a apresentação implacàvelmente rigorosa de textos mais recentes.

Um fato que merece destaque é que o livro contém uma exposição elementar e clara do famoso método do triedro móvel de Elie Cartan. A elegância e importância dêste método é amplamente reconhecida e sua apresentação neste nível é uma tarefa relevante.

Dois reparos de caráter geral devem ser feitos.

O primeiro, é o excessivo cuidado do autor em evitar o uso, e mesmo a simples menção, do teorema de existência e unicidade das equações diferenciais ordinárias. Decorre daí que o teorema de existência de uma curva dada por sua curvatura e torção não é sequer mencionado, e a existência de sistemas de coordenadas ortogonais em superfícies é admitida sem comentários. Ainda pela mesma razão, o aparecimento das geodésicas é artificialmente deslocado para o último capítulo, onde as equações diferenciais são finalmente admitidas. É claro que isso representa um esfôrço consciente do autor em se manter dentro dos prerequisitos exigidos. A premissa, entretanto, não nos parece válida. As equações diferenciais são necessárias e êste fato deve ser reconhecido, e contornado de uma maneira pedagògicamente mais aceitável.

O segundo é uma (desta vez injustificável) timidez em dar ênfase ao uso do teorema da função inversa. Êste teorema é enunciado na pg. 39 e na primeira oportunidade de usá-lo (pg. 128), o autor usa o equivalente teorema das funções implícitas sem mencionar relação alguma com o teorema antes enunciado. Um outro exemplo é a omissão da prova de que a mudança de coordenadas em superfícies do R^3 é um difeomorfismo, sob o pretexto de que ela exige métodos de cálculo avançado (uma simples aplicação do teorema da função inversa). Se as equações diferenciais são necessárias, o teorema da função inversa é indispensável, e o não reconhecimento dêste fato é provàvelmente a deficiência mais séria do presente livro.

Entretanto, mesmo levando em conta os reparos apresentados, o livro se destaca nìtidamente como um dos melhores livros existente de Geometria Diferencial Clássica. As suas contribuições positivas superam de longe os seus aspectos negativos e êle pode ser recomendado, sem hesitações, como um excelente texto para um curso de Geometria Diferencial.

MANFREDO PERDIGÃO DO CARMO

Algebraic Topology: An Introduction. **By William S. Massey. Harcourt, Brace e World, 1967, US$ 9,25.**

Se compararmos as diversas áreas mais ativas da Matemática atualmente, talvez seja a Topologia Algébrica uma das menos favorecidas no que concerne aos problemas postos pelo ensino de seus métodos. Usualmente é necessária uma quantidade considerável de técnicas para se poder abordar resultados significativos. Representa assim um sério desafio como se manter a motivação, procurando-se conseguir um equilíbrio sensato entre a maquinaria técnica necessária e os resultados que esta permite abordar. Há mais de uma filosofia quanto ao modo de enfrentar êste desafio. A ensaiada no presente livro, com bastante êxito a meu ver, é de se concentrar numa teoria relativamente simples e explorar ao máximo as possibilidades desta. Embora seja uma técnica limitada, o estudante é amplamente motivado pela apresentação de substânciais e elegantes aplicações da álgebra à topologia. A experiência mostra que, de um modo geral, não faltará ao estudante devidamente motivado fôlego para então enfrentar o estudo mais demorado de técnicas mais complexas e poderosas.

A aplicação da álgebra a problemas topológicos é comumente feita pela construção de certos invariantes topológicos que a cada espaço topológico X associa um objeto algébrico G (X) pertencente a certo tipo de estrutura algébrica (grupos, grupos abelianos, anéis, A-módulos, etc.) e a cada aplicação contínua $f : X \to Y$ associa (no caso covariante) um homomorfismo $f_* : G(X) \to G(Y)$. Esta transição

da topologia para álgebra satisfaz a certas propriedades gerais que a caracterizam como um funtor definido na categoria dos espaços topológicos e aplicações contínuas com valores numa categoria algébrica especificada. Além das propriedades gerais, comuns a todos os funtores, cada funtor satisfaz propriedades mais específicas que são a razão de sua especial utilidade. Para que o conhecimento das estruturas algébricas possa refletir efetivamente na solução de problemas topológicos é desejável ainda que: 1) G (X) seja efetivamente computável para espaços X suficientemente simples; 2) haja suficiente informação (teoremas de estrutura) sôbre os objetos da categoria algébrica dos G (X). A transição da topologia para álgebra permite a tradução de um problema topológico num sôbre estruturas algébricas, o qual é frequentemente mais manejável. Dêste modo são obtidas condições necessárias e, às vêzes, mesmo condições suficientes para a resolução do problema.

O livro é dirigido a estudantes que tenham concluído um bom curso de Bacharelado, curso êste que inclua elementos de teoria dos grupos e um curso introdutório de topologia geral. Convém assinalar que as exigências para a leitura proveitosa do livro são relativamente modestas. Em nosso meio, parece-me que o livro pode muito bem servir de base para um curso ao nível do Mestrado.

A opção de W. S. Massey é a de abandonar a trilha usual que consiste em iniciar a topologia algébrica pela construção de teorias de homologia e cohomologia, tôdas as quais são de elaboração demorada e nem sempre de interpretação muito intuitiva. No que concerne à técnica, o livro se concentra em tôrno do funtor *grupo fundamental* e suas aplicações. Êste associa a cada espaço conexo por caminhos X e ponto base $a \in X$ um grupo π (X, a), em geral não abeliano. A construção dêste grupo, introduzida por Henri Poincaré na fase inicial da Topologia Algébrica, é feita do modo habitual em têrmos de classes de homotopia de caminhos de X que partem do ponto *a* e voltam a êle. Trata-se de uma construção bastante simples e intuitiva; exemplos acessíveis permitem logo visualizar a interpretação geométrica para os elementos de π (X, a). Uma desvantagem em relação ao desenvolvimento da homologia, onde os grupos são abelianos, é que da estrutura dos grupos não abelianos tem-se um conhecimento menos completo, mesmo quando se trata de grupos finitos. Vejamos brevemente a organização do livro nos seus diversos capítulos.

O capítulo I, de caráter mais geométrico e semi-intuitivo, estuda as variedades bi-dimensionais (superfícies), classificando completamente as compactas. Iniciar por êste capítulo contribui para o sabor geométrico do livro e fornece um bom estoque de exemplos importantes para utilização posterior.

O capítulo II é dedicado à construção do funtor grupo fundamental e a estabelecer suas principais propriedades. Um dos primeiros resultados não triviais é o cálculo do grupo fundamental do círculo S^1. Como aplicação dêste resultado segue-se o teorema do ponto fixo de Brouwer para o disco D^2.

O capítulo seguinte trata de álgebra, expondo os preliminares algébricos necessários para a formulação, demonstração e aplicação do teorema de Van Kampen no capítulo IV. Trata de grupos (não abelianos) livres, produtos livres e produtos reduzidos de grupos. As diversas noções mencionadas são introduzidas através de propriedades universais que as caracterizam. O teorema de Van Kampen permite exprimir o grupo fundamental de um espaço em têrmos dos grupos fundamentais dos subespaços de uma decomposição satisfazendo certas propriedades. De posse dêsse resultado, o funtor grupo fundamental torna-se efetivamente computável para uma larga classe de espaços, o que permite novas aplicações. Em particular, são calculados os grupos fundamentais das superfícies compactas, expressos em têrmos de geradores e relações.

Enquanto as aplicações feitas até aqui já dão um "sabor" das aplicações relevantes da álgebra na topologia, é no capítulo V, dedicado à teoria dos revestimentos, que o esquema motivacional do livro fica amplamente justificado. Além de ser uma teoria matemàticamente importante dentro e fora da própria topologia (por exemplo, em geometria diferencial, grupos de Lie, etc.), é um quadro de aplicações onde o grupo fundamental tem um papel central, refletindo fielmente situações topológicas em têrmos algébricos. Êste excelente capítulo culmina nos clássicos teoremas de existência e classificação dos revestimentos sôbre um espaço dado. Tanto o teorema de classificação como o teorema exibindo a estrutura do grupo de automorfismos de um revestimento são excelentes exemplos do que métodos algébricos podem fazer na topologia de modo eficaz e elegante.

Se as aplicações da álgebra na topologia têm crescido em importância com o passar do tempo, não se deve supor que o tráfego é apenas num sentido. Assim, por exemplo, os métodos homológicos, originalmente concebidos para aplicação na topologia, já há tempos vêm encontrando aplicações importantes na própria álgebra, tais como a teoria da dimensão homológica e cohomologia de grupos, métodos que hoje fazem parte da chamada Álgebra Homológica.

Os capítulos VI e VII do livro tratam de um gênero semelhante e mais direto de aplicação de métodos topológicos na álgebra. Teoremas puramente algébricos na teoria dos grupos, tais como os teoremas de Nielsen-Schreirer e o de Kurosch, são demonstrados por via topológica como aplicação da teoria dos revestimentos e do grupo fundamental. Tanto as aplicações da álgebra na topologia como as que prosseguem no sentido inverso contribuem de modo enfático para impressionar o estudante com a idéia importante que nem sempre recebe o realce que merece: a unidade fundamental da Matemática.

Em resumo, o livro expõe de modo claro e atraente uma parte inicial importante da Topologia Algébrica. Grande número de exemplos, boas coleções de exercícios ao fim de cada capítulo, muitos dos quais contribuindo para aumentar a informação do leitor, e ainda notas explicativas sôbre extensões da teoria tornam o livro bastante útil para o estudante como para o matemático que deseja se informar.

C. B. DE LYRA