Generalisation de la Formule de Riemann-Hurwitz

Par

NGO VAN QUE

Introduction: – Nombre de Chern.

Etant un polynôme $\Phi \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ à n indeterminées, Φ est dit de poids homogène m si

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \qquad \text{avec}$$

$$m = \sum_{1 \leqq p \leqq n} 2p\,\alpha_p$$

Si E est un fibré vectoriel complexe de rang n (i.e. n est la dimension sur $\mathbb{C}$ de la fibre E_x) sur une variété différentiable orientée compacte M de dimension m, à tout polynôme Φ à n indéterminées de poids homogène m, on associe un nombre de Chern:

$$\begin{aligned} \Phi(E, M) &= \langle \Phi(E), [M] \rangle \\ &= \langle \Phi(c_1(E), \ldots, c_n(E)), [M] \rangle \end{aligned}$$

où $[M]$ est le cycle fondamental défini par l'orientation de M et $c_i(E)$, la i-ème classe de Chern de E. Dans le cas où le poids homogène de Φ est différent de la dimension de M, on pose: $\Phi(E, M) = 0$.

Il est utile de rappeler ([1], [2]) que si ∇ est une connexion hermitienne sur E. i.e. ∇ est un opérateur différentiel linéaire

$\nabla: \Lambda^p T_{\mathbb{C}}^* \otimes E \to \Lambda^{p+1} T_{\mathbb{C}}^* \otimes E$, $T_{\mathbb{C}}^*$ étant le fibré des l-formes complexes sur M, tel que

$$\nabla(\omega \otimes s) = d\omega \otimes s + (-1)^p\, \omega \wedge \nabla(s),$$

pour toute p-forme complexe ω et section s de E sur M, on définit l'opérateur de courbure

$$\nabla^2 = \nabla \circ \nabla : E \to \Lambda^2 T^*_{\mathbb{C}} \otimes E$$

qui est un morphisme de fibré vectoriel. On peut considérer ∇^2 comme une section sur M de $\Lambda^2 T^*_{\mathbb{C}} \otimes End(E)$, et définir

$$det\left(Id + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\nabla^2\right) = 1 + c_1(\nabla) + \cdots + c_n(\nabla)$$

Alors pour tout i. $c_i(\nabla)$ est une $2i$-forme réelle fermée dont la classe de cohomologie est par définition $c_i(E)$, la i-ème classe de Chern de E. Ainsi donc on a

$$\Phi(E, M) = \int_M \Phi(c_1(\nabla), \ldots, c_n(\nabla))$$

Formule de Riemann-Hurwitz généralisée:

(a) Soient donnés deux fibrés vectoriels complexes E et F de rang n sur M. Soit φ un morphisme de fibrés vectoriels complexes sur $M : \varphi : E \to F$. Supposons qu'il existe une sous variété différentiable fermée N de M telle que restreinte sur $M - N$, $\varphi : E|_{M-N} \to \to F|_{M-N}$ soit un isomorphisme de fibrés vectoriels.

Considérons alors un voisinage tubulaire fermé $B(N)$ de N et son double différentiable

$$S(N) = B_1(N) \bigcup_{\partial B(N)} B_2(N)$$

obtenu de deux exemplaires distincts de $B(N)$ et identifiant leur bord. $S(N)$ est un fibré sur N em sphères S^r, r étant la codimension de N dans M. Il est immédiat de montrer que M étant compacte orientée, $S(N)$ est aussi une variété compacte orientable de même dimension m.

Sur $S(N)$, il existe alors un fibré vectoriel complexe canonique (E, φ, F), construit en prenant respectivement sur $B_1(N)$ et sur $B_2(N)$ la restriction de E et de F à $B(N)$ et en identifiant sur $B_1(N) \cap B_2(N) = \partial B(N)$ par l'isomorphisme de transition φ (dans la terminologie de [3], φ est ce qu'on appelle "clutching function").

Ceci étant, pour tout polynôme Φ de poids homogène m on a

Théorème I (Formule de Riemann-Hurwitz généralisée)

$$\Phi(E, M) - \Phi(F, M) = \Phi((E, \varphi, F), S(N))$$

le second membre étant défini par une orientation convenable de $S(N)$.

Preuve:

En effet, soit donnée une connexion hermitienne ∇_1 sur E. Soit $B'(N)$ un voisinage tubulaire de N, contenu dans l'intérieur de $B(N)$. A l'aide d'une partition de l'unité on exhibe sur F une connexion hermitienne ∇_2 telle que sur $M - B'(N)$ on ait ce diagramme commutatif de faisceaux de sections

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\nabla_1} & T^*_{\mathbb{C}} \otimes E \\ \varphi \downarrow & & \downarrow Id \otimes \varphi \\ F & \xrightarrow{\nabla_2} & T^*_{\mathbb{C}} \otimes F \end{array}$$

D'où:

$$c_i(\nabla_1)|_{M-B(N)} = c_i(\nabla_2)|_{M-B(N)}$$

Ainsi donc on a

(1) $\quad \Phi(E, M) - \Phi(F, M) =$

$$= \int_M \Phi(c_1(\nabla_1), \ldots, c_n(\nabla_1)) - \Phi(c_1(\nabla_2), \ldots, c_n(\nabla_2))$$

$$= \int_{B(N)} \Phi(c_1(\nabla_1), \ldots, c_n(\nabla_1)) - \Phi(c_1(\nabla_2), \ldots, c_n(\nabla_2))$$

Or par la méthode standard de raccordement, on montre facilement qu'il existe une connexion hermitienne ∇ sur (E, φ, F) telle que sur

$$(E, \varphi, F)|_{B_1(N)} \simeq E|_{B(N)}, \quad \nabla \text{ soit égale à } \nabla_1$$

et sur

$$(E, \varphi, F)|_{B_2(N)} \simeq F|_{B(N)}, \quad \nabla \text{ soit égale à } \nabla_2 .$$

D'où le second membre de (1) n'est autre que

$$\int_{S(N)} \Phi(c_1(\nabla), \ldots, c_n(\nabla)) = \Phi((E, \varphi, F), S(N))$$

pour une orientation convenable de $S(N)$. C.Q.F.D.

(b) Supposons que sur N, φ est de rang constant, ce qui entraine que sur N, nous avons une suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \to K_1 \to E|_N \to F|_N \to K_2 \to 0.$$

Nous désignerons par L le sous-fibré de $F|_N$, qui est l'image $\varphi(E|_N)$. Ainsi donc, on a ces isomorphismes

$$E|_N \simeq K_1 \oplus L$$
$$F|_N \simeq L \oplus K_2$$

Désignons par $\pi : B(N) \to N$, la fibration de $B(N)$ sur N. Comme N est un rétract par déformation de $B(N)$, on a

$$\begin{aligned} E|_{B(N)} &\simeq \pi^* K_1 \oplus \pi^* L \\ F|_{\overline{B(N)}} &\simeq \pi^* K_2 \oplus \pi^* L \end{aligned} \tag{2}$$

où $\pi^* L$, $\pi^* K_1$, $\pi^* K_2$ sont respectivement des fibrés induits par π sur $B(N)$. L'image par $\varphi : E|_{B(N)} \to F|_{B(N)}$ du sous-fibré $\pi^* L$ de $E|_{/(N)}$ est un sous-fibré isomorphe à $\pi^* L$ de $F|_{B(N)}$ et dont le fibré quotient est isomorphe à $\pi^* K_2$. Donc on peut supposer que modulo des isomorphismes de (2), l'isomorphisme φ soit de la forme

$$\begin{array}{ccc} \varphi : E|_{\partial B(N)} & \longrightarrow & F|_{\partial B(N)} \\ \wr & & \wr \\ \pi^* K_1 \oplus \pi^* L & \longrightarrow & \pi^* K_2 \oplus \pi^* L \\ (x, y) & \longrightarrow & (\psi(x), y) \end{array}$$

où ψ est un isomorphisme de fibrés vectoriels:

$$\pi^* K_1|_{\partial B(N)} \to \pi^* K_2|_{\partial B(N)}$$

Autrement dit dans le cas considéré, on a le lemme suivant:

Lemme: – Sur $S(N)$, on a l'isomorphisme de fibrés vectoriels $(E, \varphi, F) \simeq \pi^* L \oplus (\pi^* K_1, \psi, \pi^* K_2)$ où le second membre est la somme directe de $\pi^* L$, le fibré induit de L sur $S(N)$ par la fibration $\pi : S(N) \to N$ et de $(\pi^* K_1, \psi, \pi^* K_2)$, qui est le fibré construit sur $S(N) = B_1(N) \bigcup\limits_{\partial B(N)} B_2(N)$ par une certaine fonction de transition ψ.

Nous désignerons, pour simplifier, par $1 + c_1(K) + \cdots + c_p(K)$ la classe totale de Chern sur $S(N)$ de $(\pi^* K_1, \psi, \pi^* K_2)$. Et si $1 + c_1(L) + \cdots + c_{n-p}(L)$ est la classe totale de Chern de L sur N, $\pi^*(1 + c_1(L) + \cdots + c_{n-p}(L))$, la classe induite par $\pi : S(N) \to N$, sera celle de $\pi^* L$ sur $S(N)$.

Supposons dans la suite que N est une sous-variété orientable connexe de M.

On a la proposition suivante:

Proposition: – Soient Φ_1 et Φ_2 des polynômes respectivement de p et de $n-p$ indéterminées et de poids homogènes r et $n-r$ ($r = \operatorname{codim} N$). On a

$$\langle \Phi_1(c_1(K), \ldots, c_p(K)) \wedge \pi^* \Phi_2(c_1(L), \ldots, c_{n-p}(L)); [S(N)] \rangle = k\Phi_2(L, N)$$

où k est une constante et $\Phi_2(L, N)$ est le nombre de Chern défini par Φ_2 relativement à une certaine orientation de N.

Preuve:

Il suffit de se donner des connexions hermitiennes ∇ sur $(\pi^* K_1, \psi, \pi^* K_2)$ et ∇_1 sur L. On a

$$\langle \Phi_1(c_1(K), \ldots, c_p(K)) \wedge \pi^* \Phi_2(c_1(L), \ldots, c_{n-p}(L)), [S(N)] \rangle$$
$$= \int_{S(N)} \Phi_1(c_1(\nabla), \ldots, c_p(\nabla)) \wedge \pi^* \Phi_2(c_1(\nabla_1), \ldots, c_{n-p}(\nabla_1))$$

Par intégration par partie le long des fibres $S(N)|_{x \in N}$ de $S(N)$ sur N, le second membre est aussi

$$\int_N \left(\int_{S(N)|_{x \in N}} \Phi_1(c_1(\nabla), \ldots, c_p(\nabla)) \right) \Phi_2(c_1(\nabla_1), \ldots, c_{n-p}(\nabla_1))$$

Or

$$\int_{S(N)|_{x \in N}} \Phi_1(c_1(\nabla), \ldots, c_p(\nabla)) = \Phi_1(K_x, S(N)|_x)$$

où $K_x = (\pi^* K_1|_{B(N)_x}, \psi_x, \pi^* K_2|_{B(N)_x})$ est le fibré construit sur $S(N)|_x$ à l'aide de la fonction de transition ψ_x,

$$\psi_x : \pi^* K_1|_{\partial B(N)_x} \xrightarrow{\sim} \pi^* K_2|_{\partial B(N)_x}$$

la restriction de ψ à $\partial B(N)_x$.

Or si $c(x, y)$ est une courbe dans N, joignant deux points x et y, $K_1|_{c(x,y)}$ et $K_2|_{c(x,y)}$ sont triviaux. Donc on a des isomorphismes verticaux dans le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} \pi^* K_1|_{\partial B(N)_x} & \xrightarrow{\psi_x} & \pi^* K_2|_{B(N)_x} \\ \wr & & \wr \\ \pi^* K_1|_{\partial B(N)_y} & \xrightarrow{\psi_y} & \pi^* K_2|_{B(N)_y} \end{array}$$

et modulo ces isomorphismes, ψ_x et ψ_y sont homotopes. Ainsi K_x et K_y, considérés comme fibrés sur la sphère $S^r \simeq S(N)|_x \simeq S(N)|_y$, sont isomorphes; ce qui implique $\Phi_1(K_x, S(N)|_x) = k$, constante indépendante de x, la variété N étant connexe par *arc*. D'où

$$\int_N \left(\int_{S(N)|_x} \Phi_1(c_1(\nabla), \ldots, c_p(\nabla)) \right) \Phi_2(c_1(\nabla_1), \ldots, c_{n-p}(\nabla_1))$$

$$= k \int_N \Phi_2(c_1(\nabla_1), \ldots, c_{n-p}(\nabla_1)) = k\,\Phi_2(L, N).$$

C.Q.F.D.

(c) Un cas important des considérations précédentes est lorsque $\Phi \equiv x_n \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Alors pour tout fibré complexe E de rang n sur M, on a

$\Phi(E) = c_n(E)$, la classe de Chern de plus grand degré de E. D'après le théorème de Gauss-Bonnet [2], $c_n(E)$ n'est autre que la classe d'Euler-Poincaré de E.

Si la dimension de M est deux fois le rang du fibré complexe E, nous noterons

$$\langle c_n(E), [M] \rangle = \chi(E, M)$$

Ceci dit, d'après la formule de Whitney, on a, pour

$$(E, \varphi, F) = \pi^* L \otimes (\pi^* K_1, \psi, \pi^* K_2)$$

dans les hypothèses du lemme de la section (b),

$$c_n(E, \varphi, F) = \pi^* c_{n-p}(L) \wedge c_p(K).$$

Immédiatement, par application de la proposition de la section (b), on a

Théorème II (Formule de Riemann-Hurwitz)

Sous les hypothèses de la section (b) précédente, on a

$$\chi(E, M) - \chi(F, M) = k\chi(L, N)$$

le rang $(n-p)$ du fibré complexe L étant égal à la moitié de la dimension de N.

La formule est encore évidemment valable avec le second membre nul lorsque

$$2(n-p) > m-r, \quad \text{dimension de } N.$$

(d) *Cas de fibrés réels*: — Nous nous sommes restreints dans tout ce qui précède à la catégorie des fibrés vectoriels complexes. Mais si E et F sont des fibrés réels sur M, le morphisme φ étant alors un morphisme de fibrés réels, avec des hypothèses identiques, on a de même la formule de Riemann-Hurwitz généralisée en considérant non plus des nombres de Chern mais des nombres de Pontrjagin respectivement de E et F sur M et de (E, φ, F) sur $S(N)$.

En particulier, soient E et F des fibrés vectoriels réels orientés sur M. Dans les hypothèses de la section (b), supposons en plus que L, étant l'image de

$$\varphi : E|_N \to F|_N$$

soit un fibré vectoriel sur M orientable.

Alors on a de même la formule de Riemann-Hurwitz avec les nombres d'Euler:

$$\chi(E, M) - \chi(F, M) = k\chi(L, N)$$

le rang de L étant égal à la dimension de N.

La formule reste encore valable avec second membre nul si le rang de L est plus grand que la dimension de N.

Application:

Rappelons l'application bien connue de la formule de Riemann-Hurwitz aux revêtements ramifiés.

Soit $\pi : M \to S$, une application différentiable surjective d'une variété compacte orientée M sur une variété différentiable orientée de même dimension m. L'application π est un revêtement ramifié, s'il existe une sous-variété orientable N fermée de S, de codimension plus grande ou égale à 2, telle que

1) $\pi : M - \pi^{-1}(N) \to S - N$ soit une submersion conservant l'orientation et $M - \pi^{-1}(N)$ soit aussi un revêtement connexe à q feuillets de $S - N$.

2) $\pi^{-1}(N)$ soit une sous-variété fermée de M et $\pi : \pi^{-1}(N) \to N$ soit un difféomorphisme.

Remarquons alors que si N_0 est une composante connexe de N, il existe un voisinage tubulaire $B(N_0)$ tel que $\pi^{-1}(B(N_0))$ soit un voisinage tubulaire de $\pi^{-1}(N_0)$. Ainsi $\pi : \pi^{-1}(B(N_0)) - \pi^{-1}(N_0) \to B(N_0) - N_0$ est
tubulaire de $\pi^{-1}(N_0)$. Ainsi $\pi : \pi^{-1}(B(N_0)) - \pi^{-1}(N_0) \to B(N_0) - N_0$ est
un revêtement connexe à q feuillets de $B(N_0) - N_0$. Or si N_0 est de codimension plus grande que 2, $B(N_0) - N_0$ est simplement connexe. Ce qui est impossible si $q > 1$. Nous pouvons donc supposer que N soit de codimension 2.

Ceci dit, considérons le morphisme tangent $d\pi$ du fibré vectoriel sur M.

$$\begin{tikzcd} T(M) \arrow[rr, "d\pi"] \arrow[dr] & & \pi^*(T(S)) \arrow[dl] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Nous sommes dans les hypothèses de la formule de Riemann-Hurwitz: D'où

$$\chi(T(M),\ M) - \chi(\pi^*(T(S)),\ M) = k\chi(T(\pi^{-1}(N)),\ \pi^{-1}(N))$$

ou encore

$$\chi(M) - q\chi(S) = k\chi(N).$$

On démontre facilement que k est égal au signe près à $q-1$. De fait on a

$$\boxed{\chi(M) - q\chi(S) = -(q-1)\chi(N)}$$

En effet k étant égal au signe près à $(q-1)$, pour déterminer le signe, comme la formule est évidemment universelle, il suffit de regarder sur un exemple précis. Or on peut voir facilement qu'il existe un revêtement ramifié à deux feuillets de la sphère S^2 par un tore $S^1 \times S^1$ avec quatre points de ramification. D'où:

$$\chi(S^1 \times S^1) - 2\chi(S^2) = 4k$$
$$0 \quad -4 \quad = 4k$$
$$k = -2 = -(q-1).$$

Exemple:

Soit D une courbe algébrique non singulière de degré q de l'espace projectif $P^2(\mathbb{C})$. Rappelons que d'après Kodaira ([4], page 119)

$$\chi(D) = +(-q^2 + 3q)$$

D'autre part le diviseur $[D]$ définit évidemment un fibré vectoriel complexe sur $P^2(C)$ isomorphe a $H \otimes \cdots \otimes H = H^q$, H étant le fibré universel de Hopf.

Soit un recouvrement de $P^2(\mathbb{C})$ par des ouverts U_i de coordonnées. Désignons par $\varphi_i = 0$, l'équation de définition de $D \cap U_i$ dans U_i.

Si ξ_i est la coordonnée vectorielle de $H|_{Ui}$

$$H|_{Ui} \simeq U_i \times \mathbb{C}$$
$$x \longrightarrow (\pi(x),\ \xi_i(x))$$

où $\pi : H \to P^2(\mathbb{C})$ est l'application de fibration, alors dans $H|_{Ui}$, l'equation $\varphi_i \circ \pi = \xi_i^q$ définit une sous-variété $V_i \subseteq H|_{Ui}$. Il n'est pas difficile de montrer que V_i se raccordent pour définir une sous-variété non singulière V de H et que V est revêtement ramifié à q feuillets de $P^2(\mathbb{C})$, ramifié le long de la sous-variété D de $P^2(C)$. Ainsi on a

$$\chi(V) - q\chi(P^2(C)) = -(q-1)\chi(D)$$
$$\chi(V) - 3q \qquad = -(q-1)(3q - q^2)$$
$$\chi(V) = q(6 - 4q + q^2).$$

Université de Montréal
et Université de São Paulo