Un Exposé de la Formule de Leray-Norguet.

Par
MARCOS SEBASTIANI

Introduction.

Dans ce travail on donnera une démonstration complète de la formule des résidus de Leray-Norguet; voir [1] et [2]. Les idées essentielles sont les mêmes de la démonstration originale mais ici on va utiliser un résultat de la thèse de Thom [4] qui permet de faire une démonstration plus courte. L'idée est la suivante:

La formule de Leray-Norguet établit l'identité de deux homomorphismes. On va prouver que l'un de ces homomorphismes est donné essentiellement par l'isomorphisme de Gysin d'un certain fibré en sphères et l'autre, par l'isomorphisme de Thom du même fibré. Alors l'égalité bien connue entre les isomorphismes de Gysin et de Thom prouvera la formule de Leray-Norguet.

Pendant la réalisation de ce travail l'auteur a bénéficié de l'ambiance favorable de l'IHES de Bures-sur-Yvette (France) et du département de Mathématiques de l'Université Centrale du Vénézuéla.

A - *Énoncé du Théorème*

Soit V une variété analytique complexe de dimension $n+1$. Soit W une sous-variété complexe de codimension 1 de V. On a la suite exacte de cohomologie à supports compacts (coefficientes dans le corps complexe $\mathbb{C}$):

$$\cdots \to H^p_c(V-W) \to H^p_c(V) \to H^p_c(W) \xrightarrow{\partial} H^{p+1}_c(V-W) \to \cdots$$

En appliquant la dualité de Poincaré de $V-W$, V et W à chaque terme on obtient la suite exacte:

$$\cdots \to H_{q+1}(V-W) \to H_{q+1}(V) \to H_{q-1}(W) \xrightarrow{\delta} H_q(V-W) \to \cdots$$

Si on applique à cette suite exacte le foncteur Hom (,$\mathbb{C}$) on obtient la suite exacte:

$$\cdots \rightarrow H^q(V) \rightarrow H^q(V-W) \rightarrow H^{q-1}(W) \rightarrow H^{q+1}(V) \rightarrow \cdots$$

où r est le dual de δ et $H^q(V) \rightarrow H^q(V-W)$ est induit par l'inclusion $V-W \rightarrow V$.

La formule de Leray-Norguet permet de donner une interprétation de r au moyen des formes holomorphes sur $V-W$ et V et au moyen du théorème de de Rham. Soit ω une forme holomorphe sur $V-W$ de degré q. On dira que ω est méromorphe avec un pôle d'ordre ≤ 1 sur W si pour tout $x \in W$ et toute fonction holomorphe f définie dans un voisinage U de x et nulle sur $W \cap U$, $f\omega$ admet une extension holomorphe à U. Si U est le domaine d'un système de coordonnées locales $z_0 . z_1 \ldots\ldots z_n$ pour lequel $W \cap U$ est donné par l'équation $z_0 = 0$. alors les coefficients de ω dans ce système de coordonnées sont des fonctions holomorphes en $z_1, \ldots, z_n$ et méromorphes avec un pole d'ordre ≤ 1 en z_0.

Supposons ω fermée. Alors

$$d(z_0\,\omega) = dz_0 \wedge \omega$$

sur $U-W$. Comme $z_0\,\omega$ est holomorphe sur U, $dz_0 \wedge \omega$ l'est aussi. Ceci implique que ω est de la forme

(1) $$\omega = (dz_0/z_0) \wedge \varphi + \eta$$

où φ, η sont holomorphes sur U. Soit $z'_0, \ldots, z'_n$ un autre système de coordonnées sur U pour lequel $W \cap U$ ait pour équation $z'_0 = 0$ et supposons une expression analogue pour ω:

$$\omega = (dz'_0/z'_0) \wedge \varphi' + \eta'.$$

Comme $z'_0 = h\,z_0$ où h est holomorphe et non-nulle sur U, on a

$$h\,dz_0 \wedge \varphi + z'_0\,\eta = dz'_0 \wedge \varphi' + z'_0\,\eta'$$

et alors

$$h\,dz_0 \wedge \varphi + z'_0\eta = h\,dz_0 \wedge \varphi' + z_0\,dh \wedge \varphi + z'_0\eta' ;$$

ce qui dit que sur W on a:

$$h\,dz_0 \wedge \varphi = h\,dz_0 \wedge \varphi'$$

et alors $dz_0 \wedge \varphi = dz_0 \wedge \varphi'$ sur W, ce qui implique que $\varphi \mid W = \varphi' \mid W$. (La restriction d'une forme à une sous-variété est, par définition, la forme induite sur la sous-variété). De là on déduit l'existence d'une forme holomorphe bien déterminée sur W, appelée res (ω), caractérisée par le fait d'être localement la restriction d'une forme holomorphe φ qui vérifie l'équation (1). La forme res (ω) est fermée. En effect, sur $V-W$ on a:

$$0 = -(dz_0/z_0) \wedge d\varphi + d\eta$$

par différentiation de (1). Alors $dz_0 \wedge d\varphi = z_0\,d\eta$ et donc $dz_0 \wedge d\varphi = 0$ sur W. Alors

$$d(\varphi | W) = (d\varphi | W) = 0.$$

On peut maintetenat énoncer le théorème de Leray-Norguet comme suit:

Théorème: Soit ω une q-forme holomorphe fermée sur $V-W$ qui a un pôle d'ordre ≤ 1 sur W. Alors

$$r[\omega] = 2\pi i[res(\omega)]$$

où le crochet dénote la classe de cohomologie à coefficients complexes définie par une forme fermée au moyen de l'isomorphisme de de Rham.

Corollaire: Dans les mêmes hypothèses du théorème on a

$$\int_{\delta z} \omega = 2\pi i \int_{z} res(\omega)$$

pour tout cycle z de dimension $q-1$ de W, où $\delta : H_{q-1}(W) \rightarrow H_q(W)$ est l'homomorphisme défini plus haut.

B. *Démonstration du Théorème*

Soit T un voisinage tubulaire de W dans V. Soit

$$\phi : H^j(W) \rightarrow H^{j+2}(T, \partial T)$$

l'isomorphisme de Thom [4]. Soit $k : \partial T \rightarrow V-W$ l'inclusion et soit $b : H^j(\partial T) \rightarrow H^{j+1}(T, \partial T)$ l'homomorphisme de connexion dans la suite exacte de cohomologie de $(T, \partial T)$.

Lemme 1: Soit ω une q-forme holomorphe fermée sur $V - W$ qui a un pôle d'ordre ≤ 1 sur W. Alors

$$2\pi i[res(\omega)] = \phi^{-1} \circ b \circ k^*([\omega]).$$

Démonstration plus bas.

Soit

$$\phi' : H^j(W) \to H^{j+2}(T, \partial T)$$

l'isomorphisme de Gysin, définie par la composition

$$H^j(W) \leftrightarrow H^f_{2n-j}(W) \to H^f_{2n-j}(T) \leftrightarrow H^{j+2}(T, \partial T)$$

où H^f_* est l'homologie à supports fermés, la flèche du milieu est induite par l'inclusion $W \subset T$, et les deux autres flèches sont les dualités de Poincaré.

Lemme 2: $r = \phi'^{-1} \circ b \circ k^*$

Démonstration: Il suffit d'appliquer le foncteur Hom (, $\mathbb{C}$) au diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
 & H_q(V-W) & & H_q(\partial T) \arrow[ll] \\
 & H_c^{2n-q+2}(V-W) \arrow[u, leftrightarrow] & H_{q+1}(V,V-W) \arrow[ul] \arrow[dl] & \\
H_{q-1}(W) \arrow[uur, "\delta"] \arrow[r, leftrightarrow] & H_c^{2n-q+1}(W) \arrow[u, "\partial"] & H_c^{2n-q+1}(T) \arrow[l] \arrow[r, leftrightarrow] & H_{q+1}(T,\partial T) \arrow[ul] \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

et utiliser le fait que l'homomorphisme de Gysin en cohomologie est le dual de celui en homologie.

Le Théorème résulte immédiatement des lemmes 1 et 2 et du fait bien connu que $\phi = \phi'$ [4], théorème I.8.

C. *Intégration le long des fibres d'un fibré*

Soit $E \xrightarrow{\pi} B$ un fibré différentiable orienté localement trivial dont la fibre type F est une variété compacte éventuellement avec bord. Soit $n = \dim B$, $k = \dim F$, $m = n + k = \dim E$. Pour toute variété X on notera $\Omega^p(X)$ l'espace des p-formes différentiables sur X à coefficients complexes et $T_x(X)$ l'espace tangent à X dans $x \in X$.

Soit $p \geq k$ et soient

$$v_1, \ldots, v_{p-k} \in T_x(B)$$

pour un $x \in B$. Alors à toute forme $\omega \in \Omega^p(E)$ on peut associer une forme

$$\omega_{v_1,\cdots,v_{p-k}} \in \Omega^k(F_x) \qquad (F_x = \pi^{-1}(x))$$

définie par:

$$\omega_{v_1,\ldots,v_{p-k}}(u_1, \ldots, u_k) = \omega(v'_1, \ldots, v'_{p-k}, u_1, \ldots, u_k)$$

pour tout système de champs $u_1, \ldots, u_k$ sur F_x, où les $v'_1, \ldots, v'_{p-k}$ sont des champs tangents à E, définis le long de F et qui se projettent sur $v_1, \ldots, v_{p-k}$ en chaque point. On voit immédiatement que $\omega_{v_1,\cdots,v_{p-k}}$ est bien définie et différentiable.

Définition: Si $\omega \in \Omega^p(E)$ on appelle *l'intégrale le long des fibres* de ω la forme $\omega^\# \in \Omega^{p-k}(B)$ définie par:

$$\omega^\#(v_1, \ldots, v_{p-k}) = \int_{F_x} \omega_{v_1,\ldots,v_{p-k}} \qquad (v_j \in T_x(B))$$

dans chaque $x \in B$, si $p \geq k$ et par $\omega^\# = 0$ si $p < k$.

On verifie facilement que $\omega^\#$ est bien une forme différentiable et que l'application

$$^\# : \Omega^p(E) \to \Omega^{p-k}(B) \qquad (\omega \to \omega^\#)$$

est $\mathbb{C}$ – linéaire.

Lemme 3 (Stokes fibré): Soit ∂E le bord de E (fibré à fibre ∂F sur B). Alors

$$(d\omega)^\# = (-1)^{p-k+1}(\omega|\partial E)^\# + d\omega^\#$$

pour toute $\omega \in \Omega^p(E)$.

Démonstration: Si $p < k - 1$ tous les termes sont nuls. Si $p = k - 1$ la formule résulte immédiatement du théorème de Stokes. Supposons $p \geq k$. Comme le fibré est localement trivial on peut supposer $B = \mathbb{R}^n$, $E = B \times F$. Comme la formule est additive on peut supposer que ω a un support compact contenu dans $U = B \times V$ où V est un voisinage coordonné de F, puisque toute forme est somme localement finie de formes avec cette proprieté. Si $x^1, \ldots, x^n$ sont les coordonnées dans B et $y^1, \ldots, y^k$ sont les coordonnées dans V on a:

$$\omega = \sum a_{i_1,\ldots,i_q} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q} \wedge dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^k +$$
$$+ \sum b_{i,j,j_1,\cdots j_q} dx^i \wedge dx^{j1} \wedge \ldots \wedge dx^{jq} \wedge dy^1 \wedge \overset{j}{\ldots} \wedge dy^k + \ldots$$

(où $q = p-k$) sur U, $\omega = 0$ sur $E - U$, et les coefficients sont des fonctions différentiables sur E à support contenu dans U. Alors

$$\omega^{\#} = \sum dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q} \int_F a_{i_1, \dots, i_q} dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^k .$$

Par unc calcul analogue,

$$(d\omega)^{\#} = \sum dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q} \int_F \frac{\partial a_{i_1, \dots i_q}}{\partial x_k} dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^k +$$

$$+ \sum (-1)^{q+j} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q} \int_F \frac{\partial b_{i, j, j_1, \dots, j_q}}{\partial y_j} dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^k .$$

Alors,

$$(d\omega)^{\#} - d\omega^{\#} = \sum (-1)^{q+j} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q} \int_F \frac{\partial b_{i, j, j_1, \dots j_q}}{\partial y_j} \cdot dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^k =$$

$$\sum (-1)^{q+1} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q} \int_{\partial F} b_{i, j, j_1, \dots, j_q} dy^1 \wedge \overset{j}{\cdots} \wedge dy^k ,$$

par le théorème de Stokes, puisque pour $i, j_1, \dots, j_q$ fixes et le point sur B étant fixé, on a:

$$d \sum_j b_{i, j, j_1, \dots, j_q} dy^1 \wedge \overset{j}{\cdots} \wedge dy^k = \sum_j (-1)^{j-1} \frac{\partial b_{i, j, j_1, \dots, j_q}}{\partial y^j} dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^k .$$

On en déduit immédiatement:

$$(d\omega)^{\#} - d\omega^{\#} = (-1)^{q+1} (\omega | \partial E)^{\#} .$$

Remarque 1: Au cours de la démonstration on a utilisé l'identité

$$(\pi^*(\alpha) \wedge \beta)^{\#} = \beta^{\#} \cdot \alpha$$

pour α forme sur B et β forme sur E de degré k, qui résulté immédiatement des des définitions.

Remarque 2: Le lemme 3 nous dit que l'intégration le long des fibres passe à la cohomologie de de Rham et induit une application

$$\# H : H^p(E, \partial E) \to H^{p-k}(B).$$

Le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} H^p(E, \partial E) \arrow[dr] & \\ & H^{p-k}(B) \\ H^{p-1}(\partial E) \arrow[uu, "(-1)^{p-k} b"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

où b est l'homomorphisme de connexion dans la suite exacte de cohomologie de $(E, \partial E)$ et les autres deux flèches représentent l'intégration le long des fibres dans $E \to B$ et dans $\partial E \to B$. En effet, si ω est une forme fermée de degré $p-1$ sur ∂E il existe une forme η zur E telle que $\eta | \partial E = \omega$ et $d\eta$ représente $b([\omega])$. Le lemme 3 appliqué à η nous dit que $(d\eta)^{\#}$ est cohomologue à $(-1)^{p-k} \omega^{\#}$.

Lemme 4: Supposons que $E \xrightarrow{\pi} B$ soit un fibré en boules de dimension k. Alors

$$^{\#}: H^p(E, \partial E) \to H^{p-k}(B)$$

coincide avec l'inverse ϕ^{-1} de l'isomorphisme de Thom.

Démonstration: Soit μ une forme fermée de degré k sur E telle que $\mu | \partial E = 0$ et dont la classe de cohomologie de de Rham dans $H^k(E, \partial E)$ soit la classe de Thom du fibré [4]. Soit ω une forme de degré $p-k$, fermée, sur B. Alors

$$\phi([\omega]) = [\pi^*(\omega) \wedge \mu],$$

par définition de ϕ [3]. Mais, d'après la remarque 1 plus haut,

$$(\pi^*(\omega) \wedge \mu)^{\#} = \mu^{\#} \cdot \omega .$$

D'autre part on sait ([3] et [4]) que la restriction de μ à chaque fibre représente la classe fondamentale en cohomologie de la fibre. Donc, $\mu^{\#} = 1$, ce qui prouve le lemme.

D. *Démonstration du lemme* 1.

D'après la remarque 2 et le lemme 4 qui précèdent, il suffit de prouver:

(*) $$2\pi i [res(\omega)] = (-1)^{q-1} [(\omega | \partial T)^{\#}] .$$

Soit T' un autre voisinage tubulaire de W dans V. On écrira $T' < T$ s'il existe une fonction différentiable $\alpha : W \to \mathbb{R}$ telle que $0 < \alpha(x) < 1$ pour tout $x \in W$ et que la fibre de T' sur $x \in W$ est la boule de rayon $\alpha(x)$ de la fibre de T. Dans ces conditions, l'ahérence E de $T - T'$ est un fibré localement trivial sur W dont la fibre type est une couronne. Si on applique le lemme 3 à la forme $\omega|E$ on vérifie que la forme

$$(\omega|\partial E)^* = (\omega|\partial T)^* - (\omega|\partial T)^*$$

est exacte. Donc,

$$(**)\qquad [(\omega|\partial T)^*] = [(\omega|\partial T')^*].$$

Soit maintenant $\{V_j\}$ un recouvrement localement fini de W par des ouverts relativement compacts tel que pour chaque V_j il existe un ouvert U_j de V avec $U_j \cap W = V_j$ et un système de coordonnées $z_0^j, \ldots, z_n^j$ zur U_j pour lequel V_j a pour équation $z_0^j = 0$. Soit $\{W_j\}$ un autre recouvrement de W tel que $\overline{W}_j \subset V_j$ pour tout j. Alors il existe un voisinage tubulaire $T' \xrightarrow{\pi} W$ de W tel que:

a) $T' < T$

b) $\pi^{-1}(W_j) \subset U_j$ pour tout j

c) l'application

$$\pi^{-1}(W_j) \to U_j$$

qui envoie chaque point x dans le point de coordonnées

$$(z_0(x),\ z_1(\pi(x)),\ \ldots,\ z_n(\pi(x)))$$

est un plongement pour tout j.

En effet, pour qu'un $T' < T$ satisfasse (b) et (c) il suffit que la fonction $\alpha : W \to \mathbb{R}$ qui sert à définir T' satisfasse: $\alpha(x) \leq \varepsilon_j$ pour tout $x \in W_j$, où $\{\varepsilon_j\}$ est une famille de nombres positifs convenablement petits. Pour vérifier qu'une telle fonction existe il suffit d'observer que, pour chaque j, il n'existe qu'un nombre fini des W_i tels que $W_i \cap W_j \neq \phi$. Alors, si on choisit ε'_j tel que $0 < \varepsilon'_j < \varepsilon_i$ pour tout i tel que $W_i \cap W_j \neq \phi$, on peut prendre

$$\alpha = \sum \varepsilon'_j \alpha_j$$

où $\{\alpha_j\}$ est une partition de l'unité subordonnée à $\{W_j\}$.

D'après la formule (**) il suffit pour prouver (*), de prouver (*) T'. Donc, on va supposer $T = T'$ pour simplifier les notations.

Prenons la suite de voisinages tubulaires:

$$\cdots < T_{m+1} < T_m < \cdots < T_1 = T,$$

où T_m est celui qui correspond à la fonction constante égale à $1/m$ sur W. Soit

$$\omega_m = (\omega|\partial T_m)^*$$

Lemme 5: On a:

$$\lim_{m\to\infty} \omega_m = (-1)^{q-1}\, 2\pi i \operatorname{res}(\omega)$$

et la convergence est uniforme sur chaque compact de W.

Admettons ce lemme: Soit z un $(q-1)$-cycle de W. Comme le support de z est compact on a:

$$\lim_{m\to\infty} \int_z \omega_m = (-1)^{q-1}\, 2\pi i \int_z \operatorname{res}(\omega)$$

Mais d'autre part, d'après (**), toutes les formes ω_m sont dans la même classe de cohomologie. Alors

$$\int_z \omega_m = \int_z \omega_1 \text{ pour tout } m.$$

Donc,

$$\int_z \omega_1 = (-1)^{q-1}\, 2\pi i \int_z \operatorname{res}(\omega)$$

pour tout $(q-1)$-cycle z, ce qui implique la formule (*).

Démonstration du lemme 5: Soit $\{K_j\}$ un recouvrement de W par des compacts tels que $K_j \subset W_j$ pour tout j. Il suffira de prouver que ω_m converge uniformément à $(-1)^{q-1}\, 2\pi i \operatorname{res}(\omega)$ sur chaque K_j. Fixons un j et soit $z_0, \ldots, z_n$ le système de coordonnées dans U_j. Soient $u_1, \ldots, u_{q-1}$ des champs de vecteurs tangents à W définis sur W_j. Alors

$\omega_m(u_1, \ldots, u_{q-1})$ est une fonction $f_m : W_j \longrightarrow \mathbb{C}$

et

$\omega(u_1, \ldots, u_{q-1})$ est une fonction $f\ : W_j \longrightarrow \mathbb{C}$.

Il faut prouver que f_m converge uniformément sur K_j vers $(-1)^{q-1}$ $2\pi i f$.

On peut relever les champs $u_1, \ldots, u_{q-1}$ à

$$\pi^{-1}(W_j) = T|W_j$$

et cela de telle façon que les champs ainsi obtenus, qu'on continue à appeler $u_1, \ldots, u_{q-1}$, soient contenus, dans chaque point, dans le sous-espace engendré par $\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_n$. Ceci est possible grace à la condition (c) du recouvrement. Posons

$$\omega = (dz_0/z_0) \wedge \varphi + \eta = (-1)^{q-1} \varphi \wedge (dz_0/z_0) + \eta$$

avec φ, η holomorphes sur U_j. Soit α la $1-$forme définie par (sur $\pi^{-1}(W_j) - W_j$):

$$\alpha(u) = \omega(u_1, \ldots, u_{q-1}, u)$$

et soit β la $1-$forme sur $\pi^{-1}(W_j)$ définie par:

$$\beta(u) = \eta(u_1, \ldots, u_{q-1}, u),$$

pour tout champ de vecteurs u. Alors,

$$f_m(x) = \int_{\partial T_m(x)} \alpha = \int_{\partial T_m(x)} ((-1)^{q-1} \varphi(u_1, \ldots, u_{q-1}) \, dz_0/z_0 + \beta)$$

(où $\partial T_m(x)$ est la fibre de ∂T_m au-dessus de x) et

$$f(x) = \varphi(u_1(x), \ldots, u_{q-1}(x))$$

pour tout $x \in W_j$. Comme z_0 définit une coordonée complexe sur $T_m(x)$ on a:

$$\int_{\partial T_m(x)} dz_0/z_0 = 2\pi i$$

et alors on peut écrire:

$$2\pi i(-1)^{q-1} f(x) - f_m(x) =$$

$$= (-1)^{q-1} \int_{\partial T_m(x)} [(\varphi(u_1(x), \ldots, u_{q-1}(x)) - \varphi(u_1, \ldots, u_{q-1})) \, dz_0/z_0 + \beta]$$

Il est facile de voir que cette intégrale converge vers 0, uniformément sur K_j, quand $m \longrightarrow \infty$, ce qui finit la démonstration du lemme 5.

Application 1: Considérons la suite spectrale en cohomologie à coefficients complexes du fibré introduit dans (C). On a, pour $p = q + k$, $q \geq 0$, $H^p(E, \partial E) = H^p(E, \partial E)_q \longrightarrow E_\infty^{qk} \subset E_2^{qk} = H^q(B, H^k(F, \partial F)) = H^q(B)$.

Alors la composition de ces homomorphismes donne l'intégration le long des fibres de E, modulo le théorème de de Rham.

Application 2: Soit N une variété compacte orientée de dimension $q-1$ plongée dans W. Alors

$$\int_{\partial T|N} \omega = 2\pi i \int_N \operatorname{res}(\omega)$$

pour toute q-forme ω qui a un pôle d'ordre ≤ 1 le long de W, T étant un voisinage tubulaire de W.

Application 3: Soient E, X des variétés complexes et $\pi : E \to X$ une application holomorphe propre qui est une fibration localemente triviale au sens différentiable. Soint $k = \dim E - \dim X$. Supposons donné pour chaque $x \in X$ un k-cycle $z \subset \pi^{-1}(x)$ de tel façon que la condition suivante soit satisfaite:

"pour chaque $x \in$ X il existe un ouvert $U_x \ni x$ tel que z_y est homoloque à z_x dans $\pi^{-1}(U_x)$ pour tout $y \in U_x$".

Soit ω une k-forme holomorphe sur E.

Alors la fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ défine par:

$$f(x) = \int_{z_x} \omega$$

pour tout $x \in X$, est holomorphe.

Departamento de Matemática
Facultad de Ciências
Universidad Central de Venezuela
CARACAS Venezuela.

Bibliographie

[1] *J. Leray*: Bull. Soc. Math. de France 87 (1959) 81-180.
[2] *F. Norguet* C. R. Acad. Sc. Paris 248 (1959) 2057-2060
[3] *J. Milnor*: "Lectures on characteristic classes" – Princeton.
[4] *R. Thom*: Ann. Sci. École Normale Sup. 69 (1952) 109-182.