Notes on Differential Geometry

Noel J. Hicks
D. Van Nostrand Inc. 183 pp.

Êste livro trata de diversos tópicos de Geometria Diferencial, contendo, particularmente nos capítulos iniciais, a geometria das superfícies de R^3 incluida usualmente nos programas de Mestrado.

O capítulo inicial constitue uma rapída introdução às variedades diferenciáveis.

A seguir (capítulo 2 e 3) são apresentadas as ideias basicas da teoria das hipersuperficies de R^3, e como caso particular, as superfícies de R^3.

A exposição é clara e acessível embora o conteúdo geometrico dos conceitos, nem sempre receba a devida ênfase. Acreditamos que o conhecimento prêvio da teoria elementar de curvas e superfícies facilitará em muito a assimilação do texto.

Os capítulos 4 e 5 tem caráter bastantes técnico. Aqui são introduzidos os tensores e suas principais propriedades algebricas.

Em têrmos pouco precisos, uma conexão é uma estrutura sôbre uma variedade que permite diferenciar tensores. As conexões lineares são introduzidas no capítulo 5 e sua definição é motivada pela derivada direcional de R^n.

Merece destaque, a nosso ver, a preocupação do autor em apresentar a esta altura as diversas tecnicas utilizadas em Geometria Diferencial como o uso de coordenadas, o mêtodo do referencial movel e o chamado formalismo intrínseco, sendo que a grande maioria dos conceitos são formulados em têrmo dêste último.

O estudo das variedades Riemannianas é objeto do capítulo 6. Após a definição de conexão de Levi-Civita segue uma exposição dos aspectos locais da teoria das subvariedades de uma variedade Riemanniana. Esta teoria é uma generalização natural da teoria das hipersuperfícies de R^n e é apresentada como tal.

As equações fundamentais de Gauss e Codazzi são formuladas de diversos modos; em têrmos de coordenadas, em têrmos de um referencial móvel (equações de estrutura de E. Cartan) e sob forma intrínseca. Ainda neste capítulo aparece uma demonstração bastante clara do resultado clássico de que a segunda forma fundamental determina uma hipersuperfície são construidos os modelos clássicos de variedades Riemannianas com curvatura constante.

A leitura do livro torna-se, em nossa opinião, sensivelmente mais difícil a partir do capítulo 7. Por um lado os tópicos tratados são mais avançados e em geral tem um caráter mais profundo e por outro, a forma de exposição é relativamente concisa.

Na definição de integral de formas diferenciais, que é o principal objetivo do capítulo 7, o autor evita introduzir o conceito de medida, preferindo considerar cadeias singulares diferenciáveis. Deste modo consegue chegar ràpidamente ao teorema de Stokes, mas aparece o problema bastante difícil da triangulabilidade de uma variedade diferenciável.

Aqui, a freqüente omissão de detalhes, notadamente na seção referente à diferenciação exterior, tende a tornar a leitura deste capítulo relativamente trabalhosa.

No capítulo 8 encontramos algumas aplicações do teorema de Stokes à geometria. O teorema de Gauss-Bonnet é provado de uma maneira concisa e a demonstração é incompleta no sentido de que os fatos de caráter topológico são admitidos sem demonstração.

Segue-se uma breve discussão da noção de índice de singularidade de um campo de vetores e de sua relação com a característica de Euler-Poincaré. O capítulo termina com a obtenção de certas formulas integrais e de suas aplicações ao problema da rigídez de superfícies.

O capítulo 9 trata do teorema de Frobenius seguindo de perto o livro de C. Chevalley, "Theory of Lie Groups". Como primeira aplicação deste importante resultado, encontramos o teorema fundamental de existência de hipersuperficies.

A seguir aparece a importante noção de aplicação exponencial e alguns resultados locais envolvendo este conceito, como por exemplo a existência de vizinhanças (geodésicamente) convexas.

A parte final do livro compõe-se de uma série de tópicos de Geometria Riemanniana, são questões globais nas quais a aplicação exponencial desempenha um papel central.

Como anteriormente, os conceitos são introduzidos de um modo claro e acessível, mas nas demonstrações o caráter de notas torna-se evidente. Freqüentemente o autor limita-se a indicar as passagens principais de uma demonstração ou então a sugerir a natureza de um determinado argumento, ao mesmo tempo em que outros textos são citados com maior freqüência.

Em vista disso é quase certo que o estudante se verá obrigado a recorrer a outros textos e mesmo a trabalhos originais.

O livro contêm uma série de exercícios, distribuidos ao longo dos capítulos, em ordem crescente de dificuldade.

Esta é uma obra de nível intermediário e uma excelente ligação entre os textos elementares e os tratados mais avançados e em geral mais sofisticados. Em vista disso êste livro é altamente recomendável a todo estudante interessado em Geometria Diferencial.

Carlos E. Harle.