

II Colóquio de Matemática do Centro Oeste
07-11/11/2011

A Descoberta do 16° Problema de Hilbert: Topologia
das Curvas Algébricas Planas Reais

Luciane Quoos e Nicolas Puignau

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Polinômios	1
1.2	Curvas Afins Planas	2
1.3	Curvas projetivas planas	4
1.3.1	O plano projetivo	4
1.3.2	Curvas projetivas e polinômios homogêneos	5
1.3.3	Propriedades topológicas das curvas projetivas	7
1.4	O 16° problema de Hilbert	8
2	Proibições	11
2.1	Ninhos	11
2.2	Desigualdade de Harnack	12
2.3	Arranjos de até grau 5	13
2.4	Arranjos de M -sêxticas	13
3	Construções	15
3.1	Perturbações	15
3.1.1	Cúbicas	15
3.1.2	Quárticas	17
3.1.3	Quínticas	18
3.2	M -sêxticas	19
3.2.1	Método de Harnack	19
3.2.2	Método de Hilbert	21
3.2.3	A curva faltando...	21
3.3	Patchwork combinatório	22

Capítulo 1

Introdução

Em 1900, o ainda novo Congresso Internacional de Matemáticos realizou-se em Paris. Considerado como um dos maiores matemáticos do século XX, David Hilbert pronuncia nessa ocasião um longo discurso delineando 23 grandes temas de pesquisa para o novo século. O discurso de Hilbert foi bem mais do que expor uma coleção de questões matemáticas, ele esboçou sua filosofia da matemática e propôs problemas importantes relativos a esta filosofia que, até os dias atuais, são uma fonte inesgotável de perguntas tocando diversos campos da matemática [2]. Em especial, o décimo sexto problema, que apareceu pela primeira vez em 1891 e trata sobre a topologia de curvas e superfícies, permanece ainda hoje não totalmente resolvido.



David Hilbert (1862 – 1943)

Neste mini-curso, abordaremos o problema sobre a topologia das curvas algébricas reais no plano projetivo. Embora o assunto seja extenso e complexo, nos ateremos ao caso de curvas de até grau 6, ilustrando uma maneira de tratarmos o caso geral via o método *Patchwork*, introduzido por Oleg Viro nos anos 1970 [5].

Começaremos introduzindo os conceitos básicos necessários para entendermos o 16° Problema de Hilbert, tais como os polinômios, as curvas algébricas planas afins e seu modelo projetivo, e também as noções de topologia como o de conjunto conexo e arranjo. Na maioria das vezes, estaremos mais interessados na compreensão desses objetos e das suas propriedades do que em demonstrações propriamente ditas.

1.1 Polinômios

Um *polinômio em n variáveis* x_1, \dots, x_n sobre os reais é uma expressão do tipo

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} a_{i_1 i_2 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n},$$

onde $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$, os coeficientes $a_{i_1 i_2 \dots i_n}$ são números reais e a soma é finita. Uma expressão do tipo $a_{i_1 i_2 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ é dito um *monômio* de grau $i_1 + \dots + i_n$. O *grau do polinômio* $P(x_1, \dots, x_n)$ é o maior grau dentre os graus de seus monômios. Por exemplo, $P(x, y, z) = x^5 + y^3 - 3xy$ tem grau 5, e $P(x, y, z) = 3x^5 y^2 - 2z^4 + xyz - 1$ tem grau 7. Os polinômios em duas variáveis de grau 1

são do tipo $a_{00} + a_{10}x + a_{01}y$, e os de grau 2, $a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2$. Note que, agrupando os monômios de mesmo grau, sempre podemos expressar um polinômio $P(x_1, \dots, x_n)$ de grau m como uma soma $f_m + f_{m-1} + \dots + f_0$, onde cada f_i é uma soma de monômios de mesmo grau i .

Dizemos que um polinômio é *homogêneo* se todos os seus monômios possuem o mesmo grau, $x^3y + xyz^2 + z^4$ é homogêneo de grau 4. Estes podem ser caracterizados pela seguinte propriedade interessante e serão o ponto chave para definirmos curvas projetivas, como veremos em 1.3.

Proposição 1. *Um polinômio $P(x_1, \dots, x_n)$ é homogêneo de grau m se e só se $P(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^m P(x_1, \dots, x_n) \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$.*

Demonstração. É claro que se $P(x_1, \dots, x_n)$ é homogêneo de grau m , então ele possui a propriedade desejada. Por outro lado, assumamos que $P(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^m P(x_1, \dots, x_n) \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, e escreva $P = f_m + f_{m-1} + \dots + f_0$, onde cada f_i é uma soma de monômios de mesmo grau i . Podemos reescrever a igualdade acima desse modo:

$$f_0 + \lambda f_1 + \dots + \lambda^m (f_m - P) = 0.$$

Esta última igualdade pode ser vista como um polinômio na variável λ com coeficientes em $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ com um número infinito de raízes, uma para cada valor de $\lambda \in \mathbb{R}^*$. De onde concluímos que ele é o polinômio identicamente nulo, isto é, $f_0 = 0, \dots, f_{m-1} = 0$ e $f_m - P = 0$. Logo P é um polinômio homogêneo de grau m . \square

No caso em que é possível escrever um polinômio como o produto de polinômios não constantes com coeficientes em \mathbb{R} , dizemos que ele é *reduzível* sobre \mathbb{R} . Caso contrário, ele será dito *irreduzível*. Por exemplo, o polinômio $x^2 + y^2 + 1$ é irreduzível, enquanto $x^2y^5 + 3y^6 + x^3y + 3xy^2 = (x^2 + 3y)(xy + y^5)$ é reduzível. Mais geralmente temos um teorema que garante que um polinômio sobre os complexos pode sempre ser escrito como produto de fatores irreduzíveis. Também é possível mostrar que se conseguimos fatorar um polinômio homogêneo: $P = FG$, $F, G \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \setminus \mathbb{R}$, então F e G são ainda polinômios homogêneos.

Agora vamos nos deter particularmente nos polinômios em duas variáveis que definem as curvas algébricas planas. Uma boa introdução ao tema pode ser encontrada nos livros [1] e [4].

1.2 Curvas Afins Planas

Para nós, curvas algébricas e polinômios são duas representações de um mesmo objeto. Seja $P(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$, $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ um polinômio em duas variáveis com coeficientes reais, a *curva algébrica real afim* definida por $P(x, y)$ é o conjunto de zeros no \mathbb{R}^2 deste polinômio, ou seja:

$$C_P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x, y) = 0\}.$$

Uma vez que o conjunto de zeros não se altera se multiplicamos o polinômio $P(x, y)$ por uma constante real, dizemos que $P(x, y)$ e qualquer múltiplo não nulo $\lambda P(x, y)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ definem a mesma curva. Por exemplo, os polinômios $x - y$ e $2x - 2y$ definem a mesma reta. Curvas de grau 1, 2, 3, 4, 5 e 6 são chamadas de retas, cônicas, cúbicas, quárticas, quárticas e sêxticas. Pode ainda acontecer de o conjunto de zeros de um polinômio sobre \mathbb{R}^2 ser vazio, por exemplo, se $P(x, y) = x^2 + y^2 + 1$, a curva real associada é vazia, no entanto, $P(x, y)$ sempre define uma curva complexa em \mathbb{C}^2 .

Conforme o grau de $P(x, y)$ aumenta, o traço da curva de equação $P(x, y) = 0$ no plano fica cada vez mais complexo. Se o grau de $P(x, y)$ for 1, temos uma reta, se for 2, estamos trabalhando com cônicas, e temos já três possibilidades para a curva: elipse, hipérbole ou parábola. Por exemplo, a Figura 1.1 representa o traço possível para uma curva de grau 4.

Ao trabalharmos com curvas reais, estamos interessados apenas em curvas suaves, ou seja, curvas com a reta tangente bem definida em todo ponto. De fato, a maioria das curvas são desse tipo!

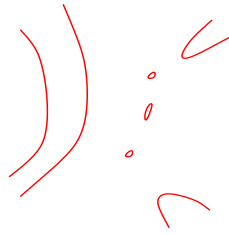


Figura 1.1: traço de uma quártica plana

Esta propriedade geométrica se traduz algebricamente pela seguinte propriedade, dado um ponto $q = (x_0, y_0)$ na curva $P(x, y) = 0$, dizemos que q é um ponto *não singular* se $\frac{\partial P}{\partial x}(q) \neq 0$ ou $\frac{\partial P}{\partial y}(q) \neq 0$. Neste caso, a reta de equação $\frac{\partial P}{\partial x}(q)(x - x_0) + \frac{\partial P}{\partial y}(q)(y - y_0) = 0$ é a reta tangente à curva no ponto q . Dizemos que uma curva é não singular ou *lisa* se todos os seus pontos são não singulares.

Por exemplo, a curva $y^2 - x^3 + x = 0$ é não-singular, enquanto as curvas $y^2 - x^3 = 0$ e $y^2 - x(x^2 + x) = 0$ possuem singularidade na origem (respectivamente do tipo cuspidal e nodal). (Veja figura 1.2).

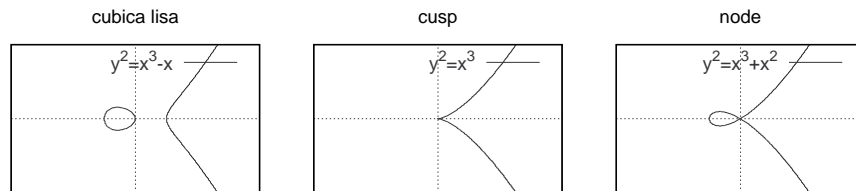


Figura 1.2: cúbicas lisa e singulares

Quando pensamos em curvas no plano, sabemos da geometria euclidiana que por 2 pontos passa uma única reta, e que por 5 pontos (sem que 3 daqueles estejam sobre uma mesma reta), passa uma única cônica. De maneira geral, não é difícil mostrarmos a seguinte proposição:

Proposição 2. Por $\frac{m(m+3)}{2}$ pontos no plano em posição geral (explicaremos isso na demonstração da proposição) passa uma única curva de grau m .

Demonstração. Uma curva de grau m é dada por um polinômio $P(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq m} a_{i,j} x^i y^j$ de grau m , sendo determinado pelos seus coeficientes $a_{i,j}$. Desse modo, precisamos saber quantos coeficientes aparecem em P . Podemos escrever P como a soma de polinômios homogêneos f_i de grau i para $i = 0, 1, \dots, m$. A quantidade de monômios distintos de grau i é exatamente $i + 1$, e concluímos que P possui $1 + 2 + \dots + m + (m + 1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$ coeficientes. Entretanto, quando igualamos o polinômio $P(x, y)$ a zero, dividindo-o pelo coeficiente do monômio de maior grau que é não nulo, obtemos a mesma curva e reduzimos o número de coeficientes de uma unidade. Assim, precisamos determinar apenas $\frac{(m+1)(m+2)}{2} - 1 = \frac{m(m+3)}{2}$ coeficientes. Requerer que uma curva $P(x, y)$ passe pelo ponto $q = (x_0, y_0)$ é exigir que as coordenadas de q zerem o polinômio, $P(x_0, y_0) = 0$. Isso fornece uma equação linear nas incógnitas $a_{i,j}$. Então, se fixamos $\frac{m(m+3)}{2}$ pontos no plano, obtemos um sistema linear com $\frac{m(m+3)}{2}$ incógnitas e equações. Da álgebra linear sabemos que este sistema possui solução desde que a matriz que o define possua determinante não nulo (esta é a nossa condição sobre os pontos estarem em posição geral!). \square

Exercício 1.

1. Mostre que se $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ são polinômios de graus m e n respectivamente, então o grau de fg é $m + n$, enquanto o grau de $f + g$ é menor ou igual ao máximo entre m e n .

2. Mostre que $x^2 + y^2 - 1$ é irredutível em $\mathbb{C}[x, y]$.
3. Mostre que $x^3 + y^3$ é redutível em $\mathbb{C}[x, y]$.
4. Seja P um polinômio homogêneo. Mostre que se $P = FG$, $F, G \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \setminus \mathbb{C}$, então F e G são ainda polinômios homogêneos.
5. Mostre que a curva $y^2 - x^3 + x = 0$ é não-singular, enquanto as curvas $y^2 - x^3 = 0$ e $y^2 - x(x^2 + x) = 0$ possuem uma singularidade na origem.
6. Determine a cônica passando pelos pontos $A = (1, 6), B = (-3, -2), C = (-5, 0), D = (3, 4)$ e $E = (0, 10)$.

1.3 Curvas projetivas planas

1.3.1 O plano projetivo

Quando tratamos de curvas no \mathbb{R}^2 acontecem fatos inusitados e que podem ser evitados se trabalharmos num ambiente conveniente. Por exemplo, todo par de retas concorrentes possui um ponto de interseção enquanto os pares de retas paralelas pareçam especiais por não possuírem um ponto de interseção. O mesmo acontece com as curvas afins $xy = 1$ e $x = 0$ que não possuem interseção. Porém, considerando o traço destas curvas no plano, é natural pensarmos que estas se tocam no infinito, é como se estivéssemos esquecendo de pontos no momento de procurarmos interseções. Ou seja, o plano real não parece ser o lugar ideal para a visualização destas curvas.

Temos ainda algumas sutilezas a considerar, observe que dadas duas retas paralelas, qualquer pequeno movimento em uma delas cria instantaneamente um ponto de interseção que podemos visualizar. E não é difícil nos convencermos de que temos apenas um ponto no infinito no encontro de duas retas paralelas, ou seja, que um ponto no infinito fica bem determinado por uma direção.

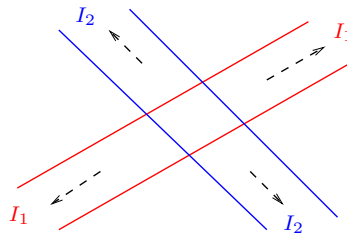


Figura 1.3: um ponto no infinito por cada direção

Na Figura 1.3 temos, para cada par de retas, um ponto de interseção, às vezes bem visível e às vezes no infinito. Perceba que temos dois pontos no infinito, um para cada direção!

Estas ideias podem ser formalizadas via o conceito de *plano projetivo real*.

Para construirmos o plano projetivo real, começamos considerando o espaço real sem a origem $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, e uma relação de equivalência nesse conjunto. Dizemos que dois pontos $q_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $q_2 = (x_2, y_2, z_2)$ no \mathbb{R}^3 são equivalentes se pertencem a mesma reta passando pela origem, ou seja:

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, (x_2, y_2, z_2) = \lambda(x_1, y_1, z_1) \quad (1.1)$$

A *classe de equivalência* de um ponto $q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ é o conjunto de todos os pontos sobre a reta ligando q à origem e denotamos por:

$$[x : y : z] = \{(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\}.$$

O *plano projetivo real* é o conjunto destas classes de equivalência:

$$\mathbb{R}P^2 = \{[x : y : z] \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\}.$$

Os pontos cuja terceira coordenada z é zero, são ditos os *pontos no infinito*. Cada um destes pontos representa no \mathbb{R}^3 uma reta passando pela origem sobre o plano $z = 0$, isto é, este ponto pode ser identificado com uma direção no plano $z = 0$. Como cada direção define um ponto no infinito, obtemos na verdade uma reta no infinito em $\mathbb{R}P^2$. Por outro lado, se $z \neq 0$, então podemos identificar estes pontos $\{[\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1] \mid \frac{x}{z} \wedge \frac{y}{z} \in \mathbb{R}\}$ com o \mathbb{R}^2 . Desse modo, $\mathbb{R}P^2$ pode ser visto como a união do \mathbb{R}^2 com uma reta no infinito. (Veja a Figura 1.4).

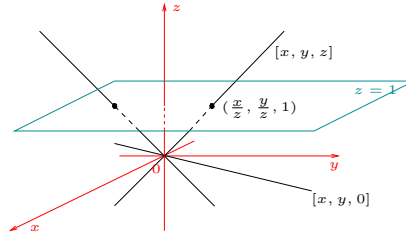


Figura 1.4: \mathbb{R}^2 visto como $z = 1$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

1.3.2 Curvas projetivas e polinômios homogêneos

Queremos considerar curvas projetivas reais de maneira análoga às curvas afins reais, e assim nos propomos a defini-las como o conjunto de zeros em $\mathbb{R}P^2$ de um polinômio. Porém, para um polinômio se anular em um ponto $q = [x : y : z]$ de $\mathbb{R}P^2$, precisamos garantir que este se anula em todas as triplas $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, onde λ é um real não nulo. Esta propriedade está relacionada com os polinômios homogêneos como visto na Proposição 1. Desse modo, estamos prontos para definir uma *curva algébrica projetiva real*, ou simplesmente *curva projetiva* como o conjunto de zeros em $\mathbb{R}P^2$ de um polinômio homogêneo em três variáveis.

Definição 1. Uma curva projetiva de grau m é definida como o conjunto de zeros em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ de um polinômio homogêneo de grau m , módulo a relação de equivalência (1.1). Isso é um subconjunto de $\mathbb{R}P^2$:

$$C_P = \{[x : y : z] \in \mathbb{R}P^2 \mid P(x, y, z) = 0\}$$

Existem diversas representações do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$ e, para o nosso problema, vamos preferir a representação *hemisférica* (Figura 1.5). Considere um plano L pela origem no \mathbb{R}^3 , este plano divide a esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ em dois hemisférios, fixemos um hemisfério H . Cada reta pela origem não contida no plano L encontra o hemisfério H em exatamente um ponto, enquanto as retas no plano L encontram o hemisfério H na fronteira do disco de interseção do plano L com a esfera unitária em pontos diametralmente opostos.

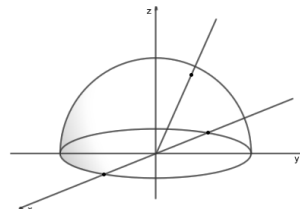


Figura 1.5: representação hemisférica de $\mathbb{R}P^2$

Assim, olhando para o hemisfério a partir de um ponto distante sobre a reta perpendicular a H passando pela origem, podemos identificar $\mathbb{R}P^2$ com um disco no plano L , onde os pontos do interior estão em bijeção com o plano afim \mathbb{R}^2 , e os pontos da fronteira correspondem a reta no infinito com os pontos diametralmente opostos identificados.

O que podemos afirmar sobre as relações entre os modelos afim e projetivo de uma curva algébrica? Como cada ponto em $\mathbb{R}P^2$ possui um representante com $x = 1$, $y = 1$ ou $z = 1$, vamos trabalhar com o modelo afim da curva associado a um dos três planos principais $x = 1$, $y = 1$ ou $z = 1$. Vejamos com um exemplo simples: considere a cônica projetiva $P(x, y, z) = x^2 + xz - 2yz + z^2$, os modelos afins de $P(x, y, z)$ correspondentes respectivamente aos planos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 1$ são $P(1, y, z) = 1 + z - 2yz + z^2$, $P(x, 1, z) = x^2 + xz - 2z + z^2$ e $P(x, y, 1) = x^2 + x - 2y + 1$ representados na Figura 1.6.

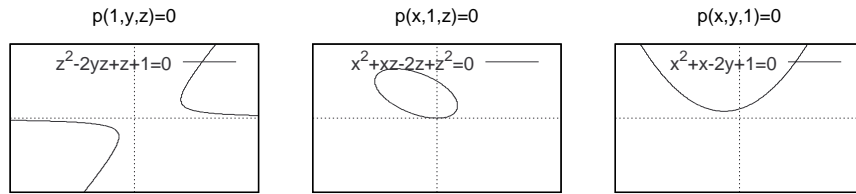


Figura 1.6: modelos afins da curva $P(x, y, z) = 0$

Agora, se utilizarmos a representação hemisférica do $\mathbb{R}P^2$, com relação aos planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, respectivamente, obtemos a Figura 1.7 que são diferentes visualizações da mesma curva. Note

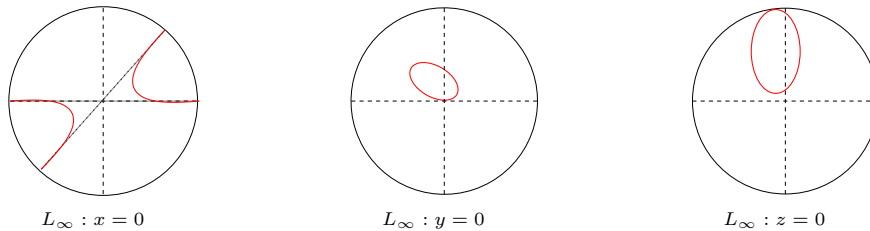


Figura 1.7: visualizações hemisféricas de $P(x, y, z) = 0$

que nessa nova representação, o traço da curva é essencialmente o mesmo quando identificamos os pontos antipodais da fronteira.

Uma vez que já estudamos geometricamente as visualizações dos modelos afins de uma curva projetiva, vejamos como fazemos isso algebricamente. Isto está relacionado com os processos de homogeneização e deshomogeneização de polinômios.

Se $P(x, y, z)$ é uma curva projetiva, o modelo afim desta curva é dado escolhendo a visualização afim via a interseção com o plano afim $z = 1$, isto é, $p(x, y) = P(x, y, 1)$. Este processo é chamado de deshomogeneização do polinômio homogêneo $P(x, y, z)$.

Por outro lado, se $p(x, y) = 0$ é uma curva afim de grau m , existe uma curva projetiva $P(x, y, z) = 0$ de grau m tal que o modelo afim de $P(x, y, z) = 0$ dado pela interseção com o plano $z = 1$ é exatamente a curva $p(x, y) = 0$.

Se $p(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j}x^i y^j$ é uma curva afim de grau m , definimos:

$$P(x, y, z) = z^m p\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = \sum_{i,j} a_{i,j}x^i y^j z^{m-i-j}.$$

O polinômio $P(x, y, z)$ é claramente homogêneo de grau m , e dizemos que $P(x, y, z)$ é a homogeneização do polinômio $p(x, y)$.

Na prática basta completar cada monômio com uma potência de z de modo a torná-lo de grau igual ao grau da curva afim. Por exemplo, se $p_1(x, y) = y^4 + xy - 1$, então sua homogeneização é $P_1(x, y, z) = y^4 + xy z^2 - z^4$. Se $p_2(x, y) = x^3 y^4 + 2xy^3 - 7xy + 5$, então $P_2(x, y, z) = x^3 y^4 + 2xy^3 z^3 - 7xy z^5 + 5z^7$.

A relação entre os zeros de uma curva $p(x, y)$ e sua homogeneização $P(x, y, z)$ é muito simples: os zeros de $P(x, y, z)$ são os zeros de $p(x, y)$ (pontos afins, $z = 1$) mais os pontos no infinito ($z = 0$). Isto é, o modelo projetivo $P(x, y, z)$ é a curva afim $p(x, y)$ completada por seus pontos no infinito.

Com estes novos conceitos, os modelos projetivos das retas paralelas afins $x = a$ e $x = b$, com $a \neq b$, são $x = az$ e $x = bz$, que agora possuem um ponto de interseção $[0 : 1 : 0]$, que é um ponto no infinito! Também as curvas afins $xy = 1$ e $x = 0$ que não possuem interseção finita, agora possuem um ponto no infinito (verifique!). E sobre a interseção de curvas projetivas em geral, o que podemos afirmar?

1.3.3 Propriedades topológicas das curvas projetivas

Começaremos analisando a interseção de uma reta e uma curva afins. Para isso precisaremos de um resultado bem conhecido sobre polinômios em uma variável.

Teorema 1 (Teorema Fundamental da Álgebra). *Se $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ é um polinômio de grau n , então existem $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ em \mathbb{C} distintos, $c \neq 0 \in \mathbb{C}$ e e_1, \dots, e_k inteiros positivos tais que*

$$f(x) = c(x - \alpha_1)^{e_1} \cdots (x - \alpha_k)^{e_k}.$$

Dizemos que e_i é a multiplicidade da raiz α_i , repare que $\sum_{i=1}^k e_i = n$.

Para polinômios homogêneos em duas variáveis sobre os complexos, o Teorema Fundamental da Álgebra nos fornece uma fatoração bem simples em produto de fatores irredutíveis.

Corolário 1. *Seja $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ um polinômio homogêneo, então existem números complexos α_i e β_i para $i = 1, \dots, s$ e $c \neq 0 \in \mathbb{C}$ tais que*

$$F(x, y) = c(\alpha_1 x + \beta_1 y)^{r_1} \cdots (\alpha_s x + \beta_s y)^{r_s}.$$

Temos também unicidade com relação aos quocientes $\alpha_1/\beta_1, \dots, \alpha_s/\beta_s$.

Demonstração. Podemos escrever

$$F(x, y) = \sum_{i=0}^m a_i x^i y^{m-i} = y^m \sum_{i=0}^c a_i \left(\frac{x}{y}\right)^i,$$

onde c é o maior índice tal que $a_c \neq 0$. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra para polinômios em uma variável aplicado a variável x/y , concluímos que existem únicos $\gamma_1, \dots, \gamma_s \in \mathbb{C}$ tais que:

$$F(x, y) = a_c y^m \left(\frac{x}{y} - \gamma_1\right)^{r_1} \cdots \left(\frac{x}{y} - \gamma_s\right)^{r_s} = a_c y^{m-c} (x - \gamma_1 y)^{r_1} \cdots (x - \gamma_s y)^{r_s}.$$

□

Você é capaz de fatorar $y^3 - 2xy^2 + 2x^2y + 4x^3$ em produto de fatores lineares como descrito no corolário acima?

Esses resultados nos permitem majorar o número de pontos na interseção de uma curva de grau m com uma reta.

Proposição 3. *Se $P(x, y, z) = 0$ é uma curva projetiva de grau m e L é uma reta projetiva (sem fatores comuns), então o número de pontos na interseção da curva e da reta é no máximo m .*

Demonstração. Sejam $P(x, y, z) = \sum_{i+j+k=m} a_{i,j,k} x^i y^j z^k$ o polinômio de grau m e a reta L definida por $ax + by + cz = 0$. Os pontos de interseção da curva $P(x, y, z) = 0$ com a reta L são dados pelas raízes reais de $P(x, y, \frac{-ax-by}{c})$ se $c \neq 0$, ou de $P(x, \frac{-ax-cz}{b}, z)$ se $b \neq 0$, ou $P(\frac{-by-cz}{a}, y, z)$ se $a \neq 0$ que são polinômios em duas variáveis de grau m . Sem perda de generalidade suponhamos $c \neq 0$, pelo Teorema 1, podemos fatorar $P(x, y, \frac{-ax-by}{c}) = (\alpha_1 x + \beta_1 y)^{r_1} \cdots (\alpha_s x + \beta_s y)^{r_s}$, onde $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbb{C}$. Desse modo $P(x, y, z)$ possui no máximo m zeros reais projetivos dentre os m zeros com coordenadas complexas $[-\beta_1 : \alpha_1 : \frac{a\beta_1 - b\alpha_1}{c}], \dots, [-\beta_s : \alpha_s : \frac{a\beta_s - b\alpha_s}{c}]$. □

Em geral, vale o seguinte resultado fundamental para curvas projetivas cuja demonstração foi primeiramente concebida pelo matemático francês Étienne Bezout no século XVIII.

Teorema 2 (Bézout). *Sejam $F = 0$ e $G = 0$ duas curvas complexas projetivas planas de graus m e n respectivamente, sem fator comum. Então, o número de pontos na interseção $\{F = 0\} \cap \{G = 0\}$, se contados com multiplicidade, é mn .*

Corolário 2. *Sejam $F = 0$ e $G = 0$ duas curvas reais projetivas planas de graus m e n respectivamente sem fator em comum, então o número de pontos na interseção $\{F = 0\} \cap \{G = 0\}$ é no máximo mn .*

O conceito de curvas não singulares no caso projetivo é análogo ao caso de curvas afins: dizemos que um ponto $q = [x_0 : y_0 : z_0]$ da curva projetiva $P(x, y, z) = 0$ é singular se $\frac{\partial P}{\partial x}(q) = \frac{\partial P}{\partial y}(q) = \frac{\partial P}{\partial z}(q) = 0$. A relação de singularidade entre os modelos afim e projetivo de uma curva é: $P(x, y, z)$ é não singular se e somente se $P(x, y, 1)$, $P(x, 1, z)$ e $P(x, y, 1)$ são não singulares.

Queremos tratar as curvas planas via suas propriedades topológicas.

Definição 2. Dizemos que um subconjunto A de uma curva plana real é uma *componente conexa* se para quaisquer dois pontos de A podemos traçar um caminho, completamente contido na curva (sem levantar a caneta), unindo os dois pontos (esta é a noção de *conexo por caminhos!*).

Uma curva plana real é a união de um número finito de componentes conexas. Por exemplo, a curva afim da Figura 1.1 tem 7 componentes conexas.

Note que, por exemplo, uma cônica projetiva possui apenas uma componente conexa, enquanto uma cônica afim pode ter duas componentes conexas como uma hipérbole (cf. Figuras 1.6 e 1.7). Se completarmos a curva da Figura 1.1 com os pontos no infinito, a curva projetiva resultante tem 4 componentes conexas! Reparou?

Exercício 2.

1. Homogeneize e determine os pontos no infinito das seguintes curvas cujo modelo afim é: $x^3 - xy^2 - y = 0$, $(y - x^2)^2 - xy^3 = 0$ e $x^2y^2 + x^2 - y^2 = 0$.
2. Determine os pontos em $\mathbb{R}P^2$ na interseção entre a quádrlica $x^2 + xy + y^2 - z^2 = 0$ e a reta $x + y = 0$.
3. Determine os pontos em $\mathbb{R}P^2$ na interseção entre a curva $x^2 + xy + y^2 + z^2 = 0$ e a reta $x + y = 0$.
4. Determine os pontos em $\mathbb{R}P^2$ na interseção entre a cúbica $x^3 + xy^2 - 2x^2z - 2y^2z - xz^2 + 2z^3 = 0$ e as retas $y - 2z = 0$ e $y - z = 0$.
5. Dados $F \in \mathbb{R}[x, y, z]$ e $f \in \mathbb{R}[x, y]$, defina $F_* \in \mathbb{R}[x, y]$ como a desomogeneização de F em relação a variável z e f^* como a homogeneização de f em relação a variável z . Mostre que $(FG)_* = F_*G_*$ e $(fg)^* = f^*g^*$.

1.4 O 16° problema de Hilbert

Chamamos de *arranjo* de uma curva projetiva plana a posição relativa das suas componentes conexas no plano (ver Figura 1.8). Isso é, não nos interessamos pela posição exata da curva no plano, mas apenas pelo seu traço.

A primeira parte do 16° Problema de Hilbert pode ser compreendida do seguinte modo:

Dado um número inteiro positivo m , estabelecer a lista dos arranjos realizáveis por curvas projetivas reais planas de grau m .

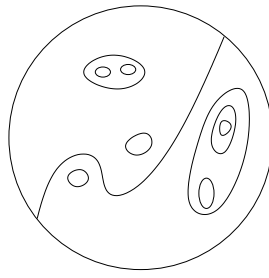
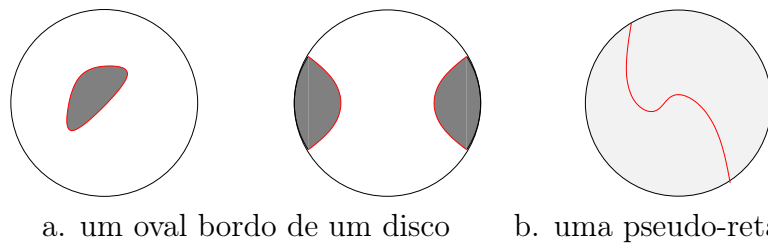


Figura 1.8: um arranjo

Para tratar este problema precisamos esclarecer quais tipos de componentes conexas pode possuir uma curva plana. Vamos admitir alguns fatos. Uma curva projetiva é compacta (pois acrescentamos os pontos no infinito) e formada pela união de suas componentes conexas. Uma componente conexa, do ponto de vista topológico, é homeomorfa a um círculo e chamada de *lacete*. Temos dois tipos de lacetes em $\mathbb{R}P^2$: aqueles que bordam um disco e separam o plano em interior e exterior, como uma cônica (cf. Figura 1.7) ou aqueles que não separam o plano, como uma reta (veja Figura 1.9). Chamamos de *oval* uma componente separante e de *pseudo-reta* uma componente não separante. O complementar de uma pseudo-reta não pode ser identificado com um disco, de fato é uma *faixa de Möbius*.



a. um oval bordo de um disco b. uma pseudo-reta

Figura 1.9: lacetes em $\mathbb{R}P^2$

A partir de agora uma *curva* será, sempre, uma *curva projetiva real não singular*.

Repare que duas pseudo-retas em $\mathbb{R}P^2$ se intersectam necessariamente. Então, ao considerar curvas não-singulares, concluímos que uma curva possui no máximo uma componente do tipo pseudo-reta.

Proposição 4. *As curvas de grau par são formadas apenas por ovais.*

Demonstração. As curvas projetivas de grau par têm uma propriedade especial, elas separam o plano projetivo. Com efeito, se o polinômio $P(x, y, z)$ é homogêneo de grau par $2n$ então, pela Proposição 1, $P(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^{2n} P(x, y, z)$ com $\lambda^{2n} > 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$. Sendo assim, a curva $P(x, y, z) = 0$ separa o plano projetivo em $P(x, y, z)$ positivo e $P(x, y, z)$ negativo, e então não possui uma pseudo-reta: é formado pela união de ovais. \square

Proposição 5. *As curvas de grau ímpar possuem uma pseudo-reta.*

Demonstração. (Ideia) Uma curva de grau ímpar intersecta qualquer reta do plano um número ímpar de vezes. Com efeito, a demonstração da Proposição 3 mostra como a interseção de uma curva com uma reta é dada pelas raízes reais de polinômios em uma variável de grau ímpar. Como as raízes complexas aparecem em pares conjugadas, a paridade das raízes reais é preservada. Não é difícil se convencer que uma curva com apenas ovais intersecta as retas um número par de vezes (pois, se a reta entra num oval, ela tem que sair...) então, uma curva de grau ímpar possui necessariamente uma pseudo-reta. \square

Finalmente, nossas curvas projetivas de grau par (resp. ímpar) são uniões de ovais (resp. ovais e uma pseudo-reta). A questão do 16° Problema de Hilbert consiste em estudar as possíveis posições relativas desses ovais pelas curvas de um certo grau m .

Os ovais podem se encaixar, por exemplo, um conjunto com dois ovais encaixados um dentro do outro é chamado de *ninho de profundidade 2* (cf. Seção 2.1). Porém, temos inúmeras possibilidades para a disposição de vários ovais e devemos fixar uma notação para a representação dos arranjos.

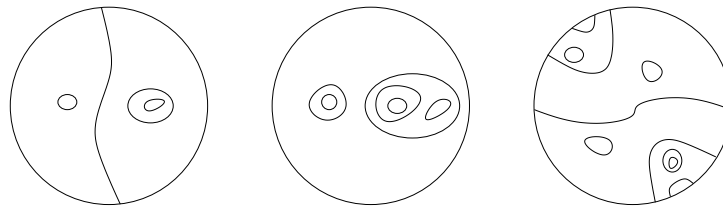
- $\langle 0 \rangle$ denota a curva vazia;
- $\langle 1 \rangle$ um oval, e $\langle l \rangle$ a união disjunta de l ovais;
- $\langle J \rangle$ uma pseudo-reta.

O arranjo obtido adicionando um oval que contenha um arranjo $\langle A \rangle$ no seu lado de dentro será denotado por $\langle 1 \langle A \rangle \rangle$. Por exemplo, um ninho de profundidade 2 será denotado $\langle 1 \langle 1 \rangle \rangle$. O arranjo, que é a união de dois arranjos $\langle A \rangle$ e $\langle B \rangle$ de modo que nessa união nenhum oval de um esteja contido num oval do outro, será denotado $\langle A \sqcup B \rangle$. Se $\langle A \rangle$ denota um arranjo, o arranjo formado por $A \sqcup A \sqcup \dots \sqcup A$, onde A ocorre n vezes, abreviaremos por $n \langle A \rangle$. Um desenho vale mil palavras, a Figura 1.8 realiza o arranjo:

$$\langle J \sqcup 2 \langle 1 \rangle \sqcup \langle 1 \langle 2 \rangle \rangle \sqcup \langle 1 \langle 1 \sqcup \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle \rangle \rangle.$$

Exercício 3.

1. Faça um esboço do arranjo das seguintes possíveis curvas em $\mathbb{R}P^2$:
 - a) $x^2 + y^2 - 1 = 0$,
 - b) $y^2 = x(x - 1)(x + 1)$,
 - c) $y^2 = x(x^2 + 1)$.
2. Determine as notações correspondente aos arranjos abaixo



Capítulo 2

Proibições

O primeiro passo para o estudo do 16º problema de Hilbert é identificar quais as configurações de curvas planas reais são impossíveis, a fim de limitar os casos de estudo. Veremos que até grau 5 tudo resulta do Corolário do Teorema de Bézout. A partir do grau 6, outras considerações topológicas precisam ser consideradas. Mas isso vai muito além do objetivo desse curso. Contudo, vamos simplesmente enunciar um resultado de proibição de grau 6 e estudar o caso das curvas com o número máximo de componentes conexas, chamadas de M -curvas.

2.1 Ninhos

Nosso primeiro resultado de proibição é consequência da proposição 3, que é um caso particular do Teorema de Bézout. Com efeito, considere um oval de uma curva C no plano. Como já vimos, ele divide o plano em duas partes, o interior e o exterior. Pegue um ponto no interior e trace uma reta passando por ele. O que acontece? Necessariamente, a reta intersecta o oval em pelo menos 2 pontos. Pela Proposição 3, a curva C tem necessariamente grau no mínimo 2. Bom... isso não ajuda muito, pois já sabíamos que uma curva de grau 1, ou seja, uma reta, não tem oval. Mas se a curva C tiver vários ovais encaixados, digamos k , então podemos traçar uma reta por um ponto no interior de todos os ovais. Essa reta intersecta C em pelo menos $2k$ pontos e, pela Proposição 3, o grau de C tem que superar $2k$... isso é mais interessante. Lembramos que chamamos de ninho de profundidade k o encaixamento de k ovais. Em geral, cada vez que temos 2 ninhos, podemos traçar uma reta e raciocinar da mesma maneira para proibir uma configuração dada. A figura 2.1 ilustra duas situações que podemos proibir com esse tipo de argumento. Observe que os ninhos podem se encaixar de forma complexa.

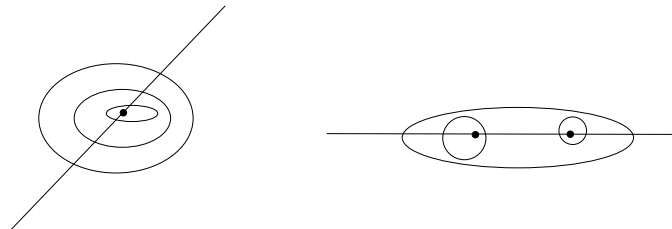


Figura 2.1: um ninho $\langle 1\langle 1\langle 1 \rangle \rangle$ e um arranjo $\langle 1\langle 2 \rangle \rangle$ não realizáveis por uma curva de grau menor que 6.

Através do Corolário 2 podemos complicar um pouco a situação e argumentar com curvas de grau maior no lugar da reta. Por exemplo, por 5 pontos sabemos que passa uma cônica (curva de grau 2). Então, cada vez que temos 5 ninhos, consideramos uma cônica que intersecta cada ninho de profundidade k em pelo menos $2k$ pontos. Contando bem o número total de interseções (lembramos

que o arranjo de ninhos pode ser encaixado de forma complexa) chegamos a proibir a configuração quando esse número ultrapassa $2m$, onde m é o grau da curva estudada, pelo Corolário 2. A Figura 2.2 ilustra o caso de 5 ovais (ninhos de profundidade 1). Uma curva de grau 4 não pode realizar tal arranjo, pois $2 \times 5 > 2 \times 4$. Lembramos que uma curva de grau 5 terá necessariamente uma pseudo-reta no arranjo.

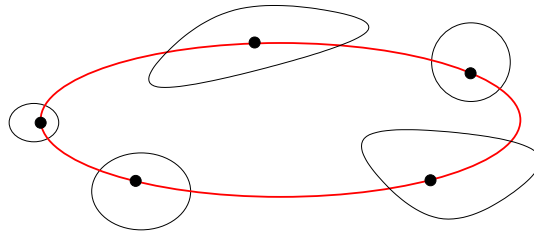


Figura 2.2: conjunto de 5 ovais não realizável por uma curva de grau menor que 6.

Vamos generalizar ainda mais essa argumentação a fim de determinar o número máximo de componentes conexas que uma curva de grau m pode ter.

2.2 Desigualdade de Harnack

Teorema 3 (Harnack, 1876). *Uma curva projetiva plana real de grau m tem no máximo $H_m = \frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$ componentes conexas.*

Uma curva com o número maximal de componentes é chamada de M -curva. Harnack mostrou que existem M -curvas para qualquer grau. Trataremos o caso das M -curvas de grau 6 na Seção 3.2. A demonstração que vamos descrever é a feita pelo próprio Harnack e deriva do Corolário 2 do Teorema de Bézout. Contudo, queremos ressaltar que esse Teorema é meramente topológico como o mostrou Klein alguns anos mais tarde, mas isso é uma outra história...

Demonstração. Começamos considerando pequenos valores para m . O Teorema é evidente para $m = 1$ ou $m = 2$, pois retas e cônicas lisas têm no máximo $H_m = 1$ componente conexa. Tratamos o caso $m = 3$ de uma cúbica, onde queremos mostrar que $H_3 = 2$. A técnica é a mesma que a da Seção acima. Com efeito, se a cúbica tivesse 3 componentes conexas (2 ovais e uma pseudo-reta) poderíamos traçar uma reta que passa pelo interior de cada oval. Essa reta intersectaria cada oval em no mínimo 2 pontos e a pseudo-reta em no mínimo 1 ponto, ou seja, no total de 5 pontos. Pelo Corolário 2 isso é impossível, pois o número de pontos na interseção de uma reta com uma cúbica não pode ultrapassar 3. Logo uma cúbica tem no máximo 2 componentes conexas. Uma cúbica com uma pseudo-reta e um oval existe como veremos na Seção 3.1.1.

Continuamos com o caso $m = 4$ onde temos $H_4 = 4$. Por ser uma curva de grau par, uma quártica possui apenas ovais. Já vimos na Seção 2.1 que se tivesse 5 ovais, então poderíamos traçar uma cônica pelo interior de cada oval. O número de pontos na interseção seria $2 \times 5 = 10$, o que constitui uma contradição com o Corolário 2, pois uma cônica e uma quártica não podem se intersectar em mais de 8 pontos. Finalmente, uma quártica tem no máximo 4 componentes conexas, e uma tal quártica existe como veremos na Seção 3.1.2.

O primeiro caso mais interessante é quando $m = 5$ e $H_5 = 7$. Por ser uma curva de grau ímpar, uma quártica possui uma pseudo-reta e ovais. Se tivesse 7 ovais, então poderíamos traçar uma cúbica pelo interior de cada oval. O número de pontos na interseção daria no mínimo $2 \times 7 + 1 = 15$, o que não constitui uma contradição, pois uma cúbica e uma quártica podem intersectar-se em 15 pontos... de modo que devemos usar mais astúcia. Observe que sobram 2 pontos para determinar a cúbica, pois precisamos de 9 pontos no total. Então, porque não escolher esses pontos sobre a pseudo-reta da

quintica? Dessa maneira, o número de pontos na interseção daria $2 \times 7 + 2 = 16$ e isso contradiz o Corolário 2. Finalmente, uma quintica tem no máximo 7 componentes conexas, e uma tal quintica existe como veremos na Seção 3.1.3.

Passamos ao caso geral. Seja C uma curva de grau m , suponhamos que C possui $H_m + 1$ componentes conexas, dentre as quais ao menos H_m são ovais (isso depende da paridade de m). Uma curva de grau $m - 2$ é determinada por $\frac{(m-2)(m+1)}{2}$ pontos pela Proposição 2, de tal modo que se escolhermos um ponto em cada oval, temos ainda a possibilidade de escolher

$$\frac{(m-2)(m+1)}{2} - \frac{(m-1)(m-2)}{2} - 1 = m - 3$$

pontos pelos quais tal curva pode passar. Então escolhemos esses pontos na componente conexa sobrando e contamos os pontos na interseção dessa curva com C como acima. Obtemos no mínimo $2H_m + (m - 3) = (m - 1)(m - 2) + 2 + (m - 3) = m(m - 2) + 1$ pontos, que contradiz o Corolário 2. Logo C tem no máximo H_m componentes conexas. \square

2.3 Arranjos de até grau 5

Agora podemos recapitular os resultados de proibição acima e fazer a lista de todos os arranjos possíveis para uma curva C , de grau m , até grau 5.

- $m = 1, H_m = 1$: C é uma reta $\langle J \rangle$;
- $m = 2, H_m = 1$: C é vazia $\langle 0 \rangle$ ou realiza um oval $\langle 1 \rangle$;
- $m = 3, H_m = 2$: C realiza uma pseudo-reta $\langle J \rangle$ ou a união de uma pseudo-reta e um oval $\langle J \sqcup 1 \rangle$;
- $m = 4, H_m = 4$: C realiza a união de i , $0 \leq i \leq 4$, ovais sem ninho exceto quando $i = 2$, onde um ninho de profundidade 2 é possível: $\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 4 \rangle$;
- $m = 5, H_m = 7$: C realiza a união de uma pseudo-reta com i , $0 \leq i \leq 6$, ovais sem ninho exceto quando $i = 2$ onde um ninho de profundidade 2 é possível: $\langle J \rangle, \langle J \sqcup 1 \rangle, \langle J \sqcup 2 \rangle, \langle J \sqcup 1 \langle 1 \rangle \rangle, \langle J \sqcup 3 \rangle, \langle J \sqcup 4 \rangle, \langle J \sqcup 5 \rangle, \langle J \sqcup 6 \rangle$.

2.4 Arranjos de M -sêxticas

A lista dos arranjos possíveis das curvas de grau 6 é muito grande. Por isso, vamos restringir nosso estudo ao caso das curvas com o número maximal de componente conexas, chamadas de M -curvas. As M -curvas de grau 6 tem $H_6 = 11$ ovais. Se aplicarmos apenas os resultados de proibição acima não descartaríamos um número suficientemente grande de arranjos que são irrealizáveis, pois existem outras obstruções que limitam os casos. Essas obstruções são resultados profundos cujas demonstrações requerem muitos avanços em topologia, em particular estão fora do alcance do nosso curso. Contudo, para reduzir a lista dos arranjos possíveis, vamos enunciar o Teorema de Rokhlin, que é um exemplo importante de proibição que não se deduz do Teorema de Bézout.

Definição 3. Dizemos que um oval é *par* (resp. *ímpar*) quando está contido numa coleção par (resp. ímpar) de outros ovais.

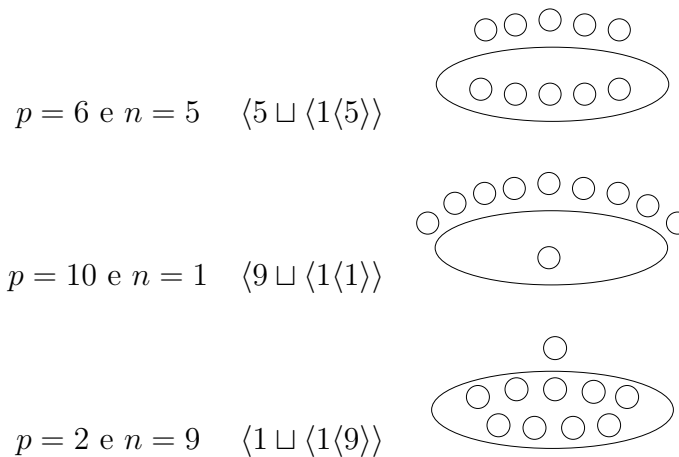
Por exemplo, considere a Figura 2.1. No ninho da esquerda, o oval maior é par (pois 0 é par... certo?), o oval médio é ímpar, e o oval menor é par. No ninho da direita, o maior oval é par e os 2 ovais de dentro são ímpares.

Teorema 4 (Rokhlin). *Seja C uma M -curva projetiva plana real de grau $m = 2k$. Então*

$$p - n = k^2 \pmod{8}$$

onde p (resp. n) é o número de ovais pares (resp. ímpares) de C .

Vejamos o que isso implica no caso de uma curva C de grau $m = 6$. Temos 11 ovais e $3^2 = 9 \equiv 1 \pmod{8}$. Portanto, o número de ovais pares menos o número de ovais ímpares pode ser: $p - n = 1, 9$ ou -7 . Além disso, pelas obstruções precedentes não temos 2 ninhos não encaixados (se não, trace uma reta pelo interior dos ninhos) e a profundidade de um ninho não pode ultrapassar 2 (se não, trace uma reta pelo ninho e um outro oval). Finalmente, a lista dos arranjos se reduz a 3 possibilidades:



Capítulo 3

Construções

Uma vez que reduzimos bastante a lista dos arranjos possíveis através das proibições, devemos provar que tais arranjos são efetivamente realizáveis. Para isso, basta exibirmos um exemplo para cada arranjo que não conseguimos proibir, então teremos determinado todos os arranjos realizáveis. Assim, teremos respondido completamente o problema para curvas de grau $m \leq 6$. Observe que se não conseguimos construir um certo arranjo, então devemos ser capazes de proibi-lo, caso contrário a questão fica em aberto. Por isso, o 16° problema de Hilbert é uma questão muito difícil em toda a generalidade.

3.1 Perturbações

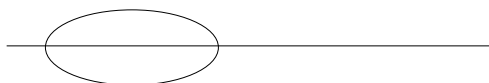
O 16° problema de Hilbert trata de curvas projetivas, que ao contrário das curvas afins, têm uma topologia muito simples (apenas ovais e, eventualmente, uma pseudo-reta). Vimos no capítulo 1 a ligação entre curvas afins e projetivas e como passar de uma representação a outra. Como nosso objetivo é exibir um exemplo de curva (projetiva) realizando tal arranjo, basta raciocinar com curvas afins e eventualmente completar o desenho com os pontos no infinito. A curva projetiva correspondente será dada por homogeneização.

O princípio mais simples para construir curvas consiste em *perturbar* as equações de curvas redutíveis. Isso é, considerar curvas lisas que são muito próximas a uma curva singular simples e cuja topologia global resulte apenas das deformações locais, perto das singularidades.

3.1.1 Cúbicas

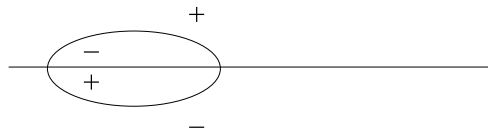
O primeiro caso não trivial é o das curvas de grau 3, chamadas cúbicas. Recapitulamos as configurações possíveis listadas na Seção 2.3 pelas cúbicas (aquelas que não conseguimos proibir): C cúbica lisa real plana é topologicamente uma pseudo-reta $\langle J \rangle$ ou a união de uma pseudo-reta e um oval $\langle J \sqcup 1 \rangle$. O objetivo é exibir uma cúbica de cada tipo e assim fechar o caso de grau $m = 3$. Para isso, vamos perturbar a equação de uma cúbica redutível (e então singular) cuja topologia é bem simples.

Com efeito, consideramos uma cúbica singular, união de uma elipse e de uma reta que se intersectam em dois pontos. A equação de tal curva é dada pelo produto de um polinômio de grau 2: $Q(x, y)$ e uma reta afim: $L(x, y)$. Por exemplo $Q(x, y) = 4y^2 + x^2 - 1$ e $L(x, y) = y$, assim as curvas reais se intersectam em $(-1, 0)$ e $(1, 0)$:



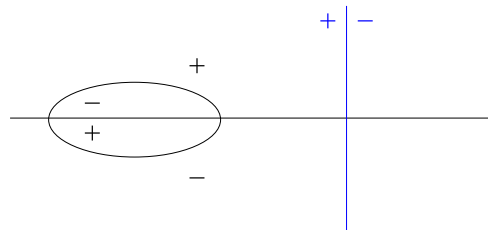
$$Q(x, y)L(x, y) = 0$$

Agora, vamos dividir o plano afim \mathbb{R}^2 segundo o sinal de $Q(x, y)L(x, y)$. Essa divisão é delimitada precisamente quando $Q(x, y)L(x, y) = 0$, ou seja, por nossa curva redutível:



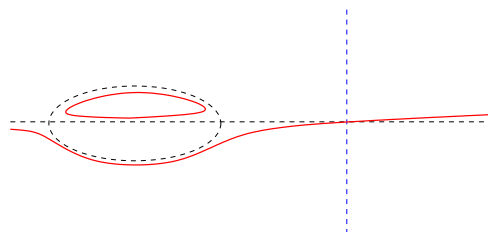
sinais de $Q(x, y)L(x, y)$

Para perturbar nossa equação $Q(x, y)L(x, y) = 0$, vamos agregar um termo afim. Para isso, consideramos uma reta (azul) dada pela equação $l(x, y) = 0$ que intersecta nossa curva apenas num ponto da reta $L(x, y) = 0$. Por exemplo: $l(x, y) = 2 - x$. Outra vez, podemos dividir o plano afim em duas partes segundo o sinal de $l(x, y)$:



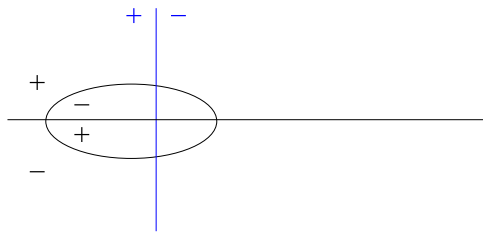
Por fim, *perturbamos* a equação inicial com a equação da reta azul. Isso é, consideramos uma nova equação $Q(x, y)L(x, y) + \varepsilon l(x, y) = 0$, onde $\varepsilon > 0$ é um número real muito “pequeno”. Por muito pequeno queremos dizer um número suficientemente próximo de 0 para que a cúbica $Q(x, y)L(x, y) + \varepsilon l(x, y) = 0$ seja lisa, e tenha a topologia desejada. O raciocínio é muito simples, mesmo se ele não define explicitamente uma cota para ε , compreendemos facilmente que tal cota existe. Além disso, sabemos que as curvas lisas são densas no conjunto das curvas algébricas.

Como é a cúbica $Q(x, y)L(x, y) + \varepsilon l(x, y) = 0$? Se ε é muito próximo de 0, então os valores que anulam o polinômio $Q(x, y)L(x, y) + \varepsilon l(x, y)$ ficam próximos dos valores que anulam $Q(x, y)L(x, y)$, claro? Portanto, a cúbica perturbada se encontra numa vizinhança da nossa curva redutível. Claramente, os pontos de interseção da curva redutível com a reta azul pertencem à cúbica perturbada. Com efeito, se $Q(x, y)L(x, y) = 0$ e $l(x, y) = 0$ então $Q(x, y)L(x, y) + \varepsilon l(x, y) = 0$. Além disso, como ε é positivo, nossa cúbica perturbada se encontra sempre na parte do plano onde $Q(x, y)L(x, y)$ e $l(x, y)$ tem sinais *opostos*, pois $Q(x, y)L(x, y) = -\varepsilon l(x, y)$. E essas informações são suficientes para esboçar o traço da curva e assim determinar a sua topologia: a união $\langle J \sqcup 1 \rangle$ de uma pseudo-reta e um oval!

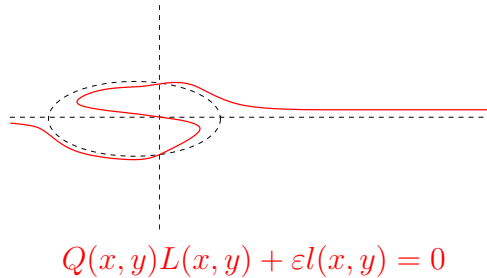


$$Q(x, y)L(x, y) + \varepsilon l(x, y) = 0$$

Para exibir um outro arranjo procurado, basta escolher uma outra reta azul que intersecta, dessa vez, a curva singular em 3 pontos. Por exemplo, a reta dada por $l(x, y) = -x$.



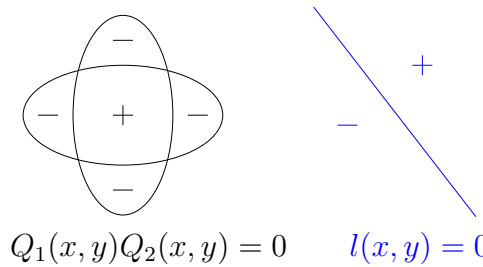
Com o mesmo raciocínio, vemos aparecer uma cúbica lisa feita apenas de uma pseudo-reta $\langle J \rangle!$



O 16° Problema de Hilbert está resolvido para $m \leq 3$.

3.1.2 Quárticas

Com o mesmo método podemos exibir todos arranjos possíveis para as quárticas. Para isso, basta começarmos com a união de duas cônicas $Q_1(x, y)Q_2(x, y) = 0$ que se intersectam em 4 pontos e perturbar a equação por uma reta $l(x, y) = 0$:



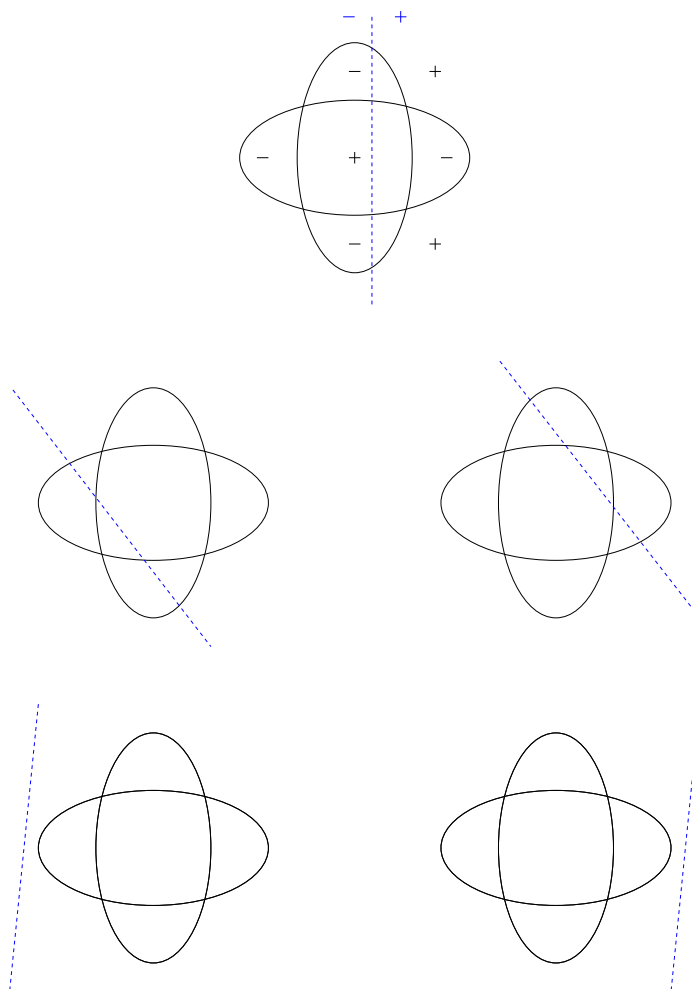
Segundo as posições relativas da reta azul e das cônicas, o resultado das perturbações fornece uma das configurações listada na Seção 2.3: $\langle 1 \rangle$, $\langle 2 \rangle$, $\langle 1 \langle 1 \rangle \rangle$, $\langle 3 \rangle$ e $\langle 4 \rangle$. Ver exercício abaixo.

Além disso, é fácil construir a configuração vazia $\langle 0 \rangle$, por exemplo com a curva $x^4 + y^4 + 1 = 0$.

O 16° Problema de Hilbert está resolvido para $m \leq 4$.

Exercício 4.

1. Esboce o traço da seguinte quártica perturbada

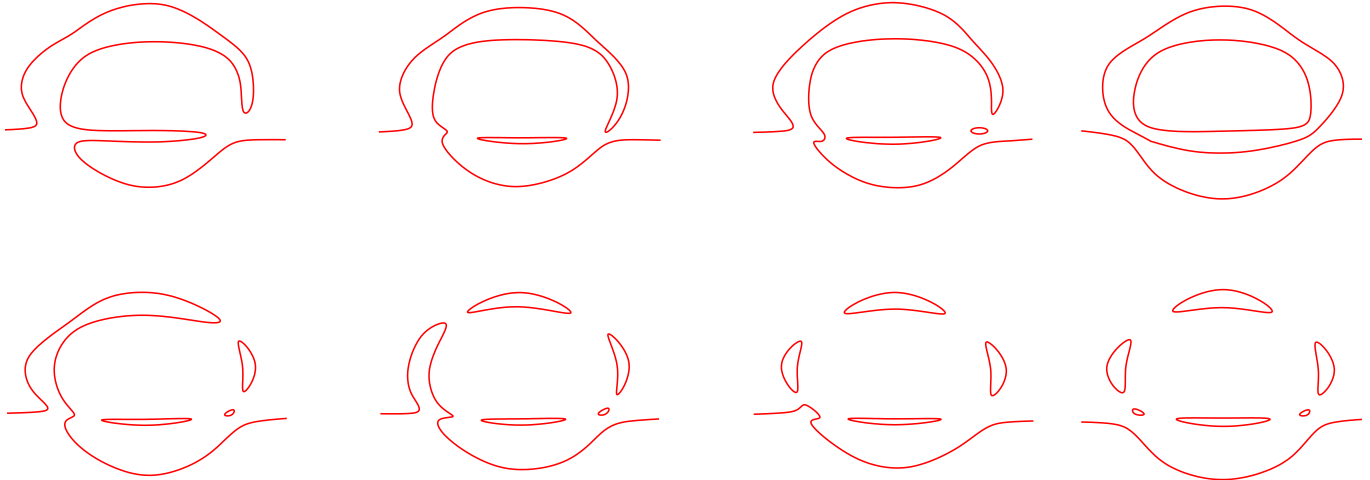
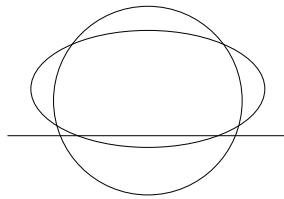


2. Você seria capaz de obter equações explícitas para cada uma das quárticas realizáveis?

3.1.3 Quínticas

Usamos o mesmo método e mesmo raciocínio dessa vez, partimos de uma quántica redutível que é a união de duas cônicas e uma reta, com o número maximal de pontos na interseção. Nesse desenho não incluímos a reta azul. Às vezes, é preciso considerar duas retas... mas não importa, isso não complica e podemos deduzir do desenho da perturbação a posição das retas... exercício!

Exercício 5. Determine a posição de 5 retas para realizar as perturbações das quánticas abaixo:



Portanto, todos arranjos possíveis para quinticas listada na Seção 2.3 são realizáveis (verifique a partir dos traços acima).

O 16° Problema de Hilbert está resolvido para $m \leq 5$.

3.2 M -sêxticas

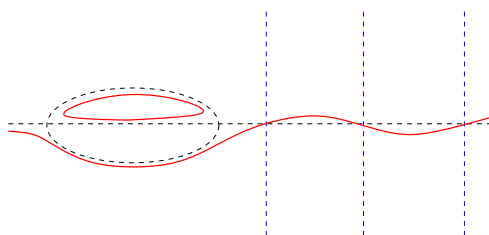
Nessa seção, queremos apenas construir os 3 arranjos possíveis pelas M -sêxticas listados na Seção 2.4. Lembramos que uma M -curva é uma curva plana real com o número maximal de componentes conexas. Pelo Teorema de Harnack, as M -curvas de grau 6 (ou M -sêxticas) têm 11 componentes conexas.

Para construir M -sêxticas, vamos utilizar o mesmo método da seção anterior, mas com termos de grau maior e de forma recursiva. Ou seja, vamos perturbar várias vezes uma curva redutível inicial com uma coleção de retas ou mesmo de cônicas.

3.2.1 Método de Harnack

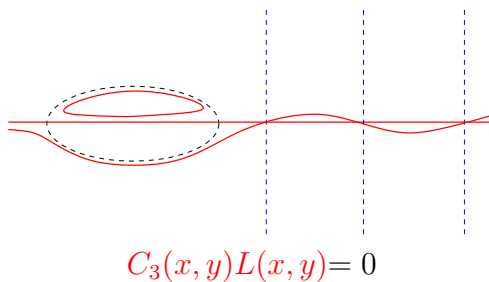
Essa recursão, devido a Harnack, se generaliza e permite demonstrar que a cota de Harnack é exata. Isso é, para qualquer inteiro $m > 0$, existe uma curva plana real de grau m com H_m componentes conexas. Vamos para o caso de recursão de uma curva de grau 6.

Iniciamos com a cúbica redutível da Seção 3.1.1 que perturbamos por uma cúbica C_3 dada por 3 retas $l_1(x, y)l_2(x, y)l_3(x, y)$. Observe que o grau do polinômio perturbado é 3, e também que o uso de 3 retas nos permite trabalhar com polinômios homogêneos.



$$C_3 : Q(x, y)L(x, y) + \varepsilon l_1(x, y)l_2(x, y)l_3(x, y) = 0$$

Dessa vez, não vamos esquecer a reta $L(x, y) = 0$, ao invés disso, consideramos como nova curva redutível a união de C_3 com essa reta que é uma curva de grau 4:



Logo, perturbamos novamente com 4 retas bem posicionadas. Obtemos assim a quártica C_4 seguinte:



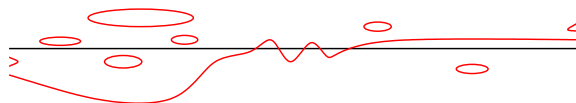
$$C_4 : C_3(x, y)L(x, y) + \varepsilon l_1(x, y)l_2(x, y)l_3(x, y) = 0$$

Novamente, consideramos como nova curva redutível a união de C_4 com a reta $L(x, y) = 0$ que é uma curva de grau 5.



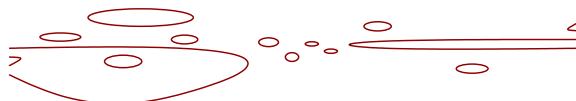
$$C_4(x, y)L(x, y) = 0$$

Logo, perturbamos com 5 retas bem posicionadas. O resultado é uma M -quártica C_5 :



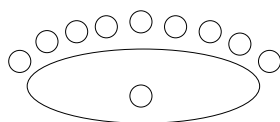
$$C_5(x, y)L(x, y) = 0$$

Terminamos o processo com a perturbação da união de C_5 com a reta $L(x, y) = 0$ com a união de 6 retas bem posicionadas. O resultado é a sêxtica C_6 chamada de M -curva de Harnack.



M -sêxtica de Harnack

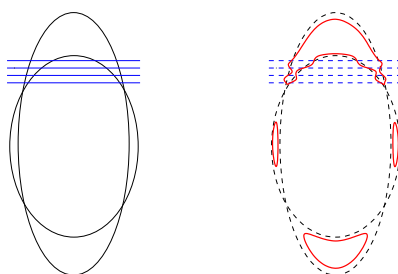
Quando visto no plano projetivo (complete com os pontos no infinitos), a M -sêxtica de Harnack realiza o desenho seguinte:



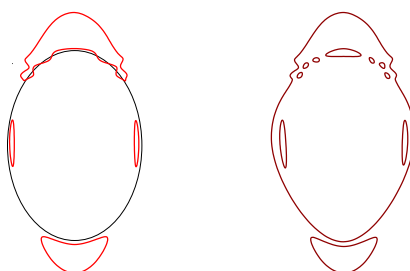
A construção de Harnack prova a realizabilidade do arranjo $\langle 9 \sqcup \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle$ de grau 6.

3.2.2 Método de Hilbert

Para exibir um novo arranjo vamos utilizar uma construção devida a Hilbert e baseada no mesmo método. Dessa vez, começamos com a união de duas cônicas (grau 4), perturbadas pela união de 4 retas, como segue:



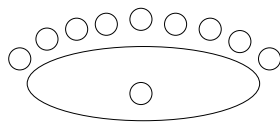
Logo prosseguimos, como no método de Harnack, mas com uma das elipses no lugar da reta, o que gera uma curva de grau $4 + 2 = 6$:



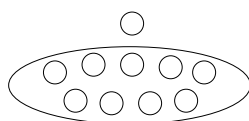
A construção de Hilbert prova a realizabilidade do arranjo $\langle 1 \sqcup \langle 1 \langle 9 \rangle \rangle$ de grau 6.

3.2.3 A curva faltando...

Esquemáticamente as M -sêxticas de Harnack e de Hilbert realizam os arranjos seguinte:

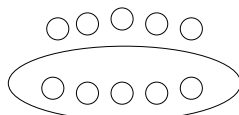


$\langle 9 \sqcup \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle$ a M -sêxtica de Harnack



$\langle 1 \sqcup \langle 1 \langle 9 \rangle \rangle$ a M -sêxtica de Hilbert

Mas temos um outro arranjo por M -sêxticas, listada na Seção 2.4, que não conseguimos proibir.



$\langle 5 \sqcup \langle 1 \langle 5 \rangle \rangle$ a M -curva que falta...

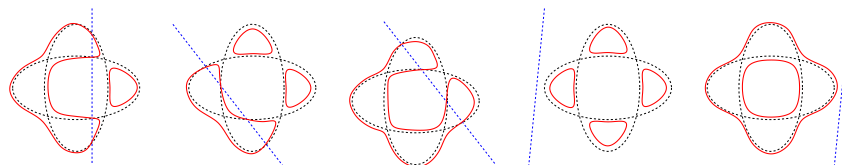
Essa curva tem uma história interessante contada por Viro em [6]. David Hilbert trabalhou duro para construir outros tipos de arranjos por M -sêxticas além dos dois citados, mas não conseguiu. Nessa época as proibições do Teorema de Roklhin (Teorema 4) eram desconhecidas. No momento em que ele enunciou os seus 23 problemas, Hilbert pretendia provar que outros arranjos eram impossíveis. Logo, na publicação da sua apresentação no Congresso Internacional de Matemáticos de 1900, Hilbert declarou-se *convencido* de que não existia outro arranjo por M -sêxticas que os chamados hoje de curvas de Harnack e de Hilbert.

O Problema de Hilbert foi totalmente resolvido até grau 6 pelo matemático russo D.A. Gudkov em 1969.

Em 1954, Gudkov provou, na sua dissertação de candidato (Ph.D.), a afirmação de Hilbert: a curva faltando não é realizável. Porém, 15 anos mais tarde, na sua tese de doutorado, Gudkov invalidou sua prova e construiu a curva faltante. Finalmente, classificou todos os arranjos realizáveis de grau 6 e, no caso das M -curvas, mostrou que a lista dos arranjos da Seção 2.4 é a correta. A curva $\langle 5 \sqcup \langle 1 \langle 5 \rangle \rangle$ é chamada hoje de curva de Gudkov.

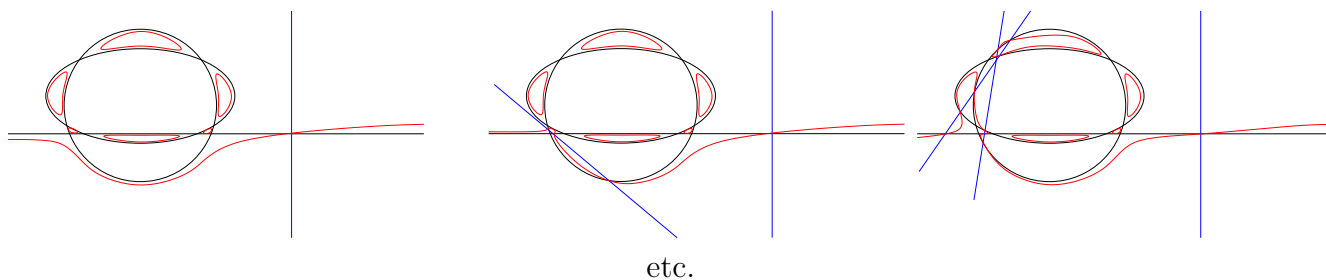
Somente mais tarde, em 1972, os trabalhos de V.I. Arnold e V.A. Rokhlin deram uma compreensão mais precisa das proibições do tipo “não Bézout”. Por exemplo, o Teorema 4 foi inicialmente uma conjectura devida a Gudkov.

Solução do exercício 4.



$$Q_1(x, y)Q_2(x, y) + \varepsilon l(x, y) = 0$$

Solução parcial do exercício 5.



3.3 Patchwork combinatório

Para construir sua curva, Gudkov usou métodos de perturbações similares aos da Seção 3.1. No entanto, esse trabalho é muito mais complexo que o feito acima, por considerar curvas com singularidades mais profundas e transformações projetivas. E este estudo vai muito além do objetivo desse curso.

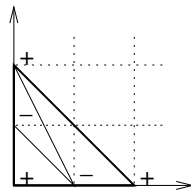
Ao invés disso, vamos aprender um método mais moderno de construção de curvas algébricas planas reais com topologia controlada. Esse método, dito *Patchwork combinatório*, foi criado por Oleg Viro na década de 1970 e constituiu um progresso considerável no estudo do 16° Problema de Hilbert, apresentado 82 anos após Hilbert no Congresso Internacional de Matemáticos em Varsóvia [5].

Oleg Viro¹

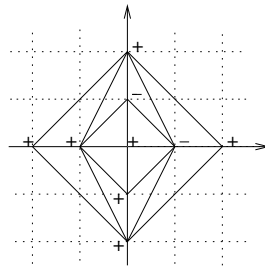
O método, que expurgamos da parte teórica, consiste numa construção lúdica que se assemelha a um quebra-cabeças com muitas simetrias e cujas peças são codificadas por sinais. Desse modo, cada um será capaz de construir uma topologia realizada por uma curva de grau m .

Descrevemos passo a passo a construção exemplificada para grau $m = 2$.

Primeiro, partimos de uma triangulação inteira do simplexo Δ_m de comprimento $m \in \mathbb{N}$ e escolhemos um sinal qualquer para cada vértice inteiro da triangulação.

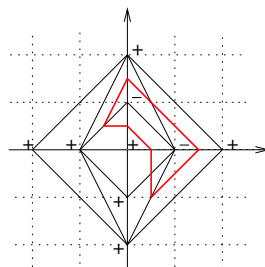
uma triangulação inteira de Δ_2

Logo, aplicamos as três simetrias (axiais e central) a fim de obtermos um losango seguindo a seguinte regra dos sinais: o ponto imagem de (i, j) em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cap \Delta_m$ conserva (resp. troca) o sinal se a distância inteira com o eixo de simetria $|i|$ ou $|j|$ é par (resp. ímpar). Por exemplo, se o ponto inteiro $(1, 0)$ tem sinal negativo, então o ponto imagem pela simetria axial $(-1, 0)$ tem sinal positivo.



simetrias com a regra dos sinais

Por fim, traçamos um caminho que separa os sinais opostos na triangulação do losango.

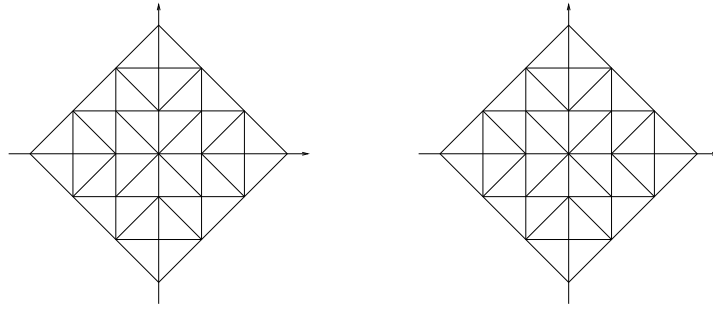


traço entre sinais opostos

O fato extraordinário é que, sob alguma condição, determinamos assim o arranjo de uma curva algébrica real de grau m em $\mathbb{R}P^2$. No desenho acima o caminho vermelho é o traço de uma cônica.

Exercício 6. Para cada subdivisão escolha uma distribuição de sinais e opere o Patchwork. Tente obter os dois arranjos distintos realizáveis de cúbicas.

¹Foto de Karin Breithaupt (MFO - Creative Commons License)



Teorema 5 (Viro). *Se a triangulação inteira de Δ_m é convexa, então existe uma curva algébrica real de grau m em $\mathbb{R}P^2$ que realiza o arranjo determinado pelo traço, onde o losango representa $\mathbb{R}P^2$ e seu bordo a reta no infinito.*

Uma subdivisão inteira de um polígono inteiro é *convexa* quando existe uma função linear por partes $\Gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, convexa e cujo lugar de descontinuidade é a subdivisão.

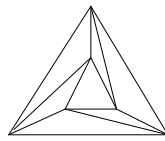
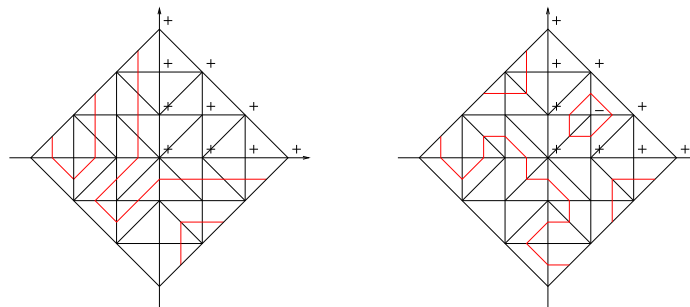


Figura 3.1: uma triangulação não convexa

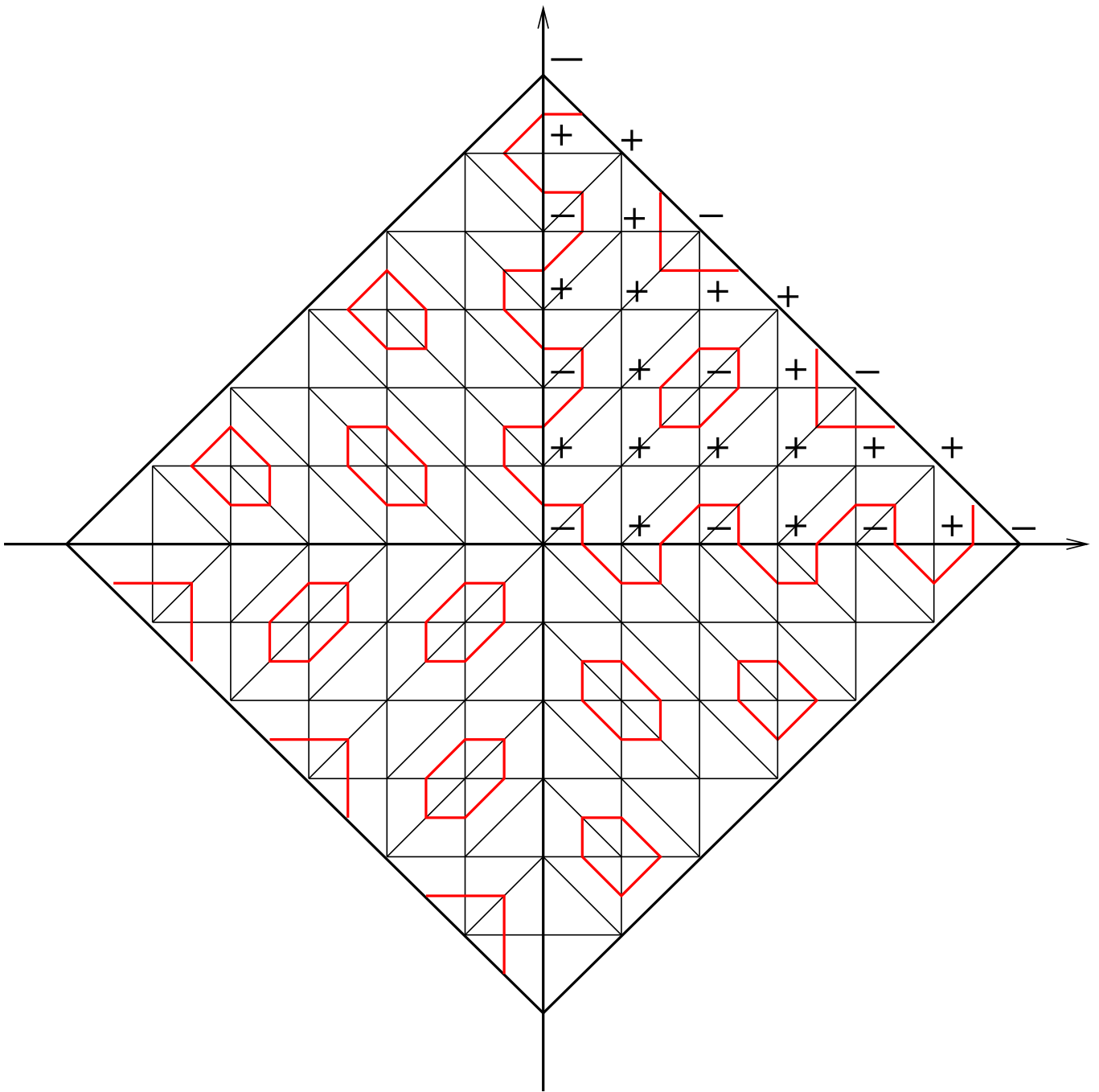
A hipótese de convexidade não é muito difícil de realizar e não vamos nos preocupar com isso. Evidentemente, a demonstração do Teorema de Viro vai bem além do nosso curso; apenas queremos mostrar como essa técnica, fácil de utilizar, cobre os resultados acima e prova a realizabilidade da M -sêxtica de Gudkov.

Dois exemplos de patchworking por $m = 3$ com a mesma triangulação, apenas mudam os sinais (cf. exercício 6):

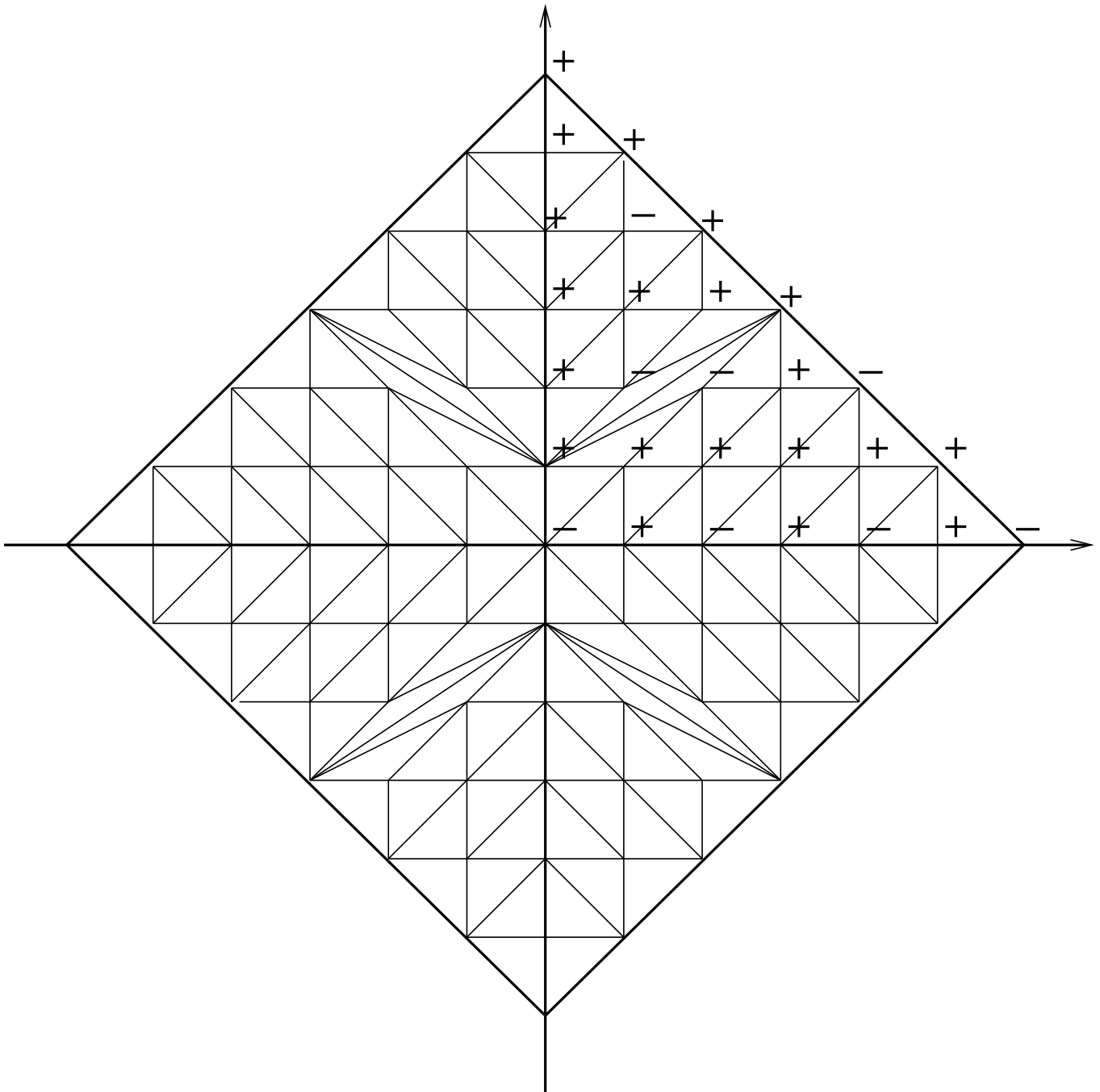


Vemos os dois arranjos $\langle J \rangle$ e $\langle J \sqcup 1 \rangle$ realizáveis por cúbicas.

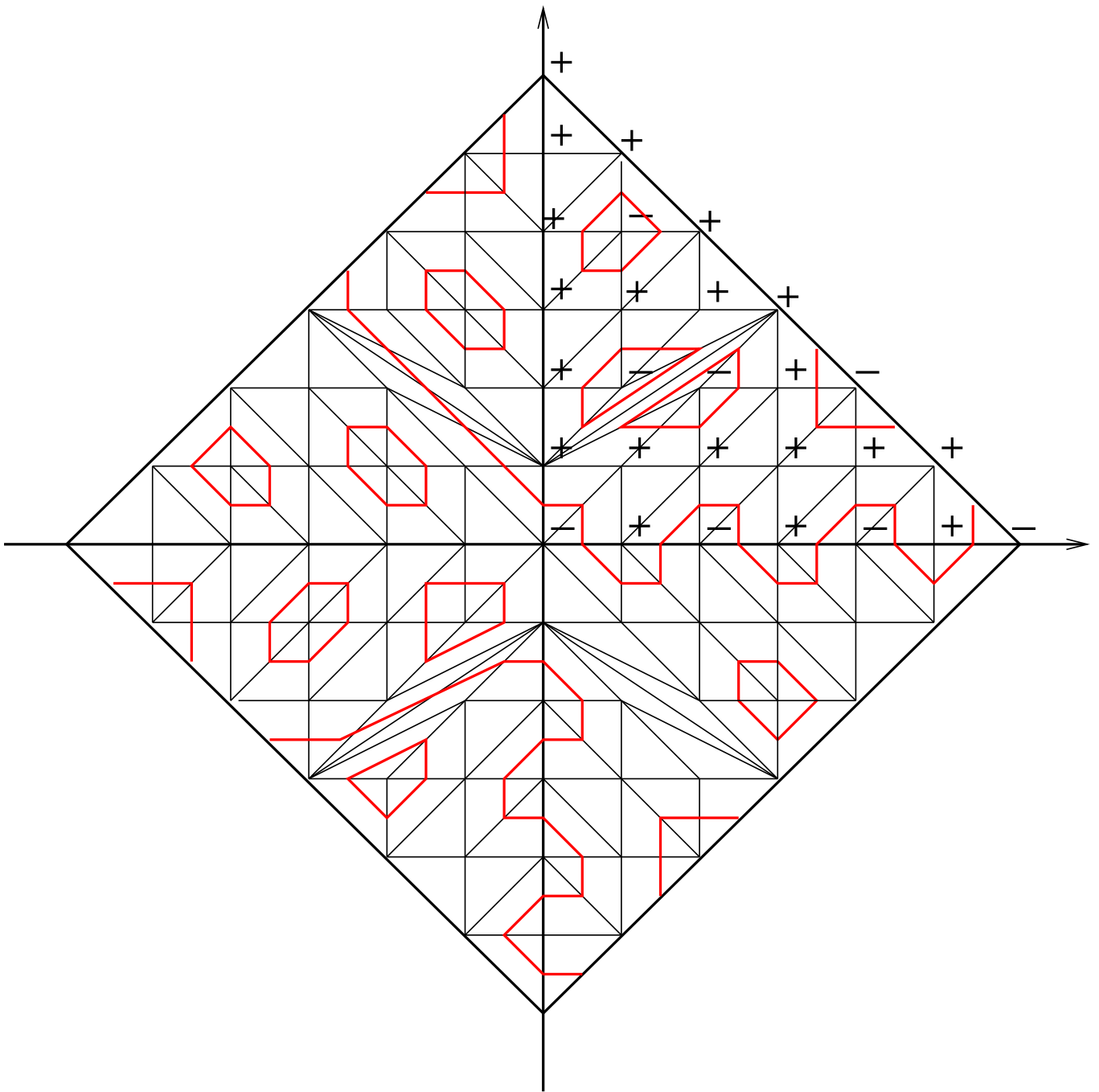
Um patchwork para a M -sêxticas de Harnack:



Exercício 7. Complete som os sinais simetrizados e opere o Patchwork. Qual é o arranjo da curva obtida?



Solução do exercício 7: É a curva que faltava! Isso é o patchwork para a M -curva de Gudkov



Referências Bibliográficas

- [1] C. G. Gibson. *Elementary Geometry of Algebraic Curves: An Undergraduate Introduction*. Cambridge University Press, 2001.
- [2] D. Hilbert. Mathematical Problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 8(10): 437-479, 1902.
- [3] V. A. Rokhlin. Congruences modulo 16 in Hilbert's sixteenth problem. *Functional Analysis and Its Applications*, 7(2): 163-164, 1973.
- [4] I. Vaisencher. *Introdução às Curvas Algébricas Planas*. IMPA, Coleção Matemática Universitária, 2005.
- [5] O. Viro. *Real Algebraic Varieties With Prescribed Topology*. Livro em preparação. A maior parte desse curso é baseado no primeiro capítulo: *Early Study of Real Algebraic Plane Curves*. Acessível no endereço: www.pdmi.ras.ru/~olegviro/es.
- [6] O. Viro. *The 16th Hilbert problem, a story of mystery, mistakes and solution*. Apresentação no MSRI o 20 de abril de 2007.