II Colóquio de Matemática do Centro Oeste
07-11/11/2011

Matrizes: existem perguntas que ainda não sabemos responder?
Uma Introdução às Álgebras com Identidades Polinomiais

Alda Dayana Mattos, Júlio César dos Reis, Manuela da Silva Souza

Sumário

Introdução **1**

1 Estruturas algébricas **3**

1.1 Grupos abelianos, anéis, corpos e espaços vetoriais . . . 3

1.2 Álgebras . . . 8

1.3 Exemplos . . . 11

2 PI-Álgebras **15**

2.1 Identidades polinomiais e PI-Álgebras . . . 15

2.2 T-ideal . . . 21

3 O Teorema de Amitsur-Levitzki **24**

3.1 Propriedades adicionais do polinômio standard . . . 24

3.2 Representação gráfica do produto de matrizes elementares . . . 25

3.3 O Teorema de Amitsur-Levitzki . . . 29

3.4 A prova do Teorema de Amitsur-Levitzki . . . 30

3.5 Perguntas que ainda não sabemos responder . . . 31

3.6 Onde e com quem estudar PI-álgebra no Brasil . . . 32

Referências **34**

Introdução

O presente texto faz parte das notas de aulas do Minicurso 5 “ Matrizes: existem perguntas que ainda não sabemos responder? Uma introdução às álgebras com identidades polinomiais” ministrado no II Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste, realizado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e pelo Departamento de Matemática (DMAT) do Instituto de Ciências Exatas e da Terra (ICET), da Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT), no período de 7 a 11 de novembro de 2011, em Cuiabá-MT.

Álgebras são estruturas que se comportam bem com relação às três operações: soma, produto e produto por escalar. Nosso principal exemplo de álgebra será o conjunto das matrizes. Se, além do bom comportamento, a álgebra tiver a propriedade adicional de que existem polinômios, em variáveis não comutativas, que se anulam quando avaliados em quaisquer elementos da álgebra, este polinômio será dito ser uma identidade polinomial e a álgebra será chamada de álgebra com identidade polinomial. Novamente, as matrizes são um bom exemplo de álgebra com identidade polinomial.

Temos assim uma nova teoria, chamada de teoria das álgebras com identidades polinomiais, que teve início na década de 40 do século XX, com os trabalhos de matemáticos como: Jacobson, Kaplansky, Levitzki, Dubnov e Ivanov. Esta teoria começou a se desenvolver mais intensamente por volta de 1950 quando foi provado o Teorema de Amitsur- Levitzki. Dada a sua importância, este teorema será demonstrado nestas notas.

Dentre as principais curiosidades da teoria das álgebras com identidades polinomiais, está o fato de que existem perguntas relevantes para a teoria, facéis de enunciar, para as quais não se tem a menor ideia das respostas. Quando lembramos que o nosso principal exemplo são as matrizes, temos perguntas importantes que ainda não sabemos responder mesmo para matrizes de ordem 2 ou de ordem 3. Este fato é surpreendente. Como conhecemos as matrizes desde o ensino médio, temos a falsa impressão que sabemos responder qualquer pergunta sobre elas.

Quanto a organização destas notas, escolhemos a seguinte ordem: começaremos com definições de estruturas algébricas para então entrarmos em conceitos básicos de álgebras com identidades polinomiais e demonstraremos o Teorema de Amitsur-Levitzki.

Decidimos também dar ênfase em exemplos, de modo que muitos resultados serão apresentados em exemplos. Geralmente, a ideia é a mesma do caso geral, mas no caso geral surgem dificuldades que são essencialmente técnicas.

Ao final das notas, exibimos uma lista de lugares e pessoas que estudam esta teoria no Brasil. Com certeza, esquecemos de alguém, por mais que tenhamos nos esforçado para evitar isso. De modo que pedimos desculpas pela omissão de algum nome.

Também na bibliografia listamos artigos, livros, dissertações e teses que seriam interessantes para iniciar as leituras nesta teoria. Se na lista anterior tentamos ser completos, nesta não tivemos a menor pretensão: o rol é muito grande.

Agradecimentos

Os autores são gratos a todos que tornaram possível a confecção da presente nota e a realização do minicurso no evento. Dentre estes, queremos agradecer principalmente:

- aos organizadores II Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste, em especial à SBM e ao DMAT do ICET da UFMT, pela oportunidade;
- ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), pelo apoio e incentivo;
- ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo suporte financeiro;
- à Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB) pelo apoio;
- ao professor Plamen Emilov Kochloukov da Unicamp, por apresentar aos autores o maravilhoso mundo das PI-álgebras.

Alda Dayana Mattos
Júlio César dos Reis
Manuela da Silva Souza
Cuiabá, novembro de 2011.

Capítulo 1

Estruturas algébricas

Uma estrutura algébrica consiste num conjunto não vazio associado a uma ou mais operações sobre este conjunto, sujeitas a certas regras. Em algumas estruturas algébricas, além do conjunto principal, existe mais um conjunto, denominado conjunto de escalares. Neste caso, é possível definir operações entre elementos do conjunto principal e o conjunto de escalares. São exemplos de estruturas algébricas: grupos, anéis, corpos e espaços vetoriais. Neste capítulo, nosso principal objetivo é introduzir a estrutura algébrica denominada *álgebra.* Essa estrutura será a base do estudo que faremos; é o terreno onde se desenvolve a teoria das álgebras com identidades polinomiais.

1.1 Grupos abelianos, anéis, corpos e espaços vetoriais

Examinemos alguns aspectos relacionados a dois conjuntos certamente familiares ao leitor. O primeiro é o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos e o outro é o conjunto $M_2(\mathbb{R})$ das matrizes reais de ordem 2.

A primeira vista pode parecer que tais conjuntos nada têm em comum. Mas, veremos que eles são mais parecidos do que a nossa intuição nos diz.

No conjunto dos números complexos está definido uma soma natural, certo? A soma de números complexos, operação esta que estamos acostumados a fazer desde os tempos de colégio. Apenas para relembrar, se $z = a + bi$ e $w = c + di$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, são dois números complexos temos que

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

é um número complexo obtido, somando-se parte real com parte real e parte imaginária com parte imaginária.

No conjunto das matrizes também está definido uma soma, a soma de matrizes, nossa velha conhecida. Sendo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ duas matrizes arbitrárias de ordem 2 com entradas reais temos que:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix},$$

isto é, a soma de matrizes é coordenada a coordenada.

Tanto a soma em $\mathbb{C}$ como soma de matrizes são operações associativas, comutativas, admitem um elemento neutro (o 0 + 0i no caso dos números complexos e a matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no conjunto das matrizes), e cada elemento desses conjuntos tem direito a um elemento oposto, com respeito a soma, no seu respectivo conjunto.

As somas definidas nos dois conjuntos são diferentes mas elas admitem o mesmo comportamento: associatividade, comutatividade, existência do elemento neutro e todo elemento tem direito a um elemento oposto. Não é por acaso que chamamos as duas operações pelo mesmo nome. Logo esses conjuntos apresentam uma "coincidência estrutural" em relação a operação soma.

Com estes exemplos como modelo, podemos abstrair e dar a seguinte definição:

Definição 1 *Um* grupo abeliano $(\mathcal{G}, +)$ *é um conjunto não vazio* $\mathcal{G}$, *munido de uma operação denotada por* $+$ *(chamada soma), tais que para todo* $x, y, z \in \mathcal{G}$, *as seguintes condições são satisfeitas:*

S1: *(x+y)+z = x + (y+z) (associatividade da soma);*

S2: *Existe* $0 \in \mathcal{G}$, *tal que* $0 + x = x + 0 = x$ *(existência do elemento neutro da soma);*

S3: *Para cada elemento* $x \in \mathcal{G}$, *existe* $-x \in \mathcal{G}$, *tal que* $x + (-x) = (-x) + x = 0$ *(existência do elemento oposto com respeito a soma);*

S4: $x + y = y + x$ *(comutatividade da soma).*

A grosso modo,

$$\textbf{GRUPO ABELIANO} \left\{ \begin{array}{l} \bullet \ \text{Um conjunto } \mathcal{G}, \text{ não vazio} \\ \\ \bullet \ \text{Uma operação } \left\{ \bullet \ \text{Soma} \quad + \quad \text{Regras} \right. \end{array} \right.$$

As "coincidências" não param por aí.

Em cada um desses conjuntos existe um produto natural. Produto de números complexos em $\mathbb{C}$ e produto de matrizes em $M_2(\mathbb{R})$.

O produto de dois números complexos $z = a+bi$ e $w = c+di$ arbitrários é obtido da seguinte forma:

$$zw = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Note que o resultado constitui um número complexo com parte real $ac - bd$ e parte imaginária $ad + bc$. Já o produto de duas matrizes arbitrárias de $M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ é dado da seguinte forma:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Esses produtos são associativos e admitem um elemento neutro (o $1 + 0i$ no caso dos números complexos e a matriz identidade $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no caso do conjunto das matrizes).

O comportamento da operação que estamos chamando de produto é o mesmo para as duas estruturas. Uma observação importante é que não estamos utilizando um símbolo para denotar o produto de dois números complexos ou de duas matrizes (para a soma usamos o símbolo +). A operação, neste dois casos, fica completamente determinada e clara apenas ao fazermos a justaposição dos elementos.

Além disso, tanto no caso dos números complexos como no caso das matrizes, existe uma espécie de compatibilidade da soma com o produto. Mais precisamente, para quaisquer $z, w, u \in \mathbb{C}$ e $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$ temos:

$$z(w + u) = zw + zu \text{ e}$$

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Essa compatibilidade é a propriedade que conhecemos pelo nome de distributividade.

Note que agora os mesmos conjuntos apresentam uma "coincidência estrutural" no que se refere a soma e ao produto, definidos sobre eles, e ainda uma compatibilidade entre essas operações.

Novamente, podemos abstrair e generalizar o que foi comentado acima da seguinte forma:

Definição 2 *Um* anel $(\mathcal{R}, +, *)$ *é um conjunto não vazio* $\mathcal{R}$*, munido de uma operação denotada por* $+$ *(chamada de soma) e de uma operação denotada por* $*$ *(chamada de produto), tais que para todo* $x, y, z \in \mathcal{R}$*, as seguintes condições são satisfeitas:*

- **S:** $(\mathcal{R}, +)$ *é um grupo abeliano, em outras palavras, o conjunto* $\mathcal{R}$ *com respeito a soma satisfaz as propriedades* **S1**, **S2**, **S3** *e* **S4***;*
- **P1:** $(x * y) * z = x * (y * z)$ *(associatividade do produto);*
- **P2:** *Existe* $1 \in \mathcal{R}$*, tal que* $1 * x = x * 1 = x$ *(existência do elemento neutro do produto);*
- **D:** $x * (y + z) = x * y + x * z$ *e* $x * (y + z) = x * y + x * z$ *(distributividade da soma com respeito ao produto).*

De forma resumida,

$$\textbf{ANEL} \begin{cases} \bullet \text{ Um conjunto } \mathcal{R}, \text{ não vazio} \\ \bullet \text{ Duas operações } \begin{cases} \bullet \text{ Soma} \\ \\ \bullet \text{ Produto} \end{cases} + \quad \text{Regras} \end{cases}$$

Precisamente, devido as propriedades **P1** e **P2**, nossa definição de anel corresponde na verdade a definição de anel associativo com unidade. Anéis não-associativos ou sem unidade podem ocorrer em matemática e também são muito usados, mas não vamos considerá-los aqui.

Um anel $(\mathcal{R}, +, *)$ que satisfaz a comutatividade do produto, ou seja, para quaisquer $x, y \in \mathcal{R}$ vale a igualdade

$$x * y = y * x,$$

é chamado de *anel comutativo*.

Fixando o olhar apenas no conjunto dos números complexos, o produto definido nesse conjunto tem mais duas propriedades interessantes: é comutativo e todo número complexo não nulo possui um inverso. De fato, a comutatividade, ou seja, para quaisquer z, w números complexos vale a propriedade

$$zw = wz,$$

segue diretamente da forma como calculamos o produto. Dado $z = a + bi$ um número complexo não nulo, ou seja, a, b não são simultaneamente zero, é fácil verificar que o número complexo

$$\frac{\bar{z}}{|z|} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}$$

é o inverso de z, isto é, $\frac{z\bar{z}}{|z|} = 1$, onde $\bar{z}$ é o conjugado do número complexo z e $|z|$ é a sua norma.

Note que no caso de matrizes nenhuma das duas propriedades acima é satisfeita. Com efeito, tomando $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, temos que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, mas $BA = 0$ (apenas para relembrar, neste caso "0" significa a matriz nula).

Conclusão: $M_2(\mathbb{R})$ não é comutativo.

Essa propriedade, que é contrária a nossa experiência usual e intuição, dá uma riqueza enorme ao conjunto de matrizes, como veremos nos próximos capítulos. Além disso, como $\det A = \det B = 0$, ambas as matrizes não são invertíveis.

Diante do que foi observado anteriormente sobre o conjunto dos números complexos, podemos dizer que o mesmo, munido com as operações soma e produto usuais, pertence a uma classe de anéis comutativos altamente particular, mas muito importante definida abaixo:

Definição 3 *Um anel* $(\mathbb{K}, +, *)$ *é um* corpo*, se para todo* $x, y \in \mathbb{K}$*, as seguintes condições em relação ao produto* $*$ *são satisfeitas:*

P3: $x * y = y * x$ *(comutatividade do produto);*

P4: *Para cada elemento* $x \in \mathbb{K}$*, existe* $x^{-1} \in \mathbb{K}$*, tal que* $x * x^{-1} = x^{-1} * x = 1$ *(existência do elemento inverso com respeito ao produto).*

Note que os conjuntos $\mathbb{Q}$ dos números racionais e $\mathbb{R}$ dos números reais, com as operações usuais de soma e produto, são também exemplos de corpos.

Em poucas palavras, um corpo é um conjunto em que a soma e produto sobre seus elementos se comporta como soma e produto de números.

Observação 4 *Seja* $\mathbb{Z}_2$ *o conjunto dos inteiros módulo 2 com as operações de adição e multiplicação módulo 2. Ou seja, os elementos de* $\mathbb{Z}_2$ *são os dois símbolos* $\bar{0}, \bar{1}$ *onde:*

i) $\bar{i} + \bar{j} = \bar{k}$*, onde* k *é o resto da divisão de* $i + j$ *por 2.*

ii) $\bar{i}.\bar{j} = \bar{m}$*, onde* m *é o resto da divisão da* ij *por 2.*

É facil verificar que $\mathbb{Z}_2$ *é um anel comutativo. Mais ainda, como* $\bar{1}.\bar{1} = \bar{1}$ *(ou seja,* $\bar{1}$ *é o inverso dele mesmo),* $\mathbb{Z}_2$ *é um corpo. Como possui um número finito de elementos, é denominado um* corpo finito.

Usando raciocínio análogo, é possível verificar que se p *é um número primo positivo,* $\mathbb{Z}_p$*, ou seja, o conjunto dos inteiros módulo* p*, é também um corpo finito.*

Note que em $\mathbb{Z}_p$

$$\underbrace{\bar{1} + \bar{1} + \cdots + \bar{1}}_{p-vezes} = \bar{0}.$$

Essa propriedade curiosa não ocorre, por exemplo, em corpos como $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$.

Dado um corpo $\mathbb{K}$*, dizemos que a* característica de $\mathbb{K}$ *é igual a* n *e denotamos por char* $\mathbb{K} = n$*, se* n *é o menor inteiro positivo, de forma que*

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n-vezes} = 0.$$

Quando não existe inteiro positivo tal que isso ocorra, dizemos que char $\mathbb{K} = 0$. *Segue imediatamente da definição que*

$$char\ \mathbb{Q} = char\ \mathbb{R} = char\ \mathbb{C} = 0,$$

e que

$$char\ \mathbb{Z}_p = p.$$

Não é difícil mostrar que a característica de um corpo é sempre 0 ou um número primo.

Voltemos as semelhanças entre $\mathbb{C}$ e $M_2(\mathbb{R})$.

É possível multiplicar um número complexo por um número real e uma matriz por um número real da seguinte forma: dados $\alpha \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C}, A \in M_2(\mathbb{R})$ temos:

$$\alpha w = \alpha(a + bi) = \alpha a + \alpha bi$$

e

$$\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}.$$

Essas multiplicações por elementos de $\mathbb{R}$, que exercendo essa função é denominado de conjunto de escalares, é chamada produto por escalar e tem as seguintes propriedades, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $z, w \in \mathbb{C}$ e $A, B \in M_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rcl} \alpha(\beta z) & = & (\alpha\beta)z, \\ 1z & = & z, \\ (\alpha + \beta)z & = & \alpha z + \beta z, \\ \alpha(z + w) & = & \alpha z + \alpha w; \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \alpha(\beta A) & = & (\alpha\beta)A, \\ 1A & = & A, \\ (\alpha + \beta)A & = & \alpha A + \beta A, \\ \alpha(A + B) & = & \alpha A + \alpha B. \end{array}$$

Note que as propriedades são as mesmas nos dois casos. Uma maneira simplificada de escrevermos as propriedades acima, para os dois conjuntos simultaneamente, seria trocarmos os símbolos específicos de cada conjunto, z, w no caso dos números complexos e A, B no caso das matrizes, por símbolos génericos x, y, em que esses símbolos representariam os elementos de um fixado conjunto. Uma observação importante é que as duas últimas propriedades relacionam o produto por escalar com a soma. Novamente uma espécie de compatibilidade entre as operações.

Agora os mesmos conjuntos apresentam novamente uma “coincidência estrutural” no que se refere a soma e ao produto por escalar definidos sobre eles e ainda uma compatibilidade entre essas operações.

Generalizando, temos a próxima definição:

Definição 5 *Seja* $\mathbb{K}$ *um corpo (não necessariamente o conjunto dos números racionais, reais ou complexos). Um* espaço vetorial $(\mathcal{V}, +, .)$ *sobre* $\mathbb{K}$ *é um conjunto não vazio* $\mathcal{V}$, *munido de uma operação denotada por* $+$ *(chamada de soma) e de uma operação entre os elementos de* $\mathbb{K}$ *e os elementos de* $\mathcal{V}$, *denotada por . (chamada de produto por escalar), tais que para todo* $x, y \in \mathcal{V}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, *as seguintes condições são satisfeitas:*

S: $(\mathcal{V}, +)$ *é um grupo abeliano, em outras palavras, o conjunto* $\mathcal{V}$ *com respeito a soma satisfaz as propriedades* **S1, S2, S3 e S4;**

PE1: $\alpha.(\beta x) = (\alpha\beta).x$;

PE2: $1.x = x$;

PE3: $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$;

PE4: $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$.

Essencialmente,

$$\textbf{ESPAÇO VETORIAL} \begin{cases} \bullet \ \text{Um corpo } \mathbb{K} \text{ de escalares} \\[1em] \bullet \ \text{Um conjunto } \mathcal{V}, \text{ não vazio} \\[1em] \bullet \ \text{Duas operações } \begin{cases} \bullet \ \text{Soma} \\[1em] \bullet \ \text{Produto por escalar} \end{cases} + \ \text{Regras} \end{cases}$$

1.2 Álgebras

Agora vamos pensar nos conjuntos $\mathbb{C}$ e $M_2(\mathbb{R})$ munidos simultaneamente das três operações usuais (em cada caso), soma, produto e produto por escalar, obedecendo as propriedades comentadas na seção anterior. Até agora, indiretamente, concluímos o seguinte:

- $M_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{C}$ são anéis com respeito a soma e o produto;
- $M_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{C}$ são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ com relação a soma e produto por escalar.

Como já era de se esperar, existe também uma compatibilidade entre o produto e o produto por escalar, ou seja, para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$, $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ vale as seguintes igualdades:

$$(\alpha z)w = z(\alpha w) = \alpha(zw),$$

$$(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB).$$

Finalmente, estamos prontos para entender a estrutura que mais nos interessa nesse contexto a chamada álgebra, ou seja, a junção de todas estruturas anteriores juntamente com a generalização da propriedade acima.

Definição 6 *Seja* $\mathbb{K}$ *um corpo. Uma* álgebra $(\mathcal{A}, +, *, .)$ *sobre* $\mathbb{K}$ *é um conjunto não vazio* $\mathcal{A}$*, munido de uma operação denotada por* $+$ *(chamada de soma), de uma operação denotada por* $*$ *(chamada de produto) e de uma operação entre os elementos de* $\mathbb{K}$ *e os elementos de* $\mathcal{A}$*, notada por* . *(chamada de produto por escalar), tais que para todo* $x, y \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{K}$*, as seguintes condições são satisfeitas:*

- $(\mathcal{A}, +, *)$ *é um anel, em outras palavras, o conjunto* $\mathcal{A}$ *com respeito a soma e ao produto satisfaz as propriedades* **S1**, **S2**, **S3**, **S4**, **P1**, **P2** *e* **D**;

- $(\mathcal{A}, +, .)$ *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$*, em outras palavras, o conjunto* $\mathcal{A}$ *com respeito a soma e ao produto por escalar satisfaz as propriedades* **S1**, **S2**, **S3**, **S4**, **PE1**, **PE2**, **PE3** *e* **PE4**;

- $(\alpha.x) * y = x * (\alpha.y) = \alpha.(x * y)$.

Em poucas palavras,

$$\textbf{ÁLGEBRA} \begin{cases} \bullet\ \text{Um corpo } \mathbb{K} \text{ de escalares} \\ \\ \bullet\ \text{Um conjunto } \mathcal{A},\ \text{não vazio} \\ \\ \bullet\ \text{Três operações} \begin{cases} \bullet\ \text{Soma} \\ \bullet\ \text{Produto por escalar} \quad + \quad \text{Regras} \\ \bullet\ \text{Produto} \end{cases} \end{cases}$$

Para não ficarmos sobrecarregados com detalhes, gostaríamos apenas que o leitor guardasse em sua memória, até o final desse texto, o esquema anterior, não esquecendo que as operações de uma álgebra estão sujeitas a certas regras que podem e devem ser consultadas sempre que necessário. Isso será suficiente. Para facilitar possíveis consultas, nas últimas páginas do capítulo 1, o leitor encontrará uma cópia, um pouco mais detalhada, do esquema anterior e todas as propriedades que as operações de uma álgebra precisam satisfazer. Tais regras foram listadas em blocos de forma que fique claro que operações uma dada propriedade relaciona.

Muitas vezes deixaremos de indicar as operações das estruturas, principalmente quando as mesmas são claras ao leitor. Escreveremos apenas $\mathcal{A}$ para denotar uma álgebra $(\mathcal{A}, +, *, .)$, $\mathcal{R}$ para denotar um anel $(\mathcal{R}, +, *)$ e $\mathcal{V}$ para denotar um espaço vetorial $(\mathcal{V}, +, .)$. Também, quando não existir ambiguidade, escreveremos αx no lugar de $\alpha.x$ e xy no lugar de $x * y$. Note que quando estávamos tratando do conjunto dos números complexos e do conjunto das matrizes de ordem 2, tais convenções apareceram naturalmente.

Segue diretamente da definição que a noção de álgebra é um caso particular de ambas as noções de espaço vetorial e de anel.

Agora vamos relembrar um pouco alguns conceitos de álgebra linear e de teoria de anéis que serão úteis no estudo de álgebras que faremos neste texto.

Definição 7 *Uma* base *de um espaço vetorial* $\mathcal{V}$ *é um conjunto* $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ *linearmente independente que gera* $\mathcal{V}$*. Isto significa que todo elemento* $x \in \mathcal{V}$ *se exprime de modo único, como combinação linear*

$$x = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_m b_m$$

de elementos da base $b_1, \ldots, b_m$ *com escalares* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ *do corpo* $\mathbb{K}$.

Um fato não trivial é que todo espaço vetorial possui uma base (não necessariamente finita). A demonstração desse fato faz uso de um resultado muito usado na matemática chamado Lema de Zorn.

Diz-se que o espaço vetorial $\mathcal{V}$ tem *dimensão finita* quando admite uma base $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_k\}$ com um número finito k de elementos. Este número, que é o mesmo para todas as bases de $\mathcal{V}$, chama-se a *dimensão do espaço vetorial* $\mathcal{V}$: $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = k$.

Diz-se que o espaço vetorial $\mathcal{V}$ tem *dimensão infinita* e denotamos por $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = \infty$ quando ele não tem dimensão finita, isto é, quando nenhum subconjunto finito de $\mathcal{V}$ é uma base.

Observação 8 *Toda vez que falarmos da dimensão de uma álgebra $\mathcal{A}$, estamos nos referindo a dimensão de $\mathcal{A}$ como espaço vetorial.*

As próximas definições são muito usadas no estudo de teoria de anéis.

Definição 9 *Uma álgebra $\mathcal{A}$ é dita* comutativa*, se é um anel comutativo, ou seja, se para elementos arbitrários x, y em $\mathcal{A}$ temos:*

$$x * y = y * x.$$

Definição 10 *Uma* subálgebra *de uma álgebra $\mathcal{A}$ é um subconjunto não vazio $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ que é fechado em relação as três operações de $\mathcal{A}$, soma, produto e produto por escalar, ou seja, este subconjunto é ao mesmo tempo um subespaço vetorial e um subanel de $\mathcal{A}$.*

Definição 11 *Uma subálgebra I de $\mathcal{A}$ é chamada um ideal à esquerda de $\mathcal{A}$ se $\mathcal{A}I \subset I$ (ou seja, $a * i \in I$ para todo $a \in \mathcal{A}, i \in I$) e é chamada um ideal à direita de $\mathcal{A}$ se $I\mathcal{A} \subset I$ (ou seja, $i * a \in I$ para todo $a \in \mathcal{A}, i \in I$). Se I é simultaneamente um ideal à esquerda e à direita, dizemos simplesmente que I é um* ideal.

Se $\mathcal{S}$ é um subconjunto qualquer de uma álgebra $\mathcal{A}$ define-se o *ideal gerado por* $\mathcal{S}$ como o menor ideal de $\mathcal{A}$ que contém $\mathcal{S}$. Este ideal, usualmente denotado por $\langle \mathcal{S} \rangle$, se $\mathcal{S}$ é não vazio, é precisamente o conjunto de todas as somas finitas da forma

$$a_1 s_1 c_1 + a_2 s_2 c_2 + \cdots + a_m s_m c_m,$$

em que $a_i, c_i \in \mathcal{A}$ e $s_i \in \mathcal{S}$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Um ideal I é dito ser *gerado por um subconjunto* $\mathcal{S} \subset I$ se,

$$I = \langle \mathcal{S} \rangle.$$

Se existe $\mathcal{S}$ finito tal que isso ocorra, dizemos que I é *finitamente gerado.*

No estudo de estruturas algébricas (grupos, anéis, corpos, espaços vetoriais, álgebras) muitas vezes desejamos comparar duas estruturas do mesmo tipo. Para isso, usamos uma função que respeita as operações das estruturas envolvidas. Essas funções são chamadas de homomorfismos.

Tendo em vista os últimos comentários, nada mais natural que a seguinte definição de homomorfismo no contexto de álgebras:

Definição 12 *Dadas duas $\mathbb{K}$-álgebras $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ dizemos que a função $\varphi : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$ é um* homomorfismo de álgebras*, se para todo $x, y \in \mathcal{A}_1$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ temos:*

- $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;
- $\varphi(x * y) = \varphi(x) * \varphi(y)$;
- $\varphi(1_{\mathcal{A}_1}) = 1_{\mathcal{A}_2}$;
- $\varphi(\alpha.x) = \alpha.\varphi(x)$.

Na definição acima estamos cometendo um abuso de notação em relação as operações de mesmo nome em $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$. O leitor deve estar atento que as operações que aparecem do lado esquerdo da igualdade são relativas a álgebra $\mathcal{A}_1$, enquanto as do lado direito, são relativas a $\mathcal{A}_2$ e que apesar da notação, a princípio, elas são diferentes.

Se $\varphi : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$ é um homomorfismo injetivo, dizemos que φ é um *monomorfismo* e se é sobrejetivo, dizemos que é um *epimorfismo*. Ainda, se φ é um homomorfismo bijetor, φ é dito um *isomorfismo*. Neste último caso, dizemos que $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são álgebras isomorfas e denotamos por $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2$. Não entrando muito em detalhes, do ponto de vista de teoria de álgebras, duas álgebras isomorfas são indistinguíveis. Um homomorfismo $\varphi : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_1$ é dito um *endomorfismo*. Se além disso, é bijetor, é denominado um *automorfismo*.

1.3 Exemplos

Vamos examinar alguns exemplos de álgebras. A partir de agora, para evitar repetições, $\mathbb{K}$ será sempre um corpo.

Exemplo 13 *$M_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{C}$ com as operações de soma, produto e produto por escalar usuais são $\mathbb{R}$-álgebras.*

Como já comentamos anteriormente, o produto em $\mathbb{C}$ é comutativo mas o mesmo não ocorre com o produto em $M_2(\mathbb{R})$. Em outras palavras, $\mathbb{C}$ é uma álgebra comutativa, enquanto $M_2(\mathbb{R})$ é uma álgebra não comutativa. Apenas para relembrar, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, temos que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 = BA$.

Além disso, é fácil verificar que $\{1, i\}$ é uma base de $\mathbb{C}$, assim como

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base de $M_2(\mathbb{R})$, ambas como $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

Conclusão: $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ *e* $\dim_{\mathbb{R}} M_2(\mathbb{R}) = 4$.

Exemplo 14 *O conjunto das matrizes 2×2 com entradas em $\mathbb{K}$, $M_2(\mathbb{K})$, é uma $\mathbb{K}$-álgebra com as operações de soma, produto e produto por escalar definidos exatamente igual ao caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Observe que de forma análoga, o conjunto*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base de $M_2(\mathbb{K})$ e o produto entre, por exemplo, os dois primeiros elementos da base não comuta. Note que, neste caso, o **1** *que aparece na entrada da matriz significa o elemento neutro da multiplicação de $\mathbb{K}$.*

Exemplo 15 *$M_n(\mathbb{K})$, ou seja, o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$, é uma $\mathbb{K}$-álgebra com a soma, o produto e o produto por escalar usuais em matrizes.*

Se denotarmos por e_{ij} *a matriz* $n \times n$ *cuja a entrada na linha* i *e coluna* j *é* 1 *e as demais são iguais a* 0*, chamada de* matriz elementar*, é muito simples verificar que*

$$\{e_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$$

é uma base de $M_n(\mathbb{K})$*. Consequentemente,* $\dim_{\mathbb{K}} M_n(\mathbb{K}) = n^2$*. O produto entre duas matrizes elementares tem um comportamento muito particular. Se* e_{ij} *e* e_{kl} *são duas matrizes elementares então*

$$e_{ij}e_{kl} = \left\{ \begin{array}{rl} e_{il}, & se \quad j = k \\ 0, & se \quad j \neq k \end{array} \right. .$$

Usando esse fato, é possível mostrar facilmente que $M_n(\mathbb{K})$ *é também uma álgebra não comutativa.*

Exemplo 16 *O conjunto das matrizes triangulares superiores de ordem* n *com entradas em* $\mathbb{K}$*, denotado por* $U_n(\mathbb{K})$*, é uma* $\mathbb{K}$*-subálgebra de* $M_n(\mathbb{K})$*. Uma base dessa álgebra é o conjunto* $\{e_{ij} : i \geq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$*.*

Exemplo 17 *O conjunto* $\mathbb{K}[x]$ *dos polinômios*

$$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k,$$

em que $c_i \in \mathbb{K}$*,* $\forall\ i \in \{0, \ldots, k\}$ *e* k *é um inteiro não negativo, é uma* $\mathbb{K}$*-álgebra com a soma, o produto e o produto por escalar usuais de polinômios em uma variável. Uma base para esse conjunto é* $\{x^i : i$ *é um inteiro não negativo*$\}$*. Isso mostra que* $\mathbb{K}[x]$ *é uma álgebra de dimensão infinita.*

Exemplo 18 $\mathbb{K}[x, y]$ *é o conjunto dos polinômios comutativos nas variáveis* x *e* y *com coeficientes em* $\mathbb{K}$*. Um polinômio* f *desse conjunto é da forma*

$$f(x, y) = c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{11}xy + \cdots + c_{kl}x^ky^l,$$

com $c_{ij} \in \mathbb{K}$*,* $\forall\ i \in \{0, \ldots, k\}$*,* $\forall\ j \in \{0, \ldots, l\}$ *e* k, l *são inteiros não negativos. Exatamente como no caso anterior,* $\mathbb{K}[x, y]$ *tem uma estrutura de* $\mathbb{K}$*-álgebra. Note que* $\mathbb{K}[x]$ *é uma subálgebra de* $\mathbb{K}[x, y]$*.*

Exemplo 19 *Se considerarmos o conjunto dos polinômios sobre* $\mathbb{K}$*, nas variáveis* x *e* y*, com a condição adicional que* $xy \neq yx$*, ou seja, as variáveis são não comutativas, obtemos o conjunto que vamos chamar de* $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$*. Neste conjunto, ao contrário do anterior, o polinômio* $f(x, y) = xy - yx$ *é não nulo e não podemos simplificar o polinômio* $g(x, y) = 2xy + yx$*. Apesar disso,* $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$*, munido da soma, produto (agora tomando muito cuidado com a não comutatividade das variáveis) e produto por escalar de polinômios, é uma* $\mathbb{K}$*-álgebra.*

Assim como consideramos o conjunto dos polinômios não comutativos em duas variáveis, de forma análoga podemos definir $\mathbb{K}\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle$*, ou seja, o conjunto dos polinômios sobre* $\mathbb{K}$*, em um número finito de variáveis não comutativas.*

Exemplo 20 *Se* $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ *é um conjunto infinito,* $\mathbb{K}\langle X\rangle$ *é uma generalização do conjunto anterior, agora considerando um conjunto de variáveis infinito. Com as operações usuais,* $\mathbb{K}\langle X\rangle$ *é uma* $\mathbb{K}$*-álgebra chamada* álgebra associativa livre*, livremente gerada por* X*.*

ÁLGEBRA

- Um corpo $\mathbb{K}$ de escalares
- Um conjunto $\mathcal{A}$, não vazio
- Três operações
  - Soma
    $$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}\times\mathcal{A} & \rightarrow & \mathcal{A} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$
  - Produto por escalar
    $$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}\times\mathcal{A} & \rightarrow & \mathcal{A} \\ (\alpha,x) & \mapsto & \alpha.x \end{array}$$
  - Produto
    $$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}\times\mathcal{A} & \rightarrow & \mathcal{A} \\ (x,y) & \mapsto & x*y \end{array}$$

Propriedades	Soma	Produto por escalar	Produto
Soma	• $\forall x, y, z \in \mathcal{A}$, $(x+y)+z = x+(y+z)$ (associatividade). • $\exists\, 0 \in \mathcal{A}$ tal que,$\forall\, x \in \mathcal{A}$, $x+0 = 0+x = x$ (existência do elemento neutro). • $\forall x \in \mathcal{A}, \exists -x \in \mathcal{A}$ tal que, $x+(-x) = (-x)+x = 0$ (existência do elemento oposto). • $\forall x, y \in \mathcal{A}$, $x+y = y+x$ (comutatividade).	• $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}, \forall\, x, y \in \mathcal{A}$, $\alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$. • $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall\, x \in \mathcal{A}$, $(\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x$.	• $\forall\, x, y, z \in \mathcal{A}$, $x*(y+z) = x*y + x*z$ (distributividade).
Produto por escalar		• $\forall\, x \in \mathcal{A}$, $1.x = x$. • $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall\, x \in \mathcal{A}$, $(\alpha\beta).x = \alpha.(\beta.x)$.	• $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}, \forall\, x, y \in \mathcal{A}$, $\alpha.(x*y) = (\alpha.x)*y = x*(\alpha.y)$.
Produto			• $\forall x, y, z \in \mathcal{A}$, $(x*y)*z = x*(y*z)$ (associatividade). • $\exists\, 1 \in \mathcal{A}$ tal que,$\forall\, x \in \mathcal{A}$, $x*1 = 1*x = x$ (existência do elemento neutro).

Capítulo 2

PI-Álgebras

2.1 Identidades polinomiais e PI-Álgebras

Álgebras comutativas e álgebras de dimensão finita possuem boas propriedades, então é natural nos perguntarmos qual seria uma generalização destes conceitos. Uma generalização natural é o conceito de uma *PI-álgebra* que será discutido neste capítulo, bem como exemplos e principais ideias desta teoria.

Definição 21 *Dada uma álgebra $\mathcal{A}$, dizemos que $f(x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{K}\langle X \rangle$ é uma* identidade polinomial para $\mathcal{A}$, *se para quaisquer $a_1, \ldots, a_r \in \mathcal{A}$,*

$$f(a_1, \ldots, a_r) = 0.$$

Definição 22 *Uma álgebra $\mathcal{A}$ é denominada uma* álgebra com uma identidade polinomial, *ou simplesmente* PI-álgebra, *se $\mathcal{A}$ satisfaz alguma identidade polinomial não trivial.*

Uma vez definido um novo objeto é muito importante saber se existem bons exemplos, afinal de contas ninguém está interessado em estudar uma teoria que se aplica somente ao conjunto vazio, e é isso que veremos na sequência.

Exemplo 23 *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra comutativa, então $f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$ é uma identidade polinomial de $\mathcal{A}$.*

Uma álgebra comutativa nasceu sendo uma PI-álgebra, mas será que apenas as álgebras comutativas são PI-álgebras? Se isso fosse verdade não estaríamos ganhando nada de novo. A seguir veremos outros dois exemplos de PI-álgebras: as álgebras de Grassmann e as álgebras das matrizes. Mas antes, para simplificar nossas futuras contas, precisaremos definir o que é um comutador.

Definição 24 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. A aplicação $[\cdot\,,\cdot] : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, definida para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}$ como sendo*

$$[a, b] = ab - ba,$$

é denominada comutador.

Observe que se $\mathcal{A}$ é uma álgebra comutativa, então o comutador de quaisquer dois elementos desta álgebra será igual a zero.

Proposição 25 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra, então o comutador $[\cdot\,,\,\cdot] : \mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ é uma aplicação bilinear, ou seja, para quaisquer $a,b,c\in\mathcal{A}$ e $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, temos que:*

i) $[\alpha a+\beta b,c]=\alpha[a,c]+\beta[b,c]$;

ii) $[a,\alpha b+\beta c]=\alpha[a,b]+\beta[a,c]$.

Demonstração:

Tome $a,b,c\in\mathcal{A}$ e $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ arbitrários. Então, temos que

$$\begin{aligned}[\alpha a+\beta b,c] &= (\alpha a+\beta b)c-c(\alpha a+\beta b)=\alpha ac+\beta bc-c\alpha a-c\beta b\\ &=\alpha ac+\beta bc-\alpha ca-\beta cb=(\alpha ac-\alpha ca)+(\beta bc-\beta cb)\\ &=\alpha(ac-ca)+\beta(bc-cb)=\alpha[a,c]+\beta[b,c]\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}[a,\alpha b+\beta c] &= a(\alpha b+\beta c)-(\alpha b+\beta c)a=a\alpha b+a\beta c-\alpha ba-\beta ca\\ &=\alpha ab+\beta ac-\alpha ba-\beta ca=(\alpha ab-\alpha ba)+(\beta ac-\beta ca)\\ &=\alpha(ab-ba)+\beta(ac-ca)=\alpha[a,b]+\beta[a,c].\end{aligned}$$

■

A próxima proposição mostra três propriedades muito importantes do comutator, que são muito úteis na hora de fazer contas com ele.

Proposição 26 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra, então o comutador $[\cdot\,,\,\cdot] : \mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ satisfaz para quaisquer $a,b,c\in\mathcal{A}$ as seguintes igualdades:*

i) $[a,a]=0$;

ii) $[a,b]=-[b,a]$;

iii) $[[a,b],c]+[[b,c],a]+[[c,a],b]=0$ (Identidade de Jacobi).

Demonstração:

Tome $a,b,c\in\mathcal{A}$ arbitrários. Então, temos que

$$[a,a]=aa-aa=0,$$

$$[a,b]=ab-ba=-(-ab+ba)=-(ba-ab)=-[b,a]$$

e

$$\begin{aligned}[[a,b],c]+[[b,c],a]+[[c,a],b] &= [ab-ba,c]+[bc-cb,a]+[ca-ac,b]\\ &=(ab-ba)c-c(ab-ba)+(bc-cb)a-a(bc-cb)+(ca-ac)b-b(ca-ac)\\ &=(ab)c-(ba)c-c(ab)+c(ba)+(bc)a-(cb)a-a(bc)+a(cb)+(ca)b-(ac)b\\ &\qquad -b(ca)+b(ac)\\ &=((ab)c-a(bc))+(b(ac)-(ba)c)+((ca)b-c(ab))+(c(ba)-(cb)a)\\ &\qquad +((bc)a-b(ca))+(a(cb)-(ac)b)=0.\end{aligned}$$

■

Com a definição de comutator e conhecendo algumas de suas propriedades básicas podemos dar o primeiro exemplo não trivial de uma PI-álgebra.

Exemplo 27 *Seja V_3 um espaço vetorial de dimensão 3, com base $\{e_1, e_2, e_3\}$. A* álgebra de Grassmann *$E(V_3)$* de *V_3, é a álgebra associativa gerada por $\{e_1, e_2, e_3\}$, satisfazendo para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$ a relação*

$$e_i e_j = -e_j e_i. \tag{2.1}$$

Vamos mostrar que $E(V_3)$ satisfaz a seguinte identidade:

$$[[x_1, x_2], x_3]. \tag{2.2}$$

Primeiramente, vamos verificar que esta identidade é satisfeita pelos vetores da base e_1, e_2 e e_3.

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2, e_3] = [[e_1, e_2], e_3] &= [e_1e_2 - e_2e_1, e_3] = [2e_1e_2, e_3] \\
&= 2e_1e_2e_3 - e_3 2e_1e_2 = 2e_1e_2e_3 - 2e_3e_1e_2 \\
&= 2e_1e_2e_3 + 2e_1e_3e_2 = 2e_1e_2e_3 - 2e_1e_2e_3 = 0.
\end{aligned}$$

Agora note que a ordem que os vetores aparecem no comutador não é relevante. Sejam $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, então

$$\begin{aligned}
[e_i, e_j, e_k] = [[e_i, e_j], e_k] &= [e_ie_j - e_je_i, e_k] = [2e_ie_j, e_k] \\
&= 2e_ie_je_k - e_k 2e_ie_j = 2e_ie_je_k - 2e_ke_ie_j \\
&= 2e_ie_je_k + 2e_ie_ke_j = 2e_ie_je_k - 2e_ie_je_k = 0.
\end{aligned}$$

No entanto, para provar que 2.2 é uma identidade polinomial para $E(V_3)$, temos que mostrar que 2.2 se anula para quaisquer três elementos de $E(V_3)$. Um elemento arbitrário de $E(V_3)$ é a combinação linear de produtos finitos de e_1, e_2 e e_3, mas como para todo $i \in \{1, 2, 3\}$ temos

$$e_ie_i = -e_ie_i \Rightarrow 2e_i^2 = 0 \Rightarrow e_i^2 = 0,$$

segue que nos produtos finitos de e_1, e_2 e e_3 não podemos repetir elementos, ou seja, se tivermos um produto com 4 elementos, ou mais, este produto será igual a zero. De fato, sejam $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$. Logo, existem pelo menos dois elementos do conjunto $\{i, j, k, l\}$ que são iguais. Sem perda de generalidade, considere $i = l$. Portanto,

$$e_ie_je_ke_l = -e_ie_je_le_k = e_ie_le_je_k = e_ie_ie_je_k = 0. \tag{2.3}$$

Desta forma, todos os produtos possíveis não nulos são:

- *Com dois elementos: $e_1e_2, e_1e_3, e_2e_1, e_2e_3, e_3e_1, e_3e_2$;*
- *Com três elementos: $e_1e_2e_3, e_1e_3e_2, e_2e_1e_3, e_2e_3e_1, e_3e_1e_2, e_3e_2e_1$.*

Mas observe que por 2.1, segue que:

- *$e_2e_1 = -e_1e_2$;*
- *$e_3e_1 = -e_1e_3$;*
- *$e_3e_2 = -e_2e_3$;*
- *$e_1e_3e_2 = -e_1e_2e_3$;*
- *$e_2e_1e_3 = -e_1e_2e_3$;*
- *$e_2e_3e_1 = e_1e_2e_3$;*
- *$e_3e_1e_2 = e_1e_2e_3$;*
- *$e_3e_2e_1 = -e_1e_2e_3$.*

Portanto, nossa relação de todos os produtos possíveis se reduziu para a seguinte:

$$e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3, e_1e_2e_3.$$

Sendo assim, ainda temos que provar que para quaisquer três elementos pertencentes ao conjunto

$$\{e_1, e_2, e_3, e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3, e_1e_2e_3\} \tag{2.4}$$

o comutador destes três elementos é igual a zero.

Note que para qualquer elemento em 2.4 que aparecer no comutador de três elementos, algum e_i terá que se repetir e, desta forma, por 2.3 o comutador será igual a zero.

Isto conclui a demonstração de que 2.2 é uma identidade polinomial para a álgebra de Grassmann, pois pela Proposição 25 basta verificarmos que 2.2 é uma identidade polinomial para os monômios.

Definição 28 *Seja V um espaço vetorial de dimensão infinita enumerável, com base denotada por $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$. A* álgebra de Grassmann *$E(V)$ de V, é a álgebra associativa gerada por $\{e_i : i \in \mathbb{N}^*\}$, satisfazendo a seguinte relação para todo $i, j \in \mathbb{N}^*$:*

$$e_ie_j = -e_je_i$$

(e $e_i^2 = 0$ se $char(\mathbb{K}) = 2$).

Observação 29 *É possível mostrar que $[[x_1, x_2], x_3]$ é uma identidade polinomial para $E(V)$.*

Agora veremos a definição de um polinômio muito importante e na sequência uma classe de álgebras que o tem como identidade polinomial. Para isto, precisaremos da definição do grupo simétrico e do sinal de uma permutação.

Seja X um conjunto não vazio. Uma função bijetora $f : X \to X$ é denominada *permutação em X*. Note que esta denominação faz sentido, pois uma função bijetora em X nada mais é do que uma regra que permuta todos os elementos de X.

Sejam $k \in \mathbb{N}^*$ e X_k um conjunto qualquer com k elementos. Por exemplo, $X_k = \{1, 2, \ldots, k\}$. Denote por S_k o conjunto de todas as permutações em X_k e observe que com a operação de composição de funções (os elementos de S_k são funções) S_k é um grupo, denominado *grupo simétrico em k elementos*.

Vejamos dois exemplos: o S_2 e o S_3.

Para definir o S_2 precisamos determinar todas as permutações de um conjunto com dois elementos. Denote estes elementos por 1 e 2. Vamos listar todas as permutações possíveis:

1. A permutação que não altera nenhum elemento, por conveniência a denotaremos por id.
2. A permutação que troca os dois elementos, ou seja, leva o 1 no 2 e o 2 no 1. Denotaremos esta permutação por (12).

Portanto, $S_2 = \{id, (12)\}$.

O S_3 já fica mais interessante. Denotaremos os elementos por 1, 2 e 3. Novamente vamos listar todas as permutações possíveis:

1. A permutação que não altera nenhum elemento, que novamente será denotada por id.
2. A permutação que troca dois elementos e mantém o terceiro fixo. Digamos que o elemento que não será alterado será o 1 e que o 2 seja trocado com o 3, denotaremos esta permutação por (23). Logo, neste caso teremos três possibilidades: $(12), (13)$ e (23).
3. A permutação que bagunça todo mundo. Depois de refletir um pouco, podemos concluir que não temos muitas formas distintas de bagunçar três elementos, são apenas duas: (123) e (132).

Portanto, $S_3 = \{id, (12), (13), (23), (123), (132)\}$.

Muito bem, agora que já entendemos o que é o grupo de permutações, precisaremos definir o sinal de uma permutação. Para isto iremos sempre comparar uma permutação com a permutação identidade. Vejamos com dois exemplos.

Primeiramente observe novamente o que as permutações (13) e (132) fazem com os elementos $1, 2, 3$.

- (13) troca o 1 com o 3, então obtemos a seguinte sequência: $3, 2, 1$.
- (132) é a permutação que manda 1 no 3, o 3 no 2 e o 2 no 1, de modo que obtemos a seguinte sequência: $3, 1, 2$.

Agora qual é a quantidade necessária de trocas entre dois elementos (*transposições*) que temos que fazer em $3, 2, 1$ para chegar em $1, 2, 3$? A resposta é uma. Sendo assim, definiremos o sinal desta permutação como sendo -1.

E para $3, 1, 2$? A resposta é duas. Sendo assim, definiremos o sinal desta permutação como sendo $+1$.

Moral da história: o *sinal de uma permutação* será 1 se a quantidade de transposições for par e -1 se for ímpar.

Denotaremos o sinal de uma permutação σ por $(-1)^\sigma$.

Finalmente estamos aptos a definir o importante polinômio mencionado anteriormente.

Definição 30 *Seja $k \in \mathbb{N}^*$. O polinômio*

$$s_k(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)},$$

onde $(-1)^\sigma$ é o sinal de σ, é denominado polinômio standard de grau k.

Teorema 31 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de dimensão r, então s_{r+1} é uma identidade polinomial de A.*

Vejamos o caso em que $r = 2$. Seja $\{r_1, r_2\}$ uma base para $\mathcal{A}$. Observe que para calcularmos s_3 precisamos de três elementos. Um elemento arbitrário $a \in \mathcal{A}$ pode ser expresso de maneira única como

$$a = \alpha r_1 + \beta r_2,$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Não é difícil demonstrar que s_3 é linear em cada entrada, de modo que só precisamos verificar que s_3 se anula para todos os elementos da base. Como precisamos de três elementos e só temos dois elementos distintos na base, vamos precisar repetir um deles. Sem perda de generalidade, considere r_1 como sendo o elemento que aparecerá repetido ao calcularmos s_3. Logo,

$$\begin{aligned} s_3(r_1, r_2, r_1) &= r_1r_2r_1 - r_2r_1r_1 - r_1r_2r_1 - r_1r_1r_2 + r_2r_1r_1 + r_1r_1r_2 \\ &= (r_1r_2r_1 - r_1r_2r_1) + (-r_2r_1r_1 + r_2r_1r_1) + (-r_1r_1r_2 + r_1r_1r_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Também não é difícil verificar que a ordem em que os elementos x_1 e x_2 aparecem no polinômio standard não é relevante. Desta forma, s_3 é uma identidade polinomial para $\mathcal{A}$.

A demonstração no caso geral pode ser obtida usando argumentos similares ao do caso particular apresentado.

Como uma consequência direta do teorema acima temos o seguinte resultado.

Corolário 32 *A álgebra de matrizes $M_n(\mathbb{K})$ satisfaz a identidade standard de grau $n^2 + 1$.*

Portanto, segue diretamente do corolário acima que $M_2(\mathbb{K})$ satisfaz a identidade standard de grau 5.

Até agora vimos dois exemplos de identidades polinomiais não triviais: a identidade 2.2 para a álgebra de Grassmann de dimensão 3 e a identidade standard de grau $r + 1$ para as álgebras de dimensão r. A demonstração do primeiro exemplo foi bem trabalhosa, pois tivemos que provar que estes polinômios se anulavam para todos os elementos da álgebra em questão. No entanto, se queremos provar que um dado polinômio não é uma identidade polinomial para uma álgebra, basta encontrar elementos desta álgebra de modo que este polinômio não se anule neles, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 33 *O polinômio standard de grau 3 não é uma identidade polinomial para $M_2(\mathbb{K})$.*

Primeiramente vamos escrever o polinômio standard de grau 3. Como

$$S_3 = \{1, (12), (13), (23), (123), (132)\},$$

segue que

$$s_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 - x_2x_1x_3 - x_3x_2x_1 - x_1x_3x_2 + x_2x_3x_1 + x_3x_1x_2.$$

Agora considere as seguintes matrizes:

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como visto no exemplo 15 do capítulo 1, podemos definir genericamente e_{ij} como sendo a matriz cuja entrada na linha i e coluna j é igual a 1 e as demais entradas são iguais a zero. Além disso, sabemos que para quaisquer $i, j, k, l \in \{1, 2\}$, temos que

$$e_{ij}e_{kl} = \begin{cases} e_{il}, & \text{se } j = k \\ 0, & \text{se } j \neq k \end{cases}.$$

Desta forma,

$$s_3(e_{11}, e_{12}, e_{21}) = e_{11}e_{12}e_{21} - e_{12}e_{11}e_{21} - e_{21}e_{12}e_{11} - e_{11}e_{21}e_{12} + e_{12}e_{21}e_{11} + e_{21}e_{11}e_{12}.$$

$$= e_{12}e_{21} - e_{22}e_{11} + e_{11}e_{11} + e_{21}e_{12} = e_{11} + e_{11} + e_{22} = 2e_{11} + e_{22}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, portanto, s_3 não é uma identidade polinomial para $M_2(\mathbb{K})$.

Pergunta: Vimos que $M_2(\mathbb{K})$ satisfaz a identidade standard de grau 5, mas não satisfaz a de grau 3. Será que 5 é o menor grau satisfeito? Será que é possível determinar o menor grau da identidade standard satisfeita por $M_n(\mathbb{K})$?

Veremos as respostas destas duas perguntas no próximo capítulo.

2.2 T-ideal

Na seção anterior vimos a definição de uma identidade polinomial e de uma PI-álgebra. Nesta seção veremos algumas propriedades de um conjunto muito importante nesta teoria: o conjunto de todas identidades polinomiais de uma álgebra.

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. O conjunto de todas as identidades polinomiais de $\mathcal{A}$ é denotado por $T(\mathcal{A})$. Observe que $T(\mathcal{A}) \subset \mathbb{K}\langle X\rangle$ e como $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é uma álgebra, faz sentido nos perguntar se o conjunto $T(\mathcal{A})$ possui alguma estrutura, é o que veremos no próximo resultado.

Teorema 34 *Dada uma álgebra $\mathcal{A}$, $T(\mathcal{A})$ é um ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Além disso, ele possui a propriedade de ser invariante por endomorfismos de $\mathbb{K}\langle X\rangle$.*

Definição 35 *Dada uma álgebra $\mathcal{A}$, $T(\mathcal{A})$ é denominado* T-ideal *de $\mathcal{A}$.*

O que significa ser invariante por endomorfismos? Este é um modo sofisticado de dizer que dada uma identidade polinomial não importa o "nome das variáveis". Vejamos com um exemplo. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra comutativa, então sabemos que

$$f(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$$

é uma identidade polinomial de $\mathcal{A}$. Mas faria alguma diferença se ao invés de escolhermos as variáveis x_1, x_2 escolhêssemos x_{13}, x_{17}? A resposta é não. O polinômio

$$f(x_{13}, x_{17}) = [x_{13}, x_{17}] = x_{13}x_{17} - x_{17}x_{13}$$

também é uma identidade polinomial de $\mathcal{A}$. No entanto, ser invariante por endomorfismos de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é mais do que poder trocar variáveis, também é permitido trocar uma variável por qualquer elemento de

$\mathbb{K}\langle X\rangle$. Vamos exemplificar este fato novamente com uma álgebra comutativa $\mathcal{A}$. Considere o seguinte polinômio

$$g(x_2, x_3, x_7, x_{13}, x_{17}) = [x_{17}^2x_{13} - 5x_7x_3, x_2^2] = f(x_{17}^2x_{13} - 5x_7x_3, x_2^2).$$

Para provar que ele é uma identidade polinomial de $\mathcal{A}$, temos que mostrar que ao avaliarmos ele em quaisquer elementos de $\mathcal{A}$, o resultado obtido é zero. Vamos fazer a conta. Considere quaisquer $a, b, c, d, e \in \mathcal{A}$, então

$$\begin{aligned} g(a, b, c, d, e) &= [e^2d - 5cb, a^2] = (e^2d - 5cb)a^2 - a^2(e^2d - 5cb) \\ &= (e^2d - 5cb)a^2 - (e^2d - 5cb)a^2 = 0, \end{aligned}$$

pois a álgebra é comutativa. Logo g também é uma identidade polinomial para $\mathcal{A}$.

Resumindo: $T(\mathcal{A})$ ser invariante por endomorfismos de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ significa que para todo $f(x_1, \ldots, x_r) \in T(\mathcal{A})$, podemos trocar qualquer x_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$, por qualquer elemento de $\mathbb{K}\langle X\rangle$, e f depois desta alteração continuará sendo uma identidade polinomial de $\mathcal{A}$.

Pelo que vimos na seção anterior sabemos que:

- $[x_1, x_2, x_3] \in T(E(V))$;
- $s_5 \in T(M_2(\mathbb{K}))$.

No capítulo 1 vimos o conceito de ideal gerado por elementos, então será que é possível encontrar geradores para os T-ideais? Lembrando que neste caso nos é permitido fazer três "operações" com estes elementos para obter todos os demais: somar, multiplicar por um elemento de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ à direita e à esquerda (operações permitidas em ideais), e trocar as variáveis por qualquer elemento de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ (propriedade de ser invariante por endomorfismos).

Mais ainda, será que é possível encontrar um conjunto finito de geradores? Este problema é conhecido como **Problema de Specht**. Esta pergunta foi respondida afirmativamente quando o corpo $\mathbb{K}$ tem característica zero por Kemer.

Teorema 36 (Kemer) *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra sobre $\mathbb{K}$. Se* $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$*, então o T-ideal $T(\mathcal{A})$ é finitamente gerado.*

Sempre que nos deparamos com uma nova teoria é importante pensar em quais perguntas surgem naturalmente nela. Vejamos alguns exemplos de problemas na teoria de PI-álgebras.

Perguntas naturais:

- Dada uma álgebra, determinar se ela satisfaz alguma identidade polinomial.
- Sabendo que uma álgebra satisfaz uma identidade polinomial, determinar se o seu T-ideal é finitamente gerado ou não.
- **Sabendo que o T-ideal de uma álgebra é finitamente gerado, determinar seus geradores.**

- **Determinar um conjunto minimal de geradores, denominado *base*.**

As duas últimas perguntas estão em negrito por serem muito relevantes e, em geral, problemas muito difíceis de resolver. Citaremos dois resultados que determinam uma base para dois T-ideais.

Teorema 37 *Seja $E(V)$ a álgebra de Grassmann, então o T-ideal $T(E(V))$ é gerado como T-ideal por $[x_1, x_2, x_3]$.*

Teorema 38 *Se $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$, então o T-ideal $T(M_2(\mathbb{K}))$ é gerado como T-ideal por $[[x_1, x_2]^2, x_3]$ e s_4.*

Capítulo 3

O Teorema de Amitsur-Levitzki

Neste capítulo, vamos demonstrar um importante teorema da teoria de álgebras com identidades polinomiais, provado na década de 50. Vamos precisar de algumas propriedades do polinômio standard s_k, da representação gráfica do produto de matrizes elementares e de teoria de grafos.

3.1 Propriedades adicionais do polinômio standard

Como vimos no capítulo anterior,

$$\begin{aligned} s_3(x_1,x_2,x_3) &= \sum_{\sigma\in S_3}(-1)^{\sigma}x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)} \\ &= x_1x_2x_3 - x_1x_3x_2 - x_2x_1x_3 + x_2x_3x_1 + x_3x_1x_2 - x_3x_2x_1 \\ &= x_1(x_2x_3 - x_3x_2) - x_2(x_1x_3 - x_3x_1) + x_3(x_1x_2 - x_2x_1) \end{aligned}$$

e chama a atenção que:
• todos os produtos possíveis entre x_1, x_2 e x_3 aparecem em s_3;
• s_3 é linear em cada variável. Do mesmo modo que o comutador é uma aplicação bilinear, podemos dizer que s_3 é trilinear e a demonstração deste fato é análoga a prova da proposição 25 do capítulo anterior.

Observemos porém que estes fatos são mais gerais:
• s_k é linear em cada variável. Podemos falar que s_k é multilinear, com $k \in \mathbb{N}^*$.
• todos os produtos possíveis entre x_1, x_2, ..., x_k aparecem em s_k.

Além disso, existe uma relação entre s_2 e s_3. Para escrever s_3 de modo a não esquecer nenhuma parcela, procedemos da seguinte maneira: fixando x_1 como primeira variável temos duas parcelas, $x_1x_2x_3$ e $x_1x_3x_2$. Essas parcelas, somadas com os seus respectivos sinais, são o produto de x_1 por s_2 nas variáveis x_2 e x_3. Depois, fixando x_2 na primeira posição repetimos o mesmo processo e temos o produto de x_2 com s_2 (nas variáveis x_1 e x_3). E por último, colocando x_3 na primeira posição e repetindo o passo anterior, temos o produto de x_3 por s_2 (agora nas variáveis x_1 e x_2). E depois é preciso ajeitar o sinal, comparando com o sinal da identidade como vimos no capítulo 2.
Em resumo:

$$s_3(x_1,x_2,x_3) = x_1s_2(x_2,x_3) - x_2s_2(x_1,x_3) + x_3s_2(x_1,x_2).$$

Da mesma maneira, existe uma relação entre s_k e s_{k+1}.

Proposição 39 *Temos que* $s_{k+1}(x_1, \ldots, x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} x_i s_k(x_1, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_{k+1})$, *em que* $\hat{x_i}$ *significa que* x_i *não participa da expressão.*

Uma aplicação direta deste resultado é a seguinte proposição.

Proposição 40 *Se o polinômio* s_k *é uma identidade polinomial para uma álgebra* $\mathcal{A}$, *então* s_{k+1} *também é uma identidade polinomial para* $\mathcal{A}$.

Na linguagem do capítulo anterior isto significa que s_{k+1} pertence ao T-ideal gerado por s_k.

Repetindo a proposição 40 temos que, se s_k for identidade para uma álgebra $\mathcal{A}$, então $s_{k+1}, s_{k+2}, s_{k+3}, \ldots$ também serão identidades para $\mathcal{A}$.

Voltando a falar de matrizes, pelo fato de $M_n(\mathbb{K})$ ter dimensão n^2, temos que s_{n^2+1} é uma identidade polinomial para $M_n(\mathbb{K})$. Como mencionado no capítulo anterior, será que $M_n(\mathbb{K})$ satisfaz identidades standards de grau menor que n^2+1?

As próximas seções fornecerão resultados para respondermos esta pergunta.

3.2 Representação gráfica do produto de matrizes elementares

Vamos relembrar que as matrizes elementares tem duas propriedades importantes:
- formam uma base das matrizes;
- têm a seguinte regra de multiplicação

$$e_{ij}e_{kl} = \begin{cases} e_{il}, & \text{se} \quad j = k \\ 0, & \text{se} \quad j \neq k \end{cases},$$

como já exposto nos capítulos 1 e 2.

Além disso, também vale lembrar que o produto entre matrizes elementares ou é zero ou é uma matriz elementar.

Esta regra de multiplicação entre matrizes elementares tem uma representação gráfica interessante, como veremos a seguir.

Vamos representar uma matriz elementar e_{ij} com uma seta saindo de i e chegando em j, em que $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Os elementos do conjunto {1, 2, ..., n} serão chamados de *vértices* e as setas ligando vértices serão chamadas de *arestas*.

Exemplo 41 *Por exemplo,* e_{12} *será* $\mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{2}$ *e* e_{22} *será* $\mathbf{2} \circlearrowright$.

Qualquer multiplicação entre matrizes será representada pela junção das representações das matrizes envolvidas.

Exemplo 42 *O produto entre* e_{12} *e* e_{22} *(ainda não especificamos a ordem dos fatores) será dado por*

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{2} \circlearrowright \quad .$$

Já um produto que envolva e_{11}, e_{12} *e* e_{22} *(sem a ordem) será da forma*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[loop left] \arrow[r] & \mathbf{2} \arrow[loop right] \end{tikzcd} .$$

E o produto entre e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{23} *e* e_{33} *(não sabemos ainda a ordem) vai ser*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[loop left] \arrow[r] & \mathbf{2} \arrow[loop below] \arrow[r] & \mathbf{3} \arrow[loop right] \end{tikzcd} .$$

Falta agora definir como a ordem dos fatores da multiplicação vai aparecer nesta representação. Vamos convencionar o seguinte:

- as arestas devem ser lidas na mesma ordem que as matrizes aparecem no produto.

Exemplo 43 *O produto* $e_{12}e_{22}$ *fica da forma*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "1^a"] & \mathbf{2} \arrow[loop right, "2^a"] \end{tikzcd} ,$$

pois a aresta que vai de 1 para 2 é a matriz e_{12} *(que é o primeiro fator do produto), então começamos por ela. Depois vamos para a aresta de 2 para 2 que é a matriz* e_{22}.

Exemplo 44 *Já o produto* $e_{22}e_{12}$ *é representado por*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "2^a"] & \mathbf{2} \arrow[loop right, "1^a"] \end{tikzcd} ,$$

neste caso lemos primeiro a aresta de 2 para 2 (que é a matriz e_{22}*) para depois ir para a aresta que vai de 1 para 2.*

Percebamos algumas coisas observando os exemplos anteriores.

Observação 45 *Os grafos que representam os produtos* $e_{12}e_{22}$ *e* $e_{22}e_{12}$ *têm os mesmos vértices e as mesmas arestas, ou seja, são iguais como grafos, já que envolvem as mesmas matrizes. A diferença entre eles é a ordem com que lemos as arestas.*

Observação 46 *No exemplo 43, ao seguirmos a ordem das arestas temos um caminho para ir de 1 até 2 de modo que cada aresta é percorrida uma só vez na direção certa. Neste mesmo exemplo, o produto entre as matrizes não é zero.*

Observação 47 *No exemplo 44, começamos pela aresta que vai de 2 para 2. Depois não há aresta para ser percorrida na direção certa (não podemos andar na contra-mão). Assim não temos um caminho percorrendo cada aresta uma só vez na direção certa. Neste caso, o produto entre as matrizes é zero.*

As observações anteriores não são coincidências. Existe uma relação entre o fato do produto entre matrizes elementares ser diferente de zero e a representação gráfica deste produto formar um caminho no qual cada aresta é percorrida uma só vez na direção certa. Para facilitar referências futuras vamos chamar este tipo de caminho de *caminho unicursal*.

Assim temos o seguinte resultado:

Proposição 48 *O produto entre matrizes elementares é não nulo se, e somente se, a correspondente sequência de arestas é um caminho unicursal.*

Observação 49 *Para ficar bem claro vamos relembrar que as regras para ser caminho unicursal são:*

i) cada aresta é percorrida só uma vez (não fica nenhuma aresta de fora).

ii) cada aresta é percorrida na direção certa (não vale andar na contra-mão).

Observação 50 *O que fizemos foi associar um produto de matrizes elementares a um grafo. Mas dado um grafo é possível reconhecer quais matrizes elementares estão envolvidas no produto. Por exemplo, dado o grafo*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[loop left] \arrow[r] & \mathbf{2} \arrow[loop right] \end{tikzcd},$$

sabemos que ele representa um produto envolvendo e_{11}, e_{12} e e_{22}.
Se, além disso, for dada a ordem das arestas,

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[loop left, "2^a"] \arrow[r, "1^a"] & \mathbf{2} \arrow[loop right, "3^a"] \end{tikzcd}$$

então sabemos que este grafo representa o produto $e_{12}e_{11}e_{22}$.

Já vimos que s_3 não é identidade polinomial para $M_2(\mathbb{K})$, fazendo as contas de forma direta. Usemos agora um pouco desta representação gráfica para mostrar novamente este resultado e generalizá-lo para $M_n(\mathbb{K})$, mostrando que s_{2n-1} não é identidade polinomial para $M_n(\mathbb{K})$.

Para $M_2(\mathbb{K})$ observemos os produtos possíveis entre e_{11}, e_{12} e e_{22}. Isto é equivalente a fazer todas as ordens possíveis entre as arestas de $\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[loop left] \arrow[r] & \mathbf{2} \arrow[loop right] \end{tikzcd}$.

Vejamos que $e_{11}e_{12}e_{22} = e_{12}$ $\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[loop left, "1^a"] \arrow[r, "2^a"] & \mathbf{2} \arrow[loop right, "3^a"] \end{tikzcd}$. E se fizermos a multiplicação em qualquer outra ordem teremos zero como resultado.

$$e_{11}e_{22}e_{12} = 0 \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[loop left, "1^a"] \arrow[r, "3^a"] & \mathbf{2} \arrow[loop right, "2^a"] \end{tikzcd} .$$

$$e_{12}e_{22}e_{11} = 0 \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[loop left, "3^a"] \arrow[r, "1^a"] & \mathbf{2} \arrow[loop right, "2^a"] \end{tikzcd} .$$

$$e_{12}e_{11}e_{22} = 0 \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[loop left, "2^a"] \arrow[r, "1^a"] & \mathbf{2} \arrow[loop right, "3^a"] \end{tikzcd} .$$

$$e_{22}e_{11}e_{12} = 0 \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[loop left, "2^a"] \arrow[r, "3^a"] & \mathbf{2} \arrow[loop right, "1^a"] \end{tikzcd} .$$

$$e_{22}e_{12}e_{11} = 0 \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[loop left, "3^a"] \arrow[r, "2^a"] & \mathbf{2} \arrow[loop right, "1^a"] \end{tikzcd} .$$

Porém as seis parcelas anteriores, somadas com seus respectivos sinais, são exatamente $s_3(e_{11}, e_{12}, e_{22})$ que neste caso está resultando em e_{12}. Assim exibimos três elementos de $M_2(\mathbb{K})$, no caso e_{11}, e_{12} e e_{22}, tais que $s_3(e_{11}, e_{12}, e_{22}) \neq 0$. Isso significa que s_3 não é uma identidade polinomial para $M_2(\mathbb{K})$, como já sabíamos.

Para $M_3(\mathbb{K})$, observemos o produto entre e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{23} e e_{33}

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[loop left] \arrow[r] & \mathbf{2} \arrow[loop above] \arrow[r] & \mathbf{3} \arrow[loop right] \end{tikzcd} .$$

Vejamos que $e_{11}e_{12}e_{22}e_{23}e_{33} = e_{13}$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[loop left, "1^a"] \arrow[r, "2^a"] & \mathbf{2} \arrow[loop above, "3^a"] \arrow[r, "4^a"] & \mathbf{3} \arrow[loop right, "5^a"] \end{tikzcd} .$$

E se fizermos a multiplicação em qualquer outra ordem teremos zero como resultado.
Como são 5 elementos, no total temos 120 parcelas que somadas com sinal são exatamente $s_5(e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{23}, e_{33})$, resultando em $e_{13} \neq 0$. Logo s_5 não é uma identidade polinomial para $M_3(\mathbb{K})$.

É possível generalizar esta construção para $M_n(\mathbb{K})$, ou seja, é sempre possível escolher $2n-1$ matrizes elementares $e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{nn}$ de modo que $s(e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{nn}) = e_{1n} \neq 0$.

Vejamos que para n = 2 escolhemos as seguintes matrizes :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{e_{11}} \arrow[r] & \mathbf{e_{12}} \arrow[d] \\
e_{21} & \mathbf{e_{22}}
\end{tikzcd}$$

Já para n = 3, as matrizes elementares escolhidas foram:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{e_{11}} \arrow[r] & \mathbf{e_{12}} \arrow[d] & e_{13} \\
e_{21} & \mathbf{e_{22}} \arrow[r] & \mathbf{e_{23}} \arrow[d] \\
e_{31} & e_{32} & \mathbf{e_{33}}
\end{tikzcd}$$

De modo geral para n basta escolher

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{e_{11}} \arrow[r] & \mathbf{e_{12}} \arrow[d] & e_{13} & \cdots & \cdots & e_{1n} \\
e_{21} & \mathbf{e_{22}} \arrow[r] & \mathbf{e_{23}} \arrow[d] & \cdots & \cdots & e_{2n} \\
e_{31} & e_{32} & \mathbf{e_{33}} \arrow[r] & \mathbf{e_{34}} \arrow[d] & \cdots & e_{3n} \\
e_{41} & e_{42} & e_{43} & \mathbf{e_{44}} \arrow[r] & \cdots & e_{4n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
e_{n1} & e_{n2} & e_{n3} & \cdots & \cdots & \mathbf{e_{nn}}
\end{tikzcd}$$

Como isso é sempre possível de ser feito, temos a seguinte proposição:

Proposição 51 *O polinômio standard de grau menor que $2n$ não é identidade polinomial para $M_n(\mathbb{K})$.*

Observação 52 *Na verdade, o que fizemos aqui foi mostrar que o polinômio standard s_{2n-1} não é identidade polinomial para $M_n(\mathbb{K})$. Mas notemos que o polinômio standard s_{2n-2} também não é identidade polinomial para $M_n(\mathbb{K})$, pois se s_{2n-2} fosse identidade então s_{2n-1} também seria identidade. Basta lembrar da proposição 40.*

Observação 53 *Se repetirmos a mesma ideia da nota anterior também podemos mostrar que s_{2n-3}, s_{2n-4}, ..., s_2 não são identidades polinomiais para $M_n(\mathbb{K})$.*

3.3 O Teorema de Amitsur-Levitzki

Até agora temos uma lacuna onde procurar por identidades standards de grau mínimo para $M_n(\mathbb{K})$. Sabemos que s_{n^2+1} é identidade e que s_{2n-1} não é identidade.

No caso n=2 fica fácil: s_5 é identidade para $M_2(\mathbb{K})$ e s_3 não é identidade. Então a pergunta é s_4 é identidade para $M_2(\mathbb{K})$?

Já para n=3, temos que s_{10} é identidade para $M_3(\mathbb{K})$ e s_5 não é identidade. Quais dos casos restantes dentre s_6, s_7, s_8 ou s_9 são identidades para $M_3(\mathbb{K})$?

O próximo teorema, muito importante para a teoria de PI-Álgebras, responde esta pergunta de maneira geral.

Teorema 54 (Amitsur-Levitzki) *A álgebra das matrizes $M_n(\mathbb{K})$ satisfaz a identidade standard s_{2n}.*

Note que o teorema afirma, por exemplo, que s_4 é identidade polinomial para $M_2(\mathbb{K})$ e que s_6 é identidade polinomial para $M_3(\mathbb{K})$.

Observação 55 *Pelo o que foi feito anteriormente e pelo teorema, segue que $2n$ é o menor grau do polinômio standard que é identidade para $M_n(\mathbb{K})$.*

Relembrando o significado desta afirmação: isto quer dizer que para qualquer conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2n}\}$ de $2n$ matrizes de ordem n, se calcularmos $s_{2n}(a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$ teremos como resultado zero.

Vejamos um lema que vai simplificar o nosso trabalho de demonstrar este teorema.

Lema 56 *Para mostrar que $s_{2n}(a_1, a_2, \ldots, a_{2n}) = 0$ para qualquer conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2n}\}$ de $2n$ matrizes de ordem n, basta mostrar que $s_{2n}(m_1, m_2, \ldots, m_{2n}) = 0$, para qualquer conjunto $\{m_1, m_2, \ldots, m_{2n}\}$ de matrizes elementares de ordem n.*

Ideia da Demonstração: Vamos usar aqui o fato de que toda matriz é escrita como combinação linear de matrizes elementares e que s_{2n} é linear em cada variável. Vamos fazer a prova para $n = 2$ e apenas para a primeira variável, mas a ideia vale de um modo geral.
Sabemos que se a_1 é uma matriz então

$$a_1 = a_{11}^{(1)} e_{11} + a_{12}^{(1)} e_{12} + a_{21}^{(1)} e_{21} + a_{22}^{(1)} e_{22},$$

com $a_{11}^{(1)}$, $a_{12}^{(1)}$, $a_{21}^{(1)}$, $a_{22}^{(1)} \in \mathbb{K}$. Assim,

$$s_4(a_1, m_2, m_3, m_4) = s_4(a_{11}^{(1)} e_{11} + a_{12}^{(1)} e_{12} + a_{21}^{(1)} e_{21} + a_{22}^{(1)} e_{22}, m_2, m_3, m_4).$$

Mas s_4 é linear (em todas as variáveis), então

$$\begin{aligned} s_4(a_1, m_2, m_3, m_4) &= a_{11}^{(1)} s_4(e_{11}, m_2, m_3, m_4) + a_{12}^{(1)} s_4(e_{12}, m_2, m_3, m_4) + \\ & \quad a_{21}^{(1)} s_4(e_{21}, m_2, m_3, m_4) + a_{22}^{(1)} s_4(e_{22}, m_2, m_3, m_4). \end{aligned}$$

Portanto, se tivermos que

$$s_4(e_{11}, m_2, m_3, m_4) = s_4(e_{12}, m_2, m_3, m_4) = s_4(e_{21}, m_2, m_3, m_4) = s_4(e_{22}, m_2, m_3, m_4) = 0,$$

teremos que

$$s_4(a_1, m_2, m_3, m_4) = 0.$$

■

3.4 A prova do Teorema de Amitsur-Levitzki

Para demonstrar o Teorema de Amitsur-Levitzki, vamos precisar de alguns conceitos básicos de teoria de grafos.

Definição 57 *Um* grafo orientado Γ *consiste de um conjunto de pontos (chamados vértices) e um conjunto de segmentos orientados (chamados de arestas) ligando alguns destes vértices.*

Exemplo 58 *Vejamos que* $\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r] & \mathbf{2} \arrow[loop right] \end{tikzcd}$ *é um grafo com 2 vértices e 2 arestas. Já* $\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[loop left] \arrow[r] & \mathbf{2} \arrow[loop below] \arrow[r] & \mathbf{3} \arrow[loop right] \end{tikzcd}$ *é um grafo com 3 vértices e 5 arestas.*

Lembremos que na representação gráfica do produto de matrizes elementares, as arestas são as matrizes elementares.

Agora vamos definir formalmente, em termos de arestas e vértices, a ideia de caminho unicursal, já mencionada anteriormente.

Definição 59 *Sejam v o número de vértices e $\bar{a}$ o número de arestas de um grafo Γ. Se P e Q são vértices de Γ, um* caminho unicursal *ω de P a Q consiste de uma lista de todos as arestas $e_1, e_2, \ldots, e_{\bar{a}}$ de Γ, tal que:*

- *e_1 começa em P;*
- *$e_{\bar{a}}$ acaba em Q;*
- *para $1 \leq i < \bar{a}$ o ponto inicial de e_{i+1} é o ponto final de e_i.*

Como já mencionado antes, intuitivamente, um caminho unicursal é uma maneira de ir de P até Q de modo que cada aresta é percorrida uma só vez na direção certa.

Ao escolhermos uma ordem para as arestas (como acontece na representação do produto de matrizes elementares) temos que cada caminho unicursal $\omega = (e_1, e_2, \ldots, e_a)$ fornece uma permutação das arestas de Γ, em que esta notação significa que vamos percorrer primeiro a aresta e_1, depois a aresta e_2 e assim sucessivamente. Defina $\epsilon(\omega)$ o sinal desta permutação.

Lema 60 *Suponha $\bar{a} \geq 2v$. Sejam P e Q vértices fixados do grafo Γ (não necessariamente distintos). Então o número de caminhos unicursais ω de P a Q com $\epsilon(\omega) = 1$ é igual ao número de caminhos unicursais ω de P a Q com $\epsilon(\omega) = -1$*

A demonstração deste lema é técnica e será omitida nestas notas, no entanto ela pode ser consultada no artigo escrito por Swan em 1963 que se chama *An Application of Graph Theory to Algebra.*

Agora estamos prontos para provar o Teorema de Amitsur-Levitzki.

Vamos assumir o lema anterior, usar a representação gráfica do produto de matrizes elementares e_{ij} e também o lema 56, que diz que basta provar o resultado para matrizes elementares.

Demonstração do Teorema de Amitsur-Levitzki: Vamos tomar um conjunto qualquer $\{m_1, m_2, \ldots, m_{2n}\}$ com $2n$ matrizes elementares.

Defina um grafo orientado Γ com n vértices $1, 2, \ldots, n$ e aresta e_i com ponto inicial i e ponto final j se $m_i = e_{ij}$. Teremos assim n vértices ($v = n$) e $2n$ arestas ($\bar{a} = 2n$). Vejamos que neste caso $\bar{a} = 2v$ e, portanto, estamos na hipótese do lema anterior.

Como já sabemos, a regra de multiplicação entre matrizes elementares diz que o produto $m_{\sigma(1)}m_{\sigma(2)}\cdots m_{\sigma(2n)}$ é não nulo se, e somente se, a correspondente sequência de arestas $e_{\sigma(1)}e_{\sigma(2)}\cdots e_{\sigma(2n)}$ é um caminho unicursal de i a j. Porém, quando calculamos $s_{2n}(m_1, m_2, \ldots, m_{2n})$, estamos somando todos os produtos possíveis com os seus respectivos sinais.

Observemos que o lema 60 diz que para todo caminho com sinal 1 existe outro caminho com sinal -1. Então, na soma de todos os caminhos, eles se anulam. Portanto, para qualquer conjunto de $2n$ matrizes elementares $\{m_1, m_2, \ldots, m_{2n}\}$, temos

$$s_{2n}(m_1, m_2, \ldots, m_{2n}) = 0.$$

■

Por que o polinômio standard desperta interesse especial?

Uma das justificativas para este interesse está no fato de que toda identidade polinomial (para $M_n(\mathbb{K})$) $f(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ de grau 2n, que seja linear em todas as variáveis, é da forma

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = \alpha s_{2n}(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}),$$

com $\alpha \in \mathbb{K}$.

Observação 61 *Já citamos, na introdução, a importância histórica deste teorema para o desenvolvimento da PI-teoria. Este teorema é tão importante que existem, pelo menos, 5 provas diferentes para ele. Listamos abaixo os autores, os anos e os títulos dos artigos nos quais o teorema de Amitsur-Levitzki é demonstrado.*

- *S. A. Amitsur e J. Levitzki, 1950, Minimal Identities for Algebras.*
- *R. Swan, 1963, An Application of Graph Theory to Algebra.*
- *Y. Razmyslov, 1974, Trace identities of full matrix algebras over a field of characteristic zero.*
- *S. Rosset, 1976, A new proof of the Amitsur-Levitzki.*
- *J. Szigeti, Z. Tuza e G. Revesz, 1993, Eulerian Polynomial Identities on Matrix Rings.*

A demonstração que fizemos é baseada no artigo de R. Swan, de 1963.

3.5 Perguntas que ainda não sabemos responder

Vamos continuar aqui uma discussão iniciada no capítulo 2.

Até agora sabemos dizer que o polinômio standard s_{2n} é identidade polinomial para $M_n(\mathbb{K})$. Então é natural se perguntar quais são as outras identidades polinomiais para $M_n(\mathbb{K})$.

Melhorando a pergunta: quais são todas as identidades polinomiais para $M_n(\mathbb{K})$?

A pergunta merece uma analogia. Quando estudamos espaço vetorial, nos perguntamos por um número "pequeno" de vetores que geram todos os vetores. A ideia de gerar significa que, com as operações permitidas, a partir de alguns vetores nós obtemos todos os outros.

Esta é a mesma ideia que estamos procurando: queremos que a partir de algumas identidades polinomiais, fazendo as operações permitidas, consigamos todas as identidades polinomiais.

Quais são as operações permitidas entre identidades polinomiais? É possível somar, multiplicar por um elemento de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ à direita e à esquerda (operações permitidas em ideais), e trocar as variáveis por qualquer elemento de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ (propriedade de ser invariante por endomorfismos) e assim obter novas identidades polinomiais, como já mencionamos no capítulo 2.

Para ficar claro, a pergunta é: quais identidades polinomiais de $M_2(\mathbb{K})$ nos permitem reconstruir todas as outras?

Esta pergunta já foi respondida no final do capítulo anterior, através do teorema 38.

A próxima pergunta natural é: qual é a base das identidades de $M_3(\mathbb{K})$?

Resposta: Não sabemos.

Este é um tipo de pergunta que ainda não sabemos responder.

Assim como não sabemos a resposta para $M_3(\mathbb{K})$, também não sabemos para $M_4(\mathbb{K})$, $M_5(\mathbb{K})$, $M_6(\mathbb{K})$, ...

Além disso, existem outros tipos de perguntas que não sabemos responder mas que, para serem apresentadas, precisam de mais algumas definições e explicações que fogem do caráter introdutório destas notas.

Para quem tiver curiosidade de estudar mais sobre este assunto, a próxima seção fornece algumas dicas.

3.6 Onde e com quem estudar PI-álgebra no Brasil

Algumas universidades no Brasil têm linhas de pesquisa em teoria de identidades polinomiais. Como exemplo, vamos citar alguns pesquisadores destas instituições:

Unicamp (Universidade Estadual de Campinas): o professor Plamen Emilov Kochloukov.

USP (Universidade de São Paulo): os professores Ivan Chestakov e Luiz Antonio Peresi.

UFMG (Universidade Federal de Minas Gerais): as professoras Ana Cristina Vieira e Viviane Ribeiro Tomaz da Silva.

Notícia: *A Professora Viviane Ribeiro Tomaz da Silva foi a vencedora do Programa Bolsa-Auxílio (Grant) L'oreal para Mulheres na Ciência 2011-categoria Ciências Matemáticas. Este prêmio é destinado a jovens pesquisadoras e é uma iniciativa da L'Oreal Brasil em parceria com a Academia Brasileira de Ciências (ABC) e a Comissão Nacional da UNESCO (IBECC).*

UESC (Universidade Estadual de Santa Cruz): o professor Sérgio Mota Alves.

UnB (Universidade de Brasília): os professores Alexei Krassilnikov, Dimas José Gonçalves e José Antônio Oliveira de Freitas e a professora Irina Sviridova.

UFCG (Universidade Federal de Campina Grande): os professores Antônio Pereira Brandão Júnior e Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva.

Além disso, alguns professores trabalham em conjunto com outros pesquisadores como, por exemplo, as professoras Élida Alves da Silva da UFG (Universidade Federal de Goiás) e Sandra Mara Alves Jorge do CEFET-MG (Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais).

Referências

Vamos listar algumas referências básicas para o estudo de diferentes aspectos da PI-teoria. Não temos a pretensão de que esta lista seja completa.

Livros

Título	**Autores**	**Editora**	**Ano**
Free Algebras and PI-Algebras	Vesselin Drensky	Springer	2000
Polynomial Identities and Combinatorial Methods	Mikhail Zaicev, Amitai Regev e Antonio Giambruno	Marcel Dekker	2003
Polynomial Identity Rings	Edward Formanek e Vesselin Drensky	Springer	2004
Polynomial Identities and Asymptotic Methods	Mikhail Zaicev e Antonio Giambruno	American Mathematical Society	2005

Artigos

Título	**Autores**	**Revista**	**Ano**
Minimal Identities for Algebras	Shimson Amitsur e Jacob Levitzki	Proceedings of Mathematical Society	1950
An Application of Graph Theory to Algebra	Richard Swan	Proceedings of Mathematical Society	1963
Trace Identities of Full Matrix Algebras over a Field of Characteristic Zero	Yu. Razmyslov	Math USSR Izvestija	1974
A New Proof of the Amitsur-Levitzki	Yu. Razmyslov	Math USSR Izvestija	1976
Eulerian Polynomial Identities on Matrix Rings	Szigeti, Tuza e Reves	Journal of Algebra	1993

Dissertações de Mestrado

Orientador: Plamen Emilov Kochloukov
Local: Unicamp

Título	Autor	Ano
Identidades Polinomiais em Álgebras	Sérgio Sardinha de Azevedo	1999
PI-Álgebras	Alcindo Teles Galvão	2003
Identidades Polinomiais em Álgebras	Ednei Aparecido Santulo Júnior	2004
Identidades Polinomiais para a Álgebra das Matrizes de Ordem Dois sobre Corpos de Característica Zero	José Antônio Oliveira Freitas	2006
Álgebras Graduadas e Identidades Polinomiais Graduadas	Diogo Diniz Pereira Silva	2007
Álgebras com Identidades Polinomais e suas Dimensões de Gelfand-Kirillov	Gustavo Grings Machado	2011

Orientador: Luiz Antonio Peresi
Local: USP

Título	Autor	Ano
Identidades Polinomiais para as Álgebras de Matrizes, Álgebras de Jordan de Grau 2 e Álgebras de Cayley-Dickson	Carlota Chiemi Kuramochi	1994
O Problema de Specht em Álgebras de Bernstein	Sidnei Azevedo de Souza	1999

Orientador: Antônio Pereira Brandão Júnior
Local: UFCG

Título	Autor	Ano
Identidades e Polinômios Centrais para Álgebras de Matrizes	Leomaques Francisco Silva Bernardo	2009
Polinômios Centrais para Álgebras T-Primas	Sabrina Alves de Freitas	2010
Identidades de Álgebras de Matrizes e o Teorema de Amitsur-Levitzki	Marciel Medeiros de Oliveira	2010
Identidades e Polinômios Centrais para o Produto Tensorial pela Álgebra de Grassmann	Jussiê Ubaldo da Silva	2011

Orientador: Sérgio Mota Alves
Local: UFCG

Título	Autor	Ano
O Teorema sobre Produto Tensorial em Característica Positiva	Suene Ferreira Campos	2008
A Dimensão de Gelfand-Kirillov e Algumas Aplicações à PI-Teorias	Carlos David de Carvalho Lobão	2009
Base para Identidades Polinomiais das Matrizes Triangulares em Blocos com $\mathbb{Z}_2$-Graduação	Rivaldo do Nascimento Júnior	2009

Teses de Doutorado

Orientador: Plamen Emilov Kochloukov
Local: Unicamp

Título	Autor	Ano
Identidades Graduadas para Álgebras de Matrizes	Sérgio Sardinha de Azevedo	2003
Identidades Polinomiais na Álgebra das Matrizes de Ordem 2	Jones Colombo	2004
Identidades Polinomiais em Álgebras T-Primas	Marcello Fidelis	2005
Polinômios Centrais para Álgebras Graduadas	Antônio Pereira Brandão Júnior	2006
PI Equivalência e Não Equivalência de Álgebras	Sérgio Mota Alves	2006
Mergulhos Graduados de PI-Álgebras	Ednei Aparecido Santulo Júnior	2007
A-Identidades Polinomiais em Álgebras Associativas	Dimas José Gonçalves	2009
Identidades Polinomiais Graduadas e Produto Tensorial Graduado	José Antônio Oliveira de Freitas	2009
Identidades Graduadas em Álgebras Não-Associativas	Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva	2010

Orientador: Alexei Krassilnikov
Local: UnB

Título	Autor	Ano
Polinômios Centrais em Algumas Álgebras Associativas e Representação de Grupos	Élida Alves da Silva	2008
Identidades Polinomiais Graduadas em Algumas Álgebras Matriciais	Evander Pereira de Rezende	2010

Orientador: Luiz Antonio Peresi
Local: USP

Título	Autor	Ano
Identidades Polinomiais em Álgebras de Bernstein	Ivan Alejandro Correa Sierra	1993