UNIVERSIDADE FEDERAL DO MATO GROSSO

INTRODUÇÃO À TEORIA DAS FILAS

Flávio Gomes de Moraes
Gecirlei Francisco da Silva
Tacyanne Assis Rezende

Cuiabá - MT
Nov. 2011

Flávio Gomes de Moraes[1]
Gecirlei Francisco da Silva[2]
Tacyanne Assis Rezende[3]

INTRODUÇÃO À TEORIA DAS FILAS

Cuiabá - MT
Nov. 2011

[1]Professor da Universidade Federal de Goiás - Câmpus Jataí
[2]Professor da Universidade Federal de Goiás - Câmpus Jataí
[3]Discente do Curso de Especialização em Matemática Aplicada da Universidade Federal de Goiás - Câmpus Jataí

Contents

1 INTRODUÇÃO

Todas as pessoas já passaram pelo aborrecimento de ter que esperar em filas. Nós esperamos em fila quando estamos no supermercado aguardando para pagar nossas compras, nos bancos e em muitas outras situações. Para entender melhor esse fenômeno, um estudo sobre teoria das filas se faz necessário. De acordo com (MOREIRA 2010), "teoria das filas é um corpo de conhecimentos matemáticos, aplicado ao fenômeno das filas."

Pensando sobre este assunto a proposta deste minicurso é oferecer informações básicas sobre a Teoria das Filas e suas Aplicações, para tal, apresentamos os conceitos preliminares de caracterização de processos com geração de fila, seus componentes e fundamentos estatísticos necessários à compreensão dos modelos e suas utilizações em algumas aplicações.

O minicurso está organizado da seguinte maneira: na Seção 2 os tópicos de probabilidade, na Seção 3, a introdução aos conceitos da Teoria das Filas, na Seção 4, os processos de chegada e de atendimento para o sistema de um canal e uma fila com população infinita e na Seção 5, as aplicações.

2 TÓPICOS DE PROBABILIDADE

Nesta Seção abordaremos algumas definições de probabilidade, ou seja, a parte Matemática que contribui para a fundamentação e entendimento dos conceitos acerca da Teoria das Filas. As definições aqui apresentadas são pautadas em Mann (2006), Larson e Farber (2009). São elas: variável aleatória, variável aleatória discreta, distribuição de probabilidades de uma variável aleatória discreta, a distribuição de Poisson, variável aleatória contínua e a distribuição Exponencial, cada uma, respectivamente exemplificada.

2.1 VARIÁVEIS ALEATÓRIA: DEFINIÇÃO E CLASSIFICAÇÃO

Variável Aleatória: é uma função que associa cada elemento do espaço amostral a um número real.

Example 1. Vamos considerar o experimento aleatório que consiste no lançamento de três moedas. O espaço amostral deste experimento é:

$$S = \{(C,C,C), (C,C,R), (C,R,C), (C,R,R), (R,C,C), (R,C,R), (R,R,C), (R,R,R)\}$$

em que C = cara e R = coroa.

Podemos definir a variável aleatória de interesse como sendo o número de coroas obtidas no lançamento das três moedas, ou seja, X: número de coroas. De acordo com a difinição da variável aleatória, podemos associar a cada ponto amostral um número, como mostra o quadro abaixo:

Resultados (S)	X(Imagem)
C, C, C	0
C, C, R	1
C, R, C	1
C, R, R	2
R, C, C	1
R, C, R	2
R, R, C	2
R, R, R	3

Observemos que a cada resultado do experimento está associado um único valor da variável aleatória X, a saber, $0, 1, 2$ e 3.

Temos que $X = 0$, com probabilidade $1/8$ se, e somente se, ocorre o resultado C, C, C.

Temos que $X = 1$, com probabilidade $(1/8) + (1/8) + (1/8) = (3/8)$ se, e somente se, ocorrem os resultados C, C, R ou C, R, C ou R, C, C, que são mutuamente exclusivos.

Temos que$X = 2$, com probabilidade $(1/8) + (1/8) + (1/8) = (3/8)$ se, e somente se, ocorrem os resultados C, R, R ou R, C, R ou R, R, C, que são mutuamente exclusivos.

Finalmente, $X = 3$, com probabilidade $1/8$ se, e somente se, ocorre o resultado R, R, R.

Eventos Mutuamente Exclusivos: Dizemos que dois ou mais eventos são mutuamente exclusivos quando a realização de um exclui a realização do(s) outro(s). Assim, no lançamento de uma moeda, o evento "tirar cara" e o evento "tirar coroa" são mutuamente exclusivos, já que, ao se realizar um deles, o outro não se realiza.

Se dois eventos são mutuamente exclusivos, a probabilidade de que um evento A ou outro evento B se realize é igual à soma das probabilidades de que cada um deles se realize: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Example 2. A Tabela abaixo fornece a distribuição de frequências absolutas e a distribuição de frequências relativas para o número de Rx positivos, de 10.000 pessoas submetidas a 3 exames radiológicos (Rx) do tórax no diagnóstico da tuberculose.

Table 1: Distribuição de frequências para testes positivos (Rx positivo) entre 10.000 pessoas.

Número de Rx positivos (+)	Frequência (Número de pessoas classificadas)	Frequência Relativa
0	9.600	${}^{9.600}/_{10.000} = 0,960$
1	150	${}^{150}/_{10.000} = 0,015$
2	50	${}^{50}/_{10.000} = 0,005$
3	200	${}^{200}/_{10.000} = 0,020$
Total	10.000	$1,000$

Fonte: Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1415-790X2003000400012& lng=pt&nrm=iso&tlng=pt>. Acesso em: 18 jul. 2011.

Suponha que uma pessoa seja aleatoriamente selecionada nessa população. O processo de selecionar aleatoriamente uma pessoa é chamado de experimento aleatório ou experimento baseado no acaso. Seja X o número de Rx positivos da pessoa selecionada. Então,X pode assumir qualquer um dos quatro valores possíveis $(0, 1, 2, 3)$ apresentados na primeira coluna da Tabela 1. O valor assumido por X depende de qual pessoa está sendo selecionada. Dessa maneira, esse valor depende do resultado de um experimento aleatório. Por isso, X é chamado de **variável aleatória** ou **variável decorrente do acaso**. Em geral, uma variável aleatória é representada por X ou Y.

Uma variável aleatória pode ser classificada em discreta ou contínua. Primeiramente, vamos definir uma variável aleatória discreta.

Variável Aleatória Discreta: Uma variável aleatória que assume valores contáveis é chamada de variável aleatória discreta.

Na tabela 1, o número de Rx positivos de uma pessoa representa um exemplo de uma variável aleatória discreta, uma vez que os valores da variável aleatória, X, são contáveis: $0, 1, 2$ e 3.

Apresentamos alguns outros exemplos de variáveis aleatórias discretas:

- O número de clientes em uma determinada loja de roupas;
- O número de carros alugados em uma determinada locadora de veículos;
- O número de dias chuvosos em um mês;
- O número de alunos presentes na sala de aula;
- O número de disciplinas cursadas por aluno;
- O número de clientes em uma fila de banco;

- Entre outros.

Distribuição de Probabilidades de uma Variável Aleatória Discreta: A *distribuição de probabilidades de uma variável aleatória discreta* apresenta todos os valores possíveis que uma variável aleatória pode assumir, bem como suas probabilidades correspondentes.

O exemplo abaixo ilustra o conceito de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória discreta.

Example 3. Voltando a Tabela 1 da distribuição de frequências e da distribuição de frequências relativas do número de Rx positivos por pessoa, vamos reproduzi-la a seguir, como sendo a Tabela 2. Seja X o número de Rx positivos de uma pessoa aleatoriamente selecionada. Apresente a distribuição de probabilidades de X.

Table 2: Distribuição de frequências para testes positivos (Rx positivo) entre 10.000 pessoas

Número de Rx positivos (+)	Frequência (Número de pessoas classificadas)	Frequência Relativa
0	9.600	$0,960$
1	150	$0,015$
2	50	$0,005$
3	200	$0,020$
Total	10.000	$1,000$

Solução: Sabemos que as frequências relativas que representam a população, como é o caso na Tabela 2, elas fornecem as probabilidades efetivas dos resultados. Assim, podemos utilizar as frequências relativas da Tabela 2 para descrever a *distribuição de probabilidades da variável aleatória discreta*, X, na Tabela 3.

Table 3: Distribuição de frequências para testes positivos (Rx positivo) entre 10.000 pessoas

Número de Rx positivos (+)	Probabilidade $P(x)$
0	$0,960$
1	$0,015$
2	$0,005$
3	$0,020$
Total	$1,000$

Uma distribuição de probabilidades de uma variável aleatória discreta deve satisfazer as duas condições a seguir:

1. A probabilidade atribuída a cada valor de uma variável aleatória X se posiciona no intervalo entre 0 e 1; ou seja, $0 \leq P(x) \leq 1$ para cada x.

2. A soma das probabilidades atribuídas a todos os valores possíveis de X é igual a 1; ou seja, $\sum P(x) = 1$.

Observe que, na Tabela 3, cada probabilidade apresentada na coluna com $P(x)$ encontra-se entre 0 e 1. Da mesma forma $\sum P(x) = 1$. Como ambas as condições estão satisfeitas, a Tabela 3 representa a distribuição de probabilidades de X. Ainda com base na Tabela 3, podemos ler a probabilidade para qualquer valor de X. Por exemplo, a probabilidade de que uma pessoa aleatoriamente selecionada tenha a doença, dado que possua um Rx positivo é de $0,015$. Essa probabilidade é escrita como

$$P(X = 1) = 0,015$$

ou

$$P(1) = 0,015$$

A probabilidade de que a pessoa selecionada tem a doença, dado que possua mais de um Rx positivo é oferecida pela soma das probabilidades de possuir dois ou três Rx positivos. Essa probabilidade é $0,005 + 0,020 = 0,025$, pode ser escrita como

$$P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3) = P(2) + P(3) = 0,005 + 0,020 = 0,025$$

A partir desta soma, podemos definir a Função de Distribuição Acumulada que é dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(x_i)$$

Observação:

a) A função de distribuição de X é também frequentemente chamada de função de distribuição acumulada de X.

b) A função $F(x)$ é não-decrescente quando x aumenta, isto é, se $x_1 < x_2$, então $F(x_1) \leq F(x_2)$.

c) Para qualquer valor de x

$$P(X > x) = 1 – F(x)$$

d) Para quaisquer valores x_1 e x_2, tais que $x_1 < x_2$,

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) – F(x_1)$$

Variável Aleatória Contínua: é uma variável aleatória cujos valores não são contáveis.

Uma variável aleatória contínua pode assumir qualquer valor, ao longo de um intervalo, ou mais de um intervalo. Uma vez que o número de valores contidos em qualquer intervalo é infinito, o número possível de valores que uma variável aleatória contínua pode assumir é também infinito. Além disso, não podemos contar esses valores. Por exemplo: o tempo gasto para completar um exame, a quantidade de leite em um galão, o tempo gasto em desenvolver uma dada atividade, bem como, o tempo entre as chegadas de duas pessoas a um balcão de informações.

Função Densidade de Probabilidade: A função densidade de probabilidade (fdp) de uma variável aleatória X, se existir, é definida como a derivada de $F(x)$:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

A fdp representa a "densidade" de probabilidade no ponto x no seguinte sentido: a probabilidade de que X esteja em um intervalo pequeno na vizinhança de x, isto é

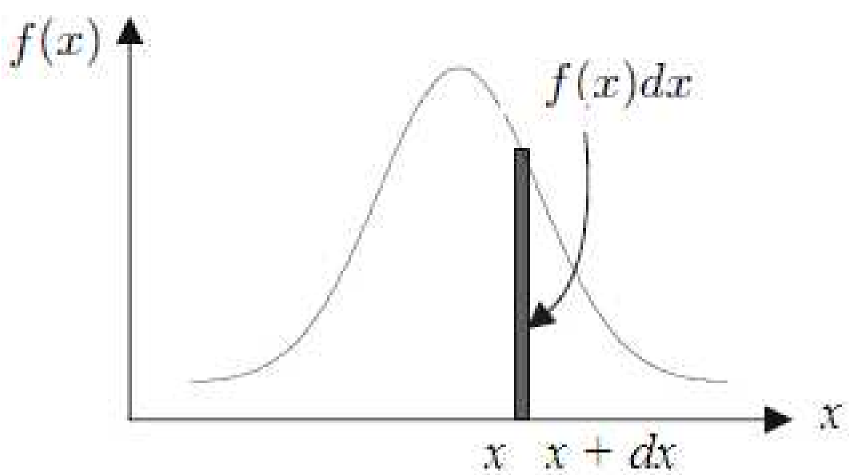
$$\{x < X \leq x + h\}\,,\; é\, P[\{x < X \leq x + h\}] = F(x+h) - F(x) = \left(\frac{F(x+h) - F(x)}{h}\right) h$$

Se a $F(x)$ tem uma derivada em x, então à medida que $h \to 0$

$$P[\{x < X \leq x + h\}] \approx f(x)\, h$$

Então $f(x)$ representa a "densidade" de probabilidade no ponto x no sentido de que a probabilidade de que X esteja em um pequeno intervalo na vizinhança de x é aproximadamente $f(x)h$, conforme mostrado na Figura 2.1.

Figure 2.1: A função densidade de probabilidade especifica a probabilidade de intervalos de largura infinitesimal.



A probabilidade de X estar contido em uma dada faixa de valores é igual a área sob a curva de $f(x)$, para a faixa de valores de interesse.

Propriedades

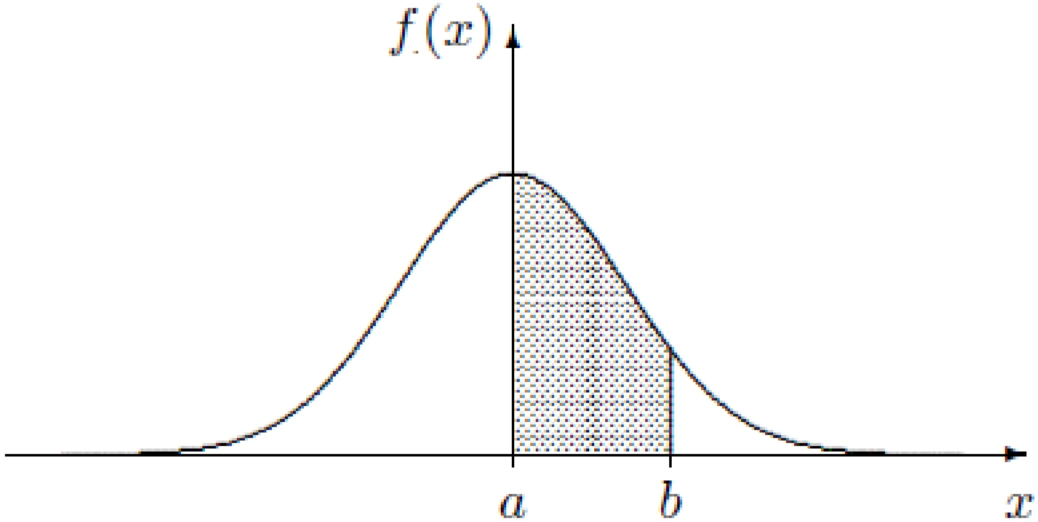
1. A derivada da $F(x)$, quando existir, é positiva desde que a $F(x)$ seja uma função não decrescente de x, então $f(x) \geq 0$.

2. Seja $f(x)$ uma função não negativa, a qual chamaremos de função densidade de probabilidade, e que especifica as probabilidades de eventos da forma "X cai em um pequeno intervalo de largura dx ao redor do ponto x". As probabilidades de eventos envolvendo X são então expressas em termos da fdp adicionando probabilidades de intervalos de largura dx. À medida que as larguras dos intervalos se aproximam de zero, obtemos uma integral em termos da fdp. Por exemplo, a probabilidade de um intervalo $[a, b]$ é dada por

$$P[a \leq x \leq b] = \int_a^b f(x)\,dx$$

   A probabilidade de um intervalo é, portanto a área sob $f(x)$ naquele intervalo (ver Figura 2.2). A probabilidade de qualquer evento que consiste na união de intervalos disjuntos pode ser encontrada adicionando-se as integrais da fdp sobre cada um dos intervalos.

Figure 2.2: A probabilidade de um intervalo $[a, b]$ é a área sob a fdp naquele intervalo.



3. A $F(x)$ pode ser obtida integrando-se a fdp, ou seja,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

4. Fazendo $x \to +\infty$ na equação anterior, obtemos a condição de normalização para as fdp's

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$$

5. Uma fdp válida pode ser formada a partir de qualquer função $g(x)$ não negativa e contínua por partes que tenha uma integral finita

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx = c < \infty$$

Fazendo $f(x) = {}^{g(x)}/_{c}$ obtemos uma função que satisfaz a condição de normalização. Note que a fdp precisa ser definida para todos os valores reais de x; se X não toma valores em alguma região da reta real, simplesmente fazemos $f(x) = 0$ na região.

2.2 MODELO DE DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE DE POISSON

A distribuição de probabilidades de Poisson recebeu esse nome devido ao matemático francês Simeon Denis Poisson, representa uma das importantes distribuições de probabilidades de uma variável aleatória discreta e tem um grande número de aplicações. Essa distribuição é aplicável a ocorrências de um evento em um intervalo especificado. Por exemplo:

- Clientes chegando ao caixa de um supermercado;
- Acidentes com automóveis em uma determinada estrada;
- Número de carros que chegam a um posto de gasolina;
- Número de falhas em componentes por unidade de tempo;
- Número de peças defeituosas substituídas num veículo durante o primeiro ano de vida;
- Usuários de computador ligados à Internet;
- Número de requisições para um servidor em um intervalo de tempo t e etc.

Em todas estas situações, temos um conjunto de ocorrências que satisfazem as seguintes condições:

- O número de ocorrências de um evento em um intervalo de tempo (espaço) é independente do número de ocorrências do evento em qualquer outro intervalo disjunto – ocorrências independentes umas das outras;
- A probabilidade de duas ou mais ocorrências simultâneas é praticamente zero;

- O número médio de ocorrências por unidade de tempo (espaço) é constante ao longo do tempo (espaço) – ocorrências distribuídas uniformemente sobre o intervalo considerado;

- O número de ocorrências durante qualquer intervalo depende somente da duração ou tamanho do intervalo; quanto maior o intervalo, maior o número de ocorrências.

Portanto, a variável aleatória X é o número de ocorrências do evento em um intervalo que pode ser o tempo, a distância, a área, o volume ou outra unidade análoga.

Condições para Aplicar a Distribuição de Probabilidades de Poisson

As três condições a seguir devem ser satisfeitas para que seja aplicada a distribuição de probabilidades de Poisson.

1. X deve ser uma variável aleatória discreta.

2. As ocorrências devem ser aleatórias.

3. As ocorrências devem ser independentes.

Fórmula da Distribuição de Probabilidades de Poisson

De acordo com a distribuição de probabilidades de Poisson, a probabilidade de X ocorrências em um intervalo é:

$$P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

onde e é um número irracional aproximadamente igual a $2,71828$ e μ (pronuncia-se mi) é a média dos números de ocorrências por intervalo de tempo ou espaço.

A média aritmética do número de ocorrências em um intervalo, representada por μ, é chamada de parâmetro da distribuição de probabilidades de Poisson ou parâmetro de Poisson. Podemos observar que pela fórmula torna-se óbvio a necessidade de conhecermos somente o valor de μ para calcular a probabilidade de qualquer valor determinado de x.

Para verificar que a expressão acima representa uma legítima distribuição de probabilidade, basta observar que

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!} \right) = e^{-\mu}.e^{\mu} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{\mu^k}{k!} \right) = 1 + \mu + \frac{\mu^2}{2!} + ... + \frac{\mu^n}{n!} = e^{\mu}$$

Usando a Distribuição de Poisson com Modelos de Queuing

Queuing significa esperar em fila para ser servido. Há muitos exemplos de *queuing* na vida cotidiana: esperar na fila para ser atendido no caixa de um banco, esperar em um semáforo, esperar na fila de uma loja para aprovação de um crediário e etc.

As distribuições de Poisson são usadas para modelar e prever o número de pessoas (veículos, programas de computador) que chegarão à fila. A seguir utilizaremos a distribuição de Poisson para analisar os *queues* no caixa de um supermercado.

Example 4. Considere um supermercado que pode processar um total de quatro clientes em seu caixa por minuto. Suponha que a média do número de clientes que chegam ao caixa por minuto seja 4. Utilizando a fórmula da distribuição de probabilidades de Poisson, encontre a probabilidade de que durante o próximo minuto cheguem ao caixa:

a) exatamente três clientes.
b) no máximo dois clientes.
c) pelo menos treze clientes.

Solução: Seja μ a média aritmética do número de clientes que chegam ao caixa por minuto e X o número efetivo de clientes observados durante o minuto seguinte para este caixa. Então,

$$\mu = 4$$

a) A probabilidade de que exatamente três clientes venham a ser observados durante o próximo minuto é

$$P(X=3) = \frac{(4)^3 e^{-4}}{3!} = \frac{(64)(0,01831564)}{3.2.1} = \frac{1,17220096}{6} = \mathbf{0,1954}$$

b) A probabilidade de que no máximo dois clientes venham a ser observados durante o próximo minuto é dada pela soma das probabilidades de zero cliente, um cliente e dois clientes. Portanto, ao utilizarmos a Função de distribuição Acumulada, temos:

$$P(X \le 2) = P(\text{no maximo 2 clientes}) = P(\text{0 ou 1 ou 2 clientes}) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$$

$$= \frac{(4)^0 e^{-4}}{0!} + \frac{(4)^1 e^{-4}}{1!} + \frac{(4)^2 e^{-4}}{2!}$$

$$= \frac{(1)(0,01831564)}{1} + \frac{(4)(0,01831564)}{1} + \frac{(16)(0,01831564)}{2}$$

$$= 0,0183 + 0,0733 + 0,1465 = \mathbf{0,2381}$$

c) A probabilidade de que pelo menos treze clientes venham a ser observados durante o próximo minuto é obtida somando-se as probabilidades de treze e quatorze clientes. Observe que quatorze representa o último valor de X para $\mu = 4$, ou seja, representa o último valor de X, cuja probabilidade está incluída na soma. Entretanto, isso não significa que, em um determinado minuto, mais do que quatorze clientes cheguem ao caixa. Significa simplesmente que a probabilidade de quinze ou mais clientes é próxima de zero. Isso ocorre devido ao arredondamento, que estamos considerando, para quatro casas decimais. Logo,

$$P(X \ge 13) = P(\text{pelos menos 13 clientes}) = P(X=13) + P(X=14)$$

$$= \frac{(4)^{13} e^{-4}}{13!} + \frac{(4)^{14} e^{-4}}{14!}$$

$$= 0,0002 + 0,0001 = \mathbf{0,0003}$$

Ao analizarmos a capacidade de atendimento do caixa desse supermercado, percebemos que se chegassem treze clientes, com certeza teríamos uma fila formada para o atendimento dos mesmos, já que o intervalo de tempo considerado corresponde a processar um total de quatro clientes por minuto.

2.3 MODELO DE DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE EXPONENCIAL

A distribuição exponencial é uma distribuição contínua que pode ser aplicada em situações problemas nas empresas, como exemplo, na área de serviços prestados, ela também tem utilidade em problemas que envolvem fila de espera.

Quando os serviços prestados por uma empresa para clientes externos ou internos são de duração variável, a distribuição exponencial é indicada para analisar esses experimentos; por exemplo, a duração do atendimento do caixa de um banco ou de postos de saúde, o tempo de operação sem interrupção de um equipamento, tempo de chegadas a um lava-jato, tempo de vida de aparelhos, tempo de espera em restaurantes, etc.

Uma variável aleatória contínua X, que assume todos os valores não negativos, terá uma distribuição exponencial com parâmetro $\mu > 0$, se a função densidade de probabilidade (fdp) for dada por

$$f(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x},\ x \geq 0 \\ 0,\ x < 0 \end{cases}$$

onde x é o valor assumido pela variável aleatória (tempo entre as chegadas) e μ a taxa de ocorrências da variável aleatória, que estabelece a taxa de chegadas por hora, por exemplo, ou de serviços por minuto ou alguma outra unidade de tempo. Se a taxa é μa média de ocorrências é $\frac{1}{\mu}$.

Por definição a probabilidade de uma variável aleatória contínua é sempre igual à área do gráfico da curva da função densidade de probabilidade. Neste caso:

$$P(X \geq 0) = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu x} dx = \lim_{A \to \infty} \int_0^{A} \mu e^{-\mu x} dx$$

$$= \lim_{A \to \infty} \left[-e^{-\mu x}\right] |_0^A = \lim_{A \to \infty} \left(-e^{\mu A} + e^0\right) = 0 + 1 = 1$$

Como

$$P(X \geq x) = \int_x^{\infty} \mu e^{-\mu w} dw$$

$$= \lim_{A \to \infty} \left(-e^{-\mu w}\right) |_x^A = \lim_{A \to \infty} \left(-e^{-\mu A} + e^{-\mu x}\right)$$

$$= 0 + e^{-\mu x} = e^{-\mu x}$$

Portanto

$$P(X \geq x) = e^{-\mu x}.$$

Para calcularmos as probabilidades com a função exponencial, podemos utilizar as seguintes fórmulas:

- A probabilidade acumulada de zero até b: $P(x \leq b) = 1 - e^{-\mu b}$;
- A probabilidade acumulada complementar: $P(x \geq b) = e^{-\mu b}$, ou como complemento da anterior $P(x \geq b) = 1 - P(x \leq b) = e^{-\mu b}$;
- A probabilidade de que a variável aleatória tome valores entre dois valores quaisquer: $P(a \leq x \leq b) = P(x \leq b) - P(x \leq a)$

A distribuição Exponencial apresenta uma propriedade interessante que é denominada de falta de memória, ou seja:

$$P(X \geq s + t / X \geq s) = P(X \geq s + t \frown X \geq s) / P(X \geq s) = P(X \geq s + t) / P(X \geq s) =$$

$$= e^{-\mu(s+t)} / e^{-\mu s} = e^{-\mu t}$$

Portanto,

$$P(X \geq s + t / X \geq s) = P(X \geq t)$$

Example 5. Suponha que o tempo médio entre o pedido e o atendimento num grande restaurante seja de 10 minutos. Suponha ainda que esse tempo tenha distribuição exponencial. Determine a probabilidade de espera:

a) Superior a 10 minutos;
b) Não superior a 10 minutos;
c) Não superior a 3 minutos;
d) entre 3 e 10 minutos.

Solução: Temos que o tempo médio entre o pedido e o atendimento é $\frac{1}{\mu} = 10$ minutos, e queremos calcular:

(a) A probabilidade de que a espera no restaurante seja mais que 10 minutos, ou seja,

$$P(x \geq b) = P(x \geq 10) = e^{\frac{-10}{10}} = e^{-1} = 0,3679 \,\text{ou}\, 36,79\%$$

(b) A probabilidade de que a espera no restaurante seja no máximo, 10 minutos, ou seja,

$$P(x \leq b) = P(x \leq 10) = 1 - e^{\frac{-10}{10}} = 1 - e^{-1} = 1 - 0,3679 = 0,6321 \,\text{ou}\, 63,21\%$$

(c) A probabilidade de que a espera no restaurante seja no máximo, 3 minutos, ou seja,

$$P\left(x \leq b\right) = P\left(x \leq 3\right) = 1 - e^{\frac{-3}{10}} = 1 - e^{-0,3} = 0,2592 \,\text{ou}\, 25,92\%$$

(d) A probabilidade de que a espera no restaurante seja entre 3 e 10 minutos, ou seja, o que se deseja é $P\left(3 \leq x \leq 10\right)$. Assim, podemos verificar facilmente que

$$P\left(3 \leq x \leq 10\right) = P\left(x \leq 10\right) - P\left(x \leq 3\right) = 0,6321 - 0,2592 = 0,3729 \,\text{ou}\, 37,29\%$$

Relação entre a Distribuição de Poisson e a Distribuição Exponencial

A distribuição de Poisson mede o número de ocorrências de determinado evento por unidade de tempo, enquanto a distribuição exponencial indica o tempo decorrido entre duas ocorrências. Assim, quando o número de ocorrências de um determinado evento é explicado pela distribuição de Poisson com média μ, o intervalo entre duas ocorrências segue a distribuição exponencial com média $\frac{1}{\mu}$.

3 INTRODUÇÃO Á TEORIA DAS FILAS

Todas as pessoas já passaram pelo aborrecimento de ter que esperar em filas. Nós esperamos em fila quando estamos no supermercado aguardando para pagar nossas compras, nos bancos e em muitas outras situações. Para entender melhor esse fenômeno, um estudo sobre teoria das filas se faz necessário. De acordo com (MOREIRA 2010), "teoria das filas é um corpo de conhecimentos matemáticos, aplicado ao fenômeno das filas."

Os sistemas de filas se descrevem, de forma geral, por um processo de chegada de clientes (ou produtos) a um sistema de atendimento (beneficiamento, produção) para receber um ou mais serviços, executados por certa quantidade de servidores. Nesse sentido, as formações de filas ocorrem porque a procura pelo serviço é maior do que a capacidade do sistema de atender a esta procura.

Como forma de aferir o comportamento do sistema de filas, associa-se medidas de desempenho como tempo médio de espera dos clientes na fila, tempo médio de chegada de clientes, probabilidade de encontrar o sistema lotado, entre outras. Dessa forma, a teoria das filas tenta através de análises matemáticas detalhadas, encontrarem um ponto de equilíbrio que satisfaça o cliente (ou linha de produção) e seja viável economicamente para o provedor do serviço. Conhecer a terminologia empregada nos estudos de sistemas de filas é o primeiro passo no estudo dessa área da Pesquisa Operacional.

3.1 CONCEITOS BÁSICOS DE FILAS

Definiremos a seguir alguns termos básicos sobre filas de espera.

3.1.1 ELEMENTOS DE UMA FILA

Cliente: Elemento que chega e requer atendimento. Os clientes podem ser pessoas, máquinas, peças, torcedor que vai comprar ingressos, cartas que chegam e devem ser entregues, carros estacionados, etc.

Alguns sinônimos são usados para o termo cliente, tais como consumidor e usuário.

Canal de atendimento: Processo ou pessoa que realiza o atendimento do cliente. É comum usar o termo atendente para referir ao canal de atendimento. Como exemplo pode citar a impressora que executa as requisições de impressões numa rede de computadores, o vendedor de ingressos, o carteiro, o estacionamento, etc.

O comportamento estatístico dos consumidores para acessarem o sistema de filas pode ser descrito por uma distribuição de probabilidades empírica que pode ser representada por um modelo analítico conhecido de probabilidade. O modelo de Poisson é comumente usado para descrever a forma como os consumidores são gerados pela fonte e, para definir completamente essa distribuição, é necessário ter apenas a taxa média de chegadas.

O tempo transcorrido desde o começo do atendimento até a sua conclusão para um consumidor que está recebendo o serviço é o tempo de serviço. Para descrever o atendimento, devemos especificar uma distribuição de probabilidade para os tempos de serviço. A distribuição mais comumente especificada para tempos de serviço é a distribuição exponencial.

3.1.2 CARACTERÍSTICAS DE UMA FILA

Conforme ANDRADE (1998), um sistema de filas é caracterizado por seis componentes. Os três primeiros são obrigatórios e os três últimos, se não informados, são considerados conhecidos:

a) Modelo de chegada dos usuários ao serviço: o modelo de chegada é usualmente especificado pelo tempo entre as chegadas dos usuários/serviços. Pode ser determinístico, isto é, as chegadas ocorrem em intervalos de tempo exatamente iguais (tempo entre as chegadas é constante), ou ser uma variável aleatória, quando o tempo entre as chegadas é variável e segue uma distribuição de probabilidades presumivelmente conhecida.

Além de sabermos se o modelo de chegada é determinístico ou é uma variável aleatória, precisamos também saber a taxa de chegada λ (lâmbida). A constante λ é a taxa média de chegadas dos usuários por unidade de tempo.

b) Modelo de serviço (atendimento aos usuários): o modelo de serviço é normalmente especificado pelo tempo de serviço, isto é, o tempo requerido pelo atendente para concluir o atendimento. Da mesma forma que o modelo de chegada, pode ser determinístico (constante) ou uma variável aleatória (quando o tempo de atendimento é variável e segue uma distribuição de probabilidades presumivelmente conhecida). Neste último caso, valem as mesmas considerações feitas à distribuição de probabilidades associada ao modelo de chegada dos usuários ao serviço.

A constante μ(mi) é a taxa média de atendimentos por unidade de tempo, por atendente.

c) Número de servidores: é o número de atendentes disponíveis no sistema.

d) Capacidade do sistema: é o número de usuários que o sistema é capaz de atender. Inclui o número de usuários que estão sendo atendidos mais os que esperam na fila. Se este parâmetro não for informado, o sistema é considerado com capacidade ilimitada (∞).

e) Tamanho da população: número potencial de clientes que podem chegar a um sistema. Pode ser finito ou infinito.

f) Disciplina da fila: é o modo como os usuários são atendidos. A disciplina da fila pode ser:

- FIFO (first in, first out): primeiro a chegar é o primeiro a ser atendido;
- LIFO (last in, first out): último a chegar é o primeiro a ser atendido;
- ALEATÓRIO, isto é, os atendimentos são feitos sem qualquer preocupação com a ordem de chegada;
- COM PRIORIDADE, quer dizer, os atendimentos são feitos de acordo com prioridades estabelecidas;

Se a disciplina da fila não for informada, é considerada de acordo com o modelo FIFO.

3.1.3 OPÇÕES DE DIMENSIONAMENTO: O TIPO DE FILA

Um sistema de fila pode ser genericamente, catalogado em cinco estruturas básicas conforme o seu esquema de prestação de serviço.

De acordo com Chase, Jacobs e Aquilano (2004), nas estruturas das filas, como mostra a figura 3.1, o fluxo dos itens a serem servidos pode seguir uma fila única, filas múltiplas ou uma mistura das duas. A escolha do formato depende parcialmente do volume de clientes atendidos e parcialmente das restrições impostas pela sequência que define a ordem pela qual o serviço deve ser realizado.

Canal único, fase única: Este é o tipo mais simples de estrutura da fila de espera, e há fórmulas diretas disponíveis para solucionar o problema do comportamento-padrão da distribuição de chegadas e dos serviços. Quando as distribuições não são padronizadas, o problema é facilmente resolvido através do uso da simulação computacional. Um exemplo típico de uma situação de canal único, fase única, é um salão de beleza com uma única pessoa.

Canal único, fases múltiplas: O sistema de lavagem de carros é uma ilustração porque uma série de serviços (aspirar, molhar, lavar, enxaguar, secar, limpar os vidros e estacionar) é realizada em uma sequência bastante uniforme. Um fator crítico no caso do canal único com séries de serviços é a quantidade de itens permitidos à frente de cada serviço, o que, por sua vez, constitui filas de espera separadas.

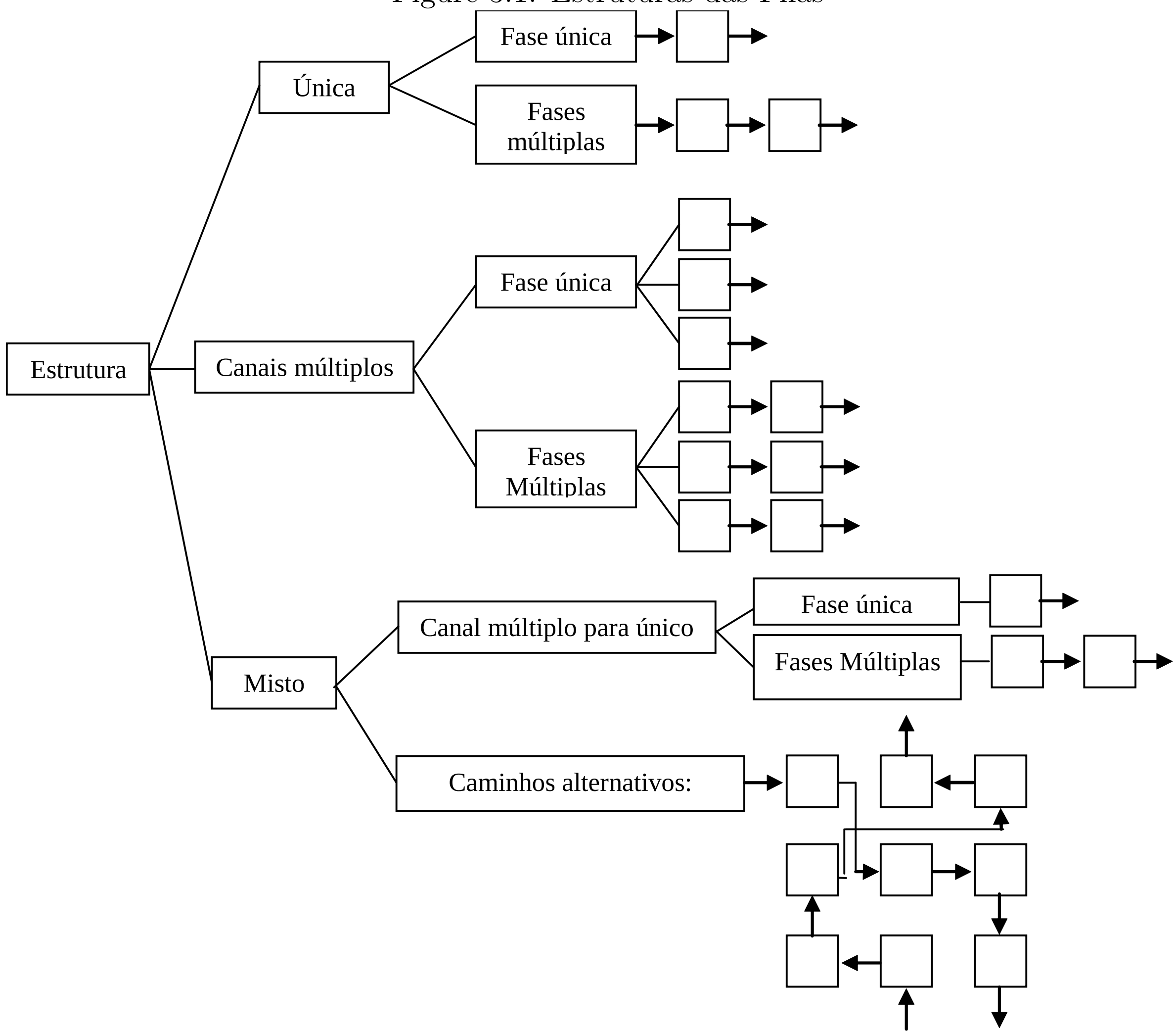
Canais múltiplos, fase única: Os caixas em um banco e os guichês nas lojas de departamentos exemplificam esse tipo de estrutura. A dificuldade com esse formato consiste no fato de que os diferentes tempos de serviço dedicados a cada cliente resultam em velocidade e fluxo desigual entre as filas. Este procedimento faz com que alguns clientes sejam atendidos antes de outros que chegaram mais cedo, assim como um certo grau de troca entre as filas por parte dos clientes. Modificar esta estrutura para garantir o atendimento das chegadas em ordem cronológica poderia levar a uma situação de fila única, na qual, à medida que um servidor torna-se disponível, o próximo cliente na fila é atendido.

O principal problema deste tipo de estrutura é que esta requer um controle rígido da fila para manter a ordem e direcionar os clientes para os servidores disponíveis. Em certas instancias a atribuição de números aos clientes, por ordem de chegada, ajuda a aliviar este problema.

Canais múltiplos, fases múltiplas: Este caso é similar ao anterior, exceto que dois ou mais serviços são realizados em sequência. A admissão de pacientes em um hospital segue este padrão, porque uma sequência específica de etapas é, geralmente, completada: contato inicial no balcão de admissões, preenchimento de formulários, confecção das pulseiras de identificação, obtenção de um quarto, acompanhamento do paciente até o quarto, e assim por diante. Uma vez que vários servidores estão geralmente disponíveis para este procedimento, poderá ser atendido mais de um paciente por vez.

Misto: Nesse tópico geral, consideram-se duas subcategorias: (1) estruturas múltiplas para canais únicos e (2) estruturas de caminhos alternativos. Em (1), encontram-se tanto as filas que se unem em uma única fila para o serviço de fase única, como no cruzamento de pontes, em que duas pistas se juntam em uma, quanto as filas que se juntam em uma para o serviço de fases múltiplas, como as linhas de submontagem que se conectam em uma linha principal. Em (2), encontram-se duas estruturas que diferem nas exigências de fluxo direcional. A primeira é similar ao caso da estrutura de canais múltiplos, fases múltiplas, com a diferença de que (a) pode haver mudança de um canal para o próximo depois que o primeiro serviço foi realizado e (b) o número de canais e fases pode variar – novamente – depois da realização do primeiro serviço.

Figure 3.1: Estruturas das Filas

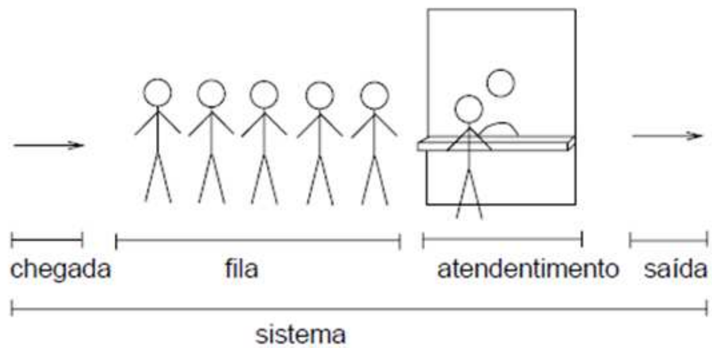


4 OS PROCESSOS DE CHEGADA E DE ATENDIMENTO

Sistema de um canal e uma fila com população infinita

Serão mostradas mais adiante as equações que definem o modelo de uma fila e um canal, com população infinita, que pode ser representado simbolicamente pela figura 4.1.

Figure 4.1: Sistema de uma fila e um canal



As equações desse modelo são baseadas nas seguintes características dos processos de chegada e de atendimento aos clientes:

- As chegadas se processam segundo uma distribuição de Poisson com média λ chegadas/tempo.
- Os tempos de atendimento seguem a distribuição exponencial com média $\frac{1}{\mu}$ (ou seja, o número de atendimentos segue a distribuição de Poisson com média μ).
- O atendimento à fila é feito por ordem de chegada.
- O número de clientes potenciais é suficientemente grande para que a população possa ser considerada infinita.
  A condição básica para que um sistema de fila seja estável é que a taxa de chegada seja menor do que a taxa de serviço, ou seja, $\frac{\lambda}{\mu}$ tem que ser menor do que 1. Caso isto não aconteça a fila tende ao infinito.
  Existem 3 eventos possíveis durante a variação do tempo:
- A entrada de 1 unidade no sistema;
- A saída de 1 unidade do sistema ou
- Nenhuma alteração, ou seja, nenhuma chegada ou nenhum término de serviço.

4.1 FÓRMULAS DO MODELO DE SISTEMA DE UM CANAL E UMA FILA COM POPULAÇÃO INFINITA

Para Marins (2009), há várias Variáveis de Decisão importantes para a análise do desempenho do sistema:

(1) Tempo que um cliente permanece na fila;
(2) Número de clientes na fila;
(3) Tempo que um cliente permanece no sistema;
(4) Número de clientes no sistema;
(5) Ociosidade dos atendentes

Como, em geral, estas variáveis são aleatórias, pois dependem do comportamento das chegadas e dos atendimentos, uma maneira de conseguir medir o desempenho de um sistema de filas é introduzir medidas de eficiência que sejam funções dos valores médios destas variáveis aleatórias.

Para tanto, considera-se o sistema de filas quando ele entra em regime estacionário, isto é, após um prolongado período de funcionamento (diz-se, também, que o sistema está em equilíbrio). Neste caso, denota-se por:

L- Valor médio do número de clientes no sistema (inclui os que estão sendo servidos);
L_q- Valor médio do número de clientes na fila (exclui os que estão sendo servidos);
W- Valor médio do tempo que um cliente gasta no sistema;
W_q- Valor médio do tempo que um cliente gasta na fila;
P_n- Probabilidade de que o número de clientes no sistema seja n.

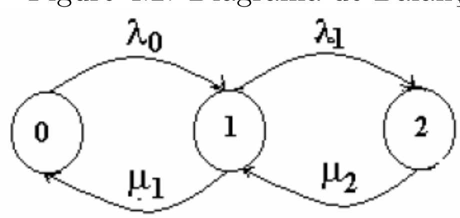
4.2 PROCESSOS DE NASCIMENTO E MORTE ($P - N - M$)

Segundo Marins (2009), com respeito aos modelos de filas aqui apresentados, eles podem ser classificados numa subárea conhecida por Processos de Nascimento e Morte.

Definições:
(a) Um Nascimento representa a entrada de um cliente no sistema;
(b) Uma Morte representa a saída de um cliente no sistema;
(c)λ_n = Taxa Média de Chegada quando há n clientes no sistema;
(d) μ_n =Taxa Média de Serviço quando há n clientes no sistema;

Para Costa (2004), o diagrama abaixo representa as transições de estados sendo possível verificar que o fluxo de entrada em um estado é igual ao seu fluxo de saída.

Figure 4.2: Diagrama de Balanço



Assim, λ_i e μ_i serão chamados de taxas de nascimento e morte, no estado i, respectivamente. A matriz geradora será dada por

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \mu_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

e a cadeia de Markov será dada por

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\mu_1}{(\lambda_1+\mu_1)} & 0 & \frac{\lambda_1}{(\lambda_1+\mu_1)} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\mu_2}{(\lambda 2_1+\mu 2_1)} & 0 & \frac{\lambda_2}{(\lambda_2+\mu_2)} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Com as condições apropriadas em μ_n e λ_n,uma solução de estado de equilibrio existe e pode ser determinada de $0 = PQ$, de forma que, equações de balanço para o processo de nascimento e morte podem ser geradas como a seguir:

$$\lambda_{j-1}P_{j-1} + \mu_{j+1}P_{j+1} - (\lambda_j + \mu_j)\, P_j = 0, \text{ para } j \geq 1 \qquad \text{(I)}$$

$$\mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0 = 0 \qquad \text{(II)}$$

Isolando P_{j+1}, em (I) ,temos:

$$P_{j+1} = \frac{(\lambda_1 + \mu_1)}{\mu_{j+1}} P_j - \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_{j+1}} P_{j-1} \qquad \text{(III)}$$

Isolando P_1, em (II) , temos:

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 \qquad \text{(IV)}$$

Fazendo $j = 1$, em (III)e em seguida substituindo P_1, pela equação (IV) :

$$P_2 = \frac{(\lambda_1 + \mu_1)}{\mu_2} P_1 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} P_0$$

$$P_2 = \frac{(\lambda_1 + \mu_1)}{\mu_2} . \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} P_0$$

Organizando mais um pouco temos:

$$P_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_0 P_0 + \mu_1 \lambda_0 P_0}{\mu_1 . \mu_2} - \frac{\mu_1 \lambda_0 P_0}{\mu_1 . \mu_2}$$

$$P_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_0 P_0}{\mu_1 \mu_2} \qquad \text{(V)}$$

Fazendo $j = 2$, em (III) , em seguida, substituindo P_1, pela equação (IV) e P_2, pela equação (V) :

$$P_3 = \frac{(\lambda_2 + \mu_2)}{\mu_3} P_2 - \frac{\lambda_1}{\mu_3} P_1$$

$$P_3 = \frac{(\lambda_2 + \mu_2)}{\mu_3} . \frac{\lambda_1 \lambda_0 P_0}{\mu_1 \mu_2} - \frac{\lambda_1}{\mu_3} . \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

Organizando mais um pouco temos:

$$P_3 = \frac{\lambda_2\lambda_1\lambda_0P_0 + \mu_2\lambda_1\lambda_0P_0}{\mu_1\mu_2\mu_3} - \frac{\mu_2\lambda_1\lambda_0P_0}{\mu_1\mu_2\mu_3}$$

$$P_3 = \frac{\lambda_2\lambda_1\lambda_0P_0}{\mu_3\mu_2\mu_1}$$

$$\vdots$$

Podemos perceber que há um padrão se estabelecendo, ou seja,

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}...\lambda_0P_0}{\mu_n\mu_{n-1}...\mu_1},\ (n \geq 1)$$

ou ainda,

$$P_n = P_0\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right)$$

sabemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1,$$

tem-se que

$$P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1$$

ou ainda:

$$P_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[P_0\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right)\right] = 1 \Rightarrow P_0 + P_0\sum_{n=1}^{\infty}\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right)\right] = 1 \Rightarrow$$

$$P_0\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right)\right]\right\} = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right)\right]} \Rightarrow$$

$$P_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right)\right]\right)^{-1}$$

Portanto temos que P_0 é a proporção do tempo em que o sistema fica vazio, ou seja, os atendentes ficam ociosos, e sabemos que pela expressão de P_n é possível calcular os valores de probabilidade de ter n clientes no sistema.

4.3 MODELOS DE FILAS MARKOVIANOS

Nesse trabalho será usado especificamente o modelo de sistema de um canal e uma fila com população infinita, com suas devidas equações. As equações do modelo se baseiam nas características dos processos de chegada e de serviço (atendimento). Ele também é um dos principais modelos de filas conhecidas como Markovianas, ou seja, têm as chegadas e os atendimentos seguindo as distribuições de Poisson e Exponencial.

Taxa média de chegada (Poisson): λ_n

Taxa de serviço médio (Exponencial): μ_n

Número de atendentes: 1

Disciplina de atendimento: FIFO.

Obs.: Como não há limitações (na fila ou na fonte) as taxas de chegada e serviço independem do estado do sistema, isto é, $\lambda_n = \lambda$ e $\mu_n = \mu$, $n = 1, 2, 3, ...$

Usando as expressões, deduzidas anteriormente, para P_0 e P_n, tem-se: se, $\frac{\lambda}{\mu} < 1$.

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\prod_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right]} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = \frac{1}{\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}} = 1 - \frac{\lambda}{\mu},$$

$$P_n = P_0 \prod_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right) = P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n.$$

Aqui (rhô) $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ é denominado fator de utilização da estação de serviço e assim:

$$P_n = (1-\rho)\,\rho^n, \text{ com } n = 0, 1, 2, ...$$

Com as expressões de P0 e Pn pode-se obter:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n.P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\,(1-\rho)\,\rho^n = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\left(n\rho^{n-1}\right)\rho = \rho\,(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d\rho^n}{d\rho} =$$

$$(1-\rho)\,\rho.\frac{d\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\right)}{d\rho} = \rho\,(1-\rho)\,\frac{d\,(1-\rho)^{-1}}{d\rho} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

Assim, o número médio (esperado) de unidades no sistema é dado por $L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$

$$L_q = \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)\,P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n.P_n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n.P_n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n = L - (1-P_0) = \frac{\lambda^2}{(\mu-\lambda)\,\mu}$$

Assim, o número médio (esperado) de unidades na fila: $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$

Como, $L = \lambda W$ (Fórmula de Little) tem-se $W = \frac{1}{(\mu-\lambda)}$, que nos fornece o tempo médio (esperado) que cada unidade permanece no sistema.

E como, $L_q = \lambda W_q$(Fórmula de Little) tem-se $W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$ que nos fornece o tempo médio (esperado) que cada unidade permanece na fila.

Podemos ter ainda as seguintes relações entre as medidas básicas:

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu} = \lambda.W_q$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \lambda.W$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda}$$

5 APLICAÇÕES

Nesse tópico, vamos realizar um estudo descritivo de sistemas com uma única estação de atendimento ou de processamento e calcular elementos tais como: probabilidades de o sistema estar vazio, com um cliente, com dois, etc; número médio de clientes na fila e no sistema; número médio de clientes sendo atendidos; tempo médio de espera na fila; tempo médio gasto no sistema; entre outros.

5.1 APLICAÇÃO 1

Clientes chegam a uma barbearia, de um único barbeiro, com uma duração média entre chegadas de 20 minutos. O barbeiro gasta em média 15 minutos com cada cliente.

a) Qual a probabilidade de um cliente não ter que esperar para ser atendido?

b) Qual o número esperado de clientes no salão do barbeiro? Na fila?

c) Quanto tempo, em média, um cliente permanece no salão?

d) Quanto tempo, em média, um cliente espera na fila?

e) O barbeiro está estudando a possibilidade de colocar outro barbeiro desde que o tempo de permanência médio de cada cliente no salão passe a $1,25$ hora. Para quanto deve aumentar a taxa de chegada de modo que este segundo barbeiro fique justificado?

Solução:

Em uma hora: Duração média entre chegadas é 20 minutos. Chegam 3 clientes por hora. O tempo de serviço do barbeiro é 15 minutos com cada cliente, logo ele atende em média 4 clientes por hora. Então:

Taxa de chegada: $\lambda = 3$ clientes/h.

Taxa de serviço: $\mu = 4$ clientes/h.

(a) Para calcularmos a probabilidade de um cliente não ter que esperar para ser servido é necessário que o sistema esteja ocioso, assim

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4} = 0,25 \,\text{ou}\, 25\%$$

(b) O número esperado de clientes no salão do barbeiro é dado por:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{3}{4-3} = 3\,\text{clientes.}$$

O número esperado de clientes na fila é dado por:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu\,(\mu - \lambda)} = \frac{3^2}{4\,(4-3)} = \frac{9}{4} = 2,25\,\text{clientes}$$

(c) O tempo, em média, que um cliente permanece no salão é calculado por:

$$W = \frac{1}{(\mu - \lambda)} = \frac{1}{4-3} = 1\,\text{hora}$$

(d) O tempo, em média, que um cliente espera na fila é calculado por:

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu\,(\mu - \lambda)} = \frac{3}{4\,(4-3)} = \frac{3}{4} = 0,75\,\text{hora}$$

(e) O objetivo do estudo do barbeiro leva em consideração a contratação de outro barbeiro em sua barbearia, mas para isso, tomaremos o tempo de permanência médio de cada cliente no salão de $1,25$ hora, ou seja, $W = 1,25$ h, consideraremos ainda que a taxa de serviço μ continua a mesma e devemos calcular o valor de λ. Então, como:

$$W = \frac{1}{(\mu - \lambda)},\ \text{temos}\, 1,25 = \frac{1}{(\mu - \lambda)} \Rightarrow 1,25 = \frac{1}{(4 - \lambda)} \Rightarrow 5 - 1,25\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{1,25} \Rightarrow \lambda = 3,2$$

Portanto, para que o barbeiro coloque outro barbeiro no salão a taxa de chegada deve aumentar em $3,2$ clientes/h.

5.2 APLICAÇÃO 2

Fregueses chegam aleatoriamente a uma padaria à taxa média de 12/hora. O único empregado da padaria pode servir fregueses à taxa média de 20/hora. O empregado recebe $R\$3$/hora enquanto que o tempo que os fregueses "perdem" na padaria está estimado em $R\$8$/hora. O dono da padaria está considerando a instalação de um equipamento de auto-serviço que fará com que a taxa de atendimento aos fregueses passe para 42 fregueses/hora. O custo do equipamento de auto-serviço é de $R\$30$/dia. Considerando que a padaria funciona 12 horas/dia, justifique economicamente se o equipamento de auto-serviço deve ou não ser comprado.

Solução:
Taxa de chegada: $\lambda = 12$ fregueses/h.
No problema temos que considerar duas situações: situação atual e situação proposta.
Na situação atual, temos:
Taxa de serviço: $\mu = 20$ fregueses/h.

Custo do serviço do empregado: $R\$3/h \,\mathrm{x}\, 12\mathrm{h/dia} = R\$36/\mathrm{dia}$
Tempo médio que um freguês permanece na padaria:

$$W = \frac{1}{(\mu - \lambda)} = \frac{1}{20 - 12} = \frac{1}{8} = 0,125\,\mathrm{hora}$$

Custo de um freguês: $0,125\,\mathrm{h\,x}\,R\$8/\mathrm{h} = R\$\,1,00$
Custo da fila: $R\$1\,\mathrm{x}\,12\,/\mathrm{fregueses/h\,x}\,12\,\mathrm{h/dia} = R\$\,144,00$ por dia
Custo total: Custo do serviço do empregado + custo da fila
Assim, $R\$\,36,00 + R\$\,144,00 = R\$180/\mathrm{dia}$
Agora vamos considerar a situação atual, temos:
Taxa de serviço: $\mu = 42$ fregueses/h.
Custo do serviço do empregado: $R\$36/\mathrm{dia}$
Custo do equipamento de auto-serviço: $R\$30/\mathrm{dia}$
Tempo médio que um freguês permanece na padaria:

$$W = \frac{1}{(\mu - \lambda)} = \frac{1}{42 - 12} = \frac{1}{30} = 0,0333\,\mathrm{hora}$$

Custo de um freguês: $0,0333\,\mathrm{h\,x}\,R\$8/\mathrm{h} = R\$\,0,266$
Custo da fila: $R\$0,266\,\mathrm{x}\,12\,\mathrm{fregueses/h\,x}\,12\,\mathrm{h/dia} = R\$\,38,30$
Custo do serviço: Custo do serviço do empregado + custo do equipamento de auto-serviço

$$R\$36/\mathrm{dia} + R\$30/\mathrm{dia} = R\$66/\mathrm{dia}$$

Custo total: Custo do serviço + custo da fila
Assim, $R\$\,66,00 + R\$\,38,30 = R\$\,104,30/\mathrm{dia}$
Diante da análise das duas situações apresentadas no problema, podemos concluir que economicamente o equipamento de auto-serviço deve ser comprado, pois o custo total será de $R\$\,104,30/\mathrm{dia}$, ou seja, inferior ao da situação atual.

5.3 APLICAÇÃO 3

O número médio de carros que chegam a um posto de informações é igual a 10 carros/hora. Assumindo que o tempo médio de atendimento por carro seja de 4 minutos, e ambas as distribuições de intervalos entre chegadas e tempo de serviço sejam exponenciais.

a) Qual a probabilidade do posto de informações estar livre?
b) Qual a quantidade média de carros esperando na fila?
c) Qual o tempo médio que um carro gasta no sistema (tempo na fila mais o tempo de atendimento)?
d) Quantos carros serão atendidos em média por hora?

Solução:
De acordo com os dados do problema, temos:
Taxa de chegada: $\lambda = 10$ carros/hora.

Taxa de atendimento: o tempo médio de atendimento por carro é de 4 minutos, ou seja, 15 carros/hora. Sendo assim, $\mu = 15$ carros/hora.

(a) a probabilidade do posto de informações estar livre é dada por

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{10}{15} = \frac{15-10}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} = 0,3333 \,\text{ou}\, 33,33\%$$

(b) a quantidade média de carros esperando na fila é obtida por

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu\,(\mu-\lambda)} = \frac{10^2}{15\,(15-10)} = \frac{100}{15.5} = \frac{100}{75} = \frac{4}{3} = 1,33 \,\text{carros}$$

(c) o tempo médio que um carro gasta no sistema é oferecido por

$$W = \frac{1}{(\mu-\lambda)} = \frac{1}{15-10} = \frac{1}{5} = 0,2 \,\text{hora} \,\text{ou}\, 12 \,\text{minutos.}$$

(d) Se a ocupação média do posto fosse de 100%, então, o número médio de carros atendidos por hora seria de 15 carros. Sendo a ocupação média, igual a $1 - P_0$, ou seja, igual a $\frac{2}{3}$, então o número de carros atendidos por hora seria de:

$$15.\frac{2}{3} = \frac{30}{3} = 10 \,\text{carros por hora.}$$

5.4 APLICAÇÃO 4

Supondo-se que a chegada de um navio ao berço portuário siga a distribuição de Poisson, com uma taxa de 6 navios por dia. A duração média de atendimento dos navios é de 3 horas, seguindo-se a distribuição exponencial.

a) Qual a probabilidade de um navio chegar ao porto e não esperar para atracar?

b) Qual é a quantidade média de navios na fila do porto?

c) Qual é a quantidade média de navios no sistema portuário?

d) Qual é a quantidade média de navios utilizando o porto?

e) Qual é o tempo médio de um navio na fila?

f) Qual deve ser a taxa de chegada de um navio para que o tempo médio na fila seja de 3 horas?

g) Qual é a probabilidade do berço portuário estar um uso?

Solução:

Pelos dados apresentados no problema, temos que:

Taxa de chegada: $\lambda = 6$ navios/dia.

Taxa de atendimento: Sabemos que a duração média de atendimento dos navios é de 3 horas, ou seja, 8 navios/dia. Assim sendo, $\mu = 8$ navios/dia.

(a) a probabilidade de um navio chegar ao porto e não esperar para atracar é dada por

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{6}{8} = \frac{8-6}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25 \,\text{ou}\, 25\%$$

(b) a quantidade média de navios na fila do porto é obtida por

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu\,(\mu - \lambda)} = \frac{6^2}{8\,(8-6)} = \frac{36}{8.2} = \frac{36}{16} = \frac{9}{4} = 2,25\,\text{navios}$$

(c) a quantidade média de navios no sistema portuário é calculada por

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{6}{8-6} = 3\,\text{navios}$$

(d) a quantidade média de navios utilizando o porto é fornecida por

$$L - L_q = 3 - 2,25 = 0,75\,\text{navio}$$

(e) o tempo médio de um navio na fila é dado por

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu\,(\mu - \lambda)} = \frac{6}{8\,(8-6)} = \frac{6}{8.2} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0,375\,\text{dia ou 9 horas.}$$

(f) Considerando agora o tempo médio na fila de 3 horas, temos $W_q = \left(\frac{3}{24}\right)h=$ $0,125\,$dia, mantendo-se a mesma taxa de atendimento $\mu = 8$ dias, devemos calcular a nova taxa de chegada (λ) de um navio. Assim,

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu\,(\mu - \lambda)} \Rightarrow 0,125 = \frac{\lambda}{8\,(8-\lambda)} \Rightarrow \lambda = 1\,(8-\lambda) \Rightarrow \lambda + \lambda = 8 \Rightarrow \lambda = \frac{8}{2} \Rightarrow \lambda = 4\,\text{navios/dia}$$

(g) Se a probabilidade de não ter nenhum navio no berço portuário é de 25%, então a probabilidade de ter-se um navio atracado é de $1 – P_0 = 1 – 0,25 = 0,75$ ou 75%.

5.5 APLICAÇÃO 5

Uma distribuidora de combustíveis utiliza caminhões para transportar o seu produto. Sabendo-se que esta empresa só tem um ponto de abastecimento dos caminhões, que a taxa de chegada dos caminhões é de 4 unidades por hora, que a taxa de atendimento é de 5 unidades por hora, que os custos horários do funcionário que abastece o veículo é de $5,00$ unidades monetárias e do motorista é de $12,00$ unidades monetárias, calcule o custo horário do sistema e a probabilidade do funcionário que abastece ficar sem nenhum caminhão para abastecer.

Solução:
De acordo com os dados apresentados no problema, temos:
Taxa de chegada: $\lambda = 4$ caminhões/hora.
Taxa de serviço: $\mu = 5$ caminhões/hora.
Custo do funcionário que abastece o caminhão: $5,00$ unidades monetárias.
Custo do motorista: $12,00$ unidades monetárias.
Quantidade de caminhões no sistema:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{4}{5-4} = 4\,\text{caminhões.}$$

Por hora o funcionário abastece 4 caminhões, então podemos calcular o custo do sistema por:

Custo horário do sistema: $5,00 + (12,00\,\text{x}\,4) = 5,00 + 48,00 = 53,00$ unidades monetárias.

Probabilidade de não ter nenhum caminhão para ser abastecido:

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{5-4}{5} = \frac{1}{5} = 0,2\,\text{ou}\,20\%$$

5.6 APLICAÇÃO 6

Um técnico de laboratório gasta 30 minutos em média para reparar relés. Considere que o tempo distribui-se conforme uma distribuição exponencial negativa. Os relés chegam à recepção do laboratório segundo a distribuição de Poisson a uma taxa média de 10 relés por dia. Considere um turno de 8 horas de trabalho. Eles são reparados de acordo com a ordem de chegada.

a) Qual a folga média do técnico por dia de trabalho?

b) Em média, quantos relés se encontram na oficina aguardando reparação?

Solução:

Dados do problema:

Taxa de chegada: $\lambda = \frac{10\,\text{relés}}{8\,\text{horas de trabalho}} = 1,25\,\text{relés/h}$

Taxa de atendimento (Tempo para reparação): 30 minutos, ou seja, $\mu = 2$ relés/h

(a) a folga média do técnico por dia de trabalho é calculada por

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{1,25}{2} = \frac{2-1,25}{2} = \frac{0,75}{2} = 0,375\,\text{ou}\,37,5\%$$

Como o técnico possui um turno de 8 horas de trabalho, temos: $0,375$ x $8 = 3$ h.

Portanto, o técnico possui 3 horas em média de folga por dia de trabalho.

(b) a quantidade, em média, de relés que se encontram na oficina aguardando reparação é dada por

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu\,(\mu - \lambda)} = \frac{(1,25)^2}{2\,(2-1,25)} = \frac{1,5625}{2.\,(0,75)} = \frac{1,5625}{1,5} = 1,04\,\text{aparelho}$$

Logo, em média, $1,04$ relé se encontra na oficina aguardando reparação.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O uso da Teoria de Filas é uma ferramenta útil para avaliar a operacionalidade de um sistema. O tratamento dos dados e a análise dos resultados permitem concluir sobre o comportamento dos três componentes do processo: gerência-atendimento-cliente, que tem tendências diferentes e devem ser conciliadas em um resultado final.

7 REFERÊNCIAS

ACHCAR, J. A.; RUFFINO NETTO, A. **Estudo da Prevalência da Tuberculose: uso de métodos bayesianos**. Revista Brasileira de Epidemiologia, Ribeirão Preto, SP, v. 6, n. 4, dez. 2003. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo. php?script=sci_arttext&pid= S1415-790X2003000400012 &lng=pt&nrm=iso&tlng=pt>. Acesso em: 18 jul. 2011.

ANDRADE, Eduardo Leopoldino de. **Introdução a Pesquisa Operacional**: métodos e modelos para análise de decisão. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

CHASE, R. B.; JACOBS, F. R.; AQUILANO, N. J. **Administraçao da Produçao para a Vantagem Competitiva**. 10. ed. Porto Alegre, RS.: Bookman, 2004. Disponível em: <http://books.google.com/books?id= V31ZM wbz9g AC&pg= PA243&lpg =PA243 &dq=t eoria+das +filas+ Richard+B .+Chase, +F.+Robert+Jacobs, +Nicholas +J.+Aq uilano &source =bl&ots =rraalT XHAM &sig= 0YEZfGF pNIz7w UMn1VHS CrH6oAs &hl=pt- BR&ei= hZV4Tt enGOHI0 A HW0Y XdCw& sa=X& oi=book _resul t&ct= result& resnum= 1&sqi= 2&ved= 0CBwQ 6AEw AA #v= onepage &q&f= false> . Acesso em: 07 set. 2011.

COSTA, L. C. **Teoria das Filas**. Disponível em: <http://www.deinf.ufma.br/ ~mario/ grad/ filas/TeoriaFilas_Cajado.pdf>. Acesso em: 20 maio 2011.

LARSON, R.; FABER, B. **Estatística Aplicada.** 2. ed. São Paulo: Pearson, 2004. 638p.

MANN, P. S. **Introdução à Estatística**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. 762p.

MARINS F. A. S. **Introdução à Pesquisa Operacional.** Disponível em: <http://www. ebah.g com.br/ content/ ABAAAAlkoAE/introducao-a-pesquisa-operacional>. Acesso em: 15 ago. 2011.

MOREIRA, D. A. **Pesquisa Operacional – Curso Introdutório**. 2. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

SILVA, A. N. S. da. et al. **Estudo comportamental do sistema de uma casa lotérica utilizando técnicas de simulação**. 2008. Disponível em: < http://www.saepro.ufv.br/ Image/ artigos/Artigo1.pdf>. Acesso em: 13 jun. 2010.

YNOGUTI, C. A. **Probabilidade, Estatística e Processos Estocásticos**. 2011. Disponível em: <http://www.inatel.br/docentes/dayan/TP501/Apostila%20TP501%20-

%20Ynoguti,% 202011.pdf>. Acesso em: 10 set. 2011.