

# Fluxos Geométricos: uma introdução com exemplos

Levi Lopes de Lima (UFC)

# Sumário

<b>Conteúdo</b>	<b>i</b>
<b>Prefácio</b>	<b>iii</b>
<b>1 A equação do calor no círculo</b>	<b>3</b>
1.1 Soluções da equação do calor via séries de Fourier . . . . .	3
1.2 Convergência de séries de Fourier e aplicações . . . . .	11
1.3 O núcleo do calor e a fórmula do somatório de Poisson . . . . .	15
1.4 Equação do calor: o caso não-homogêneo . . . . .	20
<b>2 Equações quasi-lineares</b>	<b>25</b>
2.1 Soluções moderadas . . . . .	25
2.2 Existência de soluções moderadas . . . . .	28
2.3 Regularidades de soluções moderadas via Schauder . . . . .	31
2.4 As estimativas de De Giorgi-Nash . . . . .	34
<b>3 Um fluxo semi-linear</b>	<b>35</b>
3.1 Soluções globais e comportamento assintótico . . . . .	35
<b>4 O fluxo das aplicações harmônicas</b>	<b>41</b>
4.1 Aplicações harmônicas . . . . .	41
4.2 Soluções globais e comportamento assintótico . . . . .	44
4.3 Uma aplicação em Topologia . . . . .	47

<b>5</b>	<b>Evolução de curvas pela curvatura</b>	<b>51</b>
5.1	A geometria das curvas planas . . . . .	51
5.2	O fluxo pela curvatura . . . . .	59
5.3	Existência de soluções . . . . .	63
5.4	Normalizando o fluxo . . . . .	72
5.5	Indo ao infinito . . . . .	77
<b>A</b>	<b>Análise funcional: uma rápida revisão</b>	<b>83</b>
A.1	Espaços vetoriais normados . . . . .	83
A.2	Espaços de Sobolev . . . . .	89
A.3	Interpolação . . . . .	90
<b>B</b>	<b>A desigualdade isoperimétrica</b>	<b>97</b>
<b>C</b>	<b>O princípio do máximo parabólico</b>	<b>99</b>
<b>D</b>	<b>Existência de soluções via Schauder</b>	<b>103</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>109</b>

# Prefácio

Recentemente, o fluxo de Ricci revelou-se extremamente eficaz na solução de alguns dos problemas mais importantes em Topologia e Geometria Diferencial, entre os quais citamos a famosa Conjectura de Poincaré [16] e o Teorema da Esfera Diferenciável [3]. Este fluxo é certamente o mais honorável representante de uma extensa galeria de *fluxos geométricos*, procedimentos que consistem em deformar ao longo do tempo objetos matemáticos (métricas Riemannianas, conexões em fibrados, aplicações entre variedades, etc.) a fim de torná-los cada vez mais homogêneos.

Que este processo de homogeneização (ou difusão) ao longo do fluxo seja esperado deve-se ao fato que em geral o termo de segunda ordem de fluxos de origem geométrica coincide, após escolha apropriada de coordenadas, com o Laplaciano. Assim, desconsiderando termos de ordem inferior na variável espacial, o fluxo é governado pela equação do calor, que sabidamente possui propriedades de difusão excepcionais. Isto não somente permite aplicar os teoremas usuais de existência e unicidade para tais sistemas, o que implica em particular que, dadas condições iniciais adequadas, o fluxo existe pelo menos localmente no tempo, mas também sugere que o processo de difusão acima mencionado tem boas chances de funcionar no longo prazo. Infelizmente, porém, os termos espaciais de menor ordem atuam ao longo do fluxo como elementos de reação que eventualmente contribuem para atrapalhar o processo de difusão. De fato, uma boa compreensão do processo de formação de singularidades e do comportamento assintótico de fluxos geométricos depende essencialmente da interação entre os fatores de difusão e reação.

Ainda que esta não seja a regra, entre os fluxos geométricos mais utilizados é comum que os termos de reação provoquem a existência de singularidades, o que complica sobremaneira a análise e torna indispensável o preciso entendimento qualitativo do fluxo imediatamente antes do regime singular acontecer. Neste contexto, duas são as ferramentas matemáticas que permitem esclarecer esse entendimento: estimativas a priori e quantidades monótonas. No primeiro caso, busca-se controlar, uniformemente no tempo, as sucessivas derivadas das quantidades associadas ao fluxo, de modo a garantir sua regularidade e conseqüentemente evitar o aparecimento de singularidades. Caso o fluxo seja eterno (ou seja, definido para todo o tempo), quantidades monótonas, em geral de natureza integral, são usadas para caracterizar o comportamento assintótico. Por outro lado,

se singularidades desenvolvem em tempo finito, executa-se um processo de normalização do fluxo neste momento, de modo a torná-lo eterno, e então as quantidades monótonas têm novamente um papel importante a desempenhar. A este respeito vale salientar que as principais contribuições de G. Perelman ao fluxo de Ricci correspondem à exibição de quantidades monótonas até então estranhas aos especialistas.

Embora a discussão acima evidencie que as estratégias habitualmente utilizadas na análise de fluxos geométricos podem ser facilmente enumeradas, resulta ser extremamente penoso para alunos de graduação e pós-graduação apreciar a eficiência destes métodos, visto que a apresentação destes tópicos em geral requer o domínio de pré-requisitos situados muito além da formação matemática neste nível. É possível, porém, ilustrar as idéias essenciais na investigação de fluxo geométricos através da escolha judiciosa de exemplos que a um só tempo sejam elementares o suficiente para admitir descrição com um mínimo de pré-requisitos e sofisticados o bastante para gerar dificuldades que somente podem ser contornadas pelo uso dos dispositivos analíticos acima mencionados. O propósito deste mini-curso é precisamente fornecer uma dissertação da teoria de fluxos geométricos que privilegia a exposição dos métodos correntes de análise destes fluxos num contexto em que os pré-requisitos são reduzidos ao mínimo necessário.

O mini-curso cobrirá dois exemplos de fluxos geométricos, a saber, aplicações harmônicas entre círculos (Capítulo 4) e evolução de curvas planas pela curvatura (Capítulo 5), de modo que o famigerado ‘tensor de curvatura Riemanniano’ nunca dará o ar de sua graça. Apesar de admitir uma descrição em termos de objetos matemáticos elementares (funções definidas no círculo unitário) estes fluxos são ‘não-lineares’ o suficiente para ostentar os fenômenos que requerem o uso de esquemas sofisticados para sua análise (estimativas apriori, interpolação, quantidades monótonas, etc.). Ainda assim, as não-linearidades são maleáveis o bastante para permitir uma caracterização satisfatória de seu comportamento assintótico. Estes exemplos serão precedidos pela consideração do caso linear (a equação do calor para funções definidas no círculo, descrita no Capítulo 1), que pode ser completamente elucidado por meio de séries de Fourier, e de um exemplo semi-linear (Capítulo 3) que corresponde a uma perturbação de ordem zero do caso linear. Incluímos ainda quatro apêndices que em geral abordam tópicos de natureza mais técnica.

É importante ressaltar que o presente texto não têm a aspiração de detalhar a teoria de regularidade de equações parabólicas, ingrediente crucial na teoria dos fluxos geométricos. Na verdade, apenas descrevemos, sem demonstrações, os resultados centrais desta teoria (as estimativas de De Giorgi-Nash e Schauder) e esta linha de ação na verdade reflete a filosofia que permeia o curso: é possível entender os métodos de análise de fluxos geométricos sem necessariamente apreender os detalhes técnicos da teoria de regularidade, uma vez que este conteúdo pode ser perfeita e precisamente enunciado com exclusiva referência a alguns poucos espaços funcionais de fácil assimilação pelo iniciante (para ser honesto, este é o lixo que varremos para debaixo do tapete!). Em suma, o texto propõe não somente divulgar a teoria de fluxos geométricos por meio de exemplos

inteligíveis àqueles com pouca formação técnica mas também apregoar aos iniciantes o repertório de ferramentas analíticas imprescindíveis na análise matemática destes fluxos.

Finalmente, gostaria de agradecer os organizadores do I Colóquio de Matemática da Região Nordeste pelo simpático convite para apresentar este mini-curso.

Levi Lopes de Lima

Fortaleza, janeiro de 2011.



# Capítulo 1

## A equação do calor no círculo

Desenvolvemos neste capítulo a teoria básica da equação do calor no círculo (tanto homogênea como não-homogênea), considerando em particular questões relacionadas à existência, unicidade e regularidade de soluções.

### 1.1 Soluções da equação do calor via séries de Fourier

Seja  $\mathbb{R}^2$  o plano euclidiano, que identificaremos a  $\mathbb{C}$ , o corpo dos números complexos, da maneira usual. A norma e o produto interno euclidianos serão representados por  $|\cdot|$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , respectivamente. Consideremos então o círculo unitário  $\mathbb{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$  equipado com a coordenada angular usual  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Isto significa que identificamos  $\mathbb{T}$  ao intervalo  $[0, 2\pi)$  através da aplicação  $\theta \in [0, 2\pi) \mapsto e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ . Assim, por abuso de notação, sempre que for conveniente escreveremos  $\theta = e^{i\theta}$ .

A versão homogênea da equação do calor em  $\mathbb{T}$  é

$$(1.1) \quad u_t = u_{\theta\theta}.$$

A tarefa de encontrar soluções  $u = u(t, \theta)$  para (1.1) deve ser pensada como um problema de valor inicial (PVI), ou seja,  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  é fornecida de antemão e busca-se então, para algum  $T > 0$ , uma função  $u : (0, T) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ , satisfazendo (1.1) identicamente e cumprindo

$$(1.2) \quad \lim_{t \rightarrow 0} u(t, \theta) = f(\theta), \quad \theta \in \mathbb{T},$$

em algum sentido razoável. Para enfatizar este ponto de vista, escreveremos o PVI na forma

$$(1.3) \quad \begin{cases} u_t = u_{\theta\theta} \\ u(0, \cdot) = f \end{cases}$$

Naturalmente, este problema tem uma interpretação física bastante conhecida:  $f$  é a distribuição de calor inicial (temperatura) em  $\mathbb{T}$  e resolver o PVI consiste em descrever como esta distribuição evolui com o passar do tempo.

Existe, porém, uma outra interpretação de (1.3), de caráter geométrico, que expomos a seguir. Seja então  $C^\infty(\mathbb{T})$  o espaço das funções complexas, suaves e definidas em  $\mathbb{T}$ . Em  $C^\infty(\mathbb{T})$  define-se um produto interno por

$$(1.4) \quad (f, g) = \int_{\mathbb{T}} f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta, \quad f, g \in C^\infty(\mathbb{T}).$$

Mais ainda, a *energia* de  $f \in C^\infty(\mathbb{T})$  é

$$\mathcal{E}(f) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} |f_\theta(\theta)|^2 d\theta.$$

Dito isto, fixemos  $v \in C^\infty(\mathbb{T})$  e seja  $\Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  suave de tal modo que, se  $u^{(t)} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $u^{(t)}(\theta) = \Phi(t, \theta)$ ,  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , então  $u^{(0)} = v$ . Diz-se então que  $\Phi$  é uma *variação* de  $v$ . Calculemos então a derivada da função

$$t \in (-\epsilon, \epsilon) \mapsto \mathcal{E}(u^{(t)}) \in \mathbb{R},$$

que nada mais é que a energia calculada ao longo de  $\Phi$ . Tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(u^{(t)}) &= \int_{\mathbb{T}} u_{\theta t}^{(t)} \overline{u_\theta^{(t)}} d\theta \\ &= \int_{\mathbb{T}} u_{t\theta}^{(t)} \overline{u_\theta^{(t)}} d\theta \\ &= - \int_{\mathbb{T}} u_t^{(t)} \overline{u_{\theta\theta}^{(t)}} d\theta, \end{aligned}$$

onde no último passo usamos integração por partes.<sup>1</sup> Deste modo,

$$(1.5) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E}(u^{(t)})|_{t=0} = -(h, v_{\theta\theta}),$$

onde

$$h = u_t^{(t)}|_{t=0} \in C^\infty(\mathbb{T})$$

é a *função variacional* associada a  $\Phi$ .<sup>2</sup> Assim, podemos sugestivamente reescrever (1.5) como

$$v_{\theta\theta} = -(\text{grad } \mathcal{E})(v),$$

<sup>1</sup>Lembre que  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  pode ser considerada como uma função  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  que é *periódica* no sentido que  $f(0) = f(2\pi)$ . Assim, os termos de fronteira na fórmula de integração por parte desaparecem!

<sup>2</sup>Note que qualquer  $h \in C^\infty(\mathbb{T})$  é a função variacional de alguma variação  $\Phi$  de  $v$ : basta definir  $\Phi = v + th$ .

onde o gradiente é (formalmente!) calculado em relação a  $(t, \theta)$ , e o PVI (1.3) torna-se

$$(1.6) \quad \begin{cases} \dot{u} &= -(\text{grad } \mathcal{E})(u) \\ u(0) &= f \end{cases}$$

Aqui, o ponto significa derivada parcial em relação a  $t$  em  $u = u(t, \theta)$ . Noutras palavras, a solução do PVI (1.3) corresponde a uma trajetória com dado inicial  $f$  da equação diferencial ordinária (1.6), do tipo gradiente, em  $C^\infty(\mathbb{T})$ . Em analogia com a teoria das equações diferenciais ordinárias, chamaremos de *fluxo do calor* a totalidade das soluções de (1.3) com o dado inicial  $f$  variando em algum espaço funcional, digamos  $C^0(\mathbb{T})$ . Neste contexto, é natural esperar, à semelhança do que acontece com o fluxo de equações ordinárias do tipo gradiente em abertos de  $\mathbb{R}^n$ , que o comportamento assintótico das soluções seja determinado pelo pontos críticos do campo gradiente, ou seja, pelas funções  $v \in C^\infty(\mathbb{T})$  tais que  $v_{\theta\theta} = 0$ , o que equivale a dizer que  $v$  é constante. Neste contexto, os Teoremas 1.1.1, 1.1.2 e 1.1.4 abaixo confirmam esta expectativa e garantem, entre outras coisas, que para dados iniciais meramente contínuos, a solução de (1.3) é completamente determinada pelo dado inicial, está definida para  $t > 0$  e converge, num sentido apropriado, para uma função constante quando  $t \rightarrow +\infty$ .

Após estas considerações iniciais, apresentadas à guisa de motivação, voltemos ao problema de determinar a solução de (1.3). Felizmente, é possível exibir uma solução explícita para o fluxo do calor utilizando o honorável *método de Fourier*, ou *método de separação de variáveis*, cujo primeiro passo consiste em encontrar soluções da forma  $u(t, \theta) = z(t)w(\theta)$ . Levando isso a (1.1) obtemos

$$z'(t)w(\theta) = z(t)w_{\theta\theta}(\theta)$$

e admitindo por enquanto que  $z$  e  $w$  nunca se anulam encontramos

$$(1.7) \quad \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{w_{\theta\theta}(\theta)}{w(\theta)}.$$

Mas o lado esquerdo (respect. direito) de (1.7) depende somente de  $t$  (respect.  $\theta$ ), de modo que ambos são *constantes*. Assim,

$$(1.8) \quad \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{w_{\theta\theta}(\theta)}{w(\theta)} = -\lambda,$$

o que nos deixa com a tarefa de encontrar soluções não-triviais das equações

$$(1.9) \quad z' + \lambda z = 0$$

and

$$(1.10) \quad w_{\theta\theta} + \lambda w = 0$$

para  $\lambda \in \mathbb{C}$  a ser determinado.

Obviamente, (1.9) não impõe restrição alguma sobre  $\lambda$  uma vez que sua solução geral é

$$z(t) = Ce^{-\lambda t}.$$

Por outro lado, (1.10) impõe severas restrições aos valores que  $\lambda$  pode assumir. Para ver isto, seja  $w$  uma solução não-trivial, multiplique (1.10) por  $\bar{w}$  e use integração por partes para obter

$$\int_{\mathbb{T}} |w_\theta|^2 d\theta = \lambda \int_{\mathbb{T}} |w|^2 d\theta,$$

onde  $d\theta$  é a medida angular em  $\mathbb{T}$ . Isto leva a  $\lambda \in \mathbb{R}$  e, de fato,  $\lambda \geq 0$ , justificando assim o sinal negativo em (1.8). Mais ainda,  $\lambda = 0$  se e somente se  $w$  é constante e para  $\lambda > 0$  a solução geral de (5.68) é

$$w(\theta) = C_1 e^{i\sqrt{\lambda}\theta} + C_2 e^{-i\sqrt{\lambda}\theta}.$$

Mas lembre que estamos assumindo aqui que  $w$  é periódica e isto nos deixa com uma família enumerável de soluções

$$w_n(\theta) = C_1 e^{in\theta} + C_2 e^{-in\theta}, \quad \lambda_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

A essência do método de Fourier é apelar para a linearidade de (1.1) (ou, em linguagem física, ao *princípio da supersposição*) que assegura: qualquer combinação linear de soluções de (1.1) é ainda uma solução. Deste modo, e com um salto de imaginação, somos naturalmente levados a postular que a solução geral de (1.1) é<sup>3</sup>

$$(1.11) \quad u(t, \theta) = \sum_n a_n e^{-n^2 t} e^{in\theta}$$

onde a sequência  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$  é determinada pela condição de valor inicial (1.2):

$$(1.12) \quad f(\theta) = u(0, \theta) = \sum_n a_n e^{in\theta}.$$

Para entender a natureza da sequência  $\{a_n\}$ , recordemos as *relações de ortogonalidade*

$$(1.13) \quad \int_{\mathbb{T}} e^{i(n-m)\theta} d\theta = 2\pi \delta_{nm} = \begin{cases} 2\pi, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

<sup>3</sup>Para uma sequência  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$  denotamos  $\sum_n c_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=-N}^N c_i$  e  $\sum_{n \neq 0} c_n = \sum_n c_n - c_0$ .

Multiplicando (1.12) por  $e^{-im\theta}$ , integrando sobre  $\mathbb{T}$  e usando (1.13) obtemos

$$(1.14) \quad a_m = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\theta) e^{-im\theta} d\theta, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Isto significa que a sequência  $\{a_n\}$  é constituída precisamente pelos coeficientes de Fourier de  $f$  (veja (1.15) abaixo) de forma que podemos finalmente explicar como resolver o PVI (1.3) para um dado inicial  $f$ : primeiro calculamos os coeficientes de Fourier de  $f$  via (1.14) e então substituímos o resultado em (1.11).

É claro, no entanto, que o procedimento acima dá margem a desconfiar sobre como efetivamente justificar em termos formais suas várias etapas. Por exemplo, que condições devemos impor ao dado inicial para garantir que ele admite uma expansão em séries de Fourier como em (1.12)? Como assegurar que a série em (1.11) de fato define uma solução do problema? Como garantir que (1.2) verifica-se em algum sentido razoável? E se o leitor imagina que seus problemas acabaram, pode-se ainda questionar se (1.11) representa a *única* solução do problema. Várias respostas podem ser dadas a estas questões, dependendo do grau de regularidade atribuído ao dado inicial  $f$ . Para nossos propósitos, os resultados a seguir (Teoremas 1.1.1, 1.1.2 e 1.1.4 abaixo) são mais do que suficientes. Para enunciá-los, denotemos por

$$(1.15) \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \quad n \in \mathbb{Z},$$

o  $n$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $f \in C^0(\mathbb{T})$ . Note que a sequência  $\{\hat{f}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é uniformemente limitada:

$$(1.16) \quad |\hat{f}(n)| \leq C, \quad n \in \mathbb{Z},$$

onde  $C = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(\theta)| d\theta$ .

**Teorema 1.1.1** *Se  $f \in C^0(\mathbb{T})$  então*

$$(1.17) \quad u(t, \theta) = \sum_n \hat{f}(n) e^{-n^2 t} e^{in\theta},$$

*pertence a  $C^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{T})$  e define aí uma solução de (1.1). Mais ainda, para qualquer  $l \geq 0$ ,*

$$(1.18) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t, \cdot) - \hat{f}(0)\|_{C^l(\mathbb{T})} = 0.$$

Com efeito, para  $t \geq t_0 > 0$ , a série em (1.17) é majorada, em virtude de (1.16), por

$$C \sum_{n \neq 0} e^{-n^2 t_0},$$

que obviamente é convergente. Logo, (1.17) converge uniformemente na região  $t \geq t_0$  e assim define uma função contínua em  $(0, +\infty) \times \mathbb{T}$ . Mais ainda, derivando formalmente (1.17), obtém-se

$$u_\theta(t, \theta) = i \sum_{n \neq 0} \hat{f}(n) n e^{-n^2 t} e^{in\theta},$$

que é majorada pela série convergente  $C \sum_{n \neq 0} |n| e^{-n^2 t_0}$ , e

$$u_t(t, \theta) = u_{\theta\theta}(t, \theta) = - \sum_{n \neq 0} \hat{f}(n) n^2 e^{-n^2 t} e^{in\theta},$$

que é majorada por  $C \sum_{n \neq 0} n^2 e^{-n^2 t_0}$ , também convergente. Portanto, estas séries convergem uniformemente para  $t \geq t_0$  e definem funções contínuas em  $(0, +\infty) \times \mathbb{T}$ . Em particular, (1.17) satisfaz (1.1) em  $(0, +\infty) \times \mathbb{T}$ , pois cada um de seus termos goza desta propriedade. Mais ainda, para  $t \geq t_0$  e  $i + j \geq 1$ ,

$$(1.19) \quad |\partial_t^i \partial_\theta^j (u(t, \theta) - \hat{f}(0))| \leq C \sum_{n \neq 0} |n|^{2i+j} e^{-n^2 t_0} < +\infty,$$

de modo que  $u \in C^l((0, +\infty) \times \mathbb{T})$  para qualquer  $l \geq 0$ . Além disso, a série em (1.19) converge uniformemente para 0 quando  $t_0 \rightarrow +\infty$ , e (1.18) segue.

Note que o Teorema 1.1.1 não examina se (1.17) converge para  $f$  quando  $t \rightarrow 0$ , e em qual sentido. A este respeito, observe que para  $t = 0$  (1.17) reduz-se à série de Fourier (1.12) de  $f$ . Logo, qualquer discussão da condição inicial baseada na representação (1.17) deve necessariamente levar em consideração critérios para que uma dada função  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  tenha a desejável propriedade de que sua série de Fourier converge, de preferência para  $f$ , em algum sentido aceitável. Infelizmente, se nos atermos à classe das funções contínuas, em conformidade com o Teorema 1.1.1, a resposta a essa questão é negativa, pois é possível exibir exemplos de tais funções cuja série de Fourier *não* converge, nem sequer pontualmente.<sup>4</sup>

Mesmo assim é possível verificar, conforme veremos a seguir, que qualquer  $f$  contínua em  $\mathbb{T} = \{0\} \times \mathbb{T}$  estende-se a uma função  $u \in C^0([0, +\infty) \times \mathbb{T}) \cap C^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{T})$  que satisfaz (1.1) em  $(0, +\infty) \times \mathbb{T}$ . Isto naturalmente fornece uma solução legítima para (1.3) com dado inicial meramente contínuo. O ponto crucial aqui é arranjar uma representação para  $u$  que não dependa explicitamente da expansão em série de Fourier de  $f$ . Com este intuito note que (1.17) e suas derivadas convergem uniformemente para  $t \geq t_0 > 0$ , de forma que podemos substituir (1.15) em (1.17) e trocar os sinais de

<sup>4</sup>Um exemplo deste desagradável fenômeno pode ser encontrado em [8]. No entanto, se exigirmos que  $f$  seja pelo menos de classe  $C^1$ , é possível verificar que a série de Fourier correspondente converge para  $f$  uniformemente; veja o Teorema 1.2.1. Mais ainda, se  $f \in C^\alpha(\mathbb{T})$ ,  $0 < \alpha < 1$ , então sua série de Fourier converge pontualmente (para  $f$ ); veja o Teorema 1.4.1.

integral e soma para chegar a

$$(1.20) \quad u(t, \theta) = \int_{\mathbb{T}} \mathcal{K}(t, \theta - \theta') f(\theta') d\theta', \quad t > 0,$$

onde

$$(1.21) \quad \mathcal{K}(t, \theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 t} e^{in\theta}, \quad (t, \theta) \in (0, +\infty) \times \mathbb{T},$$

é o *núcleo do calor* de  $\mathbb{T}$ . Assim, a solução de (1.3) pode ser, pelo menos formalmente, representada por convolução do dado inicial  $f \in C^0(\mathbb{T})$  com o núcleo do calor  $\mathcal{K}$ .

O argumento acima garante que as representações (1.17) e (1.20) coincidem para  $t > 0$ , e assim os resultados do Teorema 1.1.1 valem para  $u$  definida por (1.20). Isto pode ser verificado diretamente observando que, se  $i + j \geq 1$ ,

$$(1.22) \quad |(\partial_t^i \partial_\theta^j \mathcal{K})(t, \theta)| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_n |n|^{2i+j} e^{-n^2 t_0} < +\infty, \quad t \geq t_0 > 0,$$

de modo que  $\mathcal{K} \in C^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{T})$ . Como  $f \in C^0(\mathbb{T})$ , podemos derivar quantas vezes quisermos em relação a  $\theta$  sob o sinal da integral em (1.20) de modo a concluir que  $u \in C^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{T})$  e aí define uma solução de (1.1), pois  $\mathcal{K}$  satisfaz a equação do calor em  $(0, +\infty) \times \mathbb{T}$ , ou seja,

$$\mathcal{K}_t = \mathcal{K}_{\theta\theta}.$$

Mais ainda, a série em (1.22) converge uniformemente para 0 quando  $t_0 \rightarrow +\infty$ , de modo que (1.18) também vale. Mas resta a questão crucial de saber o que acontece com (1.20) quando  $t \rightarrow 0$ . Observe que, formalmente,

$$\mathcal{K}(0, \theta - \theta') = \frac{1}{2\pi} \sum_n e^{in(\theta - \theta')},$$

e esta série altamente oscilatória não parece ser muito maleável do ponto de vista analítico. Apesar disto, mostraremos na Seção 1.3 que  $\mathcal{K}$  comporta-se suficientemente bem quando  $t \rightarrow 0$  para garantir que  $u$  definida por (1.20) estende-se a  $\{0\} \times \mathbb{T}$  e aí coincide com  $f$ . Em suma, vale o resultado a seguir.

**Teorema 1.1.2** *Se  $f \in C^k(\mathbb{T})$ ,  $k \geq 0$ , então  $u$  em (1.20) pertence a  $C^0([0, +\infty) \times \mathbb{T}) \cap C^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{T})$  e satisfaz*

$$(1.23) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \|u(t, \cdot) - f\|_{C^k(\mathbb{T})} = 0.$$

*Mais ainda, (1.18) é válida para qualquer  $l \geq 0$ .*

**Observação 1.1.3** *É fato notável que, em qualquer dos cenários acima, a solução de (1.3) é suave em  $(0, +\infty) \times \mathbb{T}$ , mesmo que o dado inicial  $f$  não tenha este tipo de regularidade. Esta propriedade da equação do calor, embora não seja de modo algum razoável do ponto de vista físico, pois indica que um dado inicial parcialmente regular (isto é, de classe  $C^k$ ) instantaneamente torna-se suave, é extremamente interessante do ponto de vista matemático, pois sugere que o fluxo do calor pode ser usado para regularizar funções. Mais ainda, quando  $t \rightarrow +\infty$ , as soluções convergem<sup>5</sup> em  $C^\infty(\mathbb{T})$  para*

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\theta) d\theta,$$

*a média de  $f$  sobre  $\mathbb{T}$ ; veja (1.18). Isto é perfeitamente compatível com as duas interpretações para (1.3) apresentadas no início desta seção.*

Finalmente, consideremos a questão da unicidade de soluções com o mesmo dado inicial. Esta questão é pertinente pois as soluções descritas acima foram obtidas através de procedimentos específicos, e convém questionar se outras soluções matematicamente razoáveis, determinadas por métodos diversos, eventualmente podem existir. O resultado a seguir confirma que soluções da equação do calor no cilindro  $[0, T) \times \mathbb{T}$ , com o mesmo dado inicial, de fato coincidem onde estão definidas.

**Teorema 1.1.4** *Sejam  $T > 0$  e  $u, v \in C^0([0, T) \times \mathbb{T}) \cap C^{1,2}((0, T) \times \mathbb{T})$  satisfazendo a equação do calor (1.1) em  $(0, T) \times \mathbb{T}$  com  $u = v$  em  $\{0\} \times \mathbb{T}$ . Então  $u = v$  em  $[0, T) \times \mathbb{T}$ .*

Este teorema é uma consequência imediata do resultado a seguir, aplicado à diferença  $w = u - v$ .

**Teorema 1.1.5 (Princípio do Máximo)** *Seja  $T > 0$  e  $w \in C^0([0, T) \times \mathbb{T}) \cap C^{1,2}((0, T) \times \mathbb{T})$  satisfazendo  $w_t \leq w_{\theta\theta}$  em  $(0, T) \times \mathbb{T}$ . Então*

$$\sup_{[0, T) \times \mathbb{T}} w = \sup_{\{0\} \times \mathbb{T}} w.$$

*Analogamente, se  $w_t \geq w_{\theta\theta}$  então*

$$\inf_{[0, T) \times \mathbb{T}} w = \inf_{\{0\} \times \mathbb{T}} w.$$

Demonstraremos aqui o primeira caso. Para tanto, note que sempre vale

$$\sup_{[0, T) \times \mathbb{T}} w \geq \sup_{\{0\} \times \mathbb{T}} w,$$

---

<sup>5</sup>Diremos que uma sequência  $\{g_i\} \subset C^\infty(\mathbb{T})$  converge em  $C^\infty(\mathbb{T})$  se existe  $g \in C^\infty(\mathbb{T})$  satisfazendo  $\|g_i - g\|_{C^l(\mathbb{T})} \rightarrow 0$  quando  $i \rightarrow +\infty$  para qualquer  $l \geq 0$ . Escreveremos ainda  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \|g_i - g\|_{C^\infty(\mathbb{T})} = 0$ .

de modo que basta provar a desigualdade reversa. Suponha inicialmente que  $w_t < w_{\theta\theta}$  e que, por absurdo,

$$w(t_0, \theta_0) = \sup_{[0, T] \times \mathbb{T}} w > \sup_{\{0\} \times \mathbb{T}} w,$$

para  $t_0 > 0$ . Neste caso,

$$0 \leq w_t(t_0, \theta_0) < w_{\theta\theta}(t_0, \theta_0) \leq 0,$$

uma contradição. No caso geral, defina  $\tilde{w} = w - kt$ ,  $k > 0$ , de maneira que  $\tilde{w}_t = w_t - k < w_t \leq w_{\theta\theta} = \tilde{w}_{\theta\theta}$ . Logo, pode-se aplicar o caso especial acima a  $\tilde{w}$ . Assim,

$$\sup_{[0, T] \times \mathbb{T}} w \leq \sup_{[0, T] \times \mathbb{T}} \tilde{w} = \sup_{\{0\} \times \mathbb{T}} \tilde{w} = \sup_{\{0\} \times \mathbb{T}} w,$$

como desejado.

## 1.2 Convergência de séries de Fourier e aplicações

Nosso objetivo nesta seção é verificar um critério de convergência de séries de Fourier (Teorema 1.2.1 abaixo) que será usado na demonstração do Teorema 1.1.2.

Dada  $f \in C^0(\mathbb{T})$ , recordemos que seus *coeficientes de Fourier* são definidos por

$$(1.24) \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \quad n \in \mathbb{Z},$$

e sua *série de Fourier* é

$$(1.25) \quad \mathcal{F}[f](\theta) = \sum_n \hat{f}(n) e^{in\theta}, \quad \theta \in \mathbb{T}.$$

O termo geral desta série será denotado por

$$(1.26) \quad S_N[f](\theta) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{in\theta}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Uma questão fundamental na teoria das séries de Fourier é precisamente decidir quando (1.26) converge quando  $N \rightarrow +\infty$ , de preferência para a própria  $f$ . O resultado a seguir fornece um critério bastante útil nesta direção.

**Teorema 1.2.1** *Se  $f \in C^k(\mathbb{T})$ ,  $k \geq 1$ , então*

$$(1.27) \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \|S_N(f) - f\|_{C^{k-1}(\mathbb{T})} = 0.$$

O primeiro ingrediente na demonstração deste teorema é um conjunto de estimativas para os coeficientes de Fourier. O primeiro resultado decorre imediatamente de (1.24) e (1.13).<sup>6</sup>

**Proposição 1.2.2** (Desigualdade de Bessel) *Se  $f \in C^0(\mathbb{T})$  então vale*

$$(1.28) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(\theta) - S_N[f](\theta)|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(\theta)|^2 d\theta - \sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)|^2.$$

*Em particular,*

$$(1.29) \quad \sum_n |\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(\theta)|^2 d\theta.$$

Assim, os coeficientes de Fourier de  $f \in C^0(\mathbb{T})$  não são apenas uniformemente limitados, como observado em (1.16), mas de fato satisfazem

$$(1.30) \quad \lim_{|n| \rightarrow +\infty} |\hat{f}(n)| = 0.$$

Suponha agora que  $f \in C^k(\mathbb{T})$ ,  $k \geq 1$ . Integrando (1.24) por partes  $k$  vezes obtemos

$$(1.31) \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{(in)^k} \widehat{f^{(k)}}(n), \quad n \neq 0,$$

o que imediatamente fornece a seguinte proposição.

**Proposição 1.2.3** *Se  $f \in C^k(\mathbb{T})$ ,  $k \geq 1$ , então*

$$\sum_n |n|^{k-1} |\hat{f}(n)| < +\infty.$$

*Em particular,*

$$(1.32) \quad \lim_{|n| \rightarrow +\infty} |n|^{k-1} |\hat{f}(n)| = 0.$$

De fato,

$$\sum_n |n|^{k-1} |\hat{f}(n)| = \sum_{n \neq 0} \frac{|\widehat{f^{(k)}}(n)|}{|n|} \leq \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|^2} + \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} |\widehat{f^{(k)}}(n)|^2 < +\infty,$$

pela desigualdade de Bessel, uma vez que  $f^{(k)} \in C^0(\mathbb{T})$ .

<sup>6</sup>Veja o Apêndice A.1 para uma demonstração geométrica da Proposição 1.2.2.

**Observação 1.2.4** Se aplicarmos diretamente a desigualdade de Bessel a  $f^{(k)} \in C^0(\mathbb{T})$  concluímos que

$$\lim_{|n| \rightarrow +\infty} |n|^k |\hat{f}(n)| = 0,$$

que é ligeiramente mais forte que (1.32). Mas esta última relação bastará para nossos propósitos.

A Proposição 1.2.3 indica que quanto mais suave for  $f$  tanto mais rapidamente seus coeficientes de Fourier decaem a 0 quando  $|n| \rightarrow +\infty$ .<sup>7</sup> Isto sugere considerar a situação limite: o que podemos afirmar sobre  $f \in C^0(\mathbb{T})$  que satisfaz  $\hat{f}(n) = 0$ , para qualquer  $n \in \mathbb{Z}$ ? Noutras palavras, em que medida os coeficientes de Fourier determinam a função? A resposta é: completamente!

**Proposição 1.2.5** Se  $f \in C^0(\mathbb{T})$  satisfaz  $\hat{f}(n) = 0$  para qualquer  $n \in \mathbb{Z}$ , então  $f \equiv 0$ .

A definição a seguir se mostrará útil não somente na demonstração da Proposição 1.2.5, mas desempenhará papel importante neste capítulo.

**Definição 1.2.6** Uma sequência de funções contínuas  $K_n : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$ , é uma aproximação da identidade se satisfaz as seguintes condições:

1.  $\int_{\mathbb{T}} K_n(\theta) d\theta = 1$  para qualquer  $n$ ;
2. Existe  $M > 0$  tal que, para qualquer  $n$ ,

$$\int_{\mathbb{T}} |K_n(\theta)| d\theta \leq M.$$

3. Dados  $\epsilon > 0$  e  $\delta > 0$  existe  $n_0$  tal que  $n \geq n_0$  implica

$$\int_{|\theta| \geq \delta} |K_n(\theta)| d\theta < \epsilon.$$

Se  $f, g \in C^0(\mathbb{T})$ , definimos  $f * g \in C^0(\mathbb{T})$ , a *convolução* de  $f$  e  $g$ , por

$$(f * g)(\theta) = \int_{\mathbb{T}} f(\theta - \theta') g(\theta') d\theta'.$$

A proposição a seguir justifica a terminologia que adotamos para a aproximação da identidade  $K_n$ .

<sup>7</sup>A recíproca desta asserção também é verdadeira, ou seja, quanto mais rapidamente os coeficientes de Fourier de uma função decaem a 0, tanto mais regular é esta função. O mergulho de Sobolev é uma maneira de confirmar esta intuição; veja Teorema A.2.2, item 3.

**Proposição 1.2.7** *Se  $K_n$  é uma aproximação da identidade e  $f \in C^k(\mathbb{T})$ ,  $k \geq 0$ , então  $K_n * f \in C^k(\mathbb{T})$  e*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|K_n * f - f\|_{C^k(\mathbb{T})} = 0.$$

Para a demonstração do caso  $k = 0$ , fixemos  $\epsilon > 0$ . Sabemos que  $f$  é uniformemente limitada,  $|f(\theta)| \leq C$ , e uniformemente contínua, ou seja, existe  $\delta > 0$  tal que  $|\theta - \theta'| < \delta$  implica  $|f(\theta) - f(\theta')| < \epsilon$ . Mais ainda, com essa escolha de  $\epsilon$  e  $\delta$ , existe  $n_0$  tal que o item 3 na Definição 1.2.6 vale. Usando o item 1, temos, para  $n \geq n_0$ ,

$$(K_n * f)(\theta) - f(\theta) = \int_{\mathbb{T}} K_n(\theta - \theta') (f(\theta') - f(\theta)) d\theta',$$

de modo que

$$\begin{aligned} |(K_n * f)(\theta) - f(\theta)| &\leq \int_{|\theta - \theta'| < \delta} |K_n(\theta - \theta')| |f(\theta') - f(\theta)| d\theta' + \\ &\quad + \int_{|\theta - \theta'| \geq \delta} |K_n(\theta - \theta')| |f(\theta') - f(\theta)| d\theta' \\ &\leq M\epsilon + 2C\epsilon \\ &= (M + 2C)\epsilon, \end{aligned}$$

e o resultado segue, visto que  $\theta$  é arbitrário. O caso  $k \geq 1$  é provado observando que de fato  $K_n * f \in C^k(\mathbb{T})$  e  $(K_n * f)^{(k)} = K_n * f^{(k)}$ . Os detalhes são deixados ao leitor.

Voltemos agora à soma parcial  $S_N[f]$  da série de Fourier de  $f$ . Substituindo (1.24) em (1.26) e trocando a ordem dos sinais de soma e integral obtemos

$$S_N[f] = D_N * f,$$

onde

$$D_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N e^{in\theta}, \quad N \geq 0,$$

são os *núcleos de Dirichlet*. Acontece que  $\{D_N\}$  não é uma aproximação da identidade. De fato, é claro da expressão acima que  $\int_{\mathbb{T}} D_N(\theta) d\theta = 1$  mas é fácil mostrar que a sequência não cumpre as outras condições na Definição 1.2.6. É possível, no entanto, contruir a partir de  $D_N$  uma aproximação da identidade, a saber,

$$F_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k(\theta),$$

os *núcleos de Féjer*. Não é difícil mostrar que de fato  $\{F_N\}$  é uma aproximação da identidade, o que prontamente nos fornece, em virtude da Proposição 1.2.7, o resultado a seguir.

**Proposição 1.2.8** *Se  $f \in C^0(\mathbb{T})$  então*

$$(1.33) \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \|F_N * f - f\|_{C^0(\mathbb{T})} = 0.$$

A Proposição 1.2.5 é uma consequência imediata desta proposição. Com efeito, nas hipóteses da proposição temos  $F_N \equiv 0$  para qualquer  $N$ , e (1.33) nos dá  $f \equiv 0$ .

Finalmente, podemos agora oferecer a demonstração do Teorema 1.2.1. Com efeito, a  $j$ -ésima derivada da série de Fourier (1.25) é majorada por

$$\sum_n |n|^j |\hat{f}(n)|, \quad 0 \leq j \leq k-1,$$

que é convergente pela Proposição 1.2.3. Assim,  $\mathcal{F}[f]$  define uma função em  $C^{k-1}(\mathbb{T})$ . Mais ainda, multiplicando-se (1.25) por  $e^{-im\theta}$  e usando (1.13) obtém-se  $\widehat{\mathcal{F}[f]}(m) = \hat{f}(m)$ , para qualquer  $m$ , donde  $\mathcal{F}[f] = f$ , pela Proposição 1.2.5. O mesmo argumento aplicado a cada  $\mathcal{F}[f]^{(j)}$ ,  $1 \leq j \leq k-1$ , conclui a demonstração.

Com o Teorema 1.2.1 em mãos, é instrutivo checar que uma versão ligeiramente mais fraca do Teorema 1.1.2 é válida, onde (1.23) é substituída por

$$(1.34) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \|u(t, \cdot) - f\|_{C^{k-1}(\mathbb{T})} = 0.$$

Com efeito, note que agora podemos majorar (1.17) para  $t \geq 0$  por uma série convergente, a saber,  $\sum_n |\hat{f}(n)|$ . Assim,  $u \in C^0([0, +\infty) \times \mathbb{T})$ ,  $u(0, \cdot) = \mathcal{F}[f] = f$  e (1.34) claramente vale para  $k = 0$ . Repetindo o argumento para as séries obtidas por derivação formal de  $u$  em relação a  $\theta$ , (1.34) segue.

Para efetuar o *upgrade* de (1.34) para (1.23) requer-se, porém, em função de (1.20), um conhecimento preciso do comportamento de  $\mathcal{K}(t, \theta)$  quando  $t \rightarrow 0$ . Esta é a análise que faremos na próxima seção.

## 1.3 O núcleo do calor e a fórmula do somatório de Poisson

O objetivo desta seção é entender o comportamento assintótico do núcleo do calor de  $\mathbb{T}$ , dado por

$$\mathcal{K}(t, \theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_n e^{-n^2 t} e^{in\theta}, \quad (t, \theta) \in (0, +\infty) \times \mathbb{T},$$

quando  $t \rightarrow 0$ . Como aplicação, demonstraremos o Teorema 1.1.2.

Começaremos com algumas considerações sobre a transformada de Fourier em  $\mathbb{R}$ . Seja  $\mathcal{S}_0$  a classe de funções contínuas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  satisfazendo

$$(1.35) \quad |f(x)| \leq \frac{C}{1 + |x|^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

para algum  $C > 0$  dependendo de  $f$ . Por exemplo,  $f(x) = e^{-ax^2}$ ,  $a > 0$ , pertence a  $\mathcal{S}_0$ . Note ainda que  $f \in \mathcal{S}_0$  necessariamente satisfaz

$$(1.36) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty.$$

**Definição 1.3.1** Se  $f \in \mathcal{S}_0$  definimos sua transformada de Fourier  $\check{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$\check{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Note que  $\check{f}$  está bem definida, em virtude de (1.36).

**Proposição 1.3.2** Se  $\vartheta(x) = e^{-x^2/2}$  então  $\check{\vartheta} = \vartheta$ .

Para verificar isto, observe que

$$\begin{aligned} \check{\vartheta}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2 - ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+i\xi)^2/2 - \xi^2/2} \\ &\stackrel{z=x+i\xi}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2} \int_{z=i\xi} e^{-z^2/2} dz \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \\ &\stackrel{(**)}{=} \vartheta(\xi), \end{aligned}$$

onde em (\*) e (\*\*) usamos, respectivamente, a invariância de integrais de linha de funções holomorfas por deformações contínuas da trajetória de integração e  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$ .

Para  $t > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$  definamos o *núcleo do calor de  $\mathbb{R}$*  por

$$\kappa(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-|x|^2/4t}.$$

É imediato verificar que  $\kappa$  satisfaz a equação do calor em  $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ , ou seja,

$$(1.37) \quad \kappa_t = \kappa_{\theta\theta}.$$

Mais ainda,  $\kappa^{(t)}(x) = \kappa(t, x)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , é uma aproximação da identidade (veja Definição 1.2.6) quando  $t \rightarrow 0$  no sentido que:

1. Para cada  $t > 0$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \kappa^{(t)}(x) dx = 1.$$

2.  $\kappa^{(t)}(\theta) > 0$  para qualquer  $(t, \theta)$ , de modo que, trivialmente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\kappa^{(t)}(x)| dx = 1,$$

para qualquer  $t > 0$ .

3. Dados  $\epsilon > 0$  e  $\delta > 0$  existe  $t_0 > 0$  tal que  $0 < t \leq t_0$  implica

$$\int_{|x| \geq \delta} \kappa^{(t)}(x) dx < \epsilon.$$

Assim, adaptando a demonstração da Proposição 1.2.7 e usando (1.37), o teorema a seguir, que resolve a equação do calor em  $\mathbb{R}$ , pode ser facilmente verificado.

**Teorema 1.3.3** *Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é contínua e limitada então*

$$(1.38) \quad v(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa(t, x - x') f(x') dx'$$

*define uma função em  $C^0([0, +\infty) \times \mathbb{R}) \cap C^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{R})$  que é uma solução da equação do calor  $v_t = v_{xx}$  em  $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ . Mais ainda,*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(t, \cdot) - f\|_{C^0(\mathbb{R})} = 0.$$

Este resultado sugere que o núcleo do calor em  $\mathbb{T}$  deve guardar alguma relação com  $\kappa$ . A ferramenta que permite quantificar essa intuição é a famosa *fórmula do somatório de Poisson*, descrita na proposição a seguir. Para enunciá-la, denotemos por  $\mathcal{S}_1$  o espaço de funções  $f$  em  $\mathcal{S}_0$  que são de classe  $C^1$  e para as quais vale

$$(1.39) \quad |f'(x)| \leq \frac{C'}{1 + |x|^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

para alguma constante  $C' > 0$  dependendo de  $f$ .

**Proposição 1.3.4** (*Fórmula do somatório de Poisson*) Se  $g \in \mathcal{S}_1$  então

$$(1.40) \quad \sum_k g(x + 2\pi k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n \check{g}(n) e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Para a demonstração, defina

$$h(x) = \sum_k g(x + 2\pi k), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esta série e sua derivada formal convergem uniformemente, em virtude de (1.35) e (1.39). Mais ainda, tanto  $h$  como  $h'$  são periódicas, de período  $2\pi$ , e assim  $h \in C^1(\mathbb{T})$ . Logo,

$$\begin{aligned} \hat{h}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_k \int_0^{2\pi} g(x + 2\pi k) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_k \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} g(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \check{g}(n). \end{aligned}$$

A proposição decorre então do Teorema 1.2.1.

O resultado a seguir exhibe a estreita relação entre  $\mathcal{K}$  e  $\kappa$ .

**Proposição 1.3.5** *O núcleo do calor de  $\mathbb{T}$  é a ‘periodização’ do núcleo do calor de  $\mathbb{R}$ , ou seja,*

$$(1.41) \quad \mathcal{K}(t, \theta) = \sum_n \kappa(t, \theta + 2\pi n).$$

A demonstração consiste em aplicar (1.40) a

$$\kappa^{(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \vartheta\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right),$$

que, pela Proposição 1.3.2, satisfaz

$$\check{\kappa}^{(t)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t\xi^2}.$$

Note que (1.41) implica  $\mathcal{K} > 0$ , o que de maneira alguma é óbvio a partir de sua definição. Mais ainda,

$$\mathcal{K}(t, \theta) = \kappa(t, \theta) + E(t, \theta),$$

com ‘erro’ dado por

$$E(t, \theta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n \neq 0} e^{(\theta + 2\pi n)^2 / 4t}.$$

Como  $|\theta| \leq 2\pi$ , tem-se, para constantes  $C_i > 0$ ,

$$\begin{aligned} |E(t, \theta)| &\leq C_1 \sum_{n \neq 0} e^{-C_2 n^2 / t} \\ &\leq C_3 e^{-C_4 / t} \sum_{n \neq 0} e^{-C_5 n^2} \\ &\leq C_6 e^{-C_4 / t} \end{aligned}$$

pois  $n^2/t \geq n^2$  e  $n^2/t \geq 1/t$  para  $0 < t \leq 1$ . Ou seja, quando  $t \rightarrow 0$ ,

$$(1.42) \quad \mathcal{K}(t, \theta) = \kappa(t, \theta) + O(e^{-C/t}), \quad C > 0.$$

Em palavras,  $\mathcal{K}$  coincide com  $\kappa$  a menos de um termo que torna-se desprezível quando  $t \rightarrow 0$ . Como  $\mathcal{K}(t, \theta) > 0$ ,  $\int_{\mathbb{T}} \mathcal{K}(t, \theta) d\theta = 1$  e, além disso, dados  $\epsilon > 0$  e  $\delta > 0$  existe  $t_0 > 0$  tal que  $0 < t \leq t_0$  implica

$$\int_{|\theta| \geq \delta} \mathcal{K}(t, \theta) d\theta < \epsilon,$$

pois  $\kappa$  goza desta propriedade, concluímos que  $\mathcal{K}^{(t)} = \mathcal{K}(t, \cdot)$  é uma aproximação da identidade quando  $t \rightarrow 0$ . O Teorema 1.1.2 é então uma consequência imediata desta constatação e da Proposição 1.2.7.

Finalizamos esta seção isolando um importante resultado de aproximação, que reflete a instantânea suavização de dados iniciais contínuos pelo fluxo do calor, conforme indica o Teorema 1.1.2; veja a Observação 1.1.3.

**Teorema 1.3.6** *Dados  $f \in C^0(\mathbb{T})$  e  $\epsilon > 0$  existe  $g \in C^\infty(\mathbb{T})$  tal que*

$$\|f - g\|_{C^0(\mathbb{T})} < \epsilon.$$

De fato, como  $\mathcal{K}^{(t)} \in C^\infty(\mathbb{T})$ , basta tomar  $g = \mathcal{K}^{(t)} * f \in C^\infty(\mathbb{T})$ , para  $t > 0$  suficientemente pequeno.

## 1.4 Equação do calor: o caso não-homogêneo

Na seção anterior, consideramos o PVI para a equação do calor em  $\mathbb{T}$ , a saber,

$$\begin{cases} u_t = u_{\theta\theta} \\ u(0, \cdot) = f \end{cases}$$

Soluções desta equações modelam a propagação de calor em  $\mathbb{T}$  no caso em que fontes ou sumidouros não estão presentes. Caso contrário, a equação relevante é

$$(1.43) \quad u_t = u_{\theta\theta} + G(t, \theta),$$

onde  $G$  representa a taxa de criação (ou eliminação) de calor em  $(t, \theta)$ . Assim, o PVI correspondente é

$$(1.44) \quad \begin{cases} u_t = u_{\theta\theta} + G(t, \theta) \\ u(0, \cdot) = f \end{cases}$$

Inspirados por (1.11), vamos implementar o método de Fourier a este problema, buscando soluções na forma

$$(1.45) \quad u(t, x) = \sum_n a_n(t) e^{in\theta},$$

na hipótese de que  $G$  também admite uma expansão em série de Fourier:

$$(1.46) \quad G(t, \theta) = \sum_n b_n(t) e^{in\theta}.$$

Note que, nestas condições, o dado inicial  $f$  necessariamente satisfaz

$$f(\theta) = \sum_n a_n(0) e^{in\theta}.$$

Para determinar as funções  $a_n$  acima, levamos (1.45) e (1.46), após diferenciação, a (1.44), obtendo

$$\sum_n a'_n(t) e^{in\theta} = - \sum_n n^2 a_n(t) e^{in\theta} + \sum_n b_n(t) e^{in\theta}.$$

A esta altura, o leitor já deve ter percebido que  $\{e^{in\theta}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é uma ‘base’ de  $C^0(\mathbb{T})$ , o que nos autoriza a concluir que  $a_n$  é determinada pela equação diferencial ordinária

$$a'_n(t) + n^2 a_n(t) = b_n(t),$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} a_n(t) &= a_n(0)e^{-n^2t} + e^{-n^2t} \int_0^t b_n(s)e^{n^2s} ds \\ &= \hat{f}(n)e^{-n^2t} + e^{-n^2t} \int_0^t b_n(s)e^{n^2s} ds \end{aligned}$$

Assim, a solução de (1.44) é

$$(1.47) \quad u(t, \theta) = \sum_n \hat{f}(n)e^{-n^2t}e^{in\theta} + \sum_n \left( \int_0^t b_n(s)e^{n^2s} ds \right) e^{-n^2t}e^{in\theta}.$$

Note que o primeiro termo à direita nada mais é, pelos Teoremas 1.1.1 e 1.1.2, que a solução da equação homogênea com dado inicial  $f$ , de modo que

$$(1.48) \quad \sum_n \hat{f}(n)e^{-n^2t}e^{in\theta} = \int_{\mathbb{T}} \mathcal{K}(t, \theta - \theta') f(\theta') d\theta',$$

para  $f \in C^0(\mathbb{T})$ .

Para analisar (1.47), suponhamos para simplificar que  $G(t, \theta) = G(\theta)$ , de modo que  $b_n(t) = b_n = \hat{G}(n)$ , uma constante. A solução correspondente é

$$u(t, \theta) = \sum_n \hat{f}(n)e^{-n^2t}e^{in\theta} + \hat{G}(0)t + \sum_{n \neq 0} \frac{\hat{G}(n)}{n^2} (1 - e^{-n^2t})e^{in\theta},$$

ou equivalentemente,

$$(1.49) \quad u(t, \theta) = \hat{f}(0) + \hat{G}(0)t + \sum_{n \neq 0} \left( \hat{f}(n) - \frac{\hat{G}(n)}{n^2} \right) e^{-n^2t}e^{in\theta} + \sum_{n \neq 0} \frac{\hat{G}(n)}{n^2} e^{in\theta}.$$

Se supusermos inicialmente que  $f, G \in C^0(\mathbb{T})$ , de forma que seus coeficientes de Fourier são limitados por  $C > 0$ , vê-se que as séries acima são majoradas, para  $t \geq t_0 > 0$ , por

$$2C \sum_{n \neq 0} e^{-n^2t_0} + C \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

de maneira que  $u \in C^0((0, +\infty) \times \mathbb{T})$ . Além disso, formalmente temos

$$u_\theta(t, \theta) = i \sum_{n \neq 0} \left( n\hat{f}(n) - \frac{\hat{G}(n)}{n} \right) e^{-n^2t}e^{in\theta} + i \sum_{n \neq 0} \frac{\hat{G}(n)}{n} e^{in\theta},$$

que é majorada por

$$C \sum_{n \neq 0} (|n| + 1) e^{-n^2 t_0} + \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} |\hat{G}(n)|^2 < +\infty,$$

devido à Proposição 1.2.2. Vê-se então que  $u(t, \cdot) \in C^1(\mathbb{T})$ , para  $t > 0$ . Por outro lado, ainda formalmente,

$$u_t(t, \theta) = u_{\theta\theta}(t, \theta) = - \sum_{n \neq 0} \left( n^2 \hat{f}(n) - \hat{G}(n) \right) e^{-n^2 t} e^{in\theta} - \sum_{n \neq 0} \hat{G}(n) e^{in\theta},$$

A primeira série é majorada por

$$C \sum_{n \neq 0} (n^2 + 1) e^{-n^2 t_0} < +\infty,$$

mas a segunda, com a tecnologia de que dispomos, encarnada na Proposição 1.2.3, somente converge se supusermos  $G \in C^1(\mathbb{T})$ . Logo, a continuidade de  $G$  parece não bastar para garantir que  $u \in C^{1,2}((0, +\infty) \times \mathbb{T})$ . Mais geralmente, pode-se checar para  $k \geq 0$  que

$$(1.50) \quad |(\partial_\theta^{k+2} u)(t, \theta)| \leq C \sum_{n \neq 0} (|n|^{k+2} + |n|^k) e^{-n^2 t_0} + \sum_{n \neq 0} |n|^k |\hat{G}(n)|,$$

cuja convergência, novamente pela Proposição 1.2.3, somente pode ser assegurada se  $G \in C^{k+1}(\mathbb{T})$ . Note que esta hipótese implica, por (1.50), que  $u(t, \cdot) \in C^{k+2}(\mathbb{T})$ ,  $t > 0$ . A moral da história é que maior regularidade de  $u$  demanda maior regularidade de  $G$ , independentemente da natureza do dado inicial  $f$ . Neste estágio, contudo, ao passar de  $G = G(\theta)$  para  $u$ , ganha-se apenas um grau de regularidade, pois vimos que  $G \in C^{k+1}(\mathbb{T})$  implica  $u(t, \cdot) \in C^{k+2}(\mathbb{T})$ .

Esta perda de regularidade parece estar relacionada com a existência, já mencionada anteriormente, de funções  $f \in C^0(\mathbb{T})$  para as quais  $S_N[f](\theta)$  não converge quando  $N \rightarrow +\infty$  para algum  $\theta \in \mathbb{T}$ . Por outro lado, o Teorema 1.2.1 garante que a série de Fourier de  $f \in C^1(\mathbb{T})$  converge uniformemente para  $f$ . O resultado a seguir exhibe uma classe intermediária de funções para as quais a convergência *pontual* sempre acontece, e pode ser combinado com (1.50) para garantir que  $u(t, \cdot) \in C^{k+2}(\mathbb{T})$ ,  $t > 0$ , se meramente assumimos que  $G \in C^{k+\alpha}(\mathbb{T})$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ . Isto nos aproxima dos dois graus de regularidade esperados na passagem de  $G$  para  $u$  (veja Teorema 2.3.1 abaixo) e constitui uma primeira indicação da relevância dos espaços de Hölder na teoria de regularidade de equações parabólicas não-homogêneas.

**Teorema 1.4.1** *Se  $g \in C^\alpha(\mathbb{T})$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , então*

$$(1.51) \quad S_N[g](\tilde{\theta}) \rightarrow g(\tilde{\theta}), \quad \tilde{\theta} \in \mathbb{T},$$

*quando  $N \rightarrow +\infty$ .*

O ponto crucial aqui é que (1.30) permanece válida se apenas supusermos que  $g$  é integrável (a Lebesgue), o que nos fornece o lema a seguir.<sup>8</sup>

**Lema 1.4.2** (Riemann-Lebesgue) *Se  $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  é integrável (a Lebesgue) então*

$$(1.52) \quad \lim_{|n| \rightarrow +\infty} |\hat{g}(n)| = 0.$$

Vamos então verificar (1.51) supondo, sem perda de generalidade, que  $\tilde{\theta} = g(\tilde{\theta}) = 0$ , de maneira que  $|g(\theta)| \leq C|\theta|^\alpha$ . Para  $\theta \neq 0$ , consideremos

$$h(\theta) = \frac{g(\theta)}{e^{i\theta} - 1},$$

de modo que, para  $\theta$  próximo de 0,

$$\begin{aligned} |h(\theta)| &\leq \frac{|g(\theta)|}{|\theta|^\alpha} \frac{|\theta|^\alpha}{|e^{i\theta} - 1|} \\ &\leq C \frac{|\theta|^\alpha}{|e^{i\theta} - 1|} \\ &\leq \frac{C'}{|\theta|^{1-\alpha}}, \end{aligned}$$

pois  $e^{i\theta} - 1$  comporta-se como  $i\theta$ . Assim,  $h$  é integrável (a Lebesgue) pois  $1 - \alpha < 1$ , e seus coeficientes de Fourier estão bem definidos. Mais ainda,  $\hat{g}(n) = \hat{h}(n+1) - \hat{h}(n)$ , o que nos dá

$$S_N[g](0) = \hat{h}(-N-1) - \hat{h}(N) \rightarrow 0 = f(0),$$

quando  $N \rightarrow +\infty$ , por (1.52).

O teorema a seguir é consequência da discussão acima.

**Teorema 1.4.3** *Se  $f \in C^0(\mathbb{T})$  e  $G = G(\theta) \in C^{k+\alpha}(\mathbb{T})$ ,  $k \geq 0$ , então  $u$  em (1.49) pertence a  $C^{[(k+2)/2], k+2}((0, +\infty) \times \mathbb{T})$  e define uma solução da equação do calor não-homogênea*

$$(1.53) \quad u_t = u_{\theta\theta} + G(\theta)$$

---

<sup>8</sup>Para conveniência do leitor, esboçamos a demonstração de (1.52). Primeiramente, o resultado é válido para funções que são constantes num intervalo e se anulam fora daí. Por conseguinte, permanece válido para funções do tipo *escada*, que são combinações lineares finitas de funções deste tipo. Como qualquer função *simples*, isto é, que é combinação linear finita de funções características de conjuntos mensuráveis, pode ser arbitrariamente aproximada em  $L^1(\mathbb{T})$  por funções do tipo escada, o resultado vale para aquela classe de funções. Finalmente, como qualquer função integrável (a Lebesgue) pode ser aproximada em  $L^1(\mathbb{T})$  por funções simples, o resultado segue.

em  $(0, +\infty) \times \mathbb{T}$ . Se  $\hat{G}(0) = 0$  então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t, \cdot) - \xi\|_{C^{k+2}(\mathbb{T})} = 0,$$

onde  $\xi \in C^{k+2}(\mathbb{T})$ ,

$$\xi(\theta) = \hat{f}(0) + \sum_{n \neq 0} \frac{\hat{G}(n)}{n^2} e^{in\theta},$$

satisfaz a equação

$$(1.54) \quad \xi_{\theta\theta} + G(\theta) = 0.$$

Finalmente, se  $f \in C^l(\mathbb{T})$ ,  $l \leq k$ , então (1.49) é uma solução do PVI

$$(1.55) \quad \begin{cases} u_t = u_{\theta\theta} + G(\theta) \\ u(0, \cdot) = f \end{cases}$$

no sentido que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(t, \cdot) - f\|_{C^l(\mathbb{T})} = 0.$$

A unicidade da solução decorre do Princípio do Máximo (Teorema 1.1.5).

Deixamos a demonstração deste resultado ao leitor interessado, mas não podemos nos furtar de tecer um comentário. Em geral, diz-se que  $v \in C^2(\mathbb{T})$  é uma *solução estacionária* da equação de evolução

$$u_t = \mathcal{F}(t, \theta, u, u_\theta, u_{\theta\theta})$$

se satisfaz

$$\mathcal{F}(t, \theta, v, v_\theta, v_{\theta\theta}) = 0$$

identicamente. Logo, quando  $\hat{G}(0) = 0$ , ou seja, quando a geração líquida de calor em  $\mathbb{T}$  se anula, vê-se que o comportamento assintótico das soluções de (1.53) é determinado por suas soluções estacionárias. Já vimos que este também é o caso na equação do calor homogênea, pois suas soluções estacionárias são exatamente as funções constantes. Conforme veremos, este fenômeno repete-se em todos os fluxos apresentados neste texto.

# Capítulo 2

## Equações quasi-lineares

Neste capítulo trataremos de estabelecer a existência local (no tempo) e a unicidade de soluções de uma certa classe de equações parabólicas do tipo quasi-linear. Mais ainda, introduziremos as ferramentas básicas na discussão da teoria de regularidade de tais equações, a saber, as estimativas de Schauder e De Giorgi-Nash.

### 2.1 Soluções moderadas

Seja

$$F : [0, +\infty) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

uma função que suporemos suave em cada um de seus argumentos. Nos próximos capítulos encontraremos várias situações onde faz-se necessário analisar o comportamento local e global (no tempo) de soluções de equações diferenciais do tipo

$$(2.1) \quad u_t = u_{\theta\theta} + F(t, u(\theta), u_\theta(\theta)).$$

Tais equações são denominadas *quasi-lineares* pois as não-linearidades concentram-se nas derivadas até primeira ordem de  $u$  e não afetam  $u_{\theta\theta}$ .

Como sempre, na análise desta equações é-nos fornecida uma função  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ , o dado inicial do problema, que doravante suporemos suave, e tratamos de encontrar soluções do PVI

$$(2.2) \quad \begin{cases} u_t = u_{\theta\theta} + F(t, u(\theta), u_\theta(\theta)) \\ u(0, \theta) = f(\theta) \end{cases}$$

Naturalmente, o caráter não-linear de (2.1) nos impede de diretamente aplicar o método de Fourier a (2.2). Existe porém um problema mais sério aqui: ao contrário do

que acontece no caso da equação do calor homogênea, soluções do PVI (2.2) *não* necessariamente estão definidas para todo  $t > 0$ . Um exemplo simples de desenvolvimento de singularidades em tempo finito é o PVI

$$\begin{cases} u_t = u_{\theta\theta} + u^2 \\ u(0, \theta) = 1 \end{cases}$$

cuja solução é  $u(t, \theta) = (1 - t)^{-1}$ , definida somente para  $t < 1$ . Desta forma, o resultado a seguir é o melhor que pode-se esperar neste contexto.

**Teorema 2.1.1** *Se  $F$  e  $f$  são ambas suaves então existem  $T > 0$  e uma aplicação  $u \in C^0([0, T] \times \mathbb{T}) \cap C^\infty((0, T) \times \mathbb{T})$  que satisfaz (2.1) identicamente em  $(0, T) \times \mathbb{T}$ . Mais ainda,  $u$  é uma solução do PVI (2.2) no sentido*

$$(2.3) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \|u(t, \cdot) - f\|_{C^\infty(\mathbb{T})} = 0.$$

*Finalmente,  $u$  é única no seguinte sentido: se existem  $T' > 0$  e  $v \in C^0([0, T'] \times \mathbb{T}) \cap C^\infty((0, T') \times \mathbb{T})$  solução de (2.2) então  $u \equiv v$  em  $[0, \bar{T}]$ ,  $\bar{T} = \min\{T, T'\}$ .*

A unicidade, que decorre do Princípio do Máximo Parabólico (veja o Teorema C.0.11), garante a existência de  $T^* > 0$  com a propriedade que  $[0, T^*)$  é o maior intervalo semi-aberto onde a solução de (2.2) está definida. Diz-se então que  $T^*$  é o *tempo maximal* da solução de (2.2). Neste contexto, adquire extrema relevância a questão de exibir critérios para garantir que a solução  $u$  dada pelo Teorema (2.1.1) é *global*, ou seja, que vale  $T^* = +\infty$ .

**Proposição 2.1.2** *Seja  $u \in C^0([0, T] \times \mathbb{T}) \cap C^\infty((0, T) \times \mathbb{T})$  uma solução local de (2.2) e suponha que para cada  $k \geq 0$  e  $0 < \alpha < 1$  existe  $C_{k, \alpha} > 0$ , que depende de  $k$  e  $\alpha$  mas não de  $T$ , tal que*

$$(2.4) \quad \|u\|_{C^{(k+\alpha)/2, k+\alpha}([0, T] \times \mathbb{T})} \leq C_{k, \alpha}.$$

*Então  $u$  estende-se unicamente a uma solução global.*

Caso contrário, seja  $T^* < +\infty$  o tempo maximal de definição de  $u$ . Por Ascoli-Arzelà (Teorema A.1.1), as estimativas (2.4) implicam que, quando  $t \rightarrow T^*$ ,  $u(t, \cdot)$  converge em  $C^\infty(\mathbb{T})$  para uma função que denotaremos por  $u(T^*, \cdot)$ , de modo que na verdade tem-se uma solução em  $[0, T^*]$ . Podemos então, usando o Teorema 2.1.1, resolver o PVI (2.2) com dado inicial  $u(T^*, \cdot)$  e encontrar uma solução local  $v \in C^0([T^*, T^* + \eta] \times \mathbb{T}) \cap C^\infty((T^*, T^* + \eta) \times \mathbb{T})$ ,  $\eta > 0$ . Por (2.3),

$$\lim_{t \rightarrow T^*} \|v(t, \cdot) - u(T^*, \cdot)\|_{C^\infty(\mathbb{T})} = 0,$$

de modo que a óbvia justaposição de  $u$  e  $v$  define uma solução de (2.2) em  $[0, T^* + \eta)$ . Isto claramente contradiz a hipótese de  $T^*$  ser o tempo maximal.

Antes de prosseguir com a demonstração do Teorema 2.1.1, convém descrever sucintamente as várias etapas do processo. A idéia básica consiste em voltar à solução geral (1.47) da equação do calor não-homogênea

$$u_t = u_{\theta\theta} + G(t, \theta),$$

com dado inicial  $f$ . Recordando que

$$b_n(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} G(s, \theta') e^{-in\theta'} d\theta',$$

substituindo isto em (1.47), trocando os sinais de soma e integração e lembrando de (1.48) deduzimos que a solução do PVI

$$(2.5) \quad \begin{cases} u_t = u_{\theta\theta} + G(t, \theta) \\ u(0, \theta) = f(\theta) \end{cases}$$

pode ser representada, pelo menos formalmente, por

$$(2.6) \quad u(t, \theta) = \int_{\mathbb{T}} \mathcal{K}(t, \theta, \theta') f(\theta') d\theta' + \int_0^t \int_{\mathbb{T}} \mathcal{K}(t-s, \theta, \theta') G(s, \theta') d\theta' ds.$$

Este é o famoso *princípio de Duhamel*, que expressa a solução da equação não-homogênea como soma da solução da equação homogênea com dada inicial  $f$  e uma solução da equação não-homogênea com dado inicial nulo. Com relação ao PVI (2.2), (2.6) sugere considerar, para  $T > 0$  a ser posteriormente determinado, o espaço de Banach

$$C_\mu(\mathbb{T}) = C^0([0, T]; C^\mu(\mathbb{T})), \quad \mu \geq 0,$$

e para  $u \in C_{1+\alpha}(\mathbb{T})$ ,  $0 < \alpha < 1$ , definir

$$\begin{aligned} (\Psi u)(t)(\theta) &= \int_{\mathbb{T}} \mathcal{K}(t, \theta - \theta') f(\theta') d\theta' + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{T}} \mathcal{K}(t-s, \theta - \theta') F(s, u(s, \theta'), u_\theta(s, \theta')) d\theta' ds. \end{aligned}$$

Dado  $\epsilon > 0$  seja

$$E_{T,\epsilon} = \{u \in C_{1+\alpha}(\mathbb{T}); u(0) = f, \|u - f\|_{C_{1+\alpha}(\mathbb{T})} \leq \epsilon\}.$$

Mostraremos a seguir que se  $T$  e  $\epsilon$  são ambos suficientemente pequenos então  $\Psi$  preserva  $E_{T,\epsilon}$  e aí define uma contração. Logo,  $\Psi$  possui, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach [13], um ponto fixo  $u \in E_{T,\epsilon}$  que satisfaz

$$(2.7) \quad u(t, \theta) = \int_{\mathbb{T}} \mathcal{K}(t, \theta - \theta') f(\theta') d\theta' + \int_0^t \int_{\mathbb{T}} \mathcal{K}(t-s, \theta - \theta') F(s, u(s, \theta'), u_\theta(s, \theta')) d\theta' ds.$$

**Definição 2.1.3** Diz-se que  $u \in E_{T,\epsilon}$  é uma solução moderada de (2.2) se satisfaz (2.7) identicamente.

Mas note que se  $u$  é solução moderada então, para cada  $t$ ,  $u(t, \cdot) \in C^{1+\alpha}(\mathbb{T})$ , de modo que  $u$  não necessariamente é uma solução no sentido usual de (2.2), que envolve derivadas até segunda ordem de  $u$ . Para garantir, por exemplo, que  $u(t, \theta)$  é de classe  $C^2$  em  $\theta$  e, conseqüentemente de classe  $C^1$  em  $t$ , faz-se necessário apelar para a Teoria de Regularidade de Schauder, que descreveremos na Seção 2.3. Na próxima seção apresentaremos a demonstração da existência de soluções moderadas para (2.2). A unicidade da solução, nos moldes do Teorema 2.1.1, é consequência do Teorema C.0.11.

## 2.2 Existência de soluções moderadas

Para demonstrar a existência de soluções moderadas de (2.2), devemos verificar as propriedades de  $\Psi$  acima mencionadas, a saber, que existem  $T$  e  $\epsilon$  positivos tais que  $\Psi(E_{T,\epsilon}) \subset E_{T,\epsilon}$  e  $\Psi|_{E_{T,\epsilon}}$  é uma contração no sentido que, para  $u, v \in E_{T,\epsilon}$ ,

$$\|\Psi(u) - \Psi(v)\| \leq C\|u - v\|, \quad 0 \leq C < 1.$$

Em função dos resultados do capítulo anterior, o leitor não terá dificuldade em convencer-se que podemos, sem perda de generalidade, supor que  $f = 0$  na discussão acima e, conseqüentemente, na demonstração a seguir.

Isto posto, comecemos por fixar  $\epsilon > 0$ . Seja  $\mathcal{F} : C_{1+\alpha}(\mathbb{T}) \rightarrow C_\alpha(\mathbb{T})$  dada por

$$\mathcal{F}u(t)(\theta) = F(t, u(\theta), u_\theta(\theta)).$$

Então a suavidade de  $F$  implica imediatamente a seguinte proposição.

**Proposição 2.2.1** Existe  $\epsilon > 0$  tal que:

1.  $\mathcal{F}$  é localmente limitada, ou seja, se  $\|v\|_{C_{1+\alpha}(\mathbb{T})} \leq \epsilon$  então

$$(2.8) \quad \|\mathcal{F}(v)\|_{C_\alpha(\mathbb{T})} \leq M,$$

para algum  $M > 0$ ;

2.  $\mathcal{F}$  é localmente Lipschitz, ou seja, se  $\|v\|_{C_{1+\alpha}(\mathbb{T})} \leq \epsilon$  e  $\|w\|_{C_{1+\alpha}(\mathbb{T})} \leq \epsilon$ , então

$$(2.9) \quad \|\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(v)\|_{C_\alpha(\mathbb{T})} \leq K\|u - v\|_{C_{1+\alpha}(\mathbb{T})},$$

para algum  $K > 0$ .

Com este  $\epsilon > 0$ , mostremos agora que  $T > 0$  suficientemente pequeno implica  $\Psi(E_{T,\epsilon}) \subset E_{T,\epsilon}$ . Com efeito, se  $u \in E_{T,\epsilon}$ ,

$$(2.10) \quad |(\Psi u)(t, \theta)| \leq M \int_0^t \int_{\mathbb{T}} \mathcal{K}(t-s, \theta - \theta') d\theta' ds,$$

devido a (2.8). Para analisar esta integral recorde que, por (1.42),

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \mathcal{K}(t-s, \theta - \theta') &= \mathcal{E}(t-s, \theta - \theta') + O(e^{-C/(t-s)}) \\ &\approx \frac{1}{(t-s)^{1/2}} e^{-\frac{(\theta-\theta')^2}{4(t-s)}}, \end{aligned}$$

quando  $s \rightarrow t$ . Aqui, o símbolo  $\approx$  significa que omitimos, a um só tempo, constantes multiplicativas no primeiro termo à direita e o termo desprezível  $O(e^{-C/(t-s)})$ . Assim, se  $\beta > 0$ ,

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \mathcal{K}(t-s, \theta - \theta') &\approx \frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}-\beta} |\theta - \theta'|^{2\beta}} \left( \frac{|\theta - \theta'|^2}{t-s} \right)^\beta e^{-\frac{(\theta-\theta')^2}{4(t-s)}} \\ &\approx \frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}-\beta} |\theta - \theta'|^{2\beta}}, \end{aligned}$$

pois  $x^\beta e^{-x/4}$  é limitada para  $x \geq 0$ . Isto mostra que o integrando em (2.10) é singular em  $s = t$  e  $\theta = \theta'$ , mas note que essas singularidades são integráveis (a Lebesgue) se escolhermos  $0 < \beta < 1/2$ . Neste caso, usando Fubini,

$$\begin{aligned} |(\Psi u)(t, \theta)| &\approx \int_0^t \int_{\mathbb{T}} \frac{d\theta' ds}{(t-s)^{\frac{1}{2}-\beta} |\theta - \theta'|^{2\beta}} \\ &\approx \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{\frac{1}{2}-\beta}} \\ &\approx (t-s)^{\beta+\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

e escolhendo  $T$  suficientemente pequeno temos  $\|\Psi(u)\|_{C_0(\mathbb{T})} \leq \epsilon/3$ .

Do mesmo modo,

$$|(\Psi u)_\theta(t, \theta)| \approx \int_0^t \int_{\mathbb{T}} \mathcal{K}_\theta(t-s, \theta - \theta') d\theta' ds,$$

mas se  $\gamma > 0$ ,

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \mathcal{K}_\theta(t-s, \theta - \theta') &\approx \frac{1}{(t-s)^{1/2}} \frac{\theta - \theta'}{t-s} e^{-\frac{(\theta-\theta')^2}{4(t-s)}} \\ &\approx \frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{2}-\gamma} |\theta - \theta'|^{-1+2\gamma}} \left( \frac{(\theta - \theta')^2}{t-s} \right)^\gamma e^{-\frac{(\theta-\theta')^2}{4(t-s)}} \\ &\approx \frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{2}-\gamma} |\theta - \theta'|^{-1+2\gamma}}, \end{aligned}$$

e se  $1/2 < \gamma < 1$ , novamente por Fubini,

$$\begin{aligned} |(\Psi u)_\theta(t, \theta)| &\approx \int_0^t \int \frac{d\theta' ds}{(t-s)^{\frac{3}{2}-\gamma} |\theta - \theta'|^{-1+2\gamma}} \\ &\approx \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{\frac{3}{2}-\gamma}} \\ &\approx (t-s)^{\gamma-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

de modo que se  $T$  é suficientemente pequeno teremos  $\|(\Psi u)_\theta\|_{C_0(\mathbb{T})} \leq \epsilon/3$ . Finalmente, se  $0 < \alpha < 1$ , temos (supondo  $f = 0$ ),

$$\frac{|(\Psi u)_\theta(t, \theta) - (\Psi u)_\theta(t, \tilde{\theta})|}{|\theta - \tilde{\theta}|^\alpha} \approx \int_0^t \int_{\mathbb{T}} \frac{|\theta - \tilde{\theta}|^{-\alpha}}{(t-s)^{\frac{3}{2}-\gamma}} \left| \frac{1}{|\theta - \theta'|^{-1+2\gamma}} - \frac{1}{|\tilde{\theta} - \theta'|^{-1+2\gamma}} \right| d\theta' ds.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe  $\Lambda > 0$  e  $\bar{\theta}$  entre  $\theta$  e  $\tilde{\theta}$  tais que

$$\left| \frac{1}{|\theta - \theta'|^{-1+2\gamma}} - \frac{1}{|\tilde{\theta} - \theta'|^{-1+2\gamma}} \right| \leq \Lambda \frac{|\theta - \tilde{\theta}|}{|\bar{\theta} - \theta'|^{-1+2\gamma}},$$

de maneira que

$$\begin{aligned} \frac{|(\Psi u)_\theta(t, \theta) - (\Psi u)_\theta(t, \tilde{\theta})|}{|\theta - \tilde{\theta}|^\alpha} &\approx \int_0^t \int_{\mathbb{T}} \frac{|\theta - \tilde{\theta}|^{-\alpha+1}}{(t-s)^{\frac{3}{2}-\gamma} |\bar{\theta} - \theta'|^{-1+\gamma/2}} d\theta' ds \\ &\approx \int_0^t \int_{\mathbb{T}} \frac{d\theta' ds}{(t-s)^{\frac{3}{2}-\gamma} |\bar{\theta} - \theta'|^{-1+\gamma/2}}, d\theta' ds \\ &\approx \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{\frac{3}{2}-\gamma}} \\ &\approx (t-s)^{\gamma-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

onde usamos que  $-\alpha + 1 > 0$ . Assim,  $\|(\Psi u)_\theta\|_{C_\alpha(\mathbb{T})} < \epsilon/3$ , para  $T$  suficientemente pequeno, e isso mostra que  $\|\Psi u\|_{C_{1+\alpha}(\mathbb{T})} < \epsilon$ , ou seja,  $\Psi(E_{T,\epsilon}) \subset E_{T,\epsilon}$ , como desejado.

Para verificar que  $\Psi|_{E_{T,\epsilon}}$  é uma contração, procedemos essencialmente do mesmo modo, observando que, se  $u, v \in E_{T,\epsilon}$  então, em vista de (2.9),

$$|(\Psi u)(t)(\theta) - (\Psi v)(t)(\theta)| \leq K \|u - v\|_{C_{1+\alpha}(\mathbb{T})} \int_0^t \int_{\mathbb{T}} \mathcal{K}(t-s, \theta, \theta') d\theta' ds.$$

Como vimos, a integral acima converge para 0 quando  $t \rightarrow 0$ , de modo que, se  $T$  é pequeno,

$$\|\Psi u - \Psi v\|_{C_0(\mathbb{T})} \leq \frac{C}{3} \|u - v\|_{C_{1+\alpha}(\mathbb{T})}, \quad 0 < C < 1.$$

Do mesmo modo,

$$|(\Psi u)_\theta(t)(\theta) - (\Psi v)_\theta(t)(\theta)| \leq K \|u - v\|_{C_{1+\alpha}(\mathbb{T})} \int_0^t \int_{\mathbb{T}} \mathcal{K}_\theta(t-s, \theta, \theta') d\theta' ds,$$

e se  $0 < \alpha < 1$ ,

$$\frac{\left| \left( (\Psi u)_\theta(t, \theta) - (\Psi v)_\theta(t, \theta) \right) - \left( (\Psi u)_\theta(t, \tilde{\theta}) - (\Psi v)_\theta(t, \tilde{\theta}) \right) \right|}{|\theta - \tilde{\theta}|^\alpha}$$

é majorado por

$$K \|u - v\|_{C_{1+\alpha}(\mathbb{T})} \int_0^t \int_{\mathbb{T}} \frac{|\mathcal{K}_\theta(t, \theta, \theta') - \mathcal{K}_\theta(t, \tilde{\theta}, \theta')|}{|\theta - \tilde{\theta}|^\alpha} d\theta' ds,$$

e tomando  $T > 0$  suficientemente pequeno concluímos que

$$\|\Psi u - \Psi v\|_{C_{1+\alpha}(\mathbb{T})} \leq C \|u - v\|_{C_{1+\alpha}(\mathbb{T})}, \quad 0 < C < 1.$$

Assim, o Teorema do Ponto Fixo de Banach se aplica e existe  $u \in C_{1+\alpha}(\mathbb{T})$  satisfazendo (2.7). Mas, conforme já salientamos, não é claro que a solução moderada (2.7) satisfaça o PIV (2.2). Este impasse será resolvido na próxima seção, por meio da Teoria de Regularidade de Schauder.

## 2.3 Regularidades de soluções moderadas via Schauder

Nesta seção descreveremos a teoria de regularidade de equações parabólicas quasi-lineares do tipo (2.1). Em particular, checaremos que soluções moderadas do PVI (2.2) são de fato suaves, na hipótese de que  $f$  e  $F$  são suaves em seus argumentos.

O ponto de partida é, mais uma vez, a equação do calor não-homogênea

$$(2.14) \quad u_t = u_{\theta\theta} + G(t, \theta),$$

onde suporemos que  $G$  é pelo menos contínua em seus argumentos. Já vimos, porém, na discussão que antecede o Teorema 1.4.3, que a continuidade de  $G$  não basta para garantir que o Princípio de Duhamel,

$$(2.15) \quad u(t, \theta) = \int_{\mathbb{T}} \mathcal{K}(t, \theta, \theta') f(\theta') d\theta' + \int_0^t \int_{\mathbb{T}} \mathcal{K}(t-s, \theta, \theta') G(s, \theta') d\theta' ds,$$

define uma solução de (2.14). Por outro lado, o Teorema 1.4.3 sugere que se supusermos  $G = G(t, \theta) \in C^{\alpha/2, \alpha}((0, T) \times \mathbb{T})$  então (2.15) define uma solução do PIV

$$(2.16) \quad \begin{cases} u_t &= u_{\theta\theta} + G(t, \theta) \\ u(0) &= f \end{cases}$$

Esta percepção é confirmada pelo resultado a seguir, um exemplo do resultado central na Teoria de Regularidade de Schauder para equações do tipo (2.14). Aqui, escreveremos  $U_T = [0, T) \times \mathbb{T}$ ,  $T > 0$ .

**Teorema 2.3.1** *Se  $T > 0$ ,  $G \in C^{\alpha/2, \alpha}(U_T)$  e  $f \in C^{2+\alpha}(\mathbb{T})$  então  $u$  dada por (2.15) define uma função em  $C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}(U_T)$  que é uma solução do PVI (2.16) no sentido que*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(t, \cdot) - f\|_{C^{2+\alpha}(\mathbb{T})} = 0.$$

Na verdade, existe  $C = C(\alpha) > 0$  tal que

$$(2.17) \quad \|u\|_{C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}(U_T)} \leq C(\|u\|_{C^0(U_T)} + \|f\|_{C^{2+\alpha}(\mathbb{T})} + \|G\|_{C^{\alpha/2, \alpha}(U_T)}).$$

Além disso, se  $G \in C^{(k+\alpha)/2, k+\alpha}(U_T)$  e  $f \in C^{k+2+\alpha}(\mathbb{T})$ ,  $k \geq 1$ , então  $u \in C^{(k+2+\alpha)/2, k+2+\alpha}(U_T)$  e existe  $C = C(k, \alpha) > 0$  tal que

$$(2.18) \quad \|u\|_{C^{(k+2+\alpha)/2, k+2+\alpha}(U_T)} \leq C(\|u\|_{C^0(U_T)} + \|f\|_{C^{k+2+\alpha}(\mathbb{T})} + \|G\|_{C^{(k+\alpha)/2, k+\alpha}(U_T)}).$$

Mais ainda,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(t, \cdot) - f\|_{C^{k+2+\alpha}(\mathbb{T})} = 0.$$

Em palavras, quanto mais regularidade impõe-se aos dados de (2.16) tanto mais regular será a sua solução. Note ainda que a unicidade da solução decorre do Teorema 1.1.5.

**Observação 2.3.2** *Um ponto importante aqui, que usaremos mais adiante, é que as constantes  $C(\alpha)$  e  $C(k, \alpha)$  acima não dependem de  $T$ ! Esta observação é fundamental quando do uso da Proposição 2.1.2, que fornece um critério para a existência de soluções globais de (2.2).*

De posse do Teorema 2.3.1, a demonstração da regularidade de soluções moderadas é imediata. Com efeito, como  $u \in E_{T, \epsilon}$  satisfaz (2.7), vê-se que de fato  $u \in C^{(1+\alpha)/2, 1+\alpha}(U_T)$ . Assim, a suavidade de  $F$  implica que

$$(2.19) \quad G(t, \theta) = F(t, u(t, \theta), u_\theta(t, \theta)) \in C^{\alpha/2, \alpha}(U_T),$$

e a primeira parte do teorema garante que  $u \in C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}(U_T)$  é solução do PVI (2.16). Mas então  $G$  dada por (2.19) pertence a  $C^{(1+\alpha)/2, 1+\alpha}(U_T)$  e a segunda parte do teorema, com  $k = 1$ , nos dá  $u \in C^{(3+\alpha)/2, 3+\alpha}(U_T)$ . Agora,  $G \in C^{(2+\alpha)/2, 2+\alpha}(U_T)$  e o teorema com  $k = 2$  implica  $u \in C^{(4+\alpha)/2, 4+\alpha}(U_T)$ . Iterando este argumento indefinidamente conclui-se que  $u \in C^\infty(U_T)$ , como desejado.

Infelizmente, a demonstração das estimativas de Schauder é demasiado técnica para ser apresentada aqui. Apesar disso, é possível descrever sucintamente a estratégia. De fato, como  $\mathbb{T}$  não possui fronteira, (2.17) e (2.18) podem ser verificadas a partir das chamadas estimativas de Schauder ‘interiores’. Em particular, as estimativas ‘na fronteira’, reconhecidamente de demonstração mais difícil, não são necessárias. A idéia é então localizar o problema e, através de uma mudança de coordenadas num cilindro do tipo  $[0, T) \times (\theta_1, \theta_2)$ , reduzir o problema a obter correspondentes estimativas para soluções de uma equação do tipo

$$(2.20) \quad v_t = a(t, x)v_{xx} + b(t, x)v_x + d(t, x), \quad (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R},$$

que sabe-se ser *uniformemente parabólica* no sentido que existem  $0 < \lambda < \Lambda$  tais que

$$\lambda \leq a(t, x) \leq \Lambda, \quad (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R},$$

e, além disso, satisfaz

$$\|a\|_{C^{\alpha/2, \alpha}([0, T) \times \mathbb{R})} + \|b\|_{C^{\alpha/2, \alpha}([0, T) \times \mathbb{R})} + \|d\|_{C^{\alpha/2, \alpha}([0, T) \times \mathbb{R})} \leq C.$$

Para esta situação, as estimativas estão provadas, por exemplo, em [9].

De fato, registramos, para uso posterior, estimativas do tipo Schauder para PVI's ligeiramente mais gerais que (2.16), e que também seguem dos argumentos em [9]. Mais precisamente, consideremos o PVI

$$(2.21) \quad \begin{cases} u_t = A(t, \theta)u_{\theta\theta} + B(t, \theta)u_\theta + C(t, \theta)u + G(t, \theta) \\ u(0) = f \end{cases}$$

que supõe-se ser *uniformemente parabólico* no sentido que existem  $0 < \lambda < \Lambda$  tais que

$$\lambda \leq A(t, x) \leq \Lambda, \quad (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}.$$

**Teorema 2.3.3** *Suponha que  $G \in C^{\alpha/2, \alpha}(U_T)$ ,  $f \in C^{2+\alpha}(\mathbb{T})$  e*

$$\|A\|_{C^{\alpha/2, \alpha}(U_T)} + \|B\|_{C^{\alpha/2, \alpha}(U_T)} + \|C\|_{C^{\alpha/2, \alpha}(U_T)} \leq M,$$

*para algum  $M > 0$ . Então existe  $C = C(\alpha, M, \lambda, \Lambda) > 0$  tal que*

$$(2.22) \quad \|u\|_{C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}(U_T)} \leq C(\|u\|_{C^0(U_T)} + \|f\|_{C^{2+\alpha}(\mathbb{T})} + \|G\|_{C^{\alpha/2, \alpha}(U_T)}),$$

para qualquer  $u \in C^\infty(U_T)$  solução de (2.21). Além disso, se  $G \in C^{(k+\alpha)/2, k+\alpha}(U_T)$ ,  $f \in C^{k+2+\alpha}(\mathbb{T})$  e

$$\|A\|_{C^{(k+\alpha)/2, k+\alpha}(U_T)} + \|B\|_{C^{(k+\alpha)/2, k+\alpha}(U_T)} + \|C\|_{C^{(k+\alpha)/2, k+\alpha}(U_T)} \leq M_k,$$

para  $k \geq 1$ , então existe  $C = C(k, \alpha, M_k, \lambda, \Lambda) > 0$  tal que

$$(2.23) \quad \|u\|_{C^{(k+2+\alpha)/2, k+2+\alpha}(U_T)} \leq C(\|u\|_{C^0(U_T)} + \|f\|_{C^{k+2+\alpha}(\mathbb{T})} + \|G\|_{C^{(k+\alpha)/2, k+\alpha}(U_T)}),$$

para qualquer  $u \in C^\infty(U_T)$  solução de (2.21).

**Observação 2.3.4** Novamente salientamos que  $C(\alpha, M, \lambda, \Lambda)$  e  $C(k, \alpha, M_k, \lambda, \Lambda)$  dependem das constantes explicitadas mas não de  $T$  ou  $u$ ; veja a Observação 2.3.2.

## 2.4 As estimativas de De Giorgi-Nash

Na seção anterior, apresentamos as famosas estimativas de Schauder. Por exemplo, (2.17) garante ser possível estabelecer um controle em  $C^{(1+\alpha/2, 2+\alpha)}$  sobre soluções da equação do calor não-homogênea, desde que o termo não-homogêneo  $G$  seja controlado em  $C^{\alpha/2, \alpha}$  e  $f$  em  $C^{2+\alpha}$ . No entanto, em várias situações encontradas mais adiante, faz-se necessário obter um controle, de preferência em  $C^{\alpha/2, \alpha}$ , para soluções suaves da equação não-homogênea a partir de meros controles da solução e de  $G$  em  $C^0$ . As estimativas de De Giorgi-Nash resolvem este problema.

**Teorema 2.4.1** *Seja  $u \in C^\infty(U_T)$  uma solução suave da equação*

$$(2.24) \quad u_t = a(t, \theta)u_{\theta\theta} + b(t, \theta)u_\theta + d(t, \theta),$$

onde supomos que (2.4.1) é uniformemente parabólica, ou seja, para  $(t, \theta) \in [0, T) \times \mathbb{T}$ ,

$$\lambda \leq a(t, \theta) \leq \Lambda, \quad 0 < \lambda < \Lambda,$$

e que vale

$$\|b\|_{C^0(U_T)} + \|d\|_{C^0(U_T)} \leq C'.$$

Admita ainda que

$$\|u\|_{C^0(U_T)} \leq C.$$

Então existem  $0 < \alpha < 1$  e  $\tilde{C} > 0$ , dependendo somente de  $\lambda, \Lambda, C$  e  $C'$ , mas não de  $T$ , tais que

$$(2.25) \quad \|u\|_{C^{\alpha/2, \alpha}(U_T)} \leq \tilde{C}.$$

À semelhança das estimativas de Schauder, a demonstração de (2.25) é demasiado técnica para ser incluída aqui. A este respeito, referimos o leitor a [15].

# Capítulo 3

## Um fluxo semi-linear

Neste capítulo usaremos a teoria desenvolvida no Capítulo 2 para estudar o comportamento assintótico de uma certa classe de equações semi-lineares. O estudo aqui apresentado não tem a pretensão de ser exaustivo e apenas propõe-se a ilustrar, num contexto simples, as técnicas disponíveis para a análise de tais problemas, além de servir de introdução aos exemplos mais sofisticados discutidos nos Capítulos 4 e 5.

### 3.1 Soluções globais e comportamento assintótico

Nesta seção vamos examinar o PVI

$$(3.1) \quad \begin{cases} u_t = u_{\theta\theta} + g(u) \\ u(0, \cdot) = f \end{cases}$$

onde supomos que tanto  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  como  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são suaves. A equação em (3.1) é chamada *semi-linear* pois a não-linearidade  $g$  somente envolve  $u$ .

Pelo Teorema 2.1.1, existe  $T^* > 0$  e  $u \in C^\infty([0, T^*) \times \mathbb{T})$  que é (a única) solução maximal de (3.1). Nosso propósito é encontrar condições em  $g$  para garantir que uma tal solução é *global* no sentido que  $T^* = +\infty$ . Mais ainda, assegurado isto, convém determinar o comportamento assintótico da solução.

Os resultados aqui obtidos devem ser comparados aos casos mais simples apresentados nos Teoremas 1.1.1, 1.1.2 e (1.4.3), até porque a equação em (3.1) pode ser vista como uma equação do calor não-homogênea em que a taxa de criação (ou eliminação) de calor depende da própria temperatura. Mas note que aqui a não-linearidade das equações nos impede de obter soluções explícitas para o problema. É notável, por conseguinte, que informações precisas sobre o comportamento assintótico de soluções possam ser obti-

das, pelo menos para certas escolhas de  $g$ . Que isto aconteça somente atesta a favor da eficiência dos métodos de análise baseados nas estimativas de Schauder e De Giorgi-Nash.

Antes de prosseguir, porém, descrevamos uma interpretação do PVI (3.1), de natureza geométrica, a exemplo do que fizemos com (1.3). Com efeito, definamos o funcional  $\mathcal{G} : C^\infty(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{G}(u) = \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{1}{2} |u_\theta|^2 - G(u) \right) d\theta,$$

onde  $G(s) = \int_0^s g(r) dr$ . Como na Seção 1.1, seja  $\Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  uma variação de  $u^{(0)} = v \in C^\infty(\mathbb{T})$ , onde  $u^{(t)}(\theta) = \Phi(t, \theta)$ ,  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Para calcular a derivada de  $\mathcal{G}$  ao longo desta variação, note que, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{d}{dt} G(u^{(t)})|_{t=0} = g(v)h,$$

onde

$$h = u_t^{(t)}|_{t=0} \in C^\infty(\mathbb{T})$$

é a função variacional de  $\Phi$ . Assim,

$$(3.2) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{G}(u^{(t)})|_{t=0} = - \int_{\mathbb{T}} (v_{\theta\theta} + g(v)) h d\theta,$$

ou seja,

$$v_{\theta\theta} + g(v) = -(\text{grad } \mathcal{G})(v),$$

onde o gradiente é calculado em relação ao produto interno (1.4), neste caso restrito a funções reais. Portanto, à semelhança de (1.3), o PVI (3.1) define uma equação diferencial ordinária, do tipo gradiente, em  $C^\infty(\mathbb{T})$ . Espera-se então que o comportamento assintótico de soluções de (3.1), caso estejam definidas para todo  $t > 0$ , seja completamente determinado pelos pontos críticos de  $\text{grad } \mathcal{G}$ , ou seja, por soluções da equação

$$(3.3) \quad v_{\theta\theta} + g(v) = 0.$$

Estas são precisamente as soluções estacionárias de (3.1). A proposição a seguir classifica estas soluções para certas escolhas de  $g$ .

**Proposição 3.1.1** *Se  $sg(s) \leq 0$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , então as únicas soluções de (3.3) são as funções constantes. Se, além disso,  $sg(s) < 0$  para  $s \neq 0$ , então  $v = 0$  é a única solução de (3.3).*

Com efeito, multiplicando (3.3) por  $v$  e integrando sobre  $\mathbb{T}$  obtemos

$$\int_{\mathbb{T}} |v_\theta|^2 d\theta = \int_{\mathbb{T}} v g(v) d\theta \leq 0,$$

donde  $v$  é constante. A segunda parte decorre do fato que qualquer solução constante  $v \equiv v_0$  necessariamente cumpre  $v_0 g(v_0) = 0$ , donde  $v_0 = 0$ .

O teorema a seguir descreve o comportamento assintótico de soluções de (3.1), sob condições apropriadas em  $g$ .

**Teorema 3.1.2** *Se, para  $s \in \mathbb{R}$ , tem-se  $sg(s) \leq 0$  e  $g'(s) \leq 0$  então, para cada  $f \in C^\infty(\mathbb{T})$ , (3.1) possui uma única solução global  $u \in C^\infty([0, +\infty) \times \mathbb{T})$ . Mais ainda, existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que*

$$(3.4) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t, \cdot) - c\|_{C^\infty(\mathbb{T})} = 0.$$

*Se, além disso,  $sg(s) < 0$  para  $s \neq 0$  então  $c = 0$ .*

**Exemplo 3.1.3** *O Teorema 3.1.2 aplica-se ao PVI*

$$(3.5) \quad \begin{cases} u_t = u_{\theta\theta} + e^{-u} - 1 \\ u(0, \cdot) = f \end{cases}$$

*que define então um fluxo global. Mais ainda, qualquer uma de suas soluções converge para a função identicamente nula quando  $t \rightarrow +\infty$ .*

A primeira etapa na demonstração deste resultado consiste em verificar que a solução local já existente, definida em  $[0, T^*)$ , de fato é global, ou seja,  $T^* = +\infty$ . Em virtude da Proposição 2.1.2, devemos controlar todas as derivadas, tanto espaciais quanto temporais, de  $u$  ao longo do fluxo, sendo que este controle deve ser *uniforme* no tempo. Começemos com as derivadas de ordem zero.

**Proposição 3.1.4** *Nas condições do Teorema 3.1.2, existe  $C_0 > 0$ , independente de  $T^*$ , tal que*

$$(3.6) \quad \|u\|_{C^0([0, T^*) \times \mathbb{T})} \leq C_0.$$

De fato, seja

$$e(u) = \frac{1}{2}|u|^2,$$

onde a dependência em relação a  $t$  é omitida. Então,

$$e(u)_t = u_t u = u_{\theta\theta} u + u g(u)$$

e

$$e(u)_{\theta\theta} = u_{\theta\theta} u + |u_\theta|^2,$$

de modo que

$$e(u)_t \leq e(u)_{\theta\theta}.$$

Pelo Princípio do Máximo (Teorema 1.1.5), tem-se

$$\|u(t, \cdot)\|_{C^0(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{C^0(\mathbb{T})}, \quad 0 \leq t < T^*,$$

e (3.6) vale com  $C_0 = \|f\|_{C^0(\mathbb{T})}$ .

A partir de (3.6) mostraremos como controlar uniformemente no tempo todas as derivadas de  $u$ . É precisamente neste ponto que as estimativas de Schauder e De Giorgi-Nash são utilizadas.

Começemos com o controle da norma de Hölder da solução. Note que, como  $g$  é contínua, (3.6) nos dá

$$\|g(u)\|_{C^0([0, T^*] \times \mathbb{T})} \leq M_0,$$

onde  $M_0 > 0$  não depende de  $T^*$ . Assim, definindo

$$(3.7) \quad d(t, \theta) = g(u(t, \theta)), \quad (t, \theta) \in [0, T^*] \times \mathbb{T},$$

a estimativa de De Giorgi-Nash (Teorema 2.4.1), com  $a = 1$  e  $b = 0$ , implica imediatamente a proposição a seguir.

**Proposição 3.1.5** *Existe  $C_\alpha > 0$  independente de  $T^*$  tal que*

$$\|u\|_{C^{\alpha/2, \alpha}([0, T^*] \times \mathbb{T})} \leq C_\alpha.$$

Isto estabelece (2.4) para  $k = 0$ . As estimativas restantes, para  $k \geq 1$ , seguem-se agora da Teoria de Regularidade de Schauder, através de (2.17) e (2.18). De fato, note que, pela Desigualdade do Valor Médio,

$$|g(u(t_1, \theta_1)) - g(u(t_2, \theta_2))| \leq \left( \sup_{[t, \theta] \times \mathbb{T}} |g'(u(t, \theta))| \right) |u(t_1, \theta_1) - u(t_2, \theta_2)|,$$

e como  $g'$  é contínua tem-se  $\|g(u)\|_{C^{\alpha/2, \alpha}([0, T^*] \times \mathbb{T})} \leq M_\alpha$ , onde  $M_\alpha$  depende de  $C_\alpha$  mas não de  $T^*$ . Assim, podemos aplicar (2.17) com  $G = g(u)$  para obter

$$\|u\|_{C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0, T^*] \times \mathbb{T})} \leq C_{2, \alpha}.$$

Continuando o argumento, veja que  $g(u)_\theta = g'(u)u_\theta$ , de modo que

$$|g(u)_\theta(t_1, \theta_1) - g(u)_\theta(t_2, \theta_2)| \leq \left( \sup_{[t, \theta] \times \mathbb{T}} |g'(u(t, \theta))| \right) |u_\theta(t_1, \theta_1) - u_\theta(t_2, \theta_2)|,$$

ou seja,

$$\|g(u)\|_{C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0, T^*) \times \mathbb{T})} \leq M_{2, \alpha},$$

de maneira que podemos usar (2.18) com  $k = 2$  para obter

$$\|u\|_{C^{(4+\alpha)/2, 4+\alpha}([0, T^*) \times \mathbb{T})} \leq C_{4, \alpha}.$$

Usando isto e  $g(u)_{\theta\theta} = g''(u)u_\theta^2 + g'(u)u_{\theta\theta}$ , tem-se agora

$$\|g(u)\|_{C^{4+\alpha/2, 4+\alpha}([0, T^*) \times \mathbb{T})} \leq M_{4, \alpha},$$

e (2.18) com  $k = 4$  fornece

$$\|u\|_{C^{(6+\alpha)/2, 6+\alpha}([0, T^*) \times \mathbb{T})} \leq C_{6, \alpha}.$$

Iterando este procedimento indefinidamente obtemos as estimativas (2.4) e isso demonstra a primeira parte do Teorema 3.1.2, a saber, a existência de soluções globais.

Note que as estimativas em (2.4) agora valem *globalmente*, ou seja, para  $t \geq 0$ . Consequentemente, a proposição a seguir, que fornece um controle global para as normas de Sobolev de  $u$ , decorre de (A.4).

**Proposição 3.1.6** *Nas condições do Teorema 3.1.2, para cada  $p \geq 0$  inteiro existe  $D_p > 0$  tal que*

$$(3.8) \quad \|u(t, \cdot)\|_{H^p(\mathbb{T})} \leq D_p, \quad t \in [0, +\infty).$$

*Em particular,*

$$(3.9) \quad \|u_t(t, \cdot)\|_{H^p(\mathbb{T})} \leq D'_p, \quad t \in [0, +\infty).$$

A próxima etapa consiste em explorar o fato de que a energia  $\mathcal{G}$  é uma quantidade monótona para o fluxo definido por (3.1). Mais precisamente, se considerarmos a variação definida pelo próprio fluxo, de modo que  $u^{(t)}(\theta) = u(t, \theta)$ , então o cálculo que levou a (3.2) fornece

$$(3.10) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{G}(u^{(t)}) = - \int_{\mathbb{T}} |u_t^{(t)}|^2 d\theta = - \|u_t^{(t)}\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leq 0,$$

ou seja,  $\mathcal{G}$  é não-crescente ao longo do fluxo. Por outro lado,  $|G(u^{(t)})| \leq |u^{(t)}| |g(u^{(t)})|$  implica

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} G(u^{(t)}) d\theta &\leq 2\pi \|u^{(t)}\|_{C^0([0, +\infty) \times \mathbb{T})} \|g(u^{(t)})\|_{C^0([0, +\infty) \times \mathbb{T})} \\ &\leq 2\pi C, \end{aligned}$$

para algum  $C > 0$  independente de  $t$ , donde

$$\mathcal{G}(u^{(t)}) \geq -2\pi C,$$

ou seja,  $\mathcal{G}$  é limitada inferiormente ao longo da solução  $u^{(t)}$ . Logo, podemos integrar (3.10) em  $t$  para chegar a

$$\int_0^{+\infty} \|u_t^{(t)}\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 dt < +\infty.$$

e assim existe uma sequência  $t_i \rightarrow +\infty$  tal que  $\|u_t^{(t_i)}\|_{L^2(\mathbb{T})} \rightarrow 0$ . Usando (3.9) e Interpolação (Teorema A.3.1), conclui-se que  $\|u_t^{(t_i)}\|_{H^p(\mathbb{T})} \rightarrow 0$  para qualquer  $p \geq 0$ . Assim, o mergulho de Sobolev (Teorema A.2.2, item 3) implica  $\|u_t^{(t_i)}\|_{C^k(\mathbb{T})} \rightarrow 0$  para qualquer  $k \geq 0$ , de modo que  $u_t^{(t_i)}$  converge na topologia  $C^\infty$  para a função identicamente nula. Mais ainda, como temos controle uniforme sobre  $u^{(t_i)}$  na norma  $C^k$ , para qualquer  $k \geq 0$ , Ascoli-Arzelà (Teorema A.1.1) nos garante, após eventualmente passar a uma subsequência, que  $u^{(t_i)}$  converge em  $C^\infty(\mathbb{T})$  para uma função  $v \in C^\infty(\mathbb{T})$  que satisfaz (3.3). Logo,  $v$  é contante, pela Proposição 3.1.1.

Note que se  $sg(s) < 0$ ,  $s \neq 0$ , a convergência acima de fato não depende da sequência escolhida, pois  $v = 0$  é a única solução da equação estacionária  $v_{\theta\theta} + g(v) = 0$ , pela Proposição 3.1.1. No caso geral, porém, para verificar que a convergência não depende da sequência escolhida, e portanto concluir a demonstração do Teorema 3.1.2, basta verificar que a energia  $\mathcal{G}$  é *convexa* ao longo da solução. Assim, começando com (3.10), e fazendo  $u = u^{(t)}$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{G}(u) &= -2 \int_{\mathbb{T}} u_{tt} u_t d\theta \\ &= -2 \int_{\mathbb{T}} (u_{\theta\theta} + g(u))_t u_t d\theta \\ &= -2 \int_{\mathbb{T}} (u_{t\theta\theta} u_t + g'(u) |u_t|^2) d\theta. \end{aligned}$$

Mas

$$(|u_t|^2)_{\theta\theta} = 2u_{t\theta\theta} u_t + 2|u_{t\theta}|^2,$$

de modo que

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{G}(u) = 2 \int_{\mathbb{T}} (|u_{t\theta}|^2 - g'(u) |u_t|^2) d\theta \geq 0,$$

se  $g'(s) \leq 0$ , como desejado.

# Capítulo 4

## O fluxo das aplicações harmônicas

Nesta seção consideraremos o chamado fluxo das aplicações harmônicas para aplicações de  $\mathbb{T}$  em  $\mathbb{T}$ . Mostraremos que este fluxo é global e descreveremos precisamente seu comportamento assintótico. Como aplicação, fornecemos uma descrição do espaço  $C^0(\mathbb{T}, \mathbb{T})$  das aplicações contínuas de  $\mathbb{T}$  em  $\mathbb{T}$  a menos da identificação de seus elementos por homotopias.

### 4.1 Aplicações harmônicas

Se  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  é suave, definimos sua *energia* por

$$\mathcal{H}(f) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} |f_\theta|^2 d\theta$$

Fixemos então  $v \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{T})$  e seja  $t \in (-\epsilon, \epsilon) \mapsto u^{(t)} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  uma variação de  $u^{(0)} = v$ . O *campo variacional* da variação é

$$V = u_t^{(t)}|_{t=0}.$$

Repare que  $V$  é um *campo vetorial sobre  $v$* , ou seja,  $V(\theta) \in T_{v(\theta)}\mathbb{T}$  para  $\theta \in \mathbb{T}$ , onde a *reta tangente* a  $\mathbb{T}$  em  $\theta$  é dada por

$$T_\theta\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{Z}; \langle \theta, z \rangle = 0\},$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno euclidiano em  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ . Mais ainda, definimos a *reta normal* a  $\mathbb{T}$  em  $\theta$  por

$$N_\theta\mathbb{T} = \{\lambda\theta; \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, para cada  $w \in \mathbb{C}$ , considerado como um vetor tangente a  $\mathbb{C}$  em  $\theta = e^{i\theta}$ , existe uma decomposição ortogonal

$$w = w^T + w^N,$$

onde  $w^T \in T_\theta\mathbb{T}$  é a *componente tangente* de  $w$  e  $w^N \in N_\theta\mathbb{T}$  é a *componente normal* de  $w$ . Note que  $\theta = \theta^N$ ,  $\theta \in \mathbb{T}$ .

Dito isto, podemos calcular:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{H}(u^{(t)}) &= \int_{\mathbb{T}} \langle u_{\theta t}, u_\theta \rangle d\theta \\ &= \int_{\mathbb{T}} \langle u_{t\theta}, u_\theta \rangle d\theta \\ &= - \int_{\mathbb{T}} \langle u_t, u_{\theta\theta} \rangle d\theta, \end{aligned}$$

de modo que

$$(4.1) \quad \frac{d}{dt}\mathcal{H}(u^{(t)})|_{t=0} = - \int_{\mathbb{T}} \langle V, \tau(v) \rangle d\theta,$$

onde  $\tau(v) = (v_{\theta\theta})^T \in T_{v(\theta)}\mathbb{T}$  é o *campo de tensão* de  $v$ .

Como nas Seções 1.1 e 3.1, (4.1) possui uma interessante interpretação geométrica. Com efeito, se  $V$  e  $W$  são campos tangentes sobre  $v \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{T})$ , definimos o produto interno

$$(4.2) \quad \langle\langle V, W \rangle\rangle = \int_{\mathbb{T}} \langle V(v(\theta)), W(v(\theta)) \rangle d\theta.$$

Assim, (4.1) reescreve-se como

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(u^{(t)})|_{t=0} = -\langle\langle V, \tau(v) \rangle\rangle,$$

de forma que

$$\tau(v) = -(\text{grad } \mathcal{H})(v),$$

onde o gradiente é calculado relativamente a  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ . Portanto,  $v$  é um ponto crítico para  $\text{grad } \mathcal{E}$  se e somente se é *harmônica* no sentido que

$$(4.3) \quad \tau(v) = 0.$$

Isto sugere considerar o PVI

$$(4.4) \quad \begin{cases} u_t &= \tau(u) \\ u(0, \cdot) &= f \end{cases}$$

onde  $f \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{T})$  é o dado inicial e  $u : [0, T) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  satisfaz a equação em (4.4). O cálculo acima mostra que, ao longo das soluções deste PVI, também chamado o *fluxo das aplicações harmônicas*, a energia decresce de maneira ótima, de forma que é natural esperar que uma aplicação harmônica seja produzida quando  $t \rightarrow +\infty$ , na hipótese de que soluções globais existem.

Convém então, antes de tudo, classificar as aplicações  $v : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  que satisfazem (4.3). Estas são precisamente as soluções estacionárias de (4.4). Para tanto, note que  $|v| = 1$  implica

$$(4.5) \quad \langle v_\theta, v \rangle = 0,$$

e, por conseguinte,

$$(4.6) \quad \langle v_{\theta\theta}, v \rangle = -|v_\theta|^2.$$

Isto mostra que  $(v_{\theta\theta})^N = -|v_\theta|^2 v$  e portanto,

$$(4.7) \quad \tau(v) = v_{\theta\theta} + |v_\theta|^2 v.$$

Note, em particular, que o PVI (4.4) torna-se

$$(4.8) \quad \begin{cases} u_t = u_{\theta\theta} + |u_\theta|^2 u \\ u(0, \cdot) = f \end{cases}$$

A proposição a seguir classifica os soluções estacionárias de (4.4).

**Proposição 4.1.1** *Se  $v \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{T})$  é harmônica, ou seja, satisfaz*

$$v_{\theta\theta} + |v_\theta|^2 v = 0,$$

*então existem  $c \in \mathbb{T}$  e  $l \in \mathbb{Z}$  tais que  $v(\theta) = ce^{il\theta}$ ,  $\theta \in \mathbb{T}$ .*

Com efeito,

$$(|v_\theta|^2)_\theta = 2\langle v_{\theta\theta}, v_\theta \rangle = -2|v_\theta|^2 \langle v, v_\theta \rangle = 0,$$

de modo que  $v$  de fato satisfaz a equação linear

$$v_{\theta\theta} + \lambda v = 0,$$

onde  $\lambda \geq 0$ . A solução geral é

$$v(\theta) = ae^{i\sqrt{\lambda}\theta} + be^{-i\sqrt{\lambda}\theta}, \quad a, b \in \mathbb{C},$$

e a periodicidade de  $v$  implica  $\lambda = l^2$ ,  $l = 0, 1, \dots$ . A solução correspondente é

$$(4.9) \quad v_l(\theta) = ae^{il\theta} + be^{-il\theta},$$

que deve satisfazer  $|v_l| = 1$ . Um cálculo mostra que

$$1 = |v_l(\theta)|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2\operatorname{Re}(a\bar{b}e^{2il\theta}),$$

donde  $ab = 0$ . Portanto, devemos ter  $a = 0$  ou  $b = 0$  (ou ambos) em (4.9), donde o resultado.

De posse desta proposição, podemos enunciar o principal resultado deste capítulo, que descreve o comportamento assintótico de soluções de (4.8), para dados iniciais suaves.

**Teorema 4.1.2** *Se  $f \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{T})$  então existe uma única solução global  $u : [0, +\infty) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  de (4.8). Em particular,*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(t, \cdot) - f\|_{C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{T})} = 0.$$

*Mais ainda, quando  $t \rightarrow +\infty$ ,  $u(t, \cdot)$  converge para uma aplicação harmônica, ou seja, existem  $c \in \mathbb{T}$  e  $l \in \mathbb{Z}$  tais que  $v_{c,l}(\theta) = ce^{il\theta}$ ,  $\theta \in \mathbb{T}$ , satisfaz*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t, \cdot) - v_{c,l}\|_{C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{T})} = 0.$$

**Observação 4.1.3** *O Teorema 4.1.2 é um caso especialíssimo de um famoso teorema de Eells e Sampson [6] sobre a existência de aplicações harmônicas entre variedades Riemannianas.*

## 4.2 Soluções globais e comportamento assintótico

Começemos observando que o PVI (4.8) é do tipo quasi-linear e o Teorema 2.1.1 fornece a existência de uma solução maximal  $u : [0, T^*) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ . Note que, em princípio, tem-se apenas uma solução  $u : [0, T^*) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ , mas  $\tau(u) = u_{\theta\theta} + |u_\theta|^2 u$  é sempre tangente a  $\mathbb{T}$ , de maneira que a solução de fato toma valores em  $\mathbb{T}$ .

Isto posto, a primeira etapa na demonstração do Teorema 4.1.2 consiste precisamente em verificar que esta solução local estende-se a uma solução global, ou seja,  $T^* = +\infty$ . Como na demonstração do Teorema 3.1.2, devemos, em função da Proposição 2.1.2, controlar todas as derivadas desta solução *uniformemente* no tempo. Note que, como a solução toma valores em  $\mathbb{T}$ , já temos à disposição tal controle na norma  $C^0$ , ou seja,

$$(4.10) \quad \|u\|_{C^0([0, T^*) \times \mathbb{T})} \leq 1.$$

Diferentemente do que ocorreu com a equação semi-linear do capítulo anterior, um controle em  $C^0$  não basta para prosseguir com a análise, pois a não-linearidade em (4.8) envolve a primeira derivada. Logo, devemos, num primeiro estágio, igualmente controlar a norma  $C^1$  da solução.

Seja

$$\mathfrak{e}(u) = \frac{1}{2}|u_\theta|^2,$$

onde a dependência em  $t$  foi emitida. Como

$$(4.11) \quad u_{t\theta} = u_{\theta\theta\theta} + 2\langle u_{\theta\theta}, u_\theta \rangle u + |u_\theta|^2 u_\theta,$$

temos, por (4.5),

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}(u)_t &= \langle u_{t\theta}, u_\theta \rangle \\ &= \langle u_{\theta\theta\theta}, u_\theta \rangle + |u_\theta|^4. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\mathfrak{e}(u)_{\theta\theta} = \langle u_{\theta\theta\theta}, u_\theta \rangle + |u_{\theta\theta}|^2,$$

de maneira que

$$\mathfrak{e}(u)_t - \mathfrak{e}(u)_{\theta\theta} = |u_\theta|^4 - |u_{\theta\theta}|^2.$$

Mas (4.6) e Cauchy-Schwarz nos dão

$$(4.12) \quad |u_\theta|^2 \leq |u_{\theta\theta}|,$$

de modo que

$$\mathfrak{e}(u)_t \leq \mathfrak{e}(u)_{\theta\theta}.$$

Assim, pelo Princípio do Máximo (Teorema 1.1.5), vale

$$(4.13) \quad \|\mathfrak{e}(u)\|_{C^0([0, T^*] \times \mathbb{T})} \leq C,$$

para  $C > 0$  que não depende de  $T^*$ . A partir de (4.10) e (4.13) mostraremos como controlar as derivadas de ordem mais alta de  $u$ . Mais uma vez, as estimativas de De Giorgi-Nash e Schauder virão ao nosso socorro.

Começemos observando que, tomando a derivada de (4.8),  $w = u_\theta$  satisfaz

$$w_t = w_{\theta\theta} + 2\langle u_\theta, w_\theta \rangle w + |u_\theta|^2 w_\theta,$$

ou seja,  $w$  é solução limitada de uma equação parabólica *linear* cujos coeficientes, que dependem de  $u$  e  $u_\theta$ , são uniformemente limitados no tempo por (4.10) e (4.13). Desse modo, as estimativas de De Giorgi-Nash (Teorema 2.4.1) nos fornecem  $C_{1,\alpha} > 0$ , independente de  $T^*$ , tal que

$$\|u_\theta\|_{C^{\alpha/2, \alpha}([0, T^*] \times \mathbb{T})} \leq C_{1,\alpha}.$$

Em particular, se definirmos

$$G(t, \theta) = |u_\theta(t, \theta)|^2 u(t, \theta),$$

então

$$\|G\|_{C^{\alpha/2, \alpha}([0, T^*] \times \mathbb{T})} \leq C'_{1, \alpha},$$

e como, por (4.8),  $u$  satisfaz a equação não-homogênea

$$(4.14) \quad u_t = u_{\theta\theta} + G(t, \theta),$$

as estimativas de Schauder (Teorema 2.3.1) nos dão

$$\|u\|_{C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0, T] \times \mathbb{T})} \leq C_{2, \alpha},$$

onde novamente  $C_{2, \alpha} > 0$  não depende de  $T^*$ . Podemos agora interar o agumento, pois temos à disposição um controle uniforme de  $G$  em  $C^{(1+\alpha)/2, 1+\alpha}$ , de modo que, novamente por (4.14) e Schauder, ganhamos o controle de  $u$  em  $C^{(3+\alpha)/2, 3+\alpha}$ , etc. Prosseguindo dessa maneira, todas as estimativas na Proposição 2.1.2 são verificadas e a existência de soluções globais de (4.8) é estabelecida.

Com relação ao comportamento assintótico, procedemos exatamente como na demonstração do Teorema 3.1.2, verificando inicialmente que a energia  $\mathcal{H}$  é uma quantidade monótona ao longo do fluxo. Com efeito, se considerarmos a variação dada pelo próprio fluxo, então o cálculo que nos levou a (4.1) fornece

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{H}(u^{(t)}) &= - \int_{\mathbb{T}} |\tau(u^{(t)})|^2 d\theta \\ &= - \|\tau(u^{(t)})\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

e como  $\mathcal{H} \geq 0$ ,

$$\int_0^{+\infty} \|\tau(u^{(t)})\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 dt < +\infty.$$

Assim, existe uma sequência  $t_i \rightarrow +\infty$  tal que  $\|\tau(u^{(t_i)})\|_{L^2(\mathbb{T})} \rightarrow 0$ . Como já temos à disposição um controle uniforme da solução nas normas  $C^k$  e, por conseguinte, nas normas de Sobolev, podemos repetir o argumento do Capítulo 3, que faz uso de Interpolação, mergulho de Sobolev e Ascoli-Arzelá, para garantir que, eventualmente passando a uma subsequência,  $u_t^{(t_i)}$  converge para a função identicamente nula e  $u^{(t_i)}$  converge para  $v \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{T})$  satisfazendo  $\tau(v) = v_{\theta\theta} + |v_\theta|^2 v = 0$ , com a convergência em  $C^\infty(\mathbb{T})$  em ambos os casos. Pela Proposição 4.1.1,  $v = v_{c,l}$ ,  $c \in \mathbb{T}$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ .

Vimos até agora que qualquer  $f \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{T})$  evolui, ao longo de uma sequência  $t_i \rightarrow +\infty$ , para uma aplicação harmônica. Resta, portanto, verificar que a convergência

não é meramente sequencial mas de fato acontece quando  $t \rightarrow +\infty$ . Para isto, basta mostrar que  $\mathcal{H}$  é convexa ao longo do fluxo. Ora, se escrevemos, para simplificar a notação,  $u^{(t)} = u$  e usamos (4.1) com  $V = u_t^{(t)} = u_t$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{H}(u) &= - \int_{\mathbb{T}} \frac{d}{d\theta} |u_t|^2 d\theta \\ &= -2 \int_{\mathbb{T}} \langle u_{tt}, u \rangle d\theta \\ &= -2 \int_{\mathbb{T}} \langle (u_{\theta\theta} + |u_\theta|^2 u)_t, u_t \rangle d\theta \\ &= -2 \int_{\mathbb{T}} \langle u_{t\theta\theta} + 2\langle u_{t\theta}, u_\theta \rangle u + |u_\theta|^2 u_t, u_t \rangle d\theta \\ &= -2 \int_{\mathbb{T}} \langle u_{t\theta\theta} + |u_\theta|^2 u_t, u_t \rangle d\theta, \end{aligned}$$

pois  $\langle u_t, u \rangle = 0$  dado que  $|u| = 1$ . Por outro lado,

$$(|u_t|^2)_{\theta\theta} = 2\langle u_{t\theta\theta}, u_t \rangle + 2|u_{t\theta}|^2,$$

o que nos dá

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{H}(u) = 2 \int_{\mathbb{T}} (|u_{t\theta}|^2 - |u_\theta|^2 |u_t|^2) d\theta.$$

Mas observe que  $\langle u_{t\theta}, u \rangle = -\langle u_t, u_\theta \rangle = \pm |u_t| |u_\theta|$  pois  $u_t$  e  $u_\theta$  são ambas tangentes a  $\mathbb{T}$ . Portanto,  $|u_t| |u_\theta| \leq |u_{t\theta}|$  e

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{H}(u) \geq 0,$$

como desejado. Isto encerra a demonstração do Teorema 4.1.2.

### 4.3 Uma aplicação em Topologia

Recordemos que se  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos e  $f, g \in C^0(X, Y)$ , o espaço das aplicações contínuas de  $X$  em  $Y$ , uma *homotopia* entre  $f$  e  $g$  é uma aplicação contínua  $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$  satisfazendo  $H(0, x) = f(x)$  e  $H(1, x) = g(x)$ , para qualquer  $x \in X$ . Diremos que  $f$  e  $g$  são *homotópicas* se existe uma homotopia entre  $f$  e  $g$ , o que representaremos por  $f \cong g$ . Assim, se definirmos  $h_s : X \rightarrow Y$ ,  $h_s(x) = H(s, x)$ ,  $s \in [0, 1]$ , então  $h_0 = f$  e  $h_1 = g$ . Noutras palavras, uma homotopia entre  $f$  e  $g$  nada mais é que uma curva *contínua* em  $C^0(X, Y)$  ligando  $f$  e  $g$ .

É fácil verificar que  $\cong$  é uma relação de equivalência em  $C^0(X, Y)$  e um problema central em Topologia é determinar a estrutura de  $C^0(X, Y) / \cong$ . A proposição a seguir é o primeiro passo na empreitada de resolver este problema quando  $X = Y = \mathbb{T}$ .

**Proposição 4.3.1** *Se  $g \in C^0(\mathbb{T}, \mathbb{T})$  então existe  $l \in \mathbb{Z}$  tal que  $g \cong w_l$ , onde  $w_l(\theta) = e^{il\theta}$ ,  $\theta \in \mathbb{T}$ .*

Na demonstração, precisaremos do lema a seguir.

**Lema 4.3.2** *Se  $g \in C^0(\mathbb{T}, \mathbb{T})$  então existe  $f \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{T})$  com  $g \cong f$ .*

Se  $g$  e  $f$  são como no lema, seja  $u : [0, +\infty) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  a solução do PVI (4.8), com dado inicial  $f$ , dada pelo Teorema 4.1.2. Seja  $\psi : [0, 1) \rightarrow [0, +\infty)$  qualquer difeomorfismo positivo de modo que  $\psi$  estende-se a uma aplicação contínua  $\Psi : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$ , onde  $[0, +\infty]$  é semi-reta estendida. Com esta notação,  $H : [0, 1] \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ,

$$H(s, \theta) = u(\Psi(s), \theta),$$

define, pelo Teorema 4.1.2, uma homotopia entre  $f$  e  $v_{c,l}$ , para  $c = e^{i\tilde{\theta}} \in \mathbb{T}$  e  $l \in \mathbb{Z}$ . Mas  $K(s, \theta) = e^{is\tilde{\theta}} e^{il\theta}$  realiza uma homotopia entre  $v_{c,l}$  e  $w_l$ , e a Proposição 4.3.1 segue, a menos da demonstração do Lema 4.3.2, que consideramos a seguir.

Sejam

$$V_{\mathbb{T}} = \left\{ z \in \mathbb{C}; \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2} \right\},$$

e  $\Pi : V_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{T}$ ,  $\Pi(z) = z/|z|$ , a projeção ortogonal de  $V_{\mathbb{T}}$  sobre  $\mathbb{T}$ . Se  $g$  é como no lema, escolha, pelo Teorema 1.3.6,  $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{C})$  tal que

$$|g(\theta) - \tilde{f}(\theta)| < \frac{1}{2}, \quad \theta \in \mathbb{T}.$$

Como o segmento  $s \in [0, 1] \mapsto (1-s)g(\theta) + s\tilde{f}(\theta)$  está inteiramente contido em  $V_{\mathbb{T}}$ ,

$$H(s, \theta) = \Pi \left( (1-s)g(\theta) + s\tilde{f}(\theta) \right)$$

define uma homotopia entre  $g = \Pi \circ g$  e  $f = \Pi \circ \tilde{f}$ , como desejado.

A Proposição 4.3.1 sugere definir a aplicação  $\Upsilon : C^0(\mathbb{T}, \mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\Upsilon([f]) = l$ , onde  $[f]$  denota a classe de homotopia de  $f$ . A proposição a seguir garante que  $\Upsilon$  está bem definida.

**Proposição 4.3.3** *Se  $w_l \cong w_m$  então  $l = m$ .*

Para a demonstração, seja

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

a 1-forma *elemento de ângulo* definida em  $\mathbb{C}^*$ , o plano complexo menos a origem. Se  $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^*$  é uma curva fechada de classe  $C^1$ , consideremos a integral curvilínea

$$I(\gamma) = \int_{\gamma} \omega \in \mathbb{Z}.$$

Intuitivamente,  $I(\gamma)$  mede o número líquido de voltas que  $\gamma$  dá em torno da origem. Como  $\omega$  é fechada,  $I(\gamma) = I(\tilde{\gamma})$  se  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$  são homotópicas; veja [14]. Por outro lado, é fácil verificar que  $I(w_l) = l$ , e a Proposição 4.3.3 resulta.

A Proposição 4.3.3 mostra que, através de  $\Upsilon$ ,  $C^0(\mathbb{T}, \mathbb{T}) / \cong$  pode ser identificado a  $\mathbb{Z}$ , o conjunto dos números inteiros.



# Capítulo 5

## Evolução de curvas pela curvatura

### 5.1 A geometria das curvas planas

Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo. Uma *curva plana parametrizada* é uma aplicação  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfazendo:

1.  $\gamma$  é suave;
2.  $\gamma$  é *regular*, isto é, para cada  $u_0 \in I$ , o vetor derivada  $\gamma_u(u_0)$  é não-nulo. Diz-se então que  $u \in I$  é um parâmetro *regular* para  $\gamma$ . Isto permite definir, para cada  $p = \gamma(u_0) \in \gamma$ , a *reta tangente* a  $\gamma$  em  $p$  pondo  $T_p\gamma = \{p + t\gamma_u(u_0), t \in \mathbb{R}\}$ .

Expliquemos porque a expressão *parametrizada* aparece nesta definição. O *traço* de  $\gamma$  é o conjunto imagem  $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^2$ . Observe que duas curvas parametrizadas distintas podem possuir o mesmo traço. Em geral, o que acontece é o seguinte: dada uma curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  e um difeomorfismo  $h : J \rightarrow I$ , onde  $J$  é outro intervalo, então  $\bar{\gamma} = \gamma \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva plana parametrizada que possui o mesmo traço que  $\gamma$ . Noutras palavras, o mesmo subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  é parametrizado de duas maneiras distintas. Diz-se então que  $\bar{\gamma}$  é uma *reparametrização* de  $\gamma$ . Como estaremos interessados em propriedades do traço que não dependam de uma particular parametrização, é natural considerar duas curvas planas parametrizadas como equivalentes se elas diferem por uma mudança de parametrização. O objeto que resulta desta identificação será chamado uma *curva plana* ou simplesmente uma *curva*.

Eis, portanto, a estratégia a ser adotada. Dada uma curva plana  $\gamma$ , escolhe-se uma parametrização, que é então usada para estudar a curva em questão. Feito isto, deve-se extrair dos resultados somente aquilo que tenha conteúdo essencialmente geométrico, ou seja, que *não* dependa da parametrização utilizada, pois somente esta informação está

intrinsecamente associada à curva, não se encontrando, portanto, ‘viciada’ pela escolha feita.

Usaremos sistematicamente o procedimento descrito acima para determinar *invariantes geométricos* de curvas. Por isto entendemos quantidades (diferenciais ou integrais) que são preservadas por composição da curvas com aplicações do tipo

$$(5.1) \quad x \in \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathcal{R}} \mathcal{A}x + b \in \mathbb{R}^2,$$

onde  $\mathcal{A}$  é uma rotação do plano, isto é,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

onde  $\theta \in [0, 2\pi)$ , e  $b \in \mathbb{R}^2$ . Uma aplicação como em (5.1) é chamada um *movimento rígido*.

Como exemplo, seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada e considere sua *velocidade*  $\nu = |\gamma_u|$ .<sup>1</sup> Observe que  $\nu$  é sempre positiva, pois  $\gamma$  é regular, e certamente depende da parametrização considerada. No entanto, é fácil ver que a integral

$$(5.2) \quad \int_I \nu \, du = \int_a^b \nu \, du,$$

onde  $I$  tem extremidades  $a < b$ , é invariante por reparametrizações. Definiremos o *comprimento* de  $\gamma$ , denotado por  $L(\gamma)$ , como sendo o valor desta integral. Vê-se que  $L(\gamma)$  é um invariante de  $\gamma$ . Com efeito, se  $\mathcal{R}$  é um movimento rígido e  $\bar{\gamma} = \mathcal{R} \circ \gamma$  então  $|\bar{\gamma}_u| = |\mathcal{R}(\gamma_u)| = |\gamma_u|$ , pois  $\mathcal{R}$  preserva comprimentos. O resultado segue então de (5.2); observe que usamos aqui que  $L(\gamma)$  pode ser calculado através de (5.2) utilizando-se *qualquer* parametrização.

Consideremos agora a integral indefinida associada a (5.2). Fixemos  $u_0 \in I$  e definamos  $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$(5.3) \quad \sigma(u) = \int_{u_0}^u \nu \, du.$$

Observe que  $\sigma$  é um difeomorfismo sobre sua imagem  $J = \sigma(I)$  pois  $\sigma_u = \nu > 0$ . Logo, se  $\bar{\gamma} = \gamma \circ \sigma^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  então, pela Regra da Cadeia,  $\bar{\nu} = |\bar{\gamma}_\sigma| = |\gamma_u| \left| \frac{du}{d\sigma} \right| = \nu \nu^{-1} = 1$ .<sup>2</sup> Isto significa que o *vetor tangente unitário*  $\mathbf{T} = \gamma_\sigma$  sempre possui norma unitária e, conseqüentemente, o comprimento de  $\gamma$  pode ser calculado por

$$(5.4) \quad \int_J d\sigma.$$

<sup>1</sup>Recordemos que  $|\cdot|$  é a norma euclidiana usual em  $\mathbb{R}^2$ .

<sup>2</sup>Seguimos aqui a convenção usual de, neste contexto, denotar um elemento genérico do intervalo  $J$  por  $\sigma$ .

Quando isto acontece, dizemos que a curva encontra-se parametrizada pelo comprimento de arco e que  $\sigma$  é o *parâmetro comprimento de arco* de  $\gamma$ . Assim, foi mostrado aqui que toda curva regular pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco.

Estamos agora preparados para definir a curvatura de uma curva  $\gamma$ . Pelo que vimos acima, podemos supor que  $\gamma$  encontra-se parametrizada pelo comprimento de arco. Fixemos a orientação usual em  $\mathbb{R}^2$  e definamos o *vetor normal unitário*  $\mathbf{N}$  como sendo aquele tal que  $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}\}$  constitui uma base ortonormal positiva de  $\mathbb{R}^2$ , ou seja, se  $\gamma(\sigma) = (x(\sigma), y(\sigma))$  então

$$(5.5) \quad \mathbf{T} = (x_\sigma, y_\sigma), \quad \mathbf{N} = (-y_\sigma, x_\sigma).$$

Se  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno euclidiano usual em  $\mathbb{R}^2$  então, derivando  $|\mathbf{T}|^2 = \langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = 1$  em relação a  $\sigma$ , tem-se  $\langle \mathbf{T}, \mathbf{T}_\sigma \rangle = 0$ , ou seja,  $\mathbf{T}_\sigma$  e  $\mathbf{N}$  são co-lineares. Logo, existe uma função suave  $k = k(\sigma)$  satisfazendo

$$(5.6) \quad \mathbf{T}_\sigma = k\mathbf{N}.$$

Esta função  $k$  é chamada a *curvatura* de  $\gamma$ .

Para atribuir a  $k$  uma primeira interpretação geométrica, seja  $\theta = \theta(\sigma)$  o ângulo que  $\mathbf{T}$  faz com uma direção fixada (o eixo das abscissas, por exemplo.)<sup>3</sup> É possível então escrever  $\mathbf{T} = (\cos \theta, \sin \theta)$  e  $\mathbf{N} = (-\sin \theta, \cos \theta)$  (veja Figura 1.) Decorre da Regra da Cadeia que  $\mathbf{T}_\sigma = \frac{d\theta}{d\sigma}(-\sin \theta, \cos \theta) = \frac{d\theta}{d\sigma}\mathbf{N}$  e comparando com (5.6) obtemos

$$(5.7) \quad k = \frac{d\theta}{d\sigma}.$$

Isto significa que a curvatura mede a variação angular de  $\mathbf{T}$ . Resulta também de (5.7) que  $k$  é de fato um invariante da curva uma vez que um movimento rígido preserva  $\sigma$  e modifica  $\theta$  por uma constante.

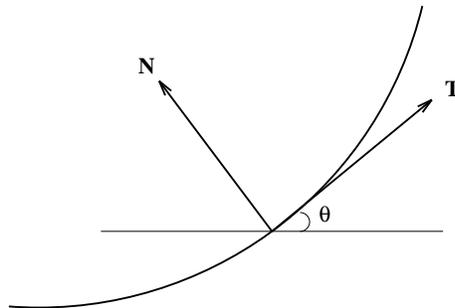


Figura 1

<sup>3</sup>Não é claro que exista uma escolha suave para  $\theta = \theta(\sigma)$ . Justificaremos isto a seguir (veja a fórmula (5.15) abaixo e os comentários que a seguem.)

Para futura referência, apresentamos a expressão de  $k$  em termos das coordenadas de  $\gamma = (x, y)$  em termos de um parâmetro regular  $u$  qualquer:

$$(5.8) \quad k = \frac{x_u y_{uu} - y_u x_{uu}}{(x_u^2 + y_u^2)^{3/2}}.$$

Isto decorre de

$$(5.9) \quad k = \langle \mathbf{T}_\sigma, \mathbf{N} \rangle = x_\sigma y_{\sigma\sigma} - y_\sigma x_{\sigma\sigma}$$

e da Regra da Cadeia. Concluimos então que  $k$  pode ser expressa em termos das derivadas até segunda ordem da parametrização. Deixamos ao leitor a tarefa de usar (5.8) para verificar que o círculo  $\mathbf{X}(u) = r(\cos u, \sin u)$  de raio  $r > 0$  possui curvatura  $k = 1/r$ .

Podemos agora enunciar o teorema que explicita em que sentido  $k$  é o invariante fundamental na geometria de curvas planas.

**Teorema 5.1.1** *Seja  $k = k(\sigma)$  uma função suave definida para  $\sigma \in I$ . Então existe uma curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\sigma$  é o parâmetro comprimento de arco de  $\gamma$  e  $k$  é a curvatura de  $\gamma$ . Mais ainda, se  $\bar{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma outra curva parametrizada gozando das mesmas propriedades então existe um único movimento rígido  $\mathcal{R}$  satisfazendo  $\bar{\gamma} = \mathcal{R} \circ \gamma$ . Em palavras,  $k$  determina  $\gamma$  a menos de movimentos rígidos.*

Para a demonstração, observe que, se  $\gamma$  é dada, tem-se  $\langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle = 0$ , donde  $\langle \mathbf{N}_\sigma, \mathbf{T} \rangle = -\langle \mathbf{N}, \mathbf{T}_\sigma \rangle = -k$ . Além disso,  $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = 1$  implica  $\langle \mathbf{N}_\sigma, \mathbf{N} \rangle = 0$ . Logo,  $\mathbf{N}_\sigma = -k\mathbf{T}$ . Deve-se conceber o conjunto de equações

$$(5.10) \quad \begin{cases} \gamma_\sigma = \mathbf{T} \\ \mathbf{T}_\sigma = k\mathbf{N} \\ \mathbf{N}_\sigma = -k\mathbf{T} \end{cases}$$

usualmente chamado as *equações de Serret-Frenet*, como um sistema de equações diferenciais ordinárias que deve ser resolvido para  $(\gamma, \mathbf{T}, \mathbf{N})$ , uma vez que  $k$  tenha sido dada, usando-se condições iniciais apropriadas. Com efeito, fixemos  $\sigma_0 \in I$ ,  $p \in \mathbb{R}^2$  e  $\{\mathbf{T}_0, \mathbf{N}_0\}$  a base ortonormal positiva de  $\mathbb{R}^2$  com  $\gamma_s(\sigma_0) = \mathbf{T}_0$ . Consideremos o conjunto de condições iniciais

$$(5.11) \quad \begin{cases} \gamma(\sigma_0) = p \\ \mathbf{T}(\sigma_0) = \mathbf{T}_0 \\ \mathbf{N}(\sigma_0) = \mathbf{N}_0 \end{cases}$$

O teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias (veja [19]) garante a existência de uma única solução suave  $(\gamma, \mathbf{T}, \mathbf{N})$  de (5.10) definida em  $I$  e satisfazendo (5.11). Como  $\langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle_\sigma = \langle \mathbf{T}_\sigma, \mathbf{N} \rangle + \langle \mathbf{T}, \mathbf{N}_\sigma \rangle = \langle k\mathbf{N}, \mathbf{T} \rangle + \langle \mathbf{T}, -k\mathbf{N} \rangle = 0$ , segue

que  $\langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle \equiv \langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle(\sigma_0) = 0$ . Além disso,  $(|\mathbf{T}|^2)_\sigma = 2\langle \mathbf{T}_\sigma, \mathbf{T} \rangle = 2\langle k\mathbf{N}, \mathbf{T} \rangle = 0$ , isto é,  $|\mathbf{T}| \equiv |\mathbf{T}(\sigma_0)| = 1$ , ou seja,  $\mathbf{T}$  é o vetor tangente unitário a  $\gamma$ . Similarmente, resulta que  $|\mathbf{N}| \equiv 1$  e como já sabemos que  $\langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle \equiv 0$ ,  $\mathbf{N}$  é o vetor normal unitário a  $\gamma$ . A equação  $\gamma_\sigma = \mathbf{T}$  implica agora a um só tempo que  $\gamma$  é regular e que  $\sigma$  é o parâmetro comprimento de arco associado a  $\gamma$ . De posse disso, decorre de  $\mathbf{T}_\sigma = k\mathbf{N}$  que  $k$  é a curvatura de  $\gamma$ . Isto garante a existência de  $\gamma$  satisfazendo as condições do teorema.

Para a unicidade de  $\gamma$  a menos de movimentos rígidos, observemos que, dados dois conjuntos quaisquer de condições iniciais (5.11), existe um único movimento rígido que leva um desses conjuntos no outro. Em particular, se  $\gamma$  e  $\bar{\gamma}$  são como no teorema, considere o movimento rígido  $\mathcal{R}$  satisfazendo  $\mathcal{R}(\bar{\gamma}(\sigma_0)) = \gamma(\sigma_0)$ ,  $\mathcal{R}(\bar{\mathbf{T}}(\sigma_0)) = \mathbf{T}(\sigma_0)$  e  $\mathcal{R}(\bar{\mathbf{N}}(\sigma_0)) = \mathbf{N}(\sigma_0)$ . Resulta que  $\gamma$  e  $\mathcal{R} \circ \bar{\gamma}$  são ambas soluções de (5.10) e (5.11) e, por unicidade de soluções,  $\gamma = \mathcal{R} \circ \bar{\gamma}$ , conforme queríamos.

Antes de prosseguir, convém observar que que as únicas curvas com curvatura constante são segmentos de retas ( $k = 0$ ) e arcos de círculos ( $k \neq 0$ ). Isto é consequência imediata de (5.10).

Ilustremos a importância do Teorema 5.1.1 com uma aplicação que descreve o comportamento de  $\gamma$  em torno de um ponto  $p_0$  com  $k(p_0) \neq 0$ . Podemos admitir pelo Teorema 5.1.1, isto é, após compor com um movimento rígido, que  $p_0 = (0, 0)$  e que  $\gamma$  é tangente ao eixo das abscissas em  $(0, 0)$ . Restringindo  $\gamma$  a uma vizinhança suficientemente pequena de  $p_0$ , podemos ainda admitir que  $\gamma$  é o gráfico de uma função  $\tau = \tau(u)$ , ou seja, que  $\gamma$  é dada parametricamente por  $\gamma(u) = (u, \tau(u))$  com  $\tau(0) = 0$  e  $\tau_u(0) = 0$ . Como  $x(u) = u$  e  $y(u) = \tau(u)$ , (5.8) fornece a seguinte expressão para a função curvatura:

$$(5.12) \quad k = \frac{\tau_{uu}}{(1 + \tau_u^2)^{3/2}}.$$

Em particular,

$$(5.13) \quad k(p_0) = \tau_{uu}(0).$$

**Teorema 5.1.2** *Se  $k(p_0)$  é positiva ou negativa então existe uma vizinhança de  $p_0$  em  $\gamma$  cuja interseção com  $T_{p_0}\gamma$  é precisamente  $p_0$ . Em particular,  $\gamma$  situa-se localmente do mesmo lado de  $T_{p_0}\gamma$ . No primeiro caso,  $\gamma$  é côncava na direção de  $\mathbf{N}$  ao passo que no segundo caso  $\gamma$  é côncava na direção de  $-\mathbf{N}$ .*

Com efeito, pela fórmula de Taylor, tem-se para  $u \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \tau(u) &= \frac{1}{2}\tau_{uu}(0)u^2 + \eta(u) \\ &= \left( \frac{1}{2}k(p_0) + \frac{\eta(u)}{u^2} \right) u^2, \end{aligned}$$

onde  $\lim \eta(u)/u^2 = 0$ . Se  $k(p_0) > 0$  escolha  $\epsilon = k(p_0)/2$ . Então existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < |u| < \delta$  implica  $|\eta(u)/u^2| < \epsilon$ . Em particular,  $\eta(u)/u^2 > -\epsilon = -k(p_0)/2$ . Logo,  $\tau(u) > 0$ . O resultado segue então observando-se que, em  $p_0$ ,  $\mathbf{T} = (1, 0)$  e  $\mathbf{N} = (0, 1)$ . O caso  $k(p_0) < 0$  é tratado similarmente.

É hora de fazer algumas considerações a respeito da geometria *global* das curvas planas. Para tanto, é necessário isolar uma classe importante de curvas. Seja  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  um intervalo fechado. Diremos que  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é *fechada* se vale  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Neste caso,  $\gamma$  se estende por periodicidade a uma curva  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Dizemos então que  $\gamma$  é *regular* se  $\tilde{\gamma}'_u(a) = \tilde{\gamma}'_u(b)$ . Noutras palavras,  $\gamma$  fechada é regular se o seu traço não possui uma ‘quina’ em  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .<sup>4</sup> Ademais,  $\gamma$  é dita ser *simples* se sua restrição a  $[a, b)$  é injetiva. A Figura 2 ilustra estes conceitos.

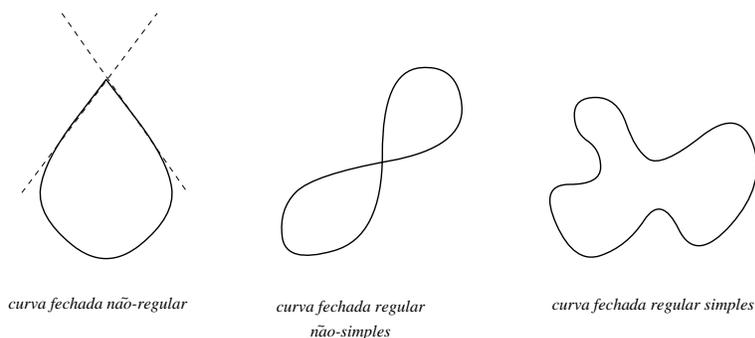


Figura 2

A seguir, sempre que nos referirmos a uma curva fechada, estaremos admitindo que ela é regular.

O resultado do Teorema 5.1.2 sugere a definição a seguir.

**Definição 5.1.3** *Uma curva  $\gamma$  é localmente estritamente convexa se não possui pontos de inflexão. Mais geralmente,  $\gamma$  é localmente convexa se sua curvatura não muda de sinal, podendo eventualmente se anular em algum ponto. Finalmente,  $\gamma$  é convexa se, para qualquer  $p \in \gamma$ ,  $\gamma$  está inteiramente contida num dos semi-planos fechados determinados por  $T_p\gamma$  (veja Figura 3.)*

Note que convexidade é uma propriedade global. É natural, portanto, perguntar: para uma curva fechada, sob que condições convexidade local implica convexidade?

<sup>4</sup>Na verdade, para as aplicações que temos em mente, é natural exigir que as derivadas até terceira ordem também coincidam no ponto em questão, o que certamente assegura que a curvatura é pelo menos contínua neste ponto.

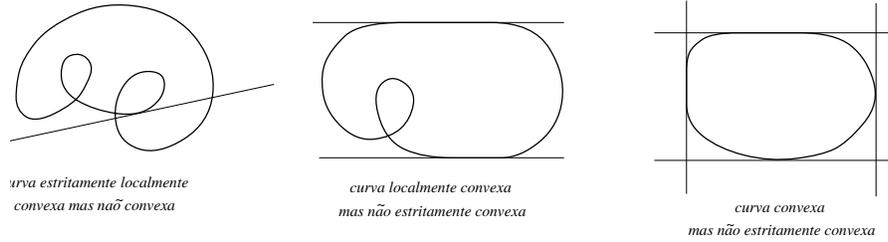


Figura 3

**Teorema 5.1.4** *Uma curva fechada localmente convexa é convexa se e somente se é simples.*

Embora este resultado seja bastante óbvio do ponto de vista intuitivo, sua demonstração é decididamente não-trivial e utiliza um dos mais profundos resultados da teoria global das curvas planas, relacionado com a função angular  $\theta$  a que já nos referimos. Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizada pelo comprimento de arco. Fixemos  $\sigma_0 \in I$  e escolhamos  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  tal que

$$(5.14) \quad \mathbf{T}(\sigma_0) = (\cos \theta_0, \text{sen } \theta_0).$$

Definamos  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$(5.15) \quad \theta(\sigma) = \theta_0 + \int_{\sigma_0}^{\sigma} k \, d\sigma,$$

de forma que

$$(5.16) \quad \frac{d\theta}{d\sigma} = k.$$

Mostremos agora que vale

$$\mathbf{T}(\sigma) = (\cos \theta(\sigma), \text{sen } \theta(\sigma)),$$

para qualquer  $\sigma \in I$ , de modo que (5.15) de fato define globalmente a função angular  $\theta$ .<sup>5</sup> De fato, basta considerar  $\mu(\sigma) = |\mathbf{T}(\sigma) - (\cos \theta(\sigma), \text{sen } \theta(\sigma))|^2$ ,  $\sigma \in I$ . Um cálculo direto usando (5.10) e (5.16) nos dá

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = -2k(\langle \mathbf{N}, (\cos \theta, \text{sen } \theta) \rangle + \langle \mathbf{T}, (-\text{sen } \theta, \cos \theta) \rangle) = 0,$$

e (5.14) então implica  $\mu \equiv 0$ , como queríamos.

<sup>5</sup>Observe que a função  $\theta$  somente está bem definida a menos de um múltiplo inteiro de  $2\pi$ .

Assim, se  $s_0 < s_1$  pertencem a  $I$  então a integral

$$(5.17) \quad \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} k \, d\sigma = \theta(\sigma_1) - \theta(\sigma_0)$$

mede a variação angular líquida experimentada por  $\mathbf{T}$  ao percorrermos a curva de  $\gamma(\sigma_0)$  a  $\gamma(\sigma_1)$ . Em particular, se  $\gamma$  é fechada esta variação é um múltiplo inteiro de  $2\pi$ . Nestas condições, vale a fórmula

$$(5.18) \quad \int_{\gamma} k \, d\sigma = 2\pi \text{Ind}(\gamma),$$

onde  $\text{Ind}(\gamma)$  é um inteiro denominado o *índice* de  $\gamma$ . Se a cada ponto de  $\gamma$  associarmos o elemento de  $\mathbb{T}$  correspondente à extremidade de  $\mathbf{T}$ , vê-se então que  $\text{Ind}(\gamma)$  representa o número líquido de voltas que a extremidade de  $\mathbf{T}$  percorre ao completarmos uma volta em  $\gamma$  (veja Figura 4.) O caso  $\text{Ind}(\gamma) = \pm 1$  merece consideração especial, conforme mostra

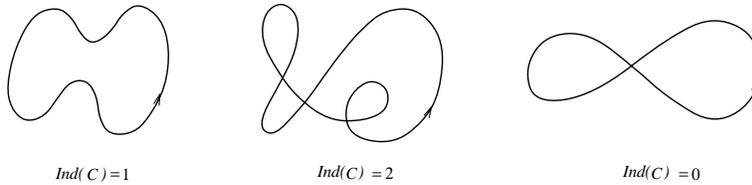


Figura 4

o resultado a seguir.

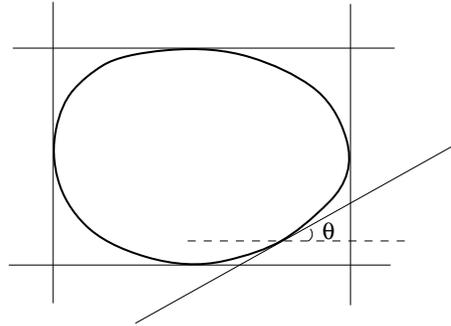
**Teorema 5.1.5** *Se  $\gamma$  é fechada e simples então  $\text{Ind}(\gamma) = \pm 1$ .*

Este resultado é a principal ferramenta utilizada na demonstração do Teorema 5.1.4. As demonstrações podem ser encontradas em [1].

Se  $\gamma$  é localmente estritamente convexa e simples então  $\gamma$  é *estritamente convexa*, ou seja, para cada  $p \in \gamma$ , tem-se que  $\gamma \cap T_p\gamma = \{p\}$  (veja Figura 5). Neste caso, como  $k = d\theta/d\sigma > 0$ , resulta que  $\theta \in [0, 2\pi)$  é um parâmetro regular para  $\gamma$ , isto é,  $\gamma_\theta$  nunca se anula. Mais geralmente, se  $\gamma$  é localmente estritamente convexa então  $\theta \in [0, 2\pi \text{Ind}(\gamma))$  é parâmetro regular para  $\gamma$ .<sup>6</sup> Note-se que estamos aqui adotando a seguinte convenção, que vai nos acompanhar ao longo deste capítulo:

*Se  $\gamma$  é localmente convexa então sempre consideraremos parametrizações em que  $\gamma$  é percorrida no sentido anti-horário, ou seja, tais que  $k \geq 0$ .*

<sup>6</sup>Conforme ilustraremos nas seções seguintes, o uso de  $\theta$  como parâmetro facilitará enormemente o estudo da evolução de  $\gamma$  pela curvatura.



curva estritamente convexa

Figura 5

Toda essa discussão ilustra muito bem que tanto o sinal de  $k$  como o de  $\mathbf{T}$  e, portanto, o de  $\mathbf{N}$ , dependem do sentido em que a curva é percorrida. Por outro lado, é imediato que o *vetor curvatura*  $k\mathbf{N}$  não depende do sentido da parametrização. Isto sugere que  $k\mathbf{N}$  deve possuir uma interpretação geométrica mais profunda que  $k$ . Isto é verdade de fato e está relacionado com uma interessante interpretação variacional de  $k\mathbf{N}$ , conforme veremos na próxima seção.

Finalizaremos esta seção com um teorema de compacidade para certos subconjuntos do plano. Ora, pela discussão acima, uma curva convexa  $\gamma$  delimita um subconjunto do plano, digamos  $K$ , que é *convexo* no sentido que contém um segmento de reta sempre que contém suas extremidades. Em geral, se  $K$  tem estas propriedades, definimos, para  $\delta > 0$ ,

$$K_\delta = \cup_{p \in K} \{q \in \mathbb{R}^2; |q - p| \leq \delta\}.$$

A *distância de Hausdorff* entre convexos  $K^{(1)}$  e  $K^{(2)}$  é então

$$d_H(K^{(1)}, K^{(2)}) = \inf \left\{ \delta > 0; K^{(1)} \subset K_\delta^{(2)} \text{ e } K^{(2)} \subset K_\delta^{(1)} \right\}.$$

**Teorema 5.1.6** (Teorema de seleção de Blaschke) *Seja  $\{K^{(i)}\}$  uma sequência de subconjuntos compactos e convexos de  $\mathbb{R}^2$  com a propriedade que  $K^{(i)} \subset D$ , para qualquer  $i$ , onde  $D$  é limitado. Então existe uma subsequência de  $\{K^{(i)}\}$  que converge, na distância de Hausdorff, para algum convexo compacto  $K \subset \mathbb{R}^2$ .*

A demonstração pode encontrada em [7].

## 5.2 O fluxo pela curvatura

Em muitas situações de natureza prática, uma curva plana fechada e simples aparece como modelo matemático de uma interface, ou membrana, que separa dois meios físicos de

constituições distintas. A interação entre esses dois meios determina a evolução da membrana ao longo do tempo através de uma lei que especifica a velocidade instantânea com que cada ponto da membrana se move. Passemos agora a definir o conceito matemático que descreve uma evolução deste tipo.

**Definição 5.2.1** *Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada (não necessariamente simples.) Uma variação de  $\gamma$  é uma aplicação suave  $\mathbf{X} : (-\epsilon, \epsilon) \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfazendo:*

1.  $\mathbf{X}(0, u) = \gamma(u)$ , para qualquer  $u \in I$ ;
2. Para qualquer  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  a aplicação que a cada  $u \in I$  associa  $\mathbf{X}(t, u)$  é uma curva fechada regular.

Uma variação descreve, por conseguinte, uma família a um parâmetro, no caso  $t \in (-\epsilon, \epsilon) \mapsto \mathbf{X}(t, \cdot)$ , de curvas; veja Figura 6. É instrutivo pensar em  $t$  como o tempo ao longo do qual a configuração inicial  $\gamma$  evolui.

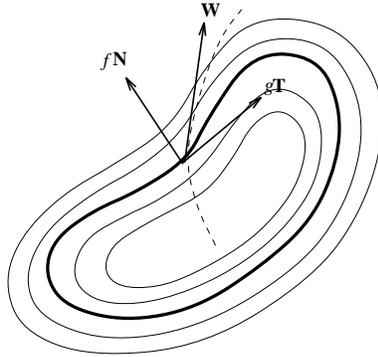


Figura 6

Como determinar a velocidade de evolução de  $\gamma$  ao longo de  $\mathbf{X}$ ? A resposta é muito simples: deriva-se  $\mathbf{X}$  em relação a  $t$ . Mais precisamente, para cada  $u \in I$ , considere a curva ‘transversal’ à variação  $t \in (-\epsilon, \epsilon) \mapsto \mathbf{X}(t, u) \in \mathbb{R}^2$ , que se encontra tracejada na Figura 6. Derivando esta curva em relação a  $t$  obtém-se a velocidade com que a membrana, no nosso modelo representada pelas curvas da variação, evolui. Se  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(t, u)$  e  $\mathbf{N} = \mathbf{N}(t, u)$  são, respectivamente, os vetores tangente e normal unitários das curvas da variação, então pode-se equivalentemente descrever a variação através da lei de evolução:

$$(5.19) \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = f\mathbf{N} + g\mathbf{T}$$

Aqui,  $f$  e  $g$  são funções de  $(t, u)$  que expressam as velocidades de evolução da membrana nas direções normal e tangente, respectivamente. Portanto, dadas  $f$  e  $g$  como acima, o lado direito de (5.19) define a velocidade instantânea de evolução da membrana e a

evolução propriamente dita (isto é,  $\mathbf{X}$ ) pode ser em princípio determinada integrando-se (5.19) com condição inicial  $\mathbf{X}(0, u) = \gamma(u)$ . Diz-se usualmente que  $\mathbf{W} = f\mathbf{N} + g\mathbf{T}$  é o *campo variacional* associado a  $\mathbf{X}$ ; veja Figura 6.

É crucial para o desenvolvimento da teoria determinar como os invariantes de  $\gamma$  evoluem quando  $\gamma$  experimenta uma variação. Começemos com o comprimento. Para cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , seja  $L(t)$  o comprimento da respectiva curva, ou seja,

$$(5.20) \quad L(t) = \int d\sigma = \int \nu du,$$

onde a integral é calculada ao longo da curva  $u \mapsto \mathbf{X}(t, u)$ . Resulta daí que

$$(5.21) \quad \frac{dL}{dt} = \int \frac{\partial \nu}{\partial t} du,$$

o que nos deixa com a tarefa de calcular  $\partial \nu / \partial t$ . Ora, pela Regra da Cadeia, as equações de Serret-Frenet (5.10) podem ser reescritas como

$$(5.22) \quad \begin{cases} \mathbf{X}_u = \nu \mathbf{T} \\ \mathbf{T}_u = \nu k \mathbf{N} \\ \mathbf{N}_u = -\nu k \mathbf{T} \end{cases}$$

De  $\mathbf{X}_u = \nu \mathbf{T}$  obtemos

$$(5.23) \quad \frac{\partial \mathbf{X}_u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nu \mathbf{T}) = \frac{\partial \nu}{\partial t} \mathbf{T} + \nu \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}.$$

e usando (5.19) e (5.22),

$$(5.24) \quad \frac{\partial \mathbf{X}_u}{\partial t} = \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right)_u = (f\mathbf{N} + g\mathbf{T})_u = (f_u + \nu gk)\mathbf{N} + (g_u - \nu kf)\mathbf{T}.$$

Logo,

$$(5.25) \quad \frac{\partial \nu}{\partial t} \mathbf{T} + \nu \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} = (f_u + \nu gk)\mathbf{N} + (g_u - \nu kf)\mathbf{T}.$$

Fazendo o produto interno de (5.25) por  $\mathbf{T}$  e usando que  $\langle \mathbf{T}, \partial \mathbf{T} / \partial t \rangle = 0$  pois  $|\mathbf{T}| = 1$ , conclui-se que

$$(5.26) \quad \frac{\partial \nu}{\partial t} = g_u - \nu kf,$$

e, retornando a (5.21), tem-se finalmente

$$(5.27) \quad \frac{dL}{dt} = \int (g_u - \nu kf) du = - \int \nu kf du = - \int fk d\sigma,$$

ou ainda,

$$(5.28) \quad \frac{dL}{dt} = - \int \langle f\mathbf{N}, k\mathbf{N} \rangle d\sigma.$$

Esta é a *fórmula da primeira variação* para o comprimento.

Observe que a velocidade tangencial  $g$  não aparece em (5.28) pois  $\int g_u du = 0$ , uma vez que  $g$  é periódica em  $u$ . Na verdade, isto é consistente com o fato do comprimento ser um invariante global visto que a componente tangencial de  $\mathbf{X}_t$  corresponde, após integração de (5.19), a reparametrizações das curvas da variação, o que certamente não afeta o seu comprimento. Isto é uma primeira indicação da validade de um princípio geral:

*Ao calcular-se a evolução de invariantes geométricos globais (tais como comprimento, área, etc.) ao longo de variações de curvas fechadas, somente a componente normal  $f\mathbf{N}$  do campo variacional associado aparece no resultado final.*

Vamos agora à mais importante consequência de (5.28). Se quisermos deformar  $\gamma$  de tal maneira que seu comprimento diminua de forma mais eficiente possível, devemos fazer  $f = k$  (e  $g = 0$ , pelo comentário acima.)<sup>7</sup> Noutras palavras, a curva deve ser deformada na direção do vetor curvatura  $k\mathbf{N}$ . Isto dá origem ao *fluxo pela curvatura*

$$(5.29) \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = k\mathbf{N},$$

que será nosso objeto de estudo a partir de agora.

Devemos pensar em (5.29) como um problema de valor inicial (PVI), ou seja, começamos com uma curva fechada  $\gamma$  e tentamos encontrar uma aplicação  $\mathbf{X} : [0, T) \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfazendo (5.29) e  $\mathbf{X}(0, \cdot) = \gamma$ . Noutras palavras, devemos estudar o fluxo determinado pelo PVI

$$(5.30) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = k\mathbf{N} \\ \mathbf{X}(0, \cdot) = \gamma \end{cases}$$

Será conveniente definir, neste contexto,  $\gamma^{(t)} = \mathbf{X}(t, \cdot)$  de forma que  $\gamma^{(0)} = \gamma$ . Como sempre acontece em problemas desta natureza, as seguintes questões devem ser imediatamente consideradas:

1. O problema acima possui uma solução *local* no tempo, isto é, existe  $\epsilon > 0$  tal que (5.30) tem solução  $\mathbf{X} : [0, \epsilon) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ? Se este for o caso, esta solução é única?

<sup>7</sup>Veja a Proposição 5.4.1 para a explicação deste ponto.

2. Se as perguntas acima tiverem respostas positivas, é imediato que existe uma única solução *maximal* definida em  $t \in [0, T^*)$  (podendo ocorrer  $T^* = +\infty$  em princípio.) Como, devido ao seu caráter não-linear, (5.30) em geral não pode ser resolvida explicitamente para dados iniciais arbitrários, é natural questionar ao menos sobre o que acontece com  $\gamma^{(t)}$  quando  $t \rightarrow T^*$ ? Dito de outro modo, qual é o comportamento assintótico das soluções de (5.30)?

Um dos mais belos resultados de Geometria Diferencial nas últimas décadas é o seguinte teorema de M. Gage e R. Hamilton [10], que oferece uma resposta perfeitamente satisfatória às questões acima.

**Teorema 5.2.2** *Seja  $\gamma$  uma curva estritamente convexa. Então o fluxo pela curvatura (5.30) contrai  $\gamma$  a um ponto em tempo finito igual a  $A_0/2\pi$ , onde  $A_0$  é a área de  $\gamma$ , a curva permanecendo simples e estritamente convexa ao longo da contração. Mais ainda, se para cada  $t \in [0, A_0/2\pi)$ , aplicarmos uma homotetia<sup>8</sup> a  $\gamma^{(t)}$  de modo a obter uma curva  $\Gamma^{(t)}$  que possua a mesma área que  $\gamma$ , então  $\Gamma^{(t)}$  converge em  $C^\infty$  para um círculo de mesma área que  $\gamma$ . Dito de modo pitoresco,  $\gamma^{(t)}$  converge para um ponto ‘redondo’.*

Uma demonstração deste resultado será apresentada nas seções seguintes.

O que acontece quando a curva inicial é simples mas não é estritamente convexa? Neste caso, M. Grayson [11] mostrou que a curva permanece simples, torna-se estritamente convexa depois de algum tempo e, pelo resultado descrito acima, converge para um ponto ‘redondo’ em tempo finito. Devemos interpretar este resultado como uma propriedade de ‘suavização’ do fluxo pela curvatura, ou seja, o efeito inicial deste fluxo sobre uma curva simples é fazê-la ‘desenrolar-se’, tornando-a convexa. A partir daí, a convexidade é preservada e a curva finalmente se contrai do modo descrito acima.

## 5.3 Existência de soluções

No seção anterior introduzimos o fluxo pela curvatura

$$(5.31) \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = k\mathbf{N},$$

onde  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t, u) : [0, T) \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma família a um parâmetro de curvas fechadas no plano e  $k = k(t, u)$  e  $\mathbf{N} = \mathbf{N}(t, u)$  são a curvatura e a normal unitária de cada uma destas curvas, respectivamente. O propósito deste capítulo é iniciar a análise do comportamento

<sup>8</sup>Recordemos que uma *homotetia* é uma aplicação da forma  $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \lambda x + b \in \mathbb{R}^2$ , para  $\lambda > 0$  e  $b \in \mathbb{R}^2$ . Diz-se então que  $\lambda$  é o *fator* da homotetia e que a homotetia é *centrada* se  $b = 0$ .

assintótico de soluções de (5.31) correspondente às primeiras etapas da demonstração do Teorema 5.2.2.

*A seguir, salvo menção explícita em contrário, por curva convexa entenderemos uma curva que é fechada, regular e estritamente convexa.*

Recordemos que, conforme explicado na Seção 5.1, a consideração de curvas convexas permite-nos usar a variável angular  $\theta \in [0, 2\pi)$  como uma parâmetro regular para  $\mathbf{X}$ . Como sempre, será conveniente identificar o intervalo  $[0, 2\pi)$  ao círculo unitário  $\mathbb{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$  através da regra  $\theta \in [0, 2\pi) \mapsto z = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ . Estudaremos então soluções  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t, \theta) : [0, T) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$  de

$$(5.32) \quad \mathbf{X}_t = f\mathbf{N},$$

onde, para futura referência, suporemos que  $f$  é uma função arbitrária de  $(t, \theta)$ .<sup>9</sup>

Começemos por calcular como os invariantes geométricos associados às curvas  $\mathbf{X}(t, \cdot)$  evoluem ao longo do tempo por meio de (5.32).<sup>10</sup> Antes de prosseguir, será necessário fazer uma pequena digressão e deduzir algumas fórmulas fundamentais.

Precisaremos das equações de Serret-Frenet adaptadas a  $\theta$ :

$$(5.33) \quad \begin{cases} \mathbf{X}_\theta = \frac{1}{k}\mathbf{T} \\ \mathbf{T}_\theta = \mathbf{N} \\ \mathbf{N}_\theta = -\mathbf{T} \end{cases}$$

Isto decorre facilmente de  $k = d\theta/ds$  e de (5.10) via Regra da Cadeia.

Seja  $h$  a função suporte de  $\mathbf{X}$ , que é definida por

$$(5.34) \quad h = -\langle \mathbf{X}, \mathbf{N} \rangle.$$

É conveniente pensar em  $h = h(\theta)$  como definida em  $\mathbb{T}$ . Geometricamente,  $h$  mede a distância entre a origem e as retas tangentes à curva; veja a Figura 7. É claro que  $h$  depende da escolha de uma origem no plano valendo  $h > 0$  se e somente se a origem se encontra no interior da região compacta delimitada por  $\mathbf{X}$ . Usando (5.33) obtém-se

$$(5.35) \quad h_\theta = -\left\langle \frac{1}{k}\mathbf{T}, \mathbf{N} \right\rangle + \langle \mathbf{X}, \mathbf{T} \rangle = \langle \mathbf{X}, \mathbf{T} \rangle$$

<sup>9</sup> Observe que mudamos a notação de derivadas com respeito a  $t$ . Na verdade, a partir de agora, reservaremos o sub-índice  $_t$  para denotar derivadas parciais com respeito a  $t$  fixando-se  $\theta$  ao passo que a notação  $\partial/\partial t$  significará derivação parcial com respeito a  $t$  fixando-se qualquer outro parâmetro  $u$ .

<sup>10</sup> Implícito neste cálculo está o seguinte fato: para qualquer variação  $\mathbf{X} : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$  de uma curva convexa  $\mathbf{X}(0, \cdot)$ , tem-se que  $\mathbf{X}(t, \cdot)$  também é convexa para todo  $t$  suficientemente pequeno.

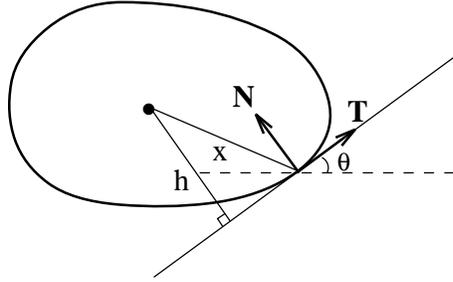


Figura 7

e isto juntamente com (5.34) nos diz como recuperar  $\mathbf{X}$  conhecendo-se  $h$ :

$$(5.36) \quad \mathbf{X} = h_{\theta} \mathbf{T} - h \mathbf{N}.$$

Esta é uma primeira indicação de que a função suporte contém todas as informações a respeito de  $\mathbf{X}$ . Isto pode ser ilustrado mostrando-se como expressar a área<sup>11</sup> e o comprimento de  $\mathbf{X}$  em termos de  $h$ . Para a área, temos

$$\begin{aligned} A(\mathbf{X}) &= \int_{\mathcal{D}} dx dy = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{X}} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{X}} (xy_s - yx_s) d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{X}} \langle \mathbf{X}, -\mathbf{N} \rangle d\sigma = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{X}} h d\sigma, \end{aligned}$$

ou seja,

$$(5.37) \quad A(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \frac{h}{k} d\theta,$$

onde  $\mathcal{D}$  denota a região limitada por  $\mathbf{X}$  e a identidade de Green é utilizada na segunda igualdade acima. Isto pode ser reescrito somente em termos de  $h$  usando-se uma equação que será bastante útil em outras oportunidades. Começando com (5.35) tem-se

$$h_{\theta\theta} = \left\langle \frac{1}{k} \mathbf{T}, \mathbf{T} \right\rangle + \langle \mathbf{X}, \mathbf{N} \rangle,$$

ou seja,  $h$  satisfaz a equação diferencial

$$(5.38) \quad h_{\theta\theta} + h = \frac{1}{k}.$$

Esta equação será, conforme veremos, de grande valia na análise de (5.31). Eis uma primeira consequência.

**Proposição 5.3.1** *Uma condição necessária e suficiente para que  $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  suave seja a função suporte de uma curva convexa é que valha  $h_{\theta\theta} + h > 0$ .*

<sup>11</sup>Por área de uma curva convexa entendemos a área da região delimitada por esta curva.

De fato, suponha que  $h_{\theta\theta} + h > 0$  e defina  $k : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  por meio de (5.38). Usando a identificação  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$ , resulta que

$$(5.39) \quad \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\theta}}{k(\theta)} d\theta = 0,$$

pois  $\int_{\mathbb{T}} h_{\theta\theta} e^{i\theta} d\theta = - \int_{\mathbb{T}} h e^{i\theta} d\theta$ , usando-se integração por partes duas vezes. Isto implica que, fixado  $\theta_0 \in \mathbb{T}$ , a curva  $\mathbf{X} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\mathbf{X}(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{e^{i\theta}}{k} d\theta$$

está bem definida pois a integral não depende do sentido em que se caminha de  $\theta_0$  a  $\theta$  sobre  $\mathbb{T}$ . Mais ainda

$$(5.40) \quad \mathbf{X}_{\theta} = e^{i\theta}/k \neq (0, 0),$$

ou seja,  $\mathbf{X}$  é regular. Obviamente,  $\mathbf{X}$  é fechada pois encontra-se parametrizada por  $\mathbb{T}$  e resta checar que  $\mathbf{X}$  é convexa e simples. Mas comparando (5.40) com (5.33) temos  $\mathbf{T} = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$ , donde  $\mathbf{N} = (-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta)$ , ou seja,  $k$  é de fato a curvatura de  $\mathbf{X}$  e a convexidade local segue. Além disso, a variação angular de  $\mathbf{T}$  é obviamente  $2\pi$  e o Teorema 1.3 garante que  $\mathbf{X}$  é simples. A recíproca decorre dos cálculos que levaram a (5.38).

**Proposição 5.3.2** *Uma condição necessária e suficiente para que  $k : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  suave e positiva seja a curvatura de uma curva convexa é que valha (5.39).*

De fato,  $\mathbf{X}$  é fechada se e somente se

$$(5.41) \quad \int_{\mathbf{X}} \mathbf{T} d\sigma = \int_{\mathbf{X}} \mathbf{X}_{\sigma} d\sigma = 0$$

e, sendo  $\mathbf{X}$  convexa, temos

$$\int_{\mathbf{X}} \mathbf{T} d\sigma = \int_{\mathbb{T}} \frac{\mathbf{T}}{k} d\theta = \int_{\mathbb{T}} \frac{(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)}{k} d\theta = \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\theta}}{k} d\theta.$$

Voltando ao cálculo da área, temos

$$(5.42) \quad A(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} h(h + h_{\theta\theta}) d\theta = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} (h^2 - h_{\theta}^2) d\theta,$$

onde usamos integração por partes na última igualdade. Por outro lado, o comprimento de  $\mathbf{X}$  é dado por

$$(5.43) \quad L(\mathbf{X}) = \int_{\mathbf{X}} ds = \int_{\mathbb{T}} \frac{d\theta}{k} = \int_{\mathbb{T}} (h + h_{\theta\theta}) d\theta = \int_{\mathbb{T}} h d\theta,$$

pois  $\int_{\mathbb{T}} h_{\theta\theta} d\theta = 0$ .

Retornemos ao cálculo da evolução dos invariantes de  $\mathbf{X}$  por (5.32). É natural começar calculando a variação temporal de  $h$ . Temos

$$h_t = -\langle f\mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle - \langle \mathbf{X}, \mathbf{N}_t \rangle.$$

Acontece que  $\mathbf{N}_t = (-\text{sen } \theta, \text{cos } \theta)_t = -\theta_t(\text{cos } \theta, \text{sen } \theta) = 0$  pois  $\theta_t = 0$ , visto que  $t$  e  $\theta$  são variáveis independentes. Logo,

$$(5.44) \quad h_t = -f,$$

ou seja, a taxa de variação de  $h$  é dada pela velocidade normal  $f$ . Observe que isto permite recalculer a variação do comprimento (compare com (5.27)):

$$(5.45) \quad \frac{dL}{dt} = \int_{\mathbb{T}} h_t d\theta = - \int_{\mathbb{T}} f d\theta = - \int_{\mathbf{X}} fk d\sigma.$$

Podemos agora calcular a variação de  $k$ . Basta derivar (5.38) em relação a  $t$  e usar (5.44) para obter

$$(5.46) \quad k_t = k^2(f_{\theta\theta} + f).$$

No caso específico da evolução pela curvatura, onde  $f = k$ , obtemos que

$$(5.47) \quad k_t = k^2k_{\theta\theta} + k^3$$

A proposição a seguir ilustra a importância de (5.47).

**Proposição 5.3.3** *Existe uma correspondência biunívoca entre soluções  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t, \theta) : [0, T) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$  de*

$$(5.48) \quad \mathbf{X}_t = k\mathbf{N},$$

*onde cada curva  $\mathbf{X}(t, \cdot)$  é convexa, e soluções positivas  $k = k(t, \theta) : [0, T) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  da equação de evolução escalar*

$$(5.49) \quad k_t = k^2k_{\theta\theta} + k^3$$

*satisfazendo a condição*

$$(5.50) \quad \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\theta}}{k(t, \theta)} d\theta = 0, \quad t \in [0, T).$$

*Mais ainda,  $\mathbf{X}$  está bem determinada a partir de  $k$  a menos de movimentos rígidos.*

Com efeito, seja  $\mathbf{X}$  uma solução de (5.48). Se  $k = k(t, \theta)$  é a curvatura de  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t, \theta)$  então cada  $k(t, \cdot)$  é positiva e satisfaz (5.49) pelo que vimos acima. Pela Proposição 5.3.2, a condição (5.50) simplesmente expressa o fato de que cada curva na evolução é fechada e regular.

Reciprocamente, se  $k = k(t, \theta)$  é uma solução positiva de (5.49), defina  $\mathbf{X} : [0, T) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$(5.51) \quad \mathbf{X}(t, \theta) = \int_0^\theta \frac{e^{i\theta}}{k(t, \theta)} d\theta.$$

Então (5.50) e a Proposição 5.3.2 implicam que cada  $\mathbf{X}(t, \cdot)$  é fechada e convexa e a curvatura de  $\mathbf{X}(t, \cdot)$  é precisamente  $k(t, \cdot)$ . Mais ainda, como  $k$  satisfaz (5.49),  $\mathbf{X}$  satisfaz (5.48).

Esta proposição sugere uma abordagem à questão formulada anteriormente acerca da existência e unicidade de soluções locais do PVI (5.30) associado ao fluxo pela curvatura (5.31). Começemos com uma curva convexa  $\mathbf{X}_0 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$  e seja  $k_0 > 0$  sua curvatura. A idéia consiste em resolver o PVI

$$(5.52) \quad \begin{cases} k_t = k^2 k_{\theta\theta} + k^3 \\ k(0, \cdot) = k_0 \end{cases}$$

obtendo-se uma função  $k = k(t, \theta)$ ,  $t \in [0, \epsilon)$ , para algum  $\epsilon > 0$ . Por continuidade, podemos admitir que  $k(t, \theta) > 0$  para qualquer  $(t, \theta) \in [0, \epsilon) \times \mathbb{T}$ . Define-se então  $\mathbf{X} : [0, \epsilon) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$  por (5.51), de modo que a curvatura de  $\mathbf{X}(t, \cdot)$  é precisamente  $k(t, \cdot)$ , ou seja, cada  $\mathbf{X}(t, \cdot)$  é convexa. Mais ainda, cada  $\mathbf{X}(t, \cdot)$  é fechada pois se

$$\mathcal{Z}(t) = \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\theta}}{k(t, \theta)} d\theta, \quad t \in [0, \epsilon),$$

então, pela Proposição 5.3.2,  $\mathcal{Z}(0) = 0$ , pois  $\mathbf{X}_0$  é fechada, e

$$\frac{d\mathcal{Z}}{dt} = - \int_{\mathbb{T}} \frac{k_t}{k^2} e^{i\theta} d\theta = - \int_{\mathbb{T}} (k_{\theta\theta} + k) e^{i\theta} d\theta = 0,$$

visto que  $\int_{\mathbb{T}} k_{\theta\theta} e^{i\theta} d\theta = - \int_{\mathbb{T}} k e^{i\theta} d\theta$ . Logo,  $\mathcal{Z} \equiv 0$ , conforme queríamos. Podemos agora apelar para a Proposição 5.3.3 para garantir que  $\mathbf{X}$  é uma solução de (5.48). Que a solução  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t, \cdot)$  é única para o dado inicial  $\mathbf{X}_0$  segue da proposição correspondente que assegura que  $k = k(t, \cdot)$  é única para o dado inicial  $k_0$ , visto que a dependência entre  $k$  e  $\mathbf{X}$  via (5.51) é contínua.

O seguinte teorema, demonstrado no Apêndice D, permite-nos implementar o programa acima delineado.

**Teorema 5.3.4** *Se  $k_0 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  é positiva e suave então existem  $T > 0$  e  $k \in C^\infty([0, T) \times \mathbb{T})$  que é solução única de (5.52).*

Note que este teorema não pode ser deduzido a partir dos resultados estabelecidos no Capítulo 2, visto que o termo de segunda ordem em (5.52), a saber,  $k_{\theta\theta}$ , aparece multiplicado por  $k^2$ . Para a demonstração necessita-se recorrer a métodos outros, conforme explicado no Apêndice D.

Como consequência do Teorema 5.3.4, (5.52) possui uma solução maximal definida em  $[0, T^*)$ . Infelizmente, para *qualquer* dado inicial convexo, tem-se  $T^* < +\infty$ , ou seja, o fluxo pela curvatura sempre desenvolve uma singularidade em tempo finito. Para ver isto, observe que para  $k_0$  uma constante positiva,

$$(5.53) \quad k(t) = \frac{1}{\sqrt{k_0^{-2} - 2t}}$$

é uma solução de (5.52) com  $k(0, \cdot) = k_0$ . Isto corresponde à evolução pela curvatura de um círculo com raio  $r_0 = 1/k_0$ . Conclui-se então que o círculo contrai-se em tempo finito, a saber,  $\bar{T} = r_0^2/2$ , para um ponto, pois  $r(t) \rightarrow 0$  e  $k(t) \rightarrow +\infty$  quando  $t \rightarrow \bar{T}$ . Noutras palavras, (5.53) torna-se singular para  $t = \bar{T}$ .

A proposição a seguir é uma consequência importante da existência desta solução especial.

**Proposição 5.3.5** *O tempo maximal de existência de soluções para o fluxo pela curvatura correspondentes a curvas iniciais convexas é sempre finito e limitado superiormente por  $1/2k_{\min}(0)^2$  onde  $k_{\min}(0) > 0$  é o valor mínimo da curvatura da curva inicial. Mais ainda,*

$$(5.54) \quad k(t, \theta) \geq k_{\min}(0)$$

para quaisquer  $t \in [0, T^*)$  e  $\theta \in \mathbb{T}$ . Em particular, as curvas da evolução permanecem convexas.

Isto decorre do Princípio do Máximo Parabólico, como explicado no Apêndice C.

Na verdade, uma análise mais cuidadosa do tempo maximal das soluções especiais acima permite descobrir qual é o passo crucial no estudo de (5.52). Com respeito a (5.53),  $\bar{T} = r_0^2/2 = \pi r_0^2/2\pi = A_0/2\pi$ , onde  $A_0$  é a área do círculo inicial. Isto sugere que devemos calcular como a área evolui ao longo de (5.48). Para uso posterior, faremos este cálculo mais geralmente para fluxos da forma (5.32). Começando com (5.42) e usando (5.44) e integração por partes, temos

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \int_{\mathbb{T}} (h_t h - h_{t\theta} h_\theta) d\theta = \int_{\mathbb{T}} (-f h + f_\theta h_\theta) d\theta \\ &= - \int_{\mathbb{T}} f (h + h_{\theta\theta}) d\theta, \end{aligned}$$

o que juntamente com (5.38) nos dá

$$(5.55) \quad \frac{dA}{dt} = - \int_{\mathbb{T}} \frac{f}{k} d\theta.$$

Se  $f = k$  tem-se finalmente

$$(5.56) \quad \frac{dA}{dt} = - \int_{\mathbb{T}} d\theta = -2\pi.$$

A conclusão é que para as soluções especiais (5.53) o tempo maximal coincide com o tempo que a área da curva demora para se anular. Curiosamente, o mesmo fenômeno manifesta-se em qualquer solução de (5.52). A proposição a seguir é o ingrediente central para estabelecer isto.

**Proposição 5.3.6** (*estimativa da área*) *Seja  $k : [0, T) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  uma solução de (5.52) e suponha que existe  $\tilde{A} > 0$  tal que  $A(t) \geq \tilde{A}$ , para  $0 \leq t < T$ . Então existe  $C > 0$  tal que  $|k(t, \cdot)| \leq C$ ,  $0 \leq t < T$ .*

**Proposição 5.3.7** *Para qualquer solução de (5.52), o tempo maximal  $T^* = A(0)/2\pi$ .*

Com efeito, enquanto as curvas da evolução limitarem alguma área, a curvatura permanece limitada, pela Proposição 5.3.6. Isto significa em particular que  $k$  é solução limitada da equação *linear*

$$k_t = k^2 k_{\theta\theta} + k^3,$$

cujos coeficientes, a saber,  $k^2$  e  $k^3$ , são uniformemente limitados. Pela estimativa de De Giorgi-Nash (Teorema 2.4.1),  $k$  passa a ser controlada na norma  $C^{\alpha/2, \alpha}$ . Usando repetidamente as estimativas de Schauder (Teorema 2.3.3), concluimos que  $k$  é controlada na topologia  $C^l$  para qualquer  $l \geq 0$ . Isto implica que a solução existe enquanto existir área limitada pelas curvas da evolução, pelo argumento na demonstração da Proposição 2.1.2.

Na verdade, podemos agora inferir informações sobre o comportamento assintótico da solução quando  $t \rightarrow T^*$ , o tempo maximal.

**Proposição 5.3.8** *Para qualquer solução de (5.52), as curvas da evolução convergem na topologia de Hausdorff para um ponto quando  $t \rightarrow T^*$ , o tempo maximal.*

Como efeito, pela Proposição 5.3.6, necessariamente  $A(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow T^*$ . Assim, pelo Teorema 5.1.6, existe uma sequência  $t_i \rightarrow \infty$  ao longo da qual as curvas da evolução convergem para uma curva convexa de área nula. Temos então duas possibilidades para a curva limite: um segmento de reta ou um ponto. No primeiro caso, a curvatura convergiria para zero em porções da curva, o que contraria (5.54).

Resta demonstrar a Proposição 5.3.6.

**Proposição 5.3.9** *Se  $\gamma$  é uma curva convexa e simples então*

$$(5.57) \quad \int_{\mathbb{T}} \frac{d\theta}{k^2} \geq 2A,$$

onde  $A$  é a área de  $\gamma$ .

A demonstração é uma simples aplicação da desigualdade isoperimétrica (B.1) e de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} 4\pi A &\leq L^2 = \left( \int_{\gamma} d\sigma \right)^2 = \left( \int_{\gamma} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}} d\sigma \right)^2 \\ &\leq \left( \int_{\gamma} k d\sigma \right) \left( \int_{\mathbf{X}} \frac{d\sigma}{k} \right) = 2\pi \int_{\mathbb{T}} \frac{d\theta}{k^2}. \end{aligned}$$

A estimativa (5.57) já nos permite, a partir de um controle inferior para a área, estimar a curvatura numa porção substancial da curva, conforme a proposição abaixo.

**Proposição 5.3.10** *Suponha que  $A(t) \geq \tilde{A} > 0$  para quaisquer  $t \in [0, T)$ . Dado  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $I(n)$  o menor inteiro maior ou igual a  $n^2 \tilde{A} / 2\pi$ . Então para qualquer  $\delta > 0$  existe  $n$  tal que  $k = k(t, \cdot) \leq n$  para qualquer  $t \in [0, T)$  e uniformemente em  $\theta \in \mathbb{T}$ , exceto possivelmente numa união finita de  $I(n)$  intervalos de comprimento menor ou igual a  $\delta$ .*

Suponhamos, por absurdo, que a proposição é falsa. Então existe  $\delta > 0$  satisfazendo: para qualquer  $n \in \mathbb{N}$  é possível encontrar  $I(n)$  intervalos disjuntos de comprimento  $\delta_n \geq \delta$  onde vale  $k \geq n$ . Sejam  $\mathcal{I}$  a reunião destes intervalos e  $\mathcal{I}^c$  o seu complemento em  $[0, 2\pi) = \mathbb{T}$ . Temos então

$$2\tilde{A} \leq 2A \leq \int_{\mathbb{T}} \frac{d\theta}{k^2} = \int_{\mathcal{I}} \frac{d\theta}{k^2} + \int_{\mathcal{I}^c} \frac{d\theta}{k^2}.$$

Mas, a primeira integral pode ser estimada por  $2\pi I(n)/n^2$  e a segunda por

$$\frac{2\pi - I(n)\delta_n}{k_{\min}(0)^2} \leq \frac{2\pi - I(n)\delta}{k_{\min}(0)^2},$$

onde usamos (5.54). Logo,

$$2\tilde{A} \leq \frac{2\pi I(n)}{n^2} + \frac{2\pi - I(n)\delta}{k_{\min}(0)^2}.$$

Mas, quando  $n \rightarrow \infty$ , o primeiro termo à direita é limitado por  $\tilde{A} + 1$  e o segundo termo converge para  $-\infty$ , o que é absurdo.

Para concluir a demonstração da Proposição 5.3.6, devemos controlar a curvatura nos intervalos da Proposição 5.3.10, onde ela poderia eventualmente explodir. Para tanto, devemos usar mais intensamente a equação de evolução para  $k$ . Defina a quantidade

$$(5.58) \quad \mathcal{F} = \int_{\mathbb{T}} (k^2 - k_\theta^2) d\theta.$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}}{dt} &= 2 \int_{\mathbb{T}} (kk_t - k_\theta k_{\theta t}) d\theta = 2 \int_{\mathbb{T}} (k_{\theta\theta} + k)k_t d\theta \\ &= 2 \int_{\mathbb{T}} k^2 (k_{\theta\theta} + k)^2 d\theta \geq 0, \end{aligned}$$

ou seja,  $\mathcal{F}$  é uma quantidade monótona para o fluxo pela curvatura. Integrando esta desigualdade obtém-se uma constante  $D > 0$  dependendo somente da curva inicial tal que

$$(5.59) \quad \int_{\mathbb{T}} k_\theta^2 d\theta \leq \int_{\mathbb{T}} k^2 d\theta + D$$

em  $[0, T)$ . Seja agora  $C' > 0$  tal que  $k \leq C'$  fora dos intervalos da Proposição 5.3.10 e seja  $[a, b]$  um desses intervalos. Se  $\theta \in [a, b]$  temos

$$\begin{aligned} k(\theta) &= k(a) + \int_a^\theta k_\theta d\theta \leq C' + \sqrt{\delta} \left( \int_{\mathbb{T}} k_\theta^2 d\theta \right)^{1/2} \\ &= C' + \sqrt{\delta} \left( \int_{\mathbb{T}} k^2 d\theta + D \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Portanto, se  $k_{\max}$  denota o valor máximo de  $k$ , devemos ter

$$k_{\max} \leq C' + \sqrt{\delta} (2\pi k_{\max}^2 + D)^{1/2} \leq C' + \sqrt{2\pi} \sqrt{\delta} k_{\max} + \sqrt{\delta} \sqrt{D},$$

onde usamos  $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ,  $a, b \geq 0$ . Escolha agora  $\delta$  suficientemente pequeno para concluir que  $k \leq 2C'$ , e isto confirma que a curvatura é uniformemente limitada nas hipóteses da Proposição 5.3.6.

## 5.4 Normalizando o fluxo

Vimos na seção anterior (Proposição 5.3.8) que o fluxo pela curvatura

$$(5.60) \quad \mathbf{X}_t = k\mathbf{N}$$

contraí uma curva convexa a um ponto em tempo finito, a saber,  $T^* = A(0)/2\pi$ , no sentido que a área delimitada pela curvas da evolução se anula precisamente em  $t = T^*$ . O propósito desta seção é iniciar a análise do comportamento assintótico da solução quando  $t \rightarrow T^*$ . Conforme explicado no Teorema 5.2.2, devemos mostrar que a curva torna-se assintoticamente circular no final da evolução. Para tanto, normalizaremos o fluxo de tal forma que as curvas da evolução possuam todas a mesma área. Seja, por conseguinte,  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t, \theta) : [0, T^*) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma solução maximal de (5.60). Definamos  $\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{X}}(\tau, \theta) : [0, \infty) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$(5.61) \quad \bar{\mathbf{X}}(\tau, \theta) = \mu \mathbf{X}(t, \theta),$$

onde  $\mu = \sqrt{\pi/A}$  e o novo parâmetro temporal  $\tau$  relaciona-se com o tempo original através de  $dt/d\tau = \mu^{-2}$ . Logo,

$$(5.62) \quad A = A(t) = 2\pi(T^* - t), \quad \mu = (2T^* - 2t)^{-1/2}, \quad \tau = -1/2 \log(2T^* - 2t).$$

Observe que o fluxo  $\bar{\mathbf{X}}$  está definido para  $0 \leq \tau < +\infty$ . Geometricamente, o que fizemos foi aplicar uma homotetia de fator  $\mu$  às curvas do fluxo original  $\mathbf{X}$  de tal modo que  $A(\bar{\mathbf{X}}) = \mu^2 A(\mathbf{X}) = \pi$ , como queríamos. É importante notar que, embora o parâmetro espacial que aparece em  $\bar{\mathbf{X}}$  seja denotado por  $\theta$ , ele não corresponde necessariamente a algum parâmetro angular definido sobre as curvas normalizadas por uma razão muito simples: homotetias não preservam ângulos em geral. É aconselhável, portanto, escrever a normalização acima como  $\bar{\mathbf{X}}(\tau, \bar{\theta}) = \mu \mathbf{X}(t, \theta)$  onde  $\bar{\theta} = \bar{\theta}(\theta)$  é uma mudança regular de parâmetros. Como  $dA/dt = -2\pi$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} = \mu^{-2} (\mu^3 \mathbf{X} + \mu k \mathbf{N}) \\ &= \mu \mathbf{X} + \frac{k}{\mu} \mathbf{N} = \bar{\mathbf{X}} + \bar{k} \mathbf{N}, \end{aligned}$$

onde  $\bar{k}$  denota a curvatura das curvas normalizadas.<sup>12</sup> Usando (5.36) isto pode ser reescrito como

$$(5.63) \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \tau} = (-\bar{h} + \bar{k}) \mathbf{N} + \bar{h}_\theta \mathbf{T},$$

onde, daqui por diante, barras denotarão quantidades associadas às curvas normalizadas, de forma que  $\bar{h}$  denota a função suporte destas curvas, por exemplo.

Gostaríamos de remover o termo tangencial em (5.63) sem alterar a geometria da evolução. Para tanto, precisaremos da proposição a seguir.

<sup>12</sup>Recordemos que a dimensão da curvatura é (comprimento)<sup>-1</sup>, de modo que ao aplicarmos uma homotetia de fator  $\mu$  a curvatura é dividida por  $\mu$ .

**Proposição 5.4.1** *Seja  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t, v)$  uma família a um parâmetro de curvas fechadas que é solução da equação de evolução*

$$(5.64) \quad \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} = f\mathbf{N} + g\mathbf{T},$$

onde  $f$  é geométrica no sentido que somente depende da curva e não de uma particular parametrização da curva (por exemplo,  $f = k$ ) e  $g$  é qualquer função. Então existe uma mudança regular de parâmetros  $w = w(t, v)$ , isto é,  $\partial w / \partial v > 0$ , tal que  $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(t, w) = \mathbf{Y}(t, w(t, v)) = \mathbf{Y}(t, v)$  é uma solução de

$$(5.65) \quad \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} = f\mathbf{N}.$$

Em palavras, adicionando termos tangenciais como  $g\mathbf{T}$  a velocidades geométricas como  $f\mathbf{N}$  não afeta os traços das curvas da evolução e os fluxos (5.64) e (5.65) são geometricamente equivalentes.

Indiquemos brevemente a demonstração desta proposição. Suponhamos por um momento que a mudança de variáveis  $w = w(t, v)$  de fato exista. Tem-se então pela Regra da Cadeia que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}(t, v) &= \mathbf{Y}(t, w(t, v)) + \mathbf{Y}_w(t, w(t, v)) \frac{\partial w}{\partial t}(t, v) \\ &= f(t, w(t, v))\mathbf{N}(t, w(t, v)) + \nu(t, w(t, v)) \frac{\partial w}{\partial t}(t, v)\mathbf{T}(t, w(t, v)), \end{aligned}$$

onde  $\nu$  é a velocidade das curvas calculada em relação ao parâmetro  $w$ . Como  $f$  é geométrica, isto pode ser reescrito como

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(t, w) = f(t, w)\mathbf{N}(t, w) + \nu(t, w) \frac{\partial w}{\partial t}(t, w)\mathbf{T}(t, w).$$

Comparando com (5.64) resulta que

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{g(t, v)}{\nu(t, w(t, v))}.$$

Está claro agora como obter a mudança de variáveis: para cada  $v$  fixado, resolve-se a equação acima para  $w = w(t, v)$ . Deixamos ao leitor a tarefa de mostrar que esta mudança de fato é regular.

Uma consequência imediata é que podemos remover o termo tangencial em (5.63) sem afetar a geometria da evolução. A conclusão é que o fluxo (5.63) é geometricamente equivalente ao fluxo

$$(5.66) \quad \bar{\mathbf{X}}_\tau = (-\bar{h} + \bar{k})\mathbf{N},$$

onde agora o parâmetro espacial de  $\bar{X}$  voltou a ser o parâmetro angular  $\theta$  e o sub-índice  $\tau$  representará, a partir de agora, derivadas parciais com relação a  $\tau$  fixando  $\theta$ . Diremos que (5.66) é o *fluxo pela curvatura normalizado*. Perceba-se que esta normalização implica que a convergência de uma curva convexa pelo fluxo original a um ponto ‘redondo’, conforme explicado no Teorema 5.2.2, é equivalente à convergência da normalização desta curva a um círculo de área  $\pi$  pelo fluxo normalizado. Nosso objetivo será então mostrar que, para qualquer curva inicial convexa  $\bar{X}(0, \cdot)$  de área  $\pi$ ,  $\bar{X}(\tau, \cdot)$  converge em  $C^\infty$  para um círculo de área  $\pi$  quando  $\tau \rightarrow \infty$ .

Antes de começar a análise assintótica de (5.66), determinemos as equações de evolução dos diversos invariantes geométricos de uma curva que evolui de acordo com (5.66). Estas equações são obtidas fazendo  $f = -\bar{h} + \bar{k}$  nas fórmulas correspondentes para (5.32).

**Proposição 5.4.2** *A função suporte, a curvatura, o comprimento e a área das curvas normalizadas evoluem por (5.66) de acordo com*

$$(5.67) \quad \bar{h}_\tau = -\bar{k} + \bar{h}$$

$$(5.68) \quad \bar{k}_\tau = \bar{k}^2 \bar{k}_{\theta\theta} + \bar{k}^3 - \bar{k}$$

$$(5.69) \quad \frac{d\bar{L}}{d\tau} = - \int_{\mathbb{T}} \bar{k} d\theta + \bar{L}$$

$$(5.70) \quad \frac{d\bar{A}}{d\tau} = 0$$

Com efeito, (5.67) decorre imediatamente de (5.44). Para (5.68),

$$\begin{aligned} \bar{k}_\tau &= \bar{k}^2 (-\bar{h}_{\theta\theta} + \bar{k}_{\theta\theta} - \bar{h} + \bar{k}) \\ &= \bar{k}^2 \left( \bar{k}_{\theta\theta} + \bar{k} - \frac{1}{\bar{k}} \right) \\ &= \bar{k}^2 \bar{k}_{\theta\theta} + \bar{k}^3 - \bar{k}, \end{aligned}$$

onde (5.44) e (5.38) foram usados na primeira e segunda igualdades acima, respectivamente. Para (5.69), observe que (5.43) e (5.45) implicam

$$\frac{d\bar{L}}{d\tau} = - \int_{\mathbb{T}} (-\bar{h} + \bar{k}) d\theta = \bar{L} - \int_{\mathbb{T}} \bar{k} d\theta,$$

e (5.70) decorre de  $\bar{A} \equiv \pi$ .

Após estes preliminares, convém refletir a respeito da estratégia a ser adotada. Já vimos que o fluxo pela curvatura desenvolve uma singularidade em tempo finito. Fomos capazes de determinar exatamente este tempo, em função da área da curva original, e isto

nos permitiu normalizar o fluxo, conforme descrito acima, de forma a obter (5.66). A exemplo do que fizemos com os fluxos estudados em capítulos anteriores, nosso objetivo agora é demonstrar que, para qualquer curva convexa de área  $\pi$  como dado inicial, a solução correspondente do fluxo normalizado (5.66) converge, quando  $\tau \rightarrow \infty$ , para uma *solução estacionária* do problema, ou seja, um dado inicial que possui a propriedade de permanecer invariante ao longo da evolução. De posse disto, tenta-se então classificar as soluções estacionárias de (5.66), pois isto apontará que possíveis comportamentos assintóticos podem efetivamente ocorrer. A proposição a seguir caracteriza as soluções estacionárias de (5.66).

**Proposição 5.4.3** *Seja  $\gamma_0$  uma curva localmente estritamente convexa de área  $\pi$  e seja  $\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{X}}(\tau, \theta)$  a solução maximal de (5.66) com condição inicial  $\bar{\mathbf{X}}(0, \cdot) = \gamma_0$ . Então são equivalentes:*

1.  $\gamma_0$  é uma solução estacionária de (5.66), ou seja,  $\bar{\mathbf{X}}_\tau = 0$ ;
2.  $\bar{h} = \bar{k}$ ;
3.  $\bar{k}_\tau = 0$ , ou seja,  $\bar{k}_{\theta\theta} + \bar{k} = 1/\bar{k}$ ;
4.  $\gamma_0$  é uma solução homotética de (5.60), isto é, se  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t, \theta)$ ,  $t \in [0, T)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi I(\gamma_0))$ , é a solução de (5.60) com  $\mathbf{X}(0, \cdot) = \gamma_0$  então cada  $\mathbf{X}(t, \cdot)$  difere de  $\gamma_0$  por uma homotetia centrada em algum ponto que não depende de  $t$ .

A conclusão é que a análise assintótica do fluxo pela curvatura e, portanto, a demonstração do Teorema 5.2.2, estará concluída se demonstrarmos os seguintes resultados:

**Teorema 5.4.4** *Sejam  $\gamma_0$  uma curva convexa e simples de área  $\pi$  e  $\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{X}}(\tau, \theta)$  a solução de (5.66) com condição inicial  $\bar{\mathbf{X}}(0, \cdot) = \gamma_0(\cdot)$ . Então  $\bar{\mathbf{X}}(\tau, \cdot)$  converge em  $C^\infty$  para uma solução estacionária de (5.60) quando  $\tau \rightarrow +\infty$ .*

**Teorema 5.4.5** *Seja  $\gamma$  uma curva simples que é uma solução estacionária de (5.60). Então  $\gamma$  é um círculo.*

Na próxima seção apresentamos um roteiro para a verificação destes resultados, omitindo a demonstração de alguns pontos de caráter mais técnico.

## 5.5 Indo ao infinito

Como, pela Proposição 5.4.3, a caracterização de soluções estacionárias do fluxo normalizado (5.66) envolve tanto a função suporte como a curvatura, a correspondente análise assintótica depende do estabelecimento de controles uniformes para estas quantidades quando  $\tau \rightarrow \infty$ .

**Proposição 5.5.1** *Existem constantes positivas  $k_1 < k_2$  tais que  $k_1 \leq \bar{k}(\tau, \theta) \leq k_2$ , para quaisquer  $(\tau, \theta) \in [0, +\infty) \times \mathbb{T}$ .*

A demonstração desta estimativa pode ser encontrada em [20]. Eis uma consequência imediata.

**Proposição 5.5.2** *Para cada  $k \geq 0$  existe  $C_k > 0$  tal que  $\|\bar{k}\|_{C^k([0, +\infty) \times \mathbb{T})} \leq C_k$ .*

Com efeito, basta aplicar, da maneira usual, De Giorgi-Nash e Schauder a (5.68), a partir do controle dado pela Proposição 5.5.1.

Um controle similar para a função suporte depende de uma escolha judiciosa da origem.

**Proposição 5.5.3** *Existe uma escolha de origem para  $\mathbb{R}^2$  tal que  $h_1 \leq \bar{h}(\tau, \theta) \leq h_2$ , para qualquer  $(\tau, \theta) \in [0, +\infty) \times \mathbb{T}$ , para constantes positivas  $h_1 < h_2$ .*

Para verificar isto, recordemos que a largura de uma curva na direção  $(\cos \theta, \sin \theta)$  é dada, em termos da função suporte  $\bar{h}$ , por

$$w(\theta) = \bar{h}(\theta) + \bar{h}(\pi + \theta).$$

Noutros termos, fixado  $\theta_0$ , temos

$$\begin{aligned} w(\theta) &= -\cos(\theta - \theta_0) \bar{h} \Big|_{\theta_0}^{\pi + \theta_0} \\ &= \int_{\theta_0}^{\pi + \theta_0} (-\cos(\theta - \theta_0) \bar{h}_\theta + \sin(\theta - \theta_0) \bar{h}) d\theta \\ &= \int_{\theta_0}^{\pi + \theta_0} \sin(\theta - \theta_0) (\bar{h}_{\theta\theta} + \bar{h}) d\theta \\ &= \int_{\theta_0}^{\pi + \theta_0} \frac{\sin(\theta - \theta_0)}{\bar{k}} d\theta, \end{aligned}$$

e pela desigualdade de Jensen [18],

$$\begin{aligned} \log w(\theta) &= \log \left( \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0}^{\pi+\theta_0} \frac{\text{sen}(\theta - \theta_0)}{\bar{k}} d\theta \right) + \log \pi \\ &\geq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \text{sen } \theta d\theta + \log \pi - \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0}^{\pi+\theta_0} \log \bar{k} d\theta, \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\log w(\theta) \geq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \text{sen } \theta d\theta + \log \pi - \frac{1}{\pi} \int_{\pi+\theta_0}^{2\pi+\theta_0} \log \bar{k} d\theta,$$

de modo que

$$(5.71) \quad \log w(\theta) \geq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \text{sen } \theta d\theta + \log \pi - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \log \bar{k} d\theta.$$

Isto sugere considerar o *funcional entropia*

$$\mathcal{E}(\tau) = \int_{\mathbb{T}} \log \bar{k}^{(\tau)} d\theta, \quad \bar{k}^{(\tau)} = \bar{k}(\tau, \cdot),$$

que é uma quantidade monótona para (5.66) no sentido que  $\mathcal{E}_\tau \leq 0$ .

Para verificar esta última asserção, veja que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\tau &= \int_{\mathbb{T}} \frac{\bar{k}_\tau}{\bar{k}} d\theta \\ &= \int_{\mathbb{T}} (\bar{k}(\bar{k}_{\theta\theta} + \bar{k}) - 1) d\theta, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\tau\tau} &= \int_{\mathbb{T}} \bar{k}_\tau (\bar{k}_{\theta\theta} + \bar{k}) d\theta + \int_{\mathbb{T}} \bar{k} (\bar{k}_{\tau\theta\theta} + \bar{k}_\tau) d\theta \\ &= 2 \int_{\mathbb{T}} \bar{k}_\tau (\bar{k}_{\theta\theta} + \bar{k}) d\theta \\ &= 2 \int_{\mathbb{T}} \frac{\bar{k}_\tau}{\bar{k}} (\bar{k}_\tau + \bar{k}) d\theta \\ &= 2 \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{\bar{k}_\tau^2}{\bar{k}} + \bar{k}_\tau \right) d\theta \\ &\geq \frac{1}{\pi} \mathcal{E}_\tau^2 + 2\mathcal{E}_\tau, \end{aligned}$$

ou seja,  $\varpi = \mathcal{E}_\tau$  satisfaz

$$\varpi_\tau \geq \frac{1}{\pi} \varpi^2 + 2\varpi.$$

Assim, se a função  $\varpi$  fosse positiva para algum  $\tau_0 > 0$  então ela explodiria em tempo finito, o que com maior razão também aconteceria com  $\mathcal{E}$ . Mas isto é absurdo pois  $\mathcal{E}$  está definido para  $\tau > 0$ . Logo,  $\varpi \leq 0$ , como desejado.

Juntamente com (5.71), isto mostra que existe uma cota inferior positiva para a largura mínima  $w_{\min}^{(\tau)} = \min_\theta w(\tau, \theta)$  das curvas da evolução que *não* depende de  $\tau$ :

$$w_{\min}^{(\tau)} \geq C' > 0, \quad 0 \leq \tau < +\infty.$$

Em particular, existe  $\rho > 0$  tal que para cada  $\tau > 0$  existe um disco aberto  $\mathcal{D}_\tau$  de raio  $\rho$  inteiramente contido no interior de  $\bar{\mathbf{X}}^{(\tau)}$ . Na verdade, um argumento aqui omitido implica que este disco pode ser escolhido *independentemente* de  $\tau$ , de modo que se usarmos o centro deste disco como origem teremos automaticamente a cota inferior

$$\bar{h}^{(\tau)} \geq h_1 = \rho/2, \quad \bar{h}^{(\tau)} = \bar{h}(\tau, \cdot),$$

que aparece na Proposição 5.5.3. Para a cota superior, note que, pela escolha de origem, a função suporte pode ser controlada pelo diâmetro da curva que, por sua vez, pode ser estimado pelo dobro da área dividido pela largura mínima (veja [12], onde isto é verificado para qualquer curva convexa). Logo,

$$\bar{h}^{(\tau)} \leq h_2 = 2\pi/C',$$

como desejado.

Infelizmente, o controle obtido na norma  $C^0$  sobre a função suporte não basta para controlar suas derivadas. A razão é que a equação de evolução para  $\bar{h}$  é deveras complicada. De fato, usando (5.67) e (5.38) vemos que

$$\bar{h}_\tau = -(\bar{h}_{\theta\theta} + \bar{h})^{-1} + \bar{h}.$$

Mas podemos derivar isto em relação a  $\theta$  para concluir que  $v = \bar{h}_\theta$  satisfaz

$$(5.72) \quad v_\tau = \bar{k}^2 v_{\theta\theta} + (\bar{k} + 1)v.$$

**Proposição 5.5.4** *Para cada  $k \geq 0$  existe  $D_k > 0$  tal que  $\|\bar{h}\|_{C^k([0, +\infty) \times \mathbb{T})} \leq D_k$ .*

Por (5.72), a Proposição 5.5.1 e as estimativas de De Giorgi-Nash e Schauder, basta controlar  $v = \bar{h}_\theta$  uniformemente no tempo. Como, para cada  $\tau$ ,  $\bar{h}$  assume um máximo em  $\theta$ , podemos integrar (5.38) e obter, uniformemente em  $\tau$ ,

$$\begin{aligned} |\bar{h}_\theta| &\leq \int_{\mathbb{T}} \frac{d\theta}{\bar{k}} + \int_{\mathbb{T}} \bar{h} d\theta \\ &\leq 2\pi (k_1^{-1} + h_2), \end{aligned}$$

pelas Proposições 5.5.1 e 5.5.3.

De posse das estimativas sobre  $\bar{k}$  e  $\bar{h}$ , podemos agora estudar o comportamento assintótico de soluções de (5.66). Consideremos o funcional

$$\mathcal{I}(\tau) = \int_{\mathbb{T}} \left( \bar{h}_\theta^2 - \bar{h}^2 + 2 \log \bar{h} \right) d\theta,$$

que é limitado inferiormente pois

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= -2\bar{A} + 2 \int_{\mathbb{T}} \log \bar{h} d\theta \\ &\geq -2\pi + 4\pi \log h_1, \end{aligned}$$

pela Proposição 5.5.3. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\tau &= 2 \int_{\mathbb{T}} \left( \bar{h}_\theta \bar{h}_{\theta\tau} - \bar{h} \bar{h}_\tau + \frac{\bar{h}_\tau}{\bar{h}} \right) d\theta \\ &= -2 \int_{\mathbb{T}} \left( (\bar{h}_{\theta\theta} + \bar{h}) \bar{h}_\tau - \frac{\bar{h}_\tau}{\bar{h}} \right) d\theta \\ &= -2 \int_{\mathbb{T}} \frac{(\bar{h} - \bar{k})^2}{\bar{h}\bar{k}} d\theta, \end{aligned}$$

e como  $\bar{h}$  e  $\bar{k}$  estão controladas, existe  $\tilde{C} > 0$  tal que

$$\mathcal{I}_\tau \leq -\tilde{C} \|\bar{s}^{(\tau)}\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leq 0, \quad \bar{s}^{(\tau)} = \bar{h}^{(\tau)} - \bar{k}^{(\tau)},$$

ou seja,  $\mathcal{I}$  é uma quantidade monótona para o fluxo normalizado. Integrando isto obtemos

$$\int_0^{+\infty} \|\bar{s}^{(\tau)}\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 d\tau < +\infty,$$

donde existe sequência  $\tau_i \rightarrow +\infty$  tal que  $\|\bar{s}^{(\tau_i)}\|_{L^2(\mathbb{T})} \rightarrow 0$ . Como, pelas Proposições 5.5.2 e 5.5.4, temos estimativas do tipo  $\|\bar{s}^{(\tau)}\|_{C^l(\mathbb{T})} \leq \tilde{D}_l$ , podemos usar Interpolação para garantir que  $\|\bar{s}^{(\tau_i)}\|_{C^l(\mathbb{T})} \rightarrow 0$  para qualquer  $l \geq 0$ . Novamente pelas Proposições 5.5.2 e 5.5.4, podemos usar Ascoli-Arzelà (Teorema A.1.1) para, eventualmente passando a uma subsequência, concluir que  $\bar{h}^{(\tau_i)} \rightarrow \tilde{h}$  e  $\bar{k}^{(\tau_i)} \rightarrow \tilde{k}$  em  $C^\infty(\mathbb{T})$ , onde  $\tilde{h}$  e  $\tilde{k}$  são funções positivas satisfazendo

$$(5.73) \quad \tilde{h} = \tilde{k}.$$

Mais ainda, como valem

$$\bar{h}_{\theta\theta}^{(\tau_i)} + \bar{h}^{(\tau_i)} = \frac{1}{\bar{k}^{(\tau_i)}}, \quad \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\theta}}{\bar{k}^{(\tau_i)}} d\theta = 0,$$

no limite também valem

$$\tilde{h}_{\theta\theta} + \tilde{h} = \frac{1}{\tilde{k}}, \quad \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\theta}}{\tilde{k}} d\theta = 0,$$

onde, pelas Proposições 5.3.1 e 5.3.2,  $\tilde{h}$  e  $\tilde{k}$  são, respectivamente, a função suporte e curvatura de uma curva convexa suave que é uma solução estacionária de (5.66), em virtude de (5.73).

Resta demonstrar o Teorema 5.4.5, ou equivalentemente, pela Proposição 5.4.3, entender a estrutura do espaço de soluções periódicas  $\kappa : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  da equação diferencial ordinária

$$(5.74) \quad \kappa_{\theta\theta} + \kappa - \frac{1}{\kappa} = 0.$$

A este respeito, pode-se verificar que o Teorema 5.4.5 é equivalente à seguinte asserção: a única solução de (5.74) com período  $2\pi$  é precisamente  $\kappa \equiv 1$ , que corresponde ao círculo unitário. Uma demonstração pode ser encontrada em [5].



# Apêndice A

## Análise funcional: uma rápida revisão

Neste Apêndice recordamos alguns fatos básicos de Análise Funcional usados ao longo do texto. Em particular, descrevemos os vários espaços funcionais aí mencionados. As demonstrações, que podem ser encontradas em qualquer texto sobre o assunto, são, em sua maioria, omitidas.

### A.1 Espaços vetoriais normados

Seja  $E$  um espaço vetorial (real ou complexo). Uma norma em  $E$  é uma aplicação  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo as seguintes condições:

1.  $\|x\| \geq 0$  para qualquer  $x \in E$ , com a igualdade acontecendo somente se  $x = 0$ ;
2. Para quaisquer escalar  $\alpha$  e  $x \in E$ , vale  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ;
3. (Desigualdade triangular) Tem-se  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , para quaisquer  $x, y \in E$ .

O par  $(E, \|\cdot\|)$ , constituído por um espaço vetorial  $E$  munido de uma norma  $\|\cdot\|$ , é chamado um *espaço vetorial normado*. Em geral, representaremos por  $\|\cdot\|_E$  uma norma específica num espaço vetorial normado  $E$ .

Uma norma  $\|\cdot\|_E$  automaticamente induz uma noção de distância em  $E$ : basta definir  $d_E : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d_E(x, y) = \|x - y\|_E$ ,  $x, y \in E$ . Em particular, diz-se que uma sequência  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é *convergente* se existe  $x \in E$  tal que  $\|x_n - x\|_E \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Neste caso, diz-se que  $x_n$  converge para  $x$  e escreve-se  $x_n \rightarrow x$ . Além disso, se  $(F, \|\cdot\|_F)$  é um outro espaço vetorial normado e  $A : E \rightarrow F$  é uma aplicação linear, faz sentido declarar quando  $A$  é contínua. Na verdade, isto acontece se e somente se existe

$C > 0$  tal que

$$\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E, \quad x \in E.$$

Neste caso, diz-se também que  $A$  é *limitada*. Caso contrário, diz-se que  $A$  é *ilimitada*.

Mais especificamente, diz-se que  $A : E \rightarrow F$  linear é *compacta* se, para qualquer sequência  $\{x_n\} \subset E$  limitada (ou seja,  $\|x_n\|_E \leq C$ ), vale que  $\{Ax_n\} \subset F$  possui uma sub-sequência convergente; veja o Teorema A.1.1 abaixo para uma aplicação deste conceito.

Eis alguns exemplos importantes de espaços vetoriais normados:

1. O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  com a norma euclidiana usual:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

2. Se  $E$  e  $F$  são espaços vetoriais normados então o espaço das aplicações lineares limitadas  $A : E \rightarrow F$ , denotado por  $\mathcal{L}(E, F)$ , é um espaço vetorial normado com a norma

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Ax\|_F.$$

Se  $(E, \|\cdot\|_E) = (F, \|\cdot\|_F)$  escrevemos  $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ .

3. Seja  $C^0(\mathbb{T})$  o espaço vetorial das funções contínuas  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ . Então

$$\|f\|_{C^0(\mathbb{T})} = \sup_{\theta \in \mathbb{T}} |f(\theta)|$$

define uma norma em  $C^0(\mathbb{T})$ .

4. Se  $k \geq 1$  e  $C^k(\mathbb{T})$  é o subespaço de  $C^0(\mathbb{T})$  formado pelas funções de classe  $C^k$ , então

$$\|f\|_{C^k(\mathbb{T})} = \sum_{i=0}^k \|f^{(i)}\|_{C^0(\mathbb{T})}$$

define uma norma em  $C^k(\mathbb{T})$ .

5. Sejam  $0 < \alpha < 1$  e  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ . Se  $\theta_0 \in \mathbb{T}$ , diz-se que  $f$  é *Hölder-contínua com expoente  $\alpha$  em  $\theta_0$*  se a quantidade

$$|[f]|_{\alpha; \theta_0} = \sup_{\theta \neq \theta_0} \frac{|f(\theta) - f(\theta_0)|}{|\theta - \theta_0|^\alpha}$$

é finita. Se isto vale para qualquer  $\theta_0 \in \mathbb{T}$ , diremos que  $f$  é de classe  $C^\alpha$ . Define-se então

$$|[f]|_{C^\alpha(\mathbb{T})} = \sup_{\theta \neq \theta'} \frac{|f(\theta) - f(\theta')|}{|\theta - \theta'|^\alpha},$$

e o espaço vetorial formado pelas funções  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  tais que  $\|f\|_{C^\alpha(\mathbb{T})} < +\infty$  é denotado por  $C^\alpha(\mathbb{T})$ . Mais ainda,

$$\|f\|_{C^\alpha(\mathbb{T})} = \|f\|_{C^0(\mathbb{T})} + \|f\|_{C^\alpha(\mathbb{T})}$$

define uma norma em  $C^\alpha(\mathbb{T})$ . Além disso, para  $k \geq 1$ , seja  $C^{k+\alpha}(\mathbb{T})$  o subespaço de  $C^k(\mathbb{T})$  constituído pelas funções cuja derivada de ordem  $k$  é de classe  $C^\alpha$ . Então

$$\|f\|_{C^{k+\alpha}(\mathbb{T})} = \|f\|_{C^k(\mathbb{T})} + \|f^{(k)}\|_{C^\alpha(\mathbb{T})}$$

define uma norma em  $C^{k+\alpha}(\mathbb{T})$ .

6. No cilindro  $[0, T) \times \mathbb{T}$ , introduzimos a *distância parabólica*

$$d_P((t_1, \theta_1), (t_0, \theta_0)) = ((t_1 - t_0) + (\theta_1 - \theta_0)^2)^{1/2},$$

que pode ser usada para definir espaços de Hölder para funções no cilindro.<sup>1</sup> Com efeito, se  $0 < \alpha < 1$ ,  $u : [0, T) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $(t_0, \theta_0) \in [0, T) \times \mathbb{T}$ , diz-se que  $u$  é *Hölder-contínua com expoente  $(\alpha/2, \alpha)$  em  $(t_0, \theta_0)$*  se a quantidade

$$\|u\|_{(\alpha/2, \alpha); (t_0, \theta_0)} = \sup_{(t, \theta) \neq (t_0, \theta_0)} \frac{|u(t, \theta) - u(t_0, \theta_0)|}{d_P((t, \theta), (t_0, \theta_0))^\alpha}$$

é finita. Se isto vale para qualquer  $(t_0, \theta_0) \in [0, T) \times \mathbb{T}$ , diremos que  $u$  é de classe  $C^{\alpha/2, \alpha}$ . Define-se então

$$\|u\|_{C^{\alpha/2, \alpha}([0, T) \times \mathbb{T})} = \sup_{(t_1, \theta_1) \neq (t_2, \theta_2)} \frac{|u(t_1, \theta_1) - u(t_2, \theta_2)|}{d_P((t_1, \theta_1), (t_2, \theta_2))^\alpha},$$

e o espaço vetorial formado pelas funções  $u : [0, T) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  tais que  $\|u\|_{C^{\alpha/2, \alpha}(\mathbb{T})} < +\infty$  é denotado por  $C^{\alpha/2, \alpha}([0, T) \times \mathbb{T})$ . Mais ainda,

$$\|u\|_{C^{\alpha/2, \alpha}([0, T) \times \mathbb{T})} = \|u\|_{C^0([0, T) \times \mathbb{T})} + \|u\|_{C^{\alpha/2, \alpha}([0, T) \times \mathbb{T})}$$

define uma norma em  $C^{\alpha/2, \alpha}([0, T) \times \mathbb{T})$ . Além disso, analogamente ao item anterior, define-se, para  $k \geq 1$  e  $0 \leq \alpha < 1$ , o espaço  $C^{(k+\alpha)/2, k+\alpha}([0, T) \times \mathbb{T})$  com a respectiva norma  $\|\cdot\|_{C^{(k+\alpha)/2, k+\alpha}([0, T) \times \mathbb{T})}$ .

7. Se  $T > 0$ ,  $\mu = k + \alpha$ , onde  $k \geq 0$  é inteiro e  $0 \leq \alpha < 1$ , então o espaço das aplicações contínuas  $u : [0, T] \rightarrow C^\mu(\mathbb{T})$ , denotado por  $C_\mu(\mathbb{T})$ , é normado com

$$\|u\|_{C_\mu(\mathbb{T})} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{C^\mu(\mathbb{T})}.$$

<sup>1</sup>Note a discrepância entre os expoentes nas variáveis temporal e espacial. Isto reflete um princípio geral no reino das equações parabólicas: duas derivadas espaciais correspondem a uma derivada temporal.

8. Se  $\mathfrak{L}_2$  é o espaço vetorial das sequências complexas  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  tais que

$$\|c\|_{\mathfrak{L}_2}^2 = \sum_n |c_n|^2 < +\infty,$$

então  $\|\cdot\|_{\mathfrak{L}_2}$  define uma norma em  $\mathfrak{L}_2$ .

9. Se  $L^2(\mathbb{T})$  é o espaço vetorial das funções  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  de quadrado integrável (a Lebesgue) então

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(\theta)|^2 d\theta$$

define uma norma em  $L^2(\mathbb{T})$ .<sup>2</sup>

Diz-se que uma sequência  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$  é *de Cauchy* se para qualquer  $\epsilon > 0$  existe  $n_0$  tal que  $m, n \geq n_0$  implica  $\|x_m - x_n\|_E < \epsilon$ . Um espaço vetorial normado  $(E, \|\cdot\|_E)$  é *de Banach* se qualquer sequência de Cauchy em  $E$  é convergente. Quase todos os exemplos de espaços vetoriais normados apresentados acima são de Banach. A exceção acontece no item 2, que torna-se de Banach se supusermos que  $F$  é de Banach.

Em relação aos espaços de Hölder, recordemos o resultado a seguir.

**Teorema A.1.1** (Ascoli-Arzelà) *Se  $k + \alpha < k' + \alpha'$  então a inclusão  $C^{k'+\alpha'}(\mathbb{T}) \hookrightarrow C^{k+\alpha}(\mathbb{T})$  é compacta.*

Obviamente, um resultado similar vale para os espaços de Hölder parabólicos do item 6 acima.

Lembremos que um *produto interno* em  $E$  é uma aplicação sesquilinear  $(, ) : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$  tal que, para quaisquer  $x, y \in E$ , vale : i)  $(x, y) = \overline{(y, x)}$ ; ii)  $(x, x) \geq 0$  com igualdade somente se  $x = 0$ . Note que um espaço vetorial  $E$  munido com um produto interno, digamos  $(, )_E$ , torna-se automaticamente normado: basta definir

$$(A.1) \quad \|x\|_E = \sqrt{(x, x)_E}, \quad x \in E.$$

Neste caso, vale automaticamente a *desigualdade de Cauchy-Schwartz*:

$$(A.2) \quad |(x, y)_E| \leq \|x\|_E \|y\|_E, \quad x, y \in E,$$

com a igualdade acontecendo se e somente se  $x = \lambda y$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

<sup>2</sup>Evidentemente, o fator  $1/2\pi$  é irrelevante aqui, mas é extremamente conveniente introduzi-lo, conforme ficará claro no Teorema A.1.2 abaixo.

Diz-se que um espaço de Banach  $(E, \|\cdot\|_E)$  é de Hilbert se sua norma é induzida por um produto interno como em (A.1). Por exemplo,  $\mathfrak{L}_2$  e  $L^2(\mathbb{T})$  são espaços de Hilbert com produtos internos dados por

$$(c, d)_{\mathfrak{L}_2} = \sum_n c_n \overline{d_n}$$

e

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta,$$

respectivamente. Por outro lado, seja  $L^1(\mathbb{T})$  o espaço vetorial das funções  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  integráveis (a Lebesgue). Então  $L^1(\mathbb{T})$ , munido com a norma

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{T})} = \int_X |f(\theta)| d\theta,$$

é um espaço de Banach que não é de Hilbert. Mas note que  $L^2(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^1(\mathbb{T})$ , com inclusão contínua. De fato, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\|u\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq 2\pi \|u\|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

Em particular, os *coeficientes de Fourier*<sup>3</sup>

$$\hat{f}(n) = (u, e_n)_{L^2(\mathbb{T})}$$

de  $f \in L^2(\mathbb{T})$  estão bem definidos. Aqui,  $e_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta}$ ,  $\theta \in \mathbb{T}$ .

Se  $E$  é um espaço de Hilbert, diremos que  $x, y \in E$  são *ortogonais* se  $(x, y)_E = 0$ . Neste caso, vale o Teorema de Pitágoras,

$$\|x + y\|_E^2 = \|x\|_E^2 + \|y\|_E^2.$$

Por exemplo, as relações de ortogonalidade (1.13) nos dizem que a sequência de funções  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{T})$ , é *ortonormal*, ou seja, seus elementos são ortogonais entre si e possuem norma unitária:

$$(e_m, e_n)_{L^2(\mathbb{T})} = \delta_{mn}, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Daí, se  $f \in L^2(\mathbb{T})$  e

$$S_N[f] = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e_n$$

é a soma parcial de sua série de Fourier<sup>4</sup> então

$$(S_N[f], f - S_N[f])_{L^2(\mathbb{T})} = 0,$$

<sup>3</sup>Compare isto com (1.15).

<sup>4</sup>Compare isto com (1.26).

o que nos dá

$$(A.3) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \|S_N[f]\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \|f - S_N[f]\|_{L^2(\mathbb{T})}^2,$$

donde

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \geq \|S_N[f]\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)|^2.$$

Assim, fazendo  $N \rightarrow +\infty$ , vale a *desigualdade de Bessel*,<sup>5</sup>

$$\|\mathcal{F}[f]\|_{\mathfrak{L}_2} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{T})},$$

onde  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \mathfrak{L}_2$  associa a cada  $f$  seus coeficientes de Fourier,  $\mathcal{F}[f](n) = \hat{f}(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Teorema A.1.2** (Plancherel)  $\mathcal{F}$  é uma transformação unitária no sentido que preserva os produtos internos, ou seja,

$$(\mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g])_{\mathfrak{L}_2} = (f, g)_{L^2(\mathbb{T})}, \quad f, g \in L^2(\mathbb{T}).$$

Basta verificar: se  $c = \{c_n\} \in \mathfrak{L}_2$  então existe  $f \in L^2(\mathbb{T})$  tal que  $\mathcal{F}[f] = c$  e  $\|c\|_{\mathfrak{L}_2} = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$ . Para isto, seja  $f_N = \sum_{n=-N}^N c_n e_n$  de modo que, se  $M > N$ ,

$$\|f_M - f_N\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{N+1 \leq |n| \leq M} |c_n|^2.$$

Assim,  $\{f_N\}$  é de Cauchy e portanto existe  $f \in L^2(\mathbb{T})$  tal que

$$\|f_N - f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \rightarrow 0,$$

se  $N \rightarrow +\infty$ . Mas, se  $N > n$ ,

$$\begin{aligned} (f, e_n)_{L^2(\mathbb{T})} &= (f - f_N, e_n)_{L^2(\mathbb{T})} + (f_N, e_n)_{L^2(\mathbb{T})} \\ &= (f - f_N, e_n)_{L^2(\mathbb{T})} + c_n, \end{aligned}$$

e como, por Cauchy-Schwarz,  $|(f - f_N, e_n)_{L^2(\mathbb{T})}| \leq \|f - f_N\|_{L^2(\mathbb{T})} \rightarrow 0$  se  $N \rightarrow +\infty$ , concluímos que  $(f, e_n)_{L^2(\mathbb{T})} = c_n$ , ou seja,  $\mathcal{F}[f] = c$ . Finalmente, fazendo  $N \rightarrow +\infty$  em (A.3) chega-se a  $\|c\|_{\mathfrak{L}_2} = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$ , como desejado.

---

<sup>5</sup>Compare isto com (1.29).

## A.2 Espaços de Sobolev

Na seção anterior vimos que a aplicação de Fourier  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \mathfrak{L}_2$  é uma isometria. Em palavras,  $L^2(\mathbb{T})$  e  $\mathfrak{L}_2$  são realizações distintas do *mesmo* espaço de Hilbert. Usaremos agora esta identificação para definir uma família de espaços de Hilbert parametrizada por  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s \geq 0$ . Para isso, sejam

$$\langle n \rangle = (1 + n^2)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

e

$$\mathfrak{L}_2^s = \{c \in \mathfrak{L}_2; \{\langle n \rangle^s c_n\} \in \mathfrak{L}_2\}.$$

É fácil ver que  $\mathfrak{L}_2^s$  é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(c, c')_{\mathfrak{L}_2^s} = \sum_n \langle n \rangle^{2s} c_n \overline{c'_n}.$$

**Definição A.2.1** *Se  $s \geq 0$  define-se o espaço de Sobolev de ordem  $s$  por*

$$H^s(\mathbb{T}) = \mathcal{F}^{-1}(\mathfrak{L}_2^s).$$

Assim,  $H^s(\mathbb{T})$  é espaço de Hilbert com o produto interno

$$(f, g)_{H^s(\mathbb{T})} = \sum_n \langle n \rangle^{2s} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}.$$

**Proposição A.2.2** *Os espaços de Sobolev  $H^s(\mathbb{T})$ ,  $s \geq 0$ , gozam das seguintes propriedades:*

1. *Se  $k \geq 0$  é inteiro então existem  $d_k > c_k > 0$  tais que*

$$(A.4) \quad c_k \|f\|_{H^k(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{C^k(\mathbb{T})} \leq d_k \|f\|_{H^k(\mathbb{T})},$$

*onde  $f \in C^k(\mathbb{T})$ .*

2. *Se  $s' \leq s$  então  $H^s(\mathbb{T}) \hookrightarrow H^{s'}(\mathbb{T})$ , injetiva e continuamente.*

3. *(Mergulho de Sobolev) Se  $s > k + 1/2$  então  $H^s(\mathbb{T}) \hookrightarrow C^k(\mathbb{T})$ , injetiva e continuamente.*

Para a demonstração do primeiro item, note que existem  $d'_k > c'_k > 0$  tais que

$$c'_k \langle n \rangle^{2k} \leq \sum_{|j| \leq k} |n|^{2i} \leq d'_k \langle n \rangle^{2k}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Multiplicando isto por  $|\hat{f}(n)|^2$ , somando-se o resultado em  $n$  e lembrando que, por (1.31),  $|\widehat{f^{(j)}}(n)| = |n|^j |\hat{f}(n)|$ , o resultado segue. Para o segundo item, veja que

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^{s'}(\mathbb{T})} &= \sum_n \langle n \rangle^{2s'} |\hat{f}(n)|^2 \\ &= \sum_n \frac{\langle n \rangle^{2s} |\hat{f}(n)|^2}{\langle n \rangle^{2(s-s')}}, \end{aligned}$$

donde

$$(A.5) \quad \|f\|_{H^{s'}(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{H^s(\mathbb{T})},$$

pois  $s - s' \geq 0$ . Finalmente, por indução, basta verificar o terceiro item para  $k = 0$ . Assim, se  $s > 1/2$  teremos, por Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \sum_n |\hat{f}(n)| &= \sum_n \langle n \rangle^{-s} \langle n \rangle^s |\hat{f}(n)| \\ &\leq \left( \sum_n \langle n \rangle^{-2s} \right)^{1/2} \|f\|_{H^s(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Mas a série à direita é convergente pois  $2s > 1$ , donde, para qualquer  $\theta \in \mathbb{T}$ ,

$$(A.6) \quad |S_N[f](\theta)| \leq \sum_n |\hat{f}(n)| \leq C \|f\|_{H^s(\mathbb{T})} < +\infty,$$

e a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente para uma função  $g \in C^0(\mathbb{T})$  que satisfaz  $\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[g]$ . Logo, pela Teorema A.1.2,  $f = g$ . Mais ainda, fazendo  $N \rightarrow +\infty$  em (A.6), chega-se a  $\|f\|_{C^0(\mathbb{T})} \leq C \|f\|_{H^s(\mathbb{T})}$ .

### A.3 Interpolação

Nosso objetivo nesta seção será demonstrar o seguinte resultado, de extrema importância na análise do comportamento assintótico de soluções de equações quasi-lineares, conforme exemplificado nos Capítulos 3, 4 e 5.

**Teorema A.3.1** *Sejam  $s > 0$  e  $\{f_i\} \subset H^s(\mathbb{T})$  uma sequência satisfazendo: i) existe  $C > 0$  independente de  $i$  tal que  $\|f_i\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq C$ ; ii)  $\|f_i\|_{L^2(\mathbb{T})} \rightarrow 0$  quando  $i \rightarrow +\infty$ . Então  $\|f_i\|_{H^{s'}(\mathbb{T})} \rightarrow 0$  quando  $i \rightarrow +\infty$  para  $0 < s' < s$ .*

Este resultado decorre imediatamente do seguinte teorema, que encerra as propriedades de interpolação em espaços de Sobolev.

**Teorema A.3.2** Se  $f \in H^s(\mathbb{T})$ ,  $s > 0$ , então

$$\|f\|_{H^{\tau s}(\mathbb{T})} \leq (\|f\|_{H^0(\mathbb{T})})^{1-\tau} (\|f\|_{H^s(\mathbb{T})})^{\tau}, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

O resultado fundamental no Método de Interpolação é a proposição a seguir, conhecida como o *Teorema das três retas de Hadamard*.

**Proposição A.3.3** Sejam  $\Omega = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; 0 < x < 1\}$  e  $\varphi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$  tais que:

1.  $\varphi$  é contínua e uniformemente limitada;
2.  $\varphi$  é holomorfa em  $\Omega$ ;
3. Valem  $|\varphi(y)| \leq M_0$  e  $|\varphi(iy)| \leq M_1$  para  $y \in \mathbb{R}$ .

Então  $|\varphi(z)| \leq M_0^{1-x} M_1^x$ ,  $z \in \Omega$ .

Considerando  $M_0^{x-1} M_1^{-x} \varphi(z)$ , podemos fazer  $M_0 = M_1 = 1$ . Além disso, se  $\varphi(z) \rightarrow 0$  uniformemente quando  $y \rightarrow \pm\infty$  então  $|\varphi(z)| \leq 1$ ,  $z \in \Omega$ , pelo Princípio do Módulo Máximo. Para reduzir a este caso, para cada  $n \geq 1$  substitua  $\varphi$  por  $\varphi_n(z) = e^{z^2/n} e^{-1/n} \varphi(z)$ . Se  $M \geq 0$  é a cota superior para  $|\varphi|$  em  $\overline{\Omega}$ , temos

$$|\varphi_n(z)| \leq |\varphi(z)| e^{\frac{x^2-1-y^2}{n}} \leq M e^{-y^2/n},$$

e isto converge uniformemente para 0 quando  $y \rightarrow \pm\infty$ . Portanto,  $|\varphi_n(z)| \leq 1$ ,  $z \in \Omega$ . Mas note que, para cada  $z \in \Omega$ ,  $\varphi_n(z) \rightarrow \varphi(z)$  quando  $n \rightarrow +\infty$ .

Observamos que esta proposição permanece válida, com modificações insignificantes na demonstração, para o caso em que  $\varphi : \overline{\Omega} \rightarrow E$  é holomorfa, onde  $E$  é um espaço de Banach complexo, o que significa por definição que  $l \circ \varphi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$  é holomorfa para qualquer  $l \in E^*$ , o dual topológico de  $E$ . Na verdade, usaremos esta versão da proposição no texto a seguir.

Sejam agora  $E$  e  $F$  espaços de Banach com  $F \hookrightarrow E$  continuamente. Seja  $\mathcal{H}_{E,F}(\Omega)$  o espaço de Banach de aplicações  $u : \overline{\Omega} \rightarrow E$  tais que:

1.  $u$  é contínua e limitada (ou seja,  $\|u(z)\|_E \leq C_u$  para  $z \in \overline{\Omega}$ );
2.  $u$  é holomorfa em  $\Omega$  (no sentido descrito acima);
3. Para qualquer  $y \in \mathbb{R}$ ,  $u(1 + iy) \in F$  e  $\|u(1 + iy)\|_F \leq C_u$ .

Para  $0 \leq \tau \leq 1$  defina  $[E, F]_\tau = \{u(\tau); u \in \mathcal{H}_{E,F}(\Omega)\}$ , os chamados *espaços de interpolação*. Note que se  $\Xi_\tau : \mathcal{H}_{E,F}(\Omega) \rightarrow E$ ,  $\Xi_\tau(u) = u(\tau)$  então  $[E, F]_\tau = \text{Im } \Xi_\tau$ , o que nos dá

$$(A.7) \quad [E, F]_\tau = \frac{\mathcal{H}_{E,F}(\Omega)}{\ker \Xi_\tau},$$

de modo que  $[E, F]_\tau$  é naturalmente um espaço de Banach. Grosseiramente falando, quando  $\tau$  varia  $[E, F]_\tau$  interpola entre  $E$  e  $F$ . Para enfatizar este ponto de visto, notemos a proposição a seguir.

**Proposição A.3.4** *Seja  $T : E \rightarrow E$  linear e contínua, com a restrição  $T_F : F \rightarrow E$  também contínua. Então  $T$  induz uma aplicação contínua  $T_\tau : [E, F]_\tau \rightarrow [E, F]_\tau$  para cada  $\tau$ .*

Tome  $v \in [E, F]_\tau$  de modo  $v = u(\tau)$  para algum  $u \in \mathcal{H}_{E,F}(\Omega)$  e defina  $T_\tau(v) = Tu(\tau)$ . Por (A.7), isto não depende da aplicação  $u$  escolhida. Além disso,  $Tu \in \mathcal{H}_{E,F}(\Omega)$  de maneira que  $T_\tau(v) \in [E, F]_\tau$ . A continuidade de  $T_\tau$  é óbvia.

Buscaremos agora uma situação em que os espaços de interpolação podem ser concretamente descritos. Seja  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  um operador linear, em geral ilimitado, num espaço de Hilbert  $H$ . Aqui,  $D(A)$  é o domínio de  $A$  e a inclusão  $D(A) \hookrightarrow H$  é contínua. Admita, além disso, que  $A$  é *unitariamente equivalente* a um operador de multiplicação, ou seja, existe um espaço de medida<sup>6</sup>  $X = (X, \Sigma, \mu)$ , um operador unitário  $\chi : H \rightarrow L^2(X)$  e uma função mensurável  $b : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $A = \chi^{-1} \mathcal{M}_b \chi$ , onde  $\mathcal{M}_b(f) = bf$ ,  $f \in L^2(X)$ . Noutras palavras, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H \supset D(A) & \xrightarrow{\chi} & D(\mathcal{M}_b) \subset L^2(X) \\ A \downarrow & & \downarrow \mathcal{M}_b \\ H & \xrightarrow{\chi} & L^2(X) \end{array}$$

comuta.

Note que  $D(\mathcal{M}_b) = \{f \in L^2(X); bf \in L^2(X)\}$  de modo que se  $b$  é limitada ( $|b| \leq M$ ) então  $\mathcal{M}_b$  também é limitada com  $\|\mathcal{M}_b\|_{\mathcal{L}(L^2(X))} \leq M$ . Em particular,  $D(A) = H$  e inexistente a necessidade de realizar interpolações. Em função disso, podemos admitir que  $b$  é ilimitada. Além disso, uma hipótese do tipo  $b \geq 1$  faz-se necessária na discussão a seguir.<sup>7</sup>

<sup>6</sup>Isto significa que  $\Sigma$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $X$  e  $\mu$  é uma medida em  $\Sigma$ ; veja [2]

<sup>7</sup>Pelo Teorema Espectral, a descrição acima significa precisamente que  $A$  é um operador auto-adjunto ilimitado em  $H$  satisfazendo  $\langle Ax, x \rangle_H \geq \|x\|_H^2$ ,  $x \in D(A)$ .

Agora, para cada  $0 \leq \tau \leq 1$  considere  $\mathcal{M}_{b^\tau} : D(\mathcal{M}_{b^\tau}) \subset L^2(X) \rightarrow L^2(X)$  com domínio  $D(\mathcal{M}_{b^\tau}) = \{f \in L^2(X); b^\tau f \in L^2(X)\}$  e defina  $A^\tau : D(A^\tau) \subset H \rightarrow H$  por  $D(A^\tau) = \chi^{-1}(D(\mathcal{M}_{b^\tau}))$  e  $A^\tau = \chi^{-1}\mathcal{M}_{b^\tau}\chi$ . Ou seja, temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H \supset D(A^\tau) & \xrightarrow{\chi} & D(\mathcal{M}_{b^\tau}) \subset L^2(X) \\ A^\tau \downarrow & & \downarrow \mathcal{M}_{b^\tau} \\ H & \xrightarrow{\chi} & L^2(X) \end{array}$$

Com esta notação vale o resultado básico a seguir.

**Proposição A.3.5** *Para qualquer  $0 \leq \tau \leq 1$ ,*

$$(A.8) \quad [H, D(A)]_\tau = D(A^\tau).$$

Salientamos que a aplicação  $A \mapsto A^\tau$  é um exemplo do *Cálculo Funcional* para  $A$  em ação. Mais precisamente, dada  $F : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  contínua, seja  $F(A) = \chi^{-1}\mathcal{M}_{F(b)}\chi : D(F(A)) \subset H \rightarrow H$  com  $D(F(A)) = \chi^{-1}(D(\mathcal{M}_{F(b)}))$ . Noutras palavras,  $F(A)$  é unitariamente equivalente a  $\mathcal{M}_{F(b)}$ , uma relação que denotaremos por  $F(A) \sim_\chi \mathcal{M}_{F(b)}$ . Claramente, se  $F$  é limitada então  $F(A)$  também é limitada.

Começemos a demonstração da Proposição A.3.5, verificando a inclusão

$$(A.9) \quad D(A^\tau) \subset [H, D(A)]_\tau.$$

Se  $v \in D(A^\tau)$  devemos encontrar  $u \in \mathcal{H}_{H, D(A)}(\Omega)$  tal que  $v = u(\tau)$ . Para tanto, considere

$$u(z) = A^{-z+\tau}v = A^{-x}A^{-iy}A^\tau v,$$

que é contínua em  $z = x + iy \in \bar{\Omega}$ . Agora, a hipótese  $b \geq 1$  implica que  $0 \leq b^{-x} \leq 1$  para  $0 \leq x \leq 1$ , de maneira que  $\mathcal{M}_{b^{-x}}$  é limitada. Como  $A^{-x} \sim_\chi \mathcal{M}_{b^{-x}}$ , isto nos informa que  $A^{-x}$  é limitada e, de fato,  $\|A^{-x}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$ . Combinando isto com o fato que  $A^{-iy} = e^{-i \log A}$  é unitária (portanto,  $\|A^{-iy}\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$ ) temos  $\|u(z)\|_E \leq \|A^\tau v\|_E = C$ , uma constante que não depende de  $z$ , e isto mostra que  $u$  satisfaz a primeira condição na definição de  $\mathcal{H}_{A, D(A)}(\Omega)$ . Como  $u(z)$  é obviamente holomorfa em  $z \in \Omega$ , a segunda condição também é cumprida. Para a terceira, fixe  $y \in \mathbb{R}$  e considere  $u(1 + iy) = A^{-1}A^{-iy}A^\tau v$ . Como  $A^\tau v \in H$  (visto que  $v \in D(A^\tau)$ ) e  $A^{-iy}$  é unitária,  $Au(1 + iy) = A^{-iy}A^\tau v \in H$ . Assim,  $u(1 + iy) \in D(A)$ . Mais ainda,  $\|u(1 + iy)\|_{D(A)} = \|Au(1 + iy)\|_H \leq \|A^\tau v\|_H$ , uma constante que não depende de  $u$ .

Consideremos agora a inclusão

$$(A.10) \quad [H, D(A)]_\tau \subset D(A^\tau).$$

Devemos mostrar que  $u(\tau) \in D(A^\tau)$  para qualquer  $u \in \mathcal{H}_{H,D(A)}(\Omega)$ . Seja  $\epsilon > 0$  e defina

$$F_\epsilon(z) = A^z(I + i\epsilon A)^{-1}u(z), \quad z \in \bar{\Omega}.$$

Vamos aplicar as três retas de Hadamard a esta função.

Claramente,

$$A^x(I + i\epsilon A)^{-1} \sim_\chi \mathcal{M}_{\bar{b}},$$

onde  $\bar{b} = b^x(1 + i\epsilon b)^{-1}$ . Mas

$$|\bar{b}| \leq \frac{b}{\sqrt{1 + \epsilon^2 b^2}} \leq \frac{1}{\epsilon},$$

de modo que

$$\|F_\epsilon(z)\|_H \leq \frac{1}{\epsilon} \|u(z)\|_H \leq \frac{C}{\epsilon},$$

onde na última desigualdade usamos o fato que  $u \in \mathcal{H}_{H,D(A)}(\Omega)$ .

Agora, ao longo da reta  $x = 0$ ,  $F_\epsilon(iy) = A^{iy}(I + i\epsilon A)^{-1}u(iy)$ . Mas

$$(I + i\epsilon A)^{-1} \sim_\chi \mathcal{M}_{\underline{b}},$$

com  $|\underline{b}| = |(1 + i\epsilon b)^{-1}| \leq 1$ , e isto fornece

$$\|F_\epsilon(iy)\|_H \leq \|u(iy)\|_H \leq M_0,$$

com  $M_0 \geq 0$  não dependendo de  $y$ . Por outro lado, para  $x = 1$  temos  $F_\epsilon(1 + iy) = AA^{iy}(I + i\epsilon A)^{-1}u(1 + iy)$  de modo que

$$\|F_\epsilon(1 + iy)\|_H \leq \|Au(1 + iy)\|_H = \|u(1 + iy)\|_{D(A)},$$

visto que  $u(1 + iy) \in D(A)$  (pois  $u \in \mathcal{H}_{A,D(A)}(\Omega)$ ), e isso finalmente nos dá

$$\|F_\epsilon(1 + iy)\|_H \leq M_1,$$

onde  $M_1 \geq 0$  novamente não depende de  $y$ . Por Hadamard,  $\|F_\epsilon(z)\|_H \leq M_0^{1-x} M_1^x \leq M_2$ . Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  e  $z = 0$ , o resultado segue.

Como usar este formalismo no contexto de espaços de Sobolev? A resposta a esta pergunta é surpreendentemente simples e tem a ver com a própria maneira como estes espaços são definidos. Com efeito, considere o espaço de medida  $(\mathbb{Z}, \Sigma, \mu)$ , onde  $\Sigma$  é a  $\sigma$ -álgebra das partes de  $\mathbb{Z}$  e  $\mu$  é a medida de contagem, de maneira que  $L^2(\mathbb{Z}) = \mathfrak{L}_2$ . Neste caso, o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
L^2(\mathbb{T}) \supset H^s(\mathbb{T}) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & D(\mathcal{M}_{\langle n \rangle^s}) \subset \mathfrak{L}_2 \\
\Lambda^s \downarrow & & \downarrow \mathcal{M}_{\langle n \rangle^s} \\
L^2(\mathbb{T}) & \xrightarrow{\mathcal{F}^*} & \mathfrak{L}_2
\end{array}$$

com  $\Lambda^s \sim_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_{\langle n \rangle^s}$  and  $H^s(\mathbb{T}) = D(\Lambda^s)$ , ajusta-se perfeitamente à teoria acima. Como consequência, vale a proposição a seguir.

**Proposição A.3.6** *Para quaisquer  $0 \leq \tau \leq 1$  e  $s > 0$ ,*

$$(A.11) \quad [L^2(\mathbb{T}), H^s(\mathbb{T})]_{\tau} = H^{\tau s}(\mathbb{T}).$$

Combinando isto com a definição dos espaços de interpolação  $[L^2(\mathbb{T}), H^s(\mathbb{T})]_{\tau}$  e a Proposição A.3.3, o Teorema A.3.1 decorre imediatamente.



# Apêndice B

## A desigualdade isoperimétrica

O propósito deste Apêndice é utilizar a teoria das séries de Fourier desenvolvida na Seção 1.2 para demonstrar a famosa *desigualdade isoperimétrica*.

**Teorema B.0.7** *Seja  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  uma curva plana suave e estritamente convexa com comprimento  $L$  e área  $A$ . Então vale*

$$(B.1) \quad L^2 \geq 4\pi A,$$

*com a igualdade acontecendo se e somente se  $\gamma$  é um círculo.*

Na demonstração, usaremos as expressões (5.42) e (5.43) para a área  $A$  e o comprimento  $L$  de  $\gamma$  em termos da função suporte  $h$ , a saber,

$$A = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} (h^2 - h_\theta^2) d\theta, \quad L = \int_{\mathbb{T}} h d\theta.$$

Pelo Teorema 1.2.1,  $h$  e suas derivadas podem ser expandidas em séries de Fourier, com convergência uniforme. Assim,

$$h(\theta) = \sum_n a_n e^{in\theta}$$

e

$$h_\theta(\theta) = i \sum_{n \neq 0} n a_n e^{in\theta},$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} h(\theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

Em particular,

$$L = 2\pi a_0.$$

Por outro lado, por Plancherel (Teorema A.1.2),

$$\begin{aligned} \frac{A}{\pi} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (h^2 - h_\theta^2) d\theta \\ &= \sum_n |a_n|^2 - \sum_{n \neq 0} n^2 |a_n|^2 \\ &= a_0^2 + \sum_{n \neq 0} (1 - n^2) |a_n|^2 \\ &= \frac{L^2}{4\pi^2} + \sum_{|n| \geq 2} (1 - n^2) |a_n|^2. \end{aligned}$$

Isto claramente implica (B.1) com a igualdade acontecendo se e somente se  $a_n = 0$  para  $|n| \geq 2$ , caso em que

$$h(\theta) = a_0 + a_1 e^{i\theta} + a_{-1} e^{-i\theta},$$

donde

$$h_{\theta\theta}(\theta) = -a_1 e^{i\theta} - a_{-1} e^{-i\theta}.$$

Assim, podemos usar (5.38) para calcular a curvatura de  $\gamma$ :

$$\frac{1}{k} = h_{\theta\theta} + h = a_0,$$

ou seja,  $\gamma$  é um círculo de raio  $a_0$ , como desejado.

# Apêndice C

## O princípio do máximo parabólico

O Princípio do Máximo (Teorema 1.1.5) estende-se para soluções de equações bem mais gerais que a equação do calor homogênea. Mais precisamente, seja

$$(C.1) \quad Lu = a(t, \theta)u_{\theta\theta} + b(t, \theta)u_{\theta} + c(t, \theta)u - u_t$$

um operador diferencial linear atuando em funções  $u = u(t, \theta)$  definidas para  $(t, \theta) \in [0, T) \times \mathbb{T}$ ,  $T > 0$ . Suporemos que os coeficientes de  $L$  são contínuos e limitados e que  $L$  é parabólico no sentido que  $a(t, \theta) \geq \lambda$ , para algum  $\lambda > 0$ .

**Teorema C.0.8** (*Princípio do Máximo Parabólico I*) *Suponha que  $c = 0$  e seja  $u \in C^{1,2}([0, T) \times \mathbb{T})$  satisfazendo  $Lu \geq 0$ . Então  $u$  somente pode atingir seu máximo  $M_u$  em  $t = 0$ , a menos que  $u$  seja constante.*

A demonstração pode ser encontrada em [17].

A restrição  $c = 0$  em geral não pode ser relaxada, visto que, para  $\eta > 0$ ,  $u(t, \theta) = \cos \sqrt{\eta}\theta$  é uma solução de

$$u_t = u_{\theta\theta} + \eta u$$

que atinge seu máximo para  $\theta = 0$ . Neste sentido, o resultado a seguir é o melhor possível.

**Teorema C.0.9** (*Princípio do Máximo Parabólico II*) *As conclusões do Teorema C.0.8 permanecem válidas se  $c \leq 0$  e  $M_u \geq 0$ .*

Novamente, a demonstração pode ser encontrada em [17].

Observemos que se  $Lu \leq 0$  e  $c \geq 0$  conclui-se que  $u$  somente pode atingir seu mínimo  $m_u \leq 0$  em  $t = 0$ , a menos que  $u$  seja constante. Para ver isto, basta substituir  $u$  por  $-u$  nos resultados acima.

Existe uma situação em que a hipótese  $c \leq 0$  não se faz necessária. Com efeito, suponha que  $Lu \geq 0$  e seja  $v = e^{-\mu t}u$ ,  $\mu > 0$ . Então  $L_\mu v = e^{-\mu t}Lu \geq 0$ , onde  $L_\mu = L - \mu$ . Como  $c$  é limitada, podemos escolher  $\mu$  de modo que o coeficiente do termo de ordem zero em  $L_\mu$ , a saber,  $c - \mu$ , é negativo e portanto vale um Princípio do Máximo para  $v$ . Em particular, o resultado do Teorema C.0.9 é válido sem qualquer restrição sobre  $c$  desde que  $M_u = 0$ . Felizmente, este truque basta para estabelecer dois importantes resultados, a saber, os teoremas C.0.10 e C.0.11 abaixo.

**Teorema C.0.10** *Seja  $u : [0, T) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  solução de  $Lu = H$ , onde  $L$  é um operador uniformemente parabólico como em (C.1) com coeficientes contínuos e limitados. Suponha ainda que  $H$  é também contínua e limitada. Então*

$$|u|_{C^0([0, T) \times \mathbb{T})} \leq C,$$

onde  $C$  depende somente de  $T$ ,  $\min_\theta u(0, \cdot)$ ,  $\max_\theta u(0, \cdot)$  e de cotas superiores para as normas  $C^0$  de  $c$  e  $H$  em  $[0, T) \times \mathbb{T}$ .

Com efeito, substituindo  $u$  por  $e^{-\mu t}u$ , podemos supor que  $c \leq 0$ . Seja  $w = u - d$  com  $d > 0$ . Então,

$$Lw = H - dc \geq 0,$$

para  $d$  suficientemente grande. Se  $M_w \geq 0$  então  $w \leq \max_\theta w(0, \cdot)$ , pelo Teorema C.0.9. Caso contrário,  $w \leq 0$  e em qualquer caso temos uma cota superior para  $u$ . A cota inferior é obtida considerando  $w = u + d$ .

Passemos agora ao operador não-linear

$$(C.2) \quad \mathcal{L}u = \mathcal{F}(t, \theta, u, u_\theta, u_{\theta\theta}) - u_t$$

onde

$$\mathcal{F} : [0, T) \times \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}(t, \theta, u, p, q),$$

é suave em seus argumentos. Diremos que  $\mathcal{L}$  é *parabólico* em  $[0, T) \times \mathbb{T}$  com respeito a  $u : [0, T) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  se vale

$$\mathcal{F}_q(t, \theta, u, u_\theta, u_{\theta\theta}) > 0$$

em  $[0, T) \times \mathbb{T}$ .

Agora, sejam  $u$  satisfazendo  $\mathcal{L}u = H$ , onde  $H : [0, T) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e limitada e  $v$  satisfazendo  $\mathcal{L}v \leq H$ . Então  $w = u - v$  cumpre

$$\mathcal{F}(t, \theta, u, u_\theta, u_{\theta\theta}) - \mathcal{F}(t, \theta, v, v_\theta, v_{\theta\theta}) = w_t \geq 0.$$

Dado  $(t, \theta) \in [0, T) \times \mathbb{T}$ , pelo Teorema do Valor Médio existe  $\eta = \eta(t, \theta) \in (0, 1)$  tal que

$$\mathcal{F}(t, \theta, u, u_\theta, u_{\theta\theta}) - \mathcal{F}(t, \theta, v, v_\theta, v_{\theta\theta}) = \mathcal{F}_q(\xi)w_{\theta\theta} + \mathcal{F}_p(\xi)w_\theta + \mathcal{F}_u(\xi)w,$$

onde

$$\xi = (t, \theta, \eta u + (1 - \eta)v, \eta u_\theta + (1 - \eta)v_\theta, \eta u_{\theta\theta} + (1 - \eta)v_{\theta\theta}).$$

Logo,  $w$  satisfaz a inequação *linear* parabólica

$$\mathcal{F}_q(\xi)w_{\theta\theta} + \mathcal{F}_p(\xi)w_\theta + \mathcal{F}_u(\xi)w - w_t \geq 0.$$

Logo, se admitirmos que  $\mathcal{L}$  é parabólico em  $[0, T) \times \mathbb{T}$  com respeito a qualquer função da forma  $\eta u + (1 - \eta)v$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ , temos, pelo que vimos acima, que  $w \leq 0$  em  $t = 0$  implica  $w \leq 0$  em  $[0, T) \times \mathbb{T}$ . Noutras palavras, vale o Princípio de Comparação a seguir.

**Teorema C.0.11** *Suponha que  $u$  é solução de  $\mathcal{L}u = H$  em  $[0, T) \times T$  com  $u(0, \cdot) = f$ . Sejam ainda  $v$  e  $V$  satisfazendo*

$$\mathcal{L}V \leq H \leq \mathcal{L}v$$

*em  $[0, T) \times \mathbb{T}$  e suponha que  $\mathcal{L}$  é parabólico em  $[0, T) \times \mathbb{T}$  com respeito a qualquer função da forma  $\eta u + (1 - \eta)v$  ou  $\eta u + (1 - \eta)V$ , com  $0 \leq \eta \leq 1$ . Então,  $v(0, \theta) \leq f(\theta) \leq V(0, \theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{T}$ , implica*

$$v \leq u \leq V$$

*em  $[0, T) \times \mathbb{T}$ .*

Como aplicação, veremos agora que soluções de (5.52) com dado inicial positivo, também são únicas e, mais ainda, permanecem positivas enquanto existirem. Isto significa, obviamente, que o fluxo pela curvatura preserva convexidade.

Note que a equação de evolução para a curvatura  $k$  pode ser colocada na forma (C.2), onde  $\mathcal{F}(t, \theta, k, p, q) = k^2q + k^3$ , de modo que

$$(C.3) \quad \mathcal{F}_q = k^2.$$

Como a curva inicial é estritamente convexa, por continuidade, qualquer solução de (5.52) permanece positiva para  $0 \leq t \leq t_0$ ,  $t_0 > 0$ , e isto implica, por (C.3) e o Teorema C.0.11, não somente que a solução é única mas também que a equação é parabólica em  $[0, t_0) \times \mathbb{T}$  em relação à solução. Seja então

$$m_0 = \min_{\theta} \{k(0, \theta); \theta \in \mathbb{T}\} > 0,$$

e observe que

$$\tilde{k}(t, \theta) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - 2m_0^2 t}}$$

é solução de (5.52) com condição inicial  $\tilde{k}(0, \theta) = m_0$ . Tal função é estritamente crescente e está definida no intervalo  $[0, 1/2m_0^2)$ . Podemos agora comparar as soluções em  $[0, t_1)$ ,  $t_1 = \min\{t_0, 1/2m_0^2\}$ .

Para qualquer  $\eta \in (0, 1)$ , temos

$$\eta k + (1 - \eta)\tilde{k} \geq \min\{\eta, 1 - \eta\}(k + \tilde{k}) > 0,$$

donde

$$\mathcal{F}_q(\xi) = (\eta k + (1 - \eta)\tilde{k})^2 > 0,$$

de modo que, pelo Teorema C.0.11,

$$k(t, \theta) \geq \tilde{k}(t, \theta) \geq m_0, \quad 0 \leq t < t_1,$$

o que implica

$$\min_{\theta} k(t, \theta) \geq m_0.$$

Este argumento de fato mostra que a função

$$t \in [0, T) \mapsto m_t = \min_{\theta} k(t, \theta)$$

é não-decrescente. Isto não somente comprova que a convexidade é preservada mas fornece uma demonstração da estimativa (5.54).

Como outra aplicação do Princípio de Comparação pode-se facilmente verificar que o tempo maximal de qualquer solução de (5.52) está limitado superiormente por  $1/2k_{\min}(0)^2$ , onde  $k_{\min}(0) > 0$  é o mínimo da curvatura da curva inicial; veja o Teorema 5.3.5. Os detalhes são deixados ao leitor.

# Apêndice D

## Existência de soluções via Schauder

Vimos, em várias ocasiões ao longo do texto, as estimativas de Schauder serem usadas tanto para regularizar como para controlar, em normas apropriadas, soluções de equações parabólicas, tanto lineares quanto não-lineares. Neste apêndice mostraremos como estas estimativas podem ser utilizadas para estabelecer a *existência* de soluções para tais equações.

Começemos com o caso linear. Seja

$$Lu = a(t, \theta)u_{\theta\theta} + b(t, \theta)u_{\theta} + c(t, \theta)u - u_t$$

atuando em funções  $u : [0, T] \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ . Suporemos que  $L$  é uniformemente parabólico no sentido que  $0 < \lambda \leq a(t, \theta) \leq \Lambda$  para  $(t, \theta) \in [0, T] \times \mathbb{T}$ . Mais ainda, os coeficientes satisfazem

$$(D.1) \quad \|a\|_{C^{\alpha/2, \alpha}([0, T] \times \mathbb{T})} + \|b\|_{C^{\alpha/2, \alpha}([0, T] \times \mathbb{T})} + \|c\|_{C^{\alpha/2, \alpha}([0, T] \times \mathbb{T})} \leq C,$$

para  $C > 0$ . Queremos encontrar soluções para o PVI

$$(D.2) \quad \begin{cases} Lu = H \\ u(0, \cdot) = f \end{cases}$$

onde  $H \in C^{\alpha/2, \alpha}([0, T] \times \mathbb{T})$  e  $f \in C^{2+\alpha}(\mathbb{T})$ .

Usaremos o famoso *método da continuidade*, que apoia-se na família a um parâmetro de PVIs

$$(D.3) \quad \begin{cases} L_{\lambda}u = H \\ u(0, \cdot) = f \end{cases}$$

onde

$$L_{\lambda} = \lambda L + (1 - \lambda)L_0, \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

e

$$L_0 = u_{\theta\theta} - u_t.$$

Em particular, cada  $L_\lambda$  é uniformemente parabólico e seus coeficientes estão controlados como em (D.1), com  $C$  independente de  $\lambda$ .

Seja então  $\Sigma \subset [0, 1]$  o conjunto formado por aqueles valores de  $\lambda$  para o quais (D.3) possui uma única solução para cada  $H$  e  $f$ . Sabemos que  $\Sigma \neq \emptyset$  pois, pelo Teorema 2.3.1,  $0 \in \Sigma$ . Mostraremos a seguir que  $\Sigma$  é ao mesmo tempo aberto e fechado em  $[0, 1]$ , de modo que  $\Sigma = [0, 1]$ . Em particular,  $1 \in \Sigma$  e isso demonstra o teorema a seguir.

**Teorema D.0.12** *Para cada  $H \in C^{\alpha/2, \alpha}([0, T] \times \mathbb{T})$  e  $f \in C^{\alpha/2}(\mathbb{T})$  o PVI (D.2) possui uma única solução.*

Substituindo  $u$  por  $u - \tilde{u}$ , onde  $\tilde{u}$  coincide com  $f$  em  $\{0\} \times \mathbb{T}$ , podemos supor que  $f = 0$ . Para provar então que  $\Sigma$  é aberto, seja  $\lambda_0 \in \Sigma$  e reescrevamos a equação  $L_\lambda u = H$  como

$$L_{\lambda_0} u = F(u),$$

onde

$$F(u) = L_{\lambda_0} u - L_\lambda u + H.$$

Definamos a aplicação

$$\mathcal{A} : C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0, T] \times \mathbb{T}) \rightarrow C^{\alpha/2, \alpha}([0, T] \times \mathbb{T})$$

que a cada  $u$  associa a única solução  $v = \mathcal{A}(u)$  do PVI linear

$$(D.4) \quad \begin{cases} L_{\lambda_0} v = F(u) \\ u(0, \cdot) = 0 \end{cases}$$

Como  $F(u) \in C^{\alpha/2, \alpha}([0, T] \times \mathbb{T})$  e  $\lambda_0 \in \Sigma$ ,  $\mathcal{A}$  está bem definida. Note agora que existe  $C_1 > 0$  tal que

$$\|F(u)\|_{C^{\alpha/2, \alpha}([0, T] \times \mathbb{T})} \leq C_1 |\lambda - \lambda_0| \|u\|_{C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0, T] \times \mathbb{T})} + \|H\|_{C^{\alpha/2, \alpha}([0, T] \times \mathbb{T})},$$

de modo que, pelas estimativas de Schauder (Teorema 2.3.3), existe  $C_2 > 0$  tal que

$$\|u\|_{C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0, T] \times \mathbb{T})} \leq C_2 C_1 |\lambda - \lambda_0| \|u\|_{C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0, T] \times \mathbb{T})} + C_2 \|H\|_{C^{\alpha/2, \alpha}([0, T] \times \mathbb{T})}.$$

Aqui, usamos o Teorema C.0.10 de modo que  $C_2$  agora depende de  $T$ , o que não é relevante no argumento a seguir. Logo, se

$$B = \{u \in C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0, T] \times \mathbb{T}); \|u\|_{C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0, T] \times \mathbb{T})} \leq 2C_2 \|H\|_{C^{\alpha/2, \alpha}([0, T] \times \mathbb{T})}\}$$

e escolhermos  $\lambda$  de tal modo que

$$(D.5) \quad 2C_1C_2|\lambda - \lambda_0| \leq 1$$

então  $\mathcal{A}(B) \subset B$ . Note que  $B$  é um subconjunto *fechado* de um espaço de Banach.

Sejam agora  $v_1 = \mathcal{A}(u_1)$  e  $v_2 = \mathcal{A}(u_2)$  com  $u_1, u_2 \in B$ . Então  $v = v_1 - v_2$  satisfaz

$$\begin{cases} L_{\lambda_0}v &= L_{\lambda_0}(u_1 - u_2) - L_{\lambda}(u_1 - u_2) \\ v(0, \cdot) &= 0 \end{cases}$$

e se  $\lambda$  satisfaz (D.5), temos, novamente por Schauder,

$$\begin{aligned} \|v_1 - v_2\|_{C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0, T] \times \mathbb{T})} &\leq C_1C_2|\lambda - \lambda_0| \|u_1 - u_2\|_{C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0, T] \times \mathbb{T})} \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_1 - u_2\|_{C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0, T] \times \mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Noutras palavras,  $\mathcal{A} : B \rightarrow B$  é uma contração e o Teorema do ponto fixo de Banach [13] se aplica para garantir que existe  $u \in B$  com  $\mathcal{A}(u) = u$ . Mas isto significa precisamente que, para qualquer  $\lambda$  como em (D.5), (D.3) possui uma única solução para cada  $H$  e  $f$ , ou seja,  $\Sigma$  é aberto.

Para verificar que  $\Sigma$  é fechado, seja  $\{\lambda_n\} \subset \Sigma$  com  $\lambda_n \rightarrow \bar{\lambda}$ . Ora, para cada  $n$  existe uma única  $u_n$  solução de

$$(D.6) \quad \begin{cases} L_{\lambda_n}u_n &= H \\ u_n(0, \cdot) &= 0 \end{cases}$$

e Schauder garante a existência de  $K > 0$  *independente* de  $n$  tal que

$$\|u_n\|_{C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0, T] \times \mathbb{T})} \leq K \|H\|_{C^{\alpha/2, \alpha}([0, T] \times \mathbb{T})}$$

Por Ascoli-Arzelà (Teorema A.1.1), passando eventualmente a uma subsequência,  $u_n$  converge em  $C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{T})$  para alguma  $\bar{u}$  e tomando o limite em (D.6) vemos que

$$(D.7) \quad \begin{cases} L_{\bar{\lambda}}\bar{u} &= H \\ \bar{u}(0, \cdot) &= 0 \end{cases}$$

Isto conclui a demonstração do Teorema D.0.12 visto que a unicidade de  $\bar{u}$  segue do Teorema C.0.11.

De posse do Teorema D.0.12, vamos ao caso não-linear. Nosso objetivo é resolver o PVI

$$(D.8) \quad \begin{cases} u_t &= A(u)u_{\theta\theta} + B(u) \\ u(0, \cdot) &= f \end{cases}$$

onde  $A, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são suaves e  $f \in C^{2+\alpha}(\mathbb{T})$ . Por exemplo, se  $A(u) = u^2$  e  $B(u) = u^3$  recuperamos o PVI (5.52), que descreve a evolução de curvas planas pela curvatura.

Diremos que (D.8) é *parabólico* relativamente a  $f$  se  $A(f) > 0$ . Por exemplo, (5.52) é parabólico se  $k_0 > 0$ , ou seja, se a curva inicial é estritamente convexa.

**Teorema D.0.13** *Se o PVI (D.8) é parabólico relativamente a  $f$  então ele admite uma única solução suave em  $[0, \epsilon) \times T$ , para algum  $\epsilon > 0$ .*

Para a demonstração considere, para algum  $T > 0$ ,

$$\Psi : C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0, T) \times \mathbb{T}) \rightarrow C^{\alpha/2, \alpha}([0, T) \times \mathbb{T}) \times C^\alpha(\mathbb{T})$$

definida por

$$\Psi(u) = (A(u)u_{\theta\theta} + B(u) - u_t, u(0, \cdot)).$$

Se  $v \in C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0, T) \times \mathbb{T})$ , a derivada de  $\Psi$  em  $u$  na direção de  $v$  é dada pela expressão usual, a saber,

$$D\Psi_u(v) = \lim_{s \rightarrow 0} \Psi(u + sv)|_{s=0}.$$

Assim,

$$D\Psi_u(v) = (L^{(u)}v, v(0, \cdot)),$$

onde

$$L^{(u)}v = A(u)v_{\theta\theta} + (A'(u)u_{\theta\theta} + B'(u))v - v_t.$$

Este cálculo tem a seguinte consequência. Se (D.8) é parabólico relativamente a  $\tilde{f}$  e  $\tilde{u} : [0, T) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  é solução de (D.8), então o operador linear  $L^{(\tilde{u})}$  é parabólico em relação a  $\tilde{u}$  para  $T > 0$  suficientemente pequeno. Assim, o Teorema D.0.12 nos leva a concluir que

$$D\Psi_{\tilde{u}} : C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0, T) \times \mathbb{T}) \rightarrow C^{\alpha/2, \alpha}([0, T) \times \mathbb{T}) \times C^\alpha(\mathbb{T})$$

é sobrejetiva. Como a aplicação  $u \mapsto D\Psi_u$  é obviamente contínua, pelo Teorema da Função Inversa em espaços de Banach [4] existe  $\eta > 0$  tal que se

$$\|F - \tilde{F}\|_{C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0, T) \times \mathbb{T})} + \|f - \tilde{f}\|_{C^\alpha(\mathbb{T})} < \eta, \quad \tilde{F} = \Psi(\tilde{u}),$$

então existe  $u \in C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0, T) \times \mathbb{T})$  tal que  $\Psi(u) = (F, f)$ . Noutras palavras, no caso parabólico o conjunto de dados  $(F, f)$  para os quais é possível inverter  $\Psi$  é *aberto*. Verifiquemos agora que esta informação basta para demonstrar o Teorema D.0.13.

Com efeito, se (D.8) é parabólico relativamente a  $f \in C^{2+\alpha}(\mathbb{T})$ , escolha, para  $T > 0$  pequeno,  $\tilde{u}$  que restringe-se a  $f$  em  $\{0\} \times \mathbb{T}$  e satisfaz

$$\tilde{u}_t = A(\tilde{u})\tilde{u}_{\theta\theta} + B(\tilde{u})$$

em  $t = 0$ .<sup>1</sup> Seja

$$\tilde{F} = A(\tilde{u})\tilde{u}_{\theta\theta} + B(\tilde{u}) - \tilde{u}_t,$$

<sup>1</sup>Para isto, basta prescrever a série de Taylor de  $\tilde{u}$  em  $t = 0$  de maneira apropriada.

de forma que  $\tilde{F} = 0$  em  $t = 0$  e  $\Psi(\tilde{u}) = (\tilde{F}, f)$  em  $[0, T)$ . Agora, para cada  $\epsilon > 0$  defina  $\tilde{F}_\epsilon$  pondo  $\tilde{F}_\epsilon(t, \cdot) = \tilde{F}(t, \cdot)$  para  $0 \leq t \leq \epsilon$  e  $\tilde{F}_\epsilon(t, \cdot) = \tilde{F}(t - \epsilon, \cdot)$  para  $t \geq \epsilon$ . Assim,  $\tilde{F}_\epsilon = 0$  em  $[0, \epsilon)$ . Mas quando  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\tilde{F}_\epsilon$  converge para  $\tilde{F}$  e, pela discussão do parágrafo anterior, (D.8) admite uma solução em  $[0, \epsilon)$ . Que esta solução é suave decorre de um argumento de regularidade usando Schauder, conforme já vimos em outras ocasiões. A unicidade, por sua vez, é consequência do Teorema C.0.11.



# Referências Bibliográficas

- [1] Alencar, H., Santos, W., *Introdução às curvas planas*, IMPA, 2008.
- [2] Bartle, R. G., *The elements of integration and Lebesgue measure*, Wiley Interscience, 1995.
- [3] Brendle, S., *Ricci flow and the sphere theorem*, American Mathematical Society, 2010.
- [4] Dieudonné, J., *Foundations of modern analysis*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 10-I. Academic Press, New York-London, 1969.
- [5] Dohmen, D., Giga, Y., Mizoguchi, N., Existence of selfsimilar shrinking curves for anisotropic curvature flow equations, *Calc. Var. and PDE*, 4, 103-119 (1996).
- [6] Eells, J., Sampson, J. H., Harmonic mappings of Riemannian manifolds, *Amer. J. Math.*, 86 1964 109–160.
- [7] Eggleston, H. G., *Convexity*, Cambridge University Press, New York 1958.
- [8] Stein, E. M., Shakarchi, R., *Fourier analysis. An introduction.*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.
- [9] Friedman, A., *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1964.
- [10] M. Gage, R. S. Hamilton, The heat equation shrinking convex plane curves, *J. Diff. Geometry*, 23, 69-96 (1986).
- [11] M. Grayson, The heat equation shrinks embedded plane curves to round points, *J. Diff. Geometry*, 26, 285-314 (1987).
- [12] Gage, M., Li, Y., Evolving plane curves by curvature in relative geometries. II. *Duke Math. J.* 75 (1994), no. 1, 79-98.
- [13] Lima, E., *Espaço Métricos*, Projeto Euclides, IMPA.

- [14] Lima, E., *Curso de Análise*, vol. 2, Projeto Euclides, IMPA.
- [15] Lieberman, G. M., *Second order parabolic differential equations*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1996.
- [16] Morgan, J., Tian, G., *Ricci flow and the Poincaré conjecture*, Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2007.
- [17] Protter, M. H., Weinberger, H. F., *Maximum principles in differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [18] Rudin, W., *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.
- [19] J. Sotomayor, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, 1979.
- [20] Zhu, X.-P., *Lectures on mean curvature flows*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

# Índice Remissivo

- aplicação harmônica, 42
- aproximação da identidade, 13
- campo de tensão, 42
- campo variacional, 41
- campo variacional de uma variação, 61
- coeficientes de Fourier, 7, 11
- comprimento de uma curva, 52
- conjunto convexo, 59
- convolução, 13
- curva convexa, 56
- curva estritamente convexa, 58
- curva estritamente localmente convexa, 56
- curva fechada, 56
- curva fechada regular, 56
- curva fechada simples, 56
- curva localmente convexa, 56
- curva parametrizada, 51
- curva plana, 51
- curva regular, 51
- curvatura, 53
- desigualdade de Bessel, 12
- desigualdade isoperimétrica, 97
- distância de Hausdorff, 59
- energia, 4, 41
- equação quasi-linear, 25
- equação semi-linear, 35
- equação uniformemente parabólica, 33
- equações de Serret-Frenet, 54
- espaço de Banach, 86
- espaços de interpolação, 92
- espaços de Sobolev, 89
- fórmula do somatório de Poisson, 17, 18
- fórmula da primeira variação para o comprimento, 62
- fluxo das aplicações harmônicas, 43
- fluxo do calor, 5
- fluxo pela curvatura, 62
- função Hölder contínua, 84
- função variacional, 4, 36
- função suporte, 64
- homotetia, 63
- homotopia, 47
- método da continuidade, 103
- método de Fourier, 5
- núcleo do calor, 9, 16
- parâmetro comprimento de arco, 53
- parâmetro regular, 51
- princípio de Duhamel, 27
- relações de ortogonalidade, 6
- reparametrização, 51
- reta tangente a uma curva, 51
- rotação, 52
- série de Fourier, 11
- solução estacionária, 24
- solução global, 26, 35
- solução moderada, 28
- tempo maximal, 26
- teorema de Ascoli-Arzelà, 86
- teorema de seleção de Blaschke, 59
- traço de uma curva, 51

transformada de Fourier, 16

variação de uma função, 4

variação de uma curva, 60

velocidade de uma curva, 52

vetor normal, 53

vetor tangente , 52