A área e o perímetro de um círculo

Sônia Pinto de Carvalho

Universidade Federal de Minas Gerais

$1^{\underline{o}}$ Colóquio da Região Sudeste

Abril de 2011

Prefácio

O estudo do perímetro e da área de um círculo constitui-se, na vida escolar, no nosso primeiro encontro de verdade com a ideia de infinito. Entretanto, apesar da delicadeza do problema - ou talvez exatamente por causa dela - o que nos é normalmente apresentado são duas fórmulas, $2\pi R$ e πR^2, sem maiores comentários. A proposta deste minicurso é ir no sentido contrário e explorar o forte vínculo existente entre a estrutura da reta real e a definição e o cálculo do perímetro e da área do círculo. Adotaremos um enfoque predominantemente histórico para enfatizar as dificuldades inerentes ao entendimento desta estrutura e ressaltar as ideias que estão por trás destas definições.

Este tema já foi trabalhado por mim em uma disciplina optativa *Tópicos de Matemática: comprimentos, volumes e áreas*, ofertada por duas vezes para o Curso de Licenciatura em Matemática da UFMG. A montagem desta disciplina, e hoje deste minicurso, é resultado de muitos anos de estudo e de ensino, principalmente das disciplinas História das Ciências Exatas, Cálculo I, Análise Real, Iniciação à Matemática e Matemática e Escola III, que trata dos conceitos de geometria nos ensinos fundamental e médio.

Gostaria de agradecer aos alunos que cursaram estas disciplinas por me ensinarem muitas coisas e me ajudarem a organizar as ideias.

Gostaria de agradecer também aos professores Armando Neves, Bernardo Borges de Lima e Fábio Brochero que, ao longo dos dois semestres onde a disciplina foi ofertada, trouxeram novas ideias e discussões sobre π, área e comprimento do círculo.

Finalmente, meus agradecimentos aos professores Gabriel Franco, que teve a paciência de fazer quase todas as figuras que acompanham este texto, e Rodrigo Simões que transformou a penúltima versão deste texto em outro muito melhor.

Sumário

Prefácio **iii**

1 O aparecimento dos irracionais **1**

2 Quantos pontos há num segmento de reta? **7**

3 O Método de Exaustão **11**

4 A área de um círculo **15**
4.1 A constante universal dos círculos 15
4.2 Polígonos circunscritos 17

5 O perímetro de um círculo **21**

6 Que polígonos podemos usar? **25**
6.1 O caso da área 25
6.2 O caso do perímetro 27
6.3 Nem tudo que reluz é ouro 29

7 Área e perímetro do círculo nos livros didáticos **31**

8 π é irracional **37**

9 Algumas maneiras de estimar π **41**
9.1 Medindo círculos 42
9.2 Jogando dardos 44
9.3 Aproximando por polígonos 45
9.4 Usando funções trigonométricas 46
9.5 Usando séries 47
9.6 Ainda hoje... 49

Referências Bibliográficas **51**

Capítulo 1

O aparecimento dos irracionais

Tales, Anaximandro, Anaxímenes e Heráclito são os representantes mais ilustres da Escola Jônica, escola filosófica assim chamada por sua localização na Jônia, uma colônia grega na Ásia Menor.

Numa perspectiva geral, as ideias desenvolvidas pela escola jônica permitiram a passagem das explicações míticas, dadas pelas culturas egípcia e babilônica, para novas explicações de "origem e funcionamento do Universo que dispensavam a intervenção ou planificação dos deuses"[2]. Com esta passagem acontece simultaneamente (e necessariamente?) o nascimento do "espírito matemático", que vai do século VI ao III a.C, sendo Tales de Mileto ($\sim$625-$\sim$545 a.C.) seu primeiro artífice.

Não há nenhuma dúvida de que os gregos aprenderam muito com os egípcios e os babilônicos. Sabe-se que Tales andou pelo Egito e pela Babilônia, por razões comerciais, e aprendeu muita geometria e astronomia nestas viagens. Contudo a geometria que os gregos fazem tem algo de novo em relação às geometrias egípcia e babilônica. Estas últimas eram geometrias práticas, empíricas, visando o uso e os cálculos necessários a este uso, como volumes, áreas, comprimentos. Os desenhos são considerados por seu valor estético e prático. A planta de uma casa representa exatamente a casa e o desenho de uma pirâmide corresponde à pirâmide.

Já para os gregos, os desenhos são considerados como um conjunto de pontos no espaço, ligados entre si por linhas. Inovadoramente, eles passam a estudar relações abstratas entre grandezas de um desenho, já por si abstrato. O raciocínio pode ser levado sem considerações numéricas. Os relatos que temos de Tales dizem que ele trabalhou com a igualdade dos ângulos da base de um triângulo isósceles, com a bissecção de um círculo por qualquer diâmetro, com a congruência de triângulos tendo um lado e dois ângulos adjacentes iguais (o famoso ALA). Podem ser dele as afirmações de que "todo ângulo inscrito num semi-círculo é reto"ou "a soma dos ângulos internos de um triângulo é dois retos".

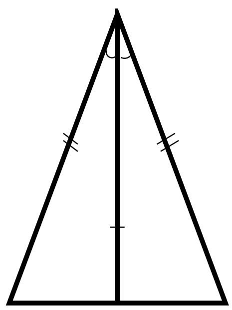
Tales porém vai ainda mais longe. O raciocínio típico de babilônicos e egípcios pode ser descrito da seguinte forma: "notamos que algo é verdadeiro cada vez que o observamos. Então passamos a admitir que será verdadeiro toda vez que observarmos." Este tipo de raciocínio é chamado de raciocínio **indutivo**[1] e nós o usamos muito em diversos ramos do conhecimento.

Tales segue por outro caminho: ele tenta mostrar que afirmações pouco evidentes

[1]não confundir esta indução (filosófica) com a indução matemática.

podem ser deduzidas de outras que todos concordam serem verdades e, assim, as pouco evidentes tornam-se verdade. Este raciocínio é o que se chama de **dedução**.

Por exemplo, Tales usa este raciocínio dedutivo para convencer os outros gregos, sempre céticos e incrédulos, de que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais. A idéia é: se traçarmos a bissetriz do ângulo compreendido entre os dois lados iguais de um triângulo isósceles, obteremos dois triângulos que têm dois lados iguais e um lado em comum e que os ângulos formados são iguais, pois traçamos a bissetriz. Ora, todos concordam que estes dois novos triângulos são iguais. Assim, os ângulos da base serão iguais.



Desta maneira, Tales trabalha com uma geometria de linhas e ângulos, abstrata, sem medidas, tentando provar as afirmações com o método da dedução.

Apesar de ter apontado para a possibilidade de deduzir resultados menos óbvios de afirmações de mais fácil aceitação, ele não pretendeu derivar todos os teoremas de um conjunto único de proposições, como fazemos hoje. Quem vem tentar construir um sistema coerente no qual todos os teoremas sejam deduzidos de uns poucos axiomas explicitamente afirmados são os membros da Escola Pitagórica.

Tales morre entre 550 e 540 a.C. Pitágoras, se existiu mesmo, nasceu entre 580 e 570 a.C. perto de Mileto, na ilha de Samos, indo mais tarde para Crótona, no sul da Itália. Em Crótona, fundou uma escola (sociedade, irmandade, seita, comunidade - na verdade não temos uma palavra boa para descrever o que Pitágoras fundou) fechada, baseada na propriedade comum, inclusive do conhecimento, na igualdade dos sexos [2] e numa disciplina estrita.

Essa sociedade é científica. Essa irmandade é mística. Nela, a fusão ciência e mito, razão e fé, se dá sem problemas.

Eles acreditavam na transmigração das almas, isto é, que as almas se reencarnam em homens, bichos ou plantas, de acordo com seu grau de evolução. E que era preciso se purificar para se chegar à perfeição. Para eles, a purificação - catarsis - vem através do conhecimento puro da contemplação passiva. A contemplação é priorizada com relação à ação. O mundo sensível é considerado menos verdadeiro do que o mundo da mente e, para encontrar a verdade, eles se voltam para o mundo ideal contido na mente.

Qual será a essência deste mundo? Eles observam que “fenômenos qualitativamente distintos exibem as mesmas propriedades matemáticas "[15], partindo, supõe-se, da descoberta de que a harmonia da música é dada por uma

[2] a comunidade pitagórica é das poucas da história onde as mulheres eram aceitas em igualdade com os homens. Pelo menos 28 mulheres são classificadas entre os pitagóricos, sendo a mais famosa Theano, professora e que escreveu tratados sobre física, matemática e medicina.

proporção estabelecida entre o comprimento das cordas. Então, a essência do mundo são números e relações numéricas.

Resumindo, eles estabeleceram dois princípios:

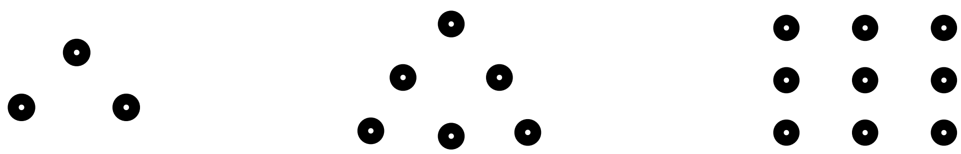
1. A natureza é construida de acordo com princípios matemáticos;

2. As relações numéricas delineam, unificam e revelam a ordem da natureza, ou seja, o cosmos (a ordem e a beleza do universo) tem sua origem nos números.

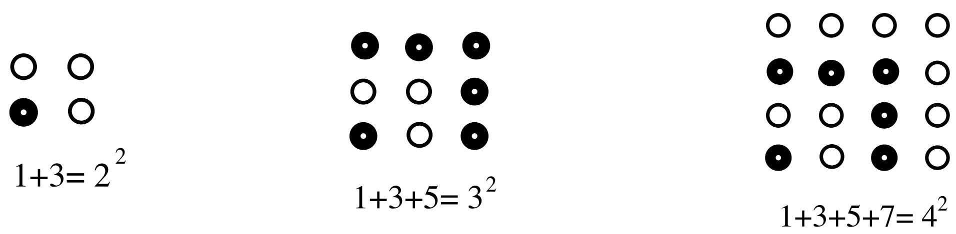
É bom ressaltar que hoje nós temos uma abstração dos números que os primeiros pitagóricos não tinham. Para eles os números eram só os números naturais e eram os pontos ou partículas que compõem a matéria, a menor parte possível de cada coisa.

É claro que com uma filosofia destas, eles vão estudar matemática. E o que se espera é que desenvolvam a aritmética, que é a parte da matemática que estuda os números inteiros. Mas eles desenvolvem principalmente a geometria pois os números, para eles, traduziam propriedades místicas e propriedades de forma. Por exemplo, 1 é a essência das coisas, 4 é o número perfeito, e logo a alma humana, 5 é a cor, 6 o frio, 7 a mente, a saúde e a luz, 8 o amor e a amizade.

Os números também eram classificados em pares e ímpares e também em triangulares, quadrados, etc. 3 é triangular, 6 é triangular, 9 é quadrado, como representado na figura.



Esta maneira de se servir do espaço para representar os números teve grande utilidade na aritmética pitagórica. Por exemplo, ao observarmos a figura abaixo notamos que $1+3 = 2^2$, $1+3+5 = 3^2$, $1+3+5+7 = 4^2$, de onde podemos inferir que $1+3+5+...+(2n+1)$ deve ser igual a $(n+1)^2$ para todo valor de n (para nós hoje a certeza da igualdade só pode ser garantida por uma demonstração [3]).



Além desta representação discreta dos números, eles também os interpretavam em termos de grandezas geométricas: comprimento, perímetro, área, volume. Assim, 3x2 é a área do retângulo de lados 3 e 2 e 3+2 é o semi-perímetro deste retângulo, ou seja, a soma dos comprimentos colocando-os lado a lado.

[3] A demonstração de hoje de que $1+3+5+...+(2n+1) = (n+1)^2$ é feita por indução. É fácil provar para $n = 1$, pois $1+3 = 4 = 2^2$. Suponhamos por indução que a fórmula seja válida para $n-1$, i.e., $1+3+5+...+(2(n-1)+1) = 1+3+5+...+(2n-1) = n^2$. Tomando n temos $1+3+5+...+(2n+1) = 1+3+5+...+(2n-1)+(2n+1) = n^2+(2n+1) = (n+1)^2$.

As frações aparecem com o significado de razão e proporção entre grandezas. Por exemplo, dois segmentos de comprimentos a e b tem a razão de 2 para 3 se $2b = b + b$ tem o mesmo tamanho que $3a = a + a + a$. Também dizemos que a e b são comensuráveis, na razão de 2 para 3.

A ideia de que o ponto é a menor porção da matéria, o tamanho a partir do qual não se pode mais dividir, vai colocar a escola Pitagórica numa posição complicada. Se os pontos são a menor porção então um segmento de reta é como um colar de contas: contém um número, talvez enorme, mas finito, de pontos enfileirados, que compõem o segmento. Chamemos de n este número. O comprimento do segmento terá que ser, então, um múltiplo de n.

Dados dois segmentos distintos, com n e m pontos, respectivamente, a razão entre seus comprimentos tem que ser a mesma que entre n e m. Ou seja, dois segmentos são sempre o que chamamos de comensuráveis: m cópias do primeiro tem o mesmo comprimento que n cópias do segundo.

Veio então o grande golpe contra a escola pitagórica: aplicando o "Teorema de Pitágoras"[4] ao cálculo da diagonal do quadrado de lado com comprimento 1, chegaram ao não número, ao indizível, ao incomensurável, ao irracional $\sqrt{2}$.

O raciocínio que fizeram foi: como dois segmentos são sempre comensuráveis então existem m e n números inteiros tais que m vezes o comprimento da diagonal será igual a n vezes o comprimento do lado, ou seja, $m \times \sqrt{2} = n \times 1$. Podemos supor que n e m são primos entre si, pois senão dividiríamos a igualdade pelo fator comum. Elevando ao quadrado tem-se que $2m^2 = n^2$ e assim n^2 é um número par.

Por outro lado, se p é um número ímpar, $p = 2q + 1$ e $p^2 = 4q^2 + 2q + 1 = 2(2q^2 + q) + 1$, isto é, p^2 também é ímpar. Como n^2 é par, n não pode ser ímpar, pois se o fosse, seu quadrado seria ímpar. Logo n é um número par, isto é, $n = 2j$ para algum inteiro j.

Como n é par e m e n são primos entre si, m tem que ser ímpar, pois senão 2 seria um fator comum. Mas $2m^2 = n^2 = (2j)^2 = 2(2j^2)$, ou seja, o quadrado de m é par e logo m não pode ser ímpar. Isto diz que há algo de errado no começo deste raciocínio, ou seja, não está certo que $m \times \sqrt{2} = n \times 1$. Logo, os dois segmentos (lado e diagonal) não são comensuráveis (ou, numa linguagem moderna, $\sqrt{2}$ não é uma fração, um número racional).

Os pitagóricos se depararam então com um comprimento, algo desenhável e existente, que não estava em proporção com as outras linhas da figura! Isto foi uma verdadeira paulada na filosofia deles.

Os pitagóricos conseguiram dar a volta por cima e a escola sobreviveu ao golpe. Ela "possuia a elástica adaptabilidade de todos os sistemas ideológicos verdadeiramente grandes"[17]. O grande golpe mesmo foi a dissolução da Irmandade por volta de 500 a.C. As causas da dissolução variam de autor para autor. A.Koestler [17] acha que tem "a ver com os princípios igualitários e a prática comunista da ordem, a emancipação das mulheres e a doutrina quase monoteísta". Já Hull [14] acha que foram o poder e os objetivos políticos dessa sociedade tão bem organizada que assustaram aos governos das outras cidades.

[4] o famoso Teorema de Pitágoras já era conhecido dos egípcios, pelo menos no caso 3,4,5 e dos babilônicos, que possuíam tabelas de números que verificavam a relação dada pelo teorema. Pitágoras também o conhecia, mas não se sabe como o demonstrou.

Seja como for, a influência da Escola Pitagórica se faz sentir até hoje. Palavras como filosofia e harmonia foram inventadas por eles. O adjetivo racional vem da filosofia pitagórica. E expressões como quadrado de um número, cubo de um número, nos levam à sua maneira de pensar.

Dentro da ciência e da história da ciência, vale ressaltar que:

- na ciência "os pitagóricos criaram a possibilidade de lidar com quantidades físicas, reduzindo-as a medidas e a números"[2];
- na matemática, estabeleceram o método de prova a partir de postulados, usando o raciocínio dedutivo;
- na filosofia, a postura de que a realidade se encontra no mundo da mente vai, um pouco mais tarde, fazer a cabeça de Platão e sobrevive até hoje.

Capítulo 2

Quantos pontos há num segmento de reta?

O problema colocado pela descoberta dos irracionais pelos pitagóricos me parece bem definido por Arnold Reymond [25]:"O realismo aritmético, ingenuamente proclamado pelos pitagóricos, foi derrubado pela descoberta de que, num quadrado, a diagonal e o lado são incomensuráveis. Se o espaço é número ou razão entre números, esta descoberta é desconcertante. Os pitagóricos, sem dúvida, não pretendem avaliar o número de pontos que compõem, de fato, um segmento de reta, mas afirmam que este número existe e que é forçosamente inteiro, já que o ponto é indivisível. Entre duas retas de comprimentos diferentes A e B, deve então existir uma relação A/B na qual A e B, representando uma soma de pontos, são necessariamente dois números inteiros."[1]

No fundo, o que os pitagóricos afirmam é que um segmento de reta não pode ser infinitamente divisível. Ele só pode ser dividido até se chegar em sua parte menor, indivisível: o ponto.

O tempo passa, a Irmandade Pitagórica foi destruída, mas continuam existindo seguidores de suas idéias. Atenas torna-se o centro cultural do mundo grego, surgindo aí a Escola dos Sofistas, da palavra grega sofia que significa sabedoria. Eles dão aulas de retórica, matemática, filosofia e astronomia e são os primeiros a aceitar pagamento pelas aulas ministradas.

Os principais sofistas, do ponto de vista da matemática, são Hipócrates de Quiós ($\sim$430 a.C.), que não deve ser confundido com seu homônimo médico, Antifonte, contemporâneo de Hipócrates, e Hípias de Elis, que nasceu por volta de 460 a.C. Eles trabalhavam em geometria, com construções com régua e compasso, essencialmente em cima de três problemas:

- a trissecção do ângulo, isto é, dividir um ângulo dado em 3 partes iguais;
- a duplicação do cubo, isto é, determinar a aresta de um cubo cujo volume seja o dobro de um cubo dado;
- a quadratura do círculo, isto é, determinar o lado do quadrado cuja área seja a de um círculo dado.

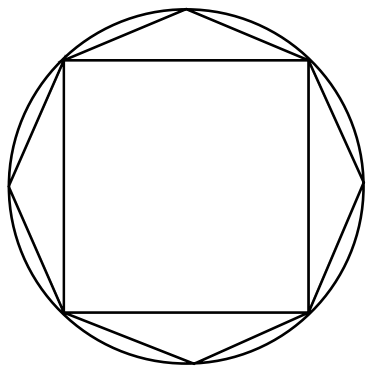
Apesar dos sofistas terem feito muitas coisas, aqui discutiremos apenas um trabalho de Antifonte relacionado com a quadratura do círculo. Ele nos ajudará a compreender

[1] em francês no original

como se colocou, definitivamente, na história da matemática a questão de saber a natureza dos pontos em um segmento de reta.

Achar o lado do quadrado de mesma área que um círculo é apenas uma maneira grega de dizer que queremos calcular a área do círculo. Antifonte parece ter raciocinado da seguinte maneira: sei calcular a área polígonos regulares, pois sabemos calcular a área de triângulos e podemos decompor qualquer polígono em triângulos. Então é isso que devo usar para tentar quadrar o círculo.

Assim, Antifonte "bolou" o seguinte método: tome um círculo e inscreva nele um quadrado. Sobre cada lado do quadrado, coloque um triângulo isósceles cujos vértices estão sobre o círculo, obtendo um octógono. Continue o processo sobre os lados do octógono. E faça sempre do mesmo jeito.



Pensou Antifonte: se um segmento de reta tem um número finito de pontos, então um círculo também terá um número finito de pontos. Este número de pontos será então o maior número de lados que posso ter num polígono inscrito num círculo. Sendo assim, um círculo é um polígono regular com um número (grande) de lados e como sei quadrar qualquer polígono, sei quadrar um círculo![2]

Esta solução apresentada por Antifonte vai causar muita polêmica. Aceitá-la significa aceitar que um arco de círculo coincide com um segmento de reta. Não aceitá-la implica assumir a infinita divisibilidade de uma linha, pois poderemos sempre tomar o ponto médio do arco de círculo e traçar um polígono com um número maior de lados.

É exatamente em cima desta polêmica que Zenão de Eléia (∼450 a.C.), discípulo de Parmênides, vem defender a posição de seu mestre. Parmênides afirmava que o movimento não existe, que seria mera aparência e Zenão cria seus famosos paradoxos com o intuito de provar esta afirmação.

Suponhamos, dizia Zenão, a infinita divisibilidade da reta. Para irmos de um ponto a outro temos que passar pelo ponto médio. Se existem infinitos pontos médios... nunca chegaremos ao fim do segmento (este paradoxo é enunciado por Zenão como a história de Aquiles e o estádio).

Temos então que supor que uma reta não pode ser dividida infinitamente, se acreditamos na realidade do movimento.

[2]Repare que, para Antifonte, os pontos dos extremos dos lados do polígono (os vértices) são diferentes dos pontos que formam o próprio segmento. Isto talvez se deva ao fato da inspiração para a geometria abstrata dos gregos vir da astronomia - nas constelações, os vértices são as estrelas e os lados são segmentos que imaginamos existir, mas não existem de verdade no céu. Logo, os vértices e os lados são de natureza distinta.

Tomemos, pois, uma flecha em movimento durante um certo intervalo de tempo $\triangle T$. Já que o movimento existe, este intervalo de tempo $\triangle T$ só terá um número finito de instantes. Em cada instante, a flecha estará parada, como numa fotografia. Como uma coleção finita de flechas paradas não pode estar em movimento concluímos que o movimento não existe! Ele é só uma ilusão dos nossos sentidos.[3].

Zenão criou um problema sério para a matemática, que só será resolvido muito mais tarde, no século XIX: a questão do contínuo (um segmento de reta tem que ser algo contínuo, não pode ser um ponto e depois outro ponto e assim por diante), ligada à questão do infinito.

Uma primeira resposta foi dada por Eudoxo ($\sim$408-$\sim$355 a.C.), que supõe a infinita divisibilidade da reta e cria o "Método de Exaustão" para calcular a área do círculo. Ele usa a mesma idéia de Antifonte só que, ao supor que o segmento de reta pode ser dividido infinitamente, afirma que os polígonos se aproximam do círculo mas nunca coincidem com ele. Isto implica que não se pode calcular a área do círculo com um número finito de cálculos. Eudoxo cria seu método para dar conta deste problema, como veremos no próximo capítulo.

Como afirma C.H.Edwards Jr., em [10] :"A chave do sucesso de Eudoxo (como acontece quase sempre na matemática) foi a boa formulação de uma definição de proporcionalidade entre razões de grandezas geométricas".

[3]Se pensarmos como funciona o cinema em película de celulóide entenderemos melhor o que dizia Zenão: em cada instante, temos uma fotografia e tudo está parado. Mas ao passar as fotografias pela máquina de projeção, temos a impressão de que as coisas se movem.

Capítulo 3

O Método de Exaustão

Neste capítulo apresentamos a brilhante solução de Eudoxo para o problema de se calcular a área de um círculo. A principal fonte usada é o livro de C.H.Edwards [10]. Usaremos nossas notação e linguagem modernas.

Eudoxo começa propondo a seguinte definição de grandezas proporcionais:

Definição 3.1 *Sejam dadas quatro grandezas a, b, c e d e suas razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$. Temos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, para toda fração $\frac{m}{n}$, acontece um dos seguintes casos:*

$$\text{ou} \quad \frac{m}{n} < \frac{a}{b} \quad \text{e} \quad \frac{m}{n} < \frac{c}{d}, \quad \text{isto é, ou a fração é menor que ambas;}$$

$$\text{ou} \quad \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \quad \text{e} \quad \frac{m}{n} = \frac{c}{d} \quad \text{isto é, ou a fração é igual a ambas;}$$

$$\text{ou} \quad \frac{m}{n} > \frac{a}{b} \quad \text{e} \quad \frac{m}{n} > \frac{c}{d} \quad \text{isto é, ou a fração é maior que ambas.}$$

Ou seja, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ não podemos ter uma fração que "separe" $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{d}$, que esteja entre as duas.

A ideia intuitiva que parece estar por trás desta definição é: tome um número real a. As frações $\frac{m}{n}$ se dividem em três grupos: as que são menores, as que são iguais e as maiores que a:

$$L_a = \{\frac{m}{n} < a\}, \;\; I_a = \{\frac{m}{n} = a\}, \;\; U_a = \{\frac{m}{n} > a\}.$$

Esta maneira de ver os números reais vai inspirar a definição de número real dada por Dedekind (1831-1916), os chamados cortes de Dedekind[1].

Usando esta ideia e o fato de que o conjunto dos naturais não é limitado superiormente, podemos concluir dois resultados:

Teorema 3.2 *Dado um número real $a > 0$ existe um inteiro $n_0 > 0$ tal que $\frac{1}{n_0} < a$.*

Demonstração: A prova deste resultado é simples, pois dado a existem três opções para uma fração $\frac{1}{n}$. Podemos ter $\frac{1}{n} < a$ e então achamos o resultado. Podemos ter $\frac{1}{n} = a$ e assim $\frac{1}{n+1} < a$ e achamos o que queríamos.

[1]Uma boa referência para ver como isto é feito é o livro do Spivak [28].

Suponhamos então, por absurdo, que estes dois casos não possam acontecer. Então $\frac{1}{n} > a$ para todo número inteiro positivo n. Teremos que $n < \frac{1}{a}$, $\forall n > 0$ ou seja, o conjunto dos naturais é limitado, o que é absurdo.

Logo, existe n_0 tal que $\frac{1}{n_0} < a$. □

O próximo resultado é conhecido como o Princípio de Arquimedes e será fundamental no raciocínio de Eudoxo para achar a área do círculo:

Teorema 3.3 *Dados dois números reais positivos a e b existe um número inteiro positivo n tal que na > b.*

Demonstração: Para prová-lo basta aplicar o teorema 3.2 ao número $\frac{a}{b}$. □

Para calcular áreas os gregos partem de dois princípios, onde $a(S)$ significa a área de uma figura S:

1. se a figura S está contida numa figura T então $a(S) \leq a(T)$.

2. se a figura R é a união das figuras S e T, sem superposição de áreas, então $a(R) = a(S) + a(T)$.

Se S não é um polígono, aplicam a ideia de Antifonte de tomar uma sequência de polígonos $P_1, P_2, P_3, ...$ que preenchem ou exaurem S.

No fundo, estão quase que tomando $\lim_{n\to\infty} a(P_n)$ para obter a área $a(S)$. Mas gregos não tomam limites. Muito ao contrário, eles têm uma certa aversão ao infinito. Não conseguem montar uma estrutura lógica que dê conta desta questão.

Será preciso então "calcular" o limite com um número finito de passos. É com esta perspectiva que Eudoxo inventa o "Método da Exaustão", que se encontra no livro X dos Elementos de Euclides [13]:

Duas grandezas desiguais sendo dadas, se da maior for tirada uma grandeza maior do que sua metade e este processo for repetido continuadamente, sobrará uma grandeza menor do que a menor grandeza dada.

Traduzindo em "matematiquês" moderno:

Teorema 3.4 *Sejam M_0 e ϵ duas grandezas, com $M_0 > \epsilon$. Tomamos $M_1 = M_0 - x$, onde $x > \frac{1}{2}M_0$, ou seja, $M_1 < \frac{1}{2}M_0$. Depois tomamos $M_2 = M_1 - y$, onde $y > \frac{1}{2}M_1$, ou seja, $M_2 < \frac{1}{2}M_1$. E assim sucessivamente de modo a termos uma sequência $M_0, M_1, M_2, ...$, onde $M_1 < \frac{1}{2}M_0, M_2 < \frac{1}{2}M_1$, etc. Então existe um N tal que $M_N < \epsilon$.*

Demonstração: A prova deste resultado depende do Princípio de Arquimedes. Como $M_0 > \epsilon$, existe N inteiro positivo tal que $(N+1)\epsilon > M_0$. É claro que $N+1 \geq 2$ e segue-se que $\frac{1}{2}(N+1)\epsilon \geq \epsilon$.

Temos então que $(N+1)\epsilon = N\epsilon + \epsilon > M_0$ ou seja

$$N\epsilon > M_0 - \epsilon \geq M_0 - \frac{1}{2}(N+1)\epsilon > M_0 - \frac{1}{2}M_0 = \frac{1}{2}M_0 > M_1,$$

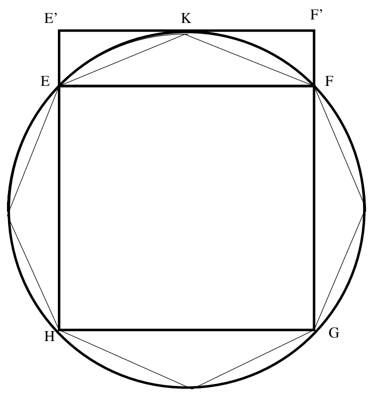
ou seja, $(N+1)\epsilon > M_0$ implica que $N\epsilon > M_1$. Continuando o raciocínio, vemos que $N\epsilon > M_1$ implica que $(N-1)\epsilon = N\epsilon - \epsilon \geq M_1 - \epsilon \geq \frac{1}{2}M_1 > M_2$, e assim sucessivamente até chegarmos em $\epsilon > M_N$. □

Eudoxo assume que um segmento de reta pode ser infinitamente dividido. Logo um círculo não é um polígono de muitos lados. O método de exaustão é então usado para mostrar o seguinte resultado:

Teorema 3.5 *Dado um círculo C e um erro ϵ, existe um polígono regular P, inscrito em C tal que $a(C) - a(P) < \epsilon$.*

Demonstração: Comecemos com um quadrado $P_0 = EFGH$ e tomemos a grandeza $M_0 = a(C) - a(P_0)$. Tomemos agora P_1 o octógno construído sobre os pontos médios e $M_1 = a(C) - a(P_1)$ e assim sucessivamente, obtendo as sequências $P_0, P_1, P_2, ..., P_n, ...$, onde P_n tem 2^{n+2} lados e $M_n = a(C) - a(P_n)$.

Precisamos mostrar que $M_n - M_{n+1} > \frac{1}{2}M_n$ e logo $M_{n+1} < \frac{1}{2}M_n$, de modo que, pelo método da exaustão, existe N tal que $a(C) - a(P_N) < \epsilon$.



Anotando por $\widetilde{EKF}$ a área entre a corda EKF e o círculo temos

$$\begin{aligned} M_0 - M_1 &= a(C) - a(P_0) - a(C) + a(P_1) = a(P_1) - a(P_0) \\ &= 4a(\triangle EFK) = 2a(EE'FF') > 2a(\widetilde{EKF}) \\ 2a(\widetilde{EKF}) &= \frac{1}{2}4a(\widetilde{EKF}) = \frac{1}{2}(a(C) - a(P_0)) = \frac{1}{2}M_0 \end{aligned}$$

Logo

$$M_0 - M_1 > \frac{1}{2}M_0.$$

O mesmo raciocínio mostra que

$$M_n - M_{n+1} = a(P_{n+1}) - a(P_n) > \frac{1}{2}(a(C) - a(P_n)) = \frac{1}{2}M_n$$

e concluimos que existe N tal que $a(C) - a(P_N) < \epsilon$. □

Usando o método de exaustão, os gregos vão determinar a área do círculo. No livro XII dos Elementos de Euclides [13] encontramos o seguinte teorema:

Teorema 3.6 *Dados dois círculos C_1 e C_2 de raios r_1 e r_2 então a razão entre suas áreas é a mesma que a razão entre as áreas dos quadrados de lados r_1 e r_2, ou seja*

$$\frac{a(C_1)}{a(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2}. \tag{1}$$

Demonstração: Para as quatro grandezas $a(C_1), a(C_2), r_1$ e r_2 temos 3 opções:

$$\text{ou} \quad \frac{a(C_1)}{a(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad \text{ou} \quad \frac{a(C_1)}{a(C_2)} > \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad \text{ou} \quad \frac{a(C_1)}{a(C_2)} < \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Se provarmos que as duas últimas não valem, o teorema estará provado (este é um típico modo de demonstração dos gregos, chamado de *dupla redução ao absurdo*).

Suponhamos primeiro que

$$\frac{a(C_1)}{a(C_2)} < \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad \text{ou} \quad a(C_2) > \frac{a(C_1)r_2^2}{r_1^2} = S$$

e seja $\epsilon = a(C_2) - S > 0$. Pelo resultado anterior, existe um polígono regular P_2 inscrito em C_2 tal que $a(C_2) - a(P_2) < \epsilon = a(C_2) - S$. Logo, $a(P_2) > S$.

Seja P_1 um polígono regular, inscrito em C_1 e semelhante a P_2. Não é difícil mostrar que

$$\frac{a(P_1)}{a(P_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{a(C_1)}{S}.$$

Segue-se que

$$\frac{S}{a(P_2)} = \frac{a(C_1)}{a(P_1)} > 1.$$

Logo, $a(P_2) < S$, o que é um absurdo. Assim, a hipótese de que $\frac{a(C_1)}{a(C_2)} < \frac{r_1^2}{r_2^2}$ é falsa.

Invertendo os papéis dos dois círculos, vemos que a outra desigualdade também é falsa e obtemos

$$\frac{a(C_1)}{a(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

como desejado. □

Repare que os gregos não acham uma fórmula para o cálculo da área do círculo. Eles não fazem o que nós fazemos, que é reescrever a equação (1) como:

$$\frac{a(C_1)}{r_1^2} = \frac{a(C_2)}{r_2^2}$$

e chamar de π o valor comum da razão entre a área e o quadrado do raio de um círculo qualquer. Os gregos não podiam fazê-lo porque (1) é uma proporção entre áreas e não uma igualdade numérica.

Capítulo 4

A área de um círculo

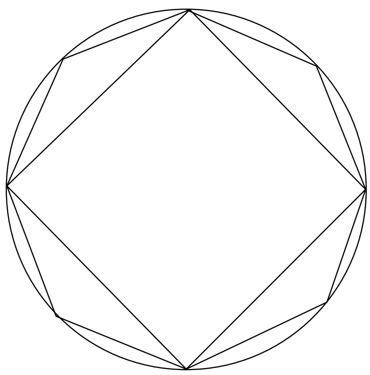
4.1 A constante universal dos círculos

Neste capítulo vamos provar de novo, mas agora usando ideas e conceitos mais novos, o resultado de Eudoxo e Euclides de que, dados dois círculos C_1 e C_2 de raios r_1 e r_2, a razão entre suas áreas é a mesma que a razão entre as áreas dos quadrados de lados r_1 e r_2, ou seja, que

$$\frac{a(C_1)}{a(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Vamos usar a proposta de Antifonte, isto é, ir tomando polígonos com cada vez mais lados, de maneira a estar cada vez mais perto da área do círculo.

Dado um círculo C de raio R, começamos o processo construindo um quadrado inscrito. Tomando o ponto médio de cada arco ligando dois vértices construímos um octógono inscrito e assim sucessivamente vamos construindo polígonos regulares inscritos p_n com 2^n lados, $n \geq 2$. Temos que p_2 é o quadrado inscrito, p_3 é o octógono, p_4 é o polígono regular inscrito com $2^4 = 16$ lados (um hexadecágono) e assim por diante.



Seja a_n a área de p_n. Por construção temos que

$$0 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots \qquad (1)$$

A área $a(C)$ do círculo é definida como sendo o $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ se este limite existir, ou seja, se este processo infinito nos fornecer um número.

Ora, a sequência $\{a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots\}$ é crescente , como mostra a relação (1), e só tem duas opções: ou cresce, cresce, cresce, sem parar, ou, ao aumentarmos o n, chegamos cada vez mais perto de um número, o que garantirá que o limite existe.

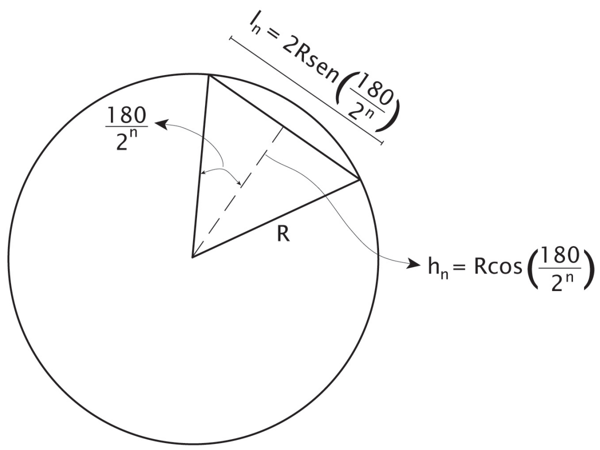
Tomemos então o quadrado P_2 circunscrito ao círculo. Temos que sua área, $(2R)^2$, é maior do que a área de qualquer polígono inscrito. Logo

$$0 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots < 4R^2$$

e a sequência $\{a_n\}$ não pode crescer indefinidamente. Logo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe e $a(C)$ é um número bem definido, verificando $a(C) \leq 4R^2$.

Para calcularmos este limite, observemos que o polígono regular inscrito p_n tem 2^n lados e logo é a união de 2^n triângulos isósceles idênticos. Chamemos o comprimento do lado de l_n e de h_n a altura relativa ao lado. Como o ângulo do vértice oposto ao lado do polígono vale $\dfrac{360}{2^n}$ e usando as definições de seno (cateto oposto/hipotenusa) e cosseno (cateto adjacente/hipotenusa) obtemos

$$l_n = 2R \operatorname{sen}\left(\frac{180}{2^n}\right) \quad \text{e} \quad h_n = R\cos\left(\frac{180}{2^n}\right).$$



Assim

$$a_n = 2^n\left(\frac{1}{2}l_n h_n\right) = 2^n R^2 \operatorname{sen}\left(\frac{180}{2^n}\right)\cos\left(\frac{180}{2^n}\right),$$

a área do círculo é

$$a(C) = \lim_{n\to\infty}\left(2^n R^2 \operatorname{sen}\left(\frac{180}{2^n}\right)\cos\left(\frac{180}{2^n}\right)\right)$$

e como

$$\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{180}{2^n}\right) = \cos\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{180}{2^n}\right)\right) = 1$$

temos que

$$a(C) = R^2 \lim_{n\to\infty}\left(2^n \operatorname{sen}\left(\frac{180}{2^n}\right)\right). \tag{2}$$

Se um círculo C_1 tem raio R_1 então $a_n = 2^n R_1^2 \operatorname{sen}\left(\frac{180}{2^n}\right)\cos\left(\frac{180}{2^n}\right)$ e sua área é $a(C_1) = R_1^2 \lim_{n\to\infty}\left(2^n \operatorname{sen}\left(\frac{180}{2^n}\right)\right)$.

Para um círculo C_2 de raio R_2, a área é $a(C_2) = R_2^2 \lim_{n\to\infty}\left(2^n \operatorname{sen}\left(\frac{180}{2^n}\right)\right)$.

Logo

$$\frac{a(C_1)}{R_1^2} = \lim_{n\to\infty} 2^n \operatorname{sen}\frac{180}{2^n} = \frac{a(C_2)}{R_2^2},$$

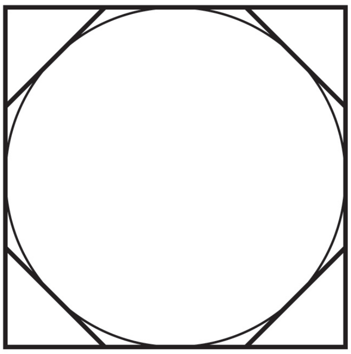
ou seja, $\frac{a(C)}{R^2}$ **dá sempre o mesmo número, qualquer que seja o círculo**.

Esta constante universal dos círculos, o número $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^n \operatorname{sen}\left(\dfrac{180}{2^n}\right)\right) = \dfrac{a(C)}{R^2}$ é o que convencionamos chamar de π. Usando esta convenção, obtemos a tradicional fórmula

$$a(C) = \pi R^2.$$

4.2 Polígonos circunscritos

E se , em vez de tomarmos os polígonos inscritos, tivéssemos pego polígonos regulares circunscritos com 2^n lados?



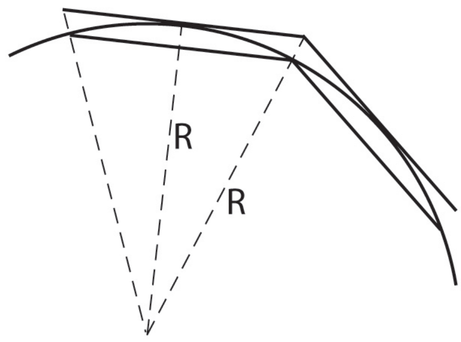
Como no caso dos polígonos inscritos, começamos tomando um quadrado circunscrito P_2 e recortamos de maneira a obter primeiro um octógono P_3 e assim por diante, construindo polígonos regulares circunscritos P_n com 2^n lados.

Chamando de A_n a área de P_n teremos, por construção, que

$$2R^2 = a_4 < \ldots < A_{n+1} < A_n < \ldots < A_4 < A_3 < A_2 = 4R^2$$

onde $a_4 = 4R^2$ é a área do quadrado inscrito no círculo. De maneira análoga ao caso anterior, como a sequência $\{A_n\}$ não pode decrescer indefinidamente, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ existe e intuitivamente achamos que este limite também deveria ser a área do círculo. Para provar que realmente o é devemos mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Sejam então p_n e P_n os polígonos inscrito e circunscrito, respectivamente, com 2^n lados. Cada um deles é composto por 2^n triângulos isósceles, com alturas $h_n = R\cos\dfrac{180}{2^n}$ (para o inscrito) e $H_n = R$ (para o circunscrito).



Como estes triângulos são semelhantes, teremos que a_n e A_n verificam

$$\frac{a_n}{A_n} = \left(\frac{h_n}{H_n}\right)^2 = \cos^2 \frac{180}{2^n}.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty}(A_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}(A_n - A_n \cos^2 \frac{180}{2^n}) = \lim_{n\to\infty} A_n(1 - \cos^2 \frac{180}{2^n}) = 0$$

pois $A_n \leq 4R^2$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \cos \dfrac{180}{2^n} = 1$.

E assim, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ e a área do círculo pode ser definida tomando-se polígonos regulares de 2^n lados, tanto inscritos quanto circunscritos.

Vamos terminar este capítulo fazendo uma conta engraçada. Pelo visto acima, sabemos que $a(C) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n \leq 4R^2$. Logo, usando a equação (2), temos que

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \operatorname{sen} \frac{180}{2^n} = \frac{a(C)}{R^2} \leq 4.$$

Chamando $\dfrac{180}{2^n}$ de x e lembrando que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ obtemos

$$180 = 180 \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{n\to\infty} 2^n \operatorname{sen} \frac{180}{2^n} \leq 4, \tag{3}$$

e como chamamos de π o $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \operatorname{sen} \dfrac{180}{2^n}$ provamos que

$$\pi = 180 \leq 4.$$

O que fizemos de errado? O erro está em supor que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ qualquer que seja a maneira como medimos o ângulo x. Este limite só vale 1 se o ângulo x estiver sendo medido em radianos e nossos ângulos foram medidos em graus. Se um ângulo θ está em graus, o que temos que fazer é lembrar que sua medida y em radianos verifica $y = \dfrac{180}{\pi}\theta$ e que, mesmo tendo medidas diferentes, definem um mesmo ângulo e logo o valor do seno é o mesmo para os dois, ou seja, $\operatorname{sen} y = \operatorname{sen} \theta$. Teremos então que

$$\frac{\operatorname{sen} y}{y} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\frac{180}{\pi}\theta} = \frac{\pi}{180} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}$$

e

$$1 = \lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\pi}{180} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = \frac{\pi}{180} \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}$$

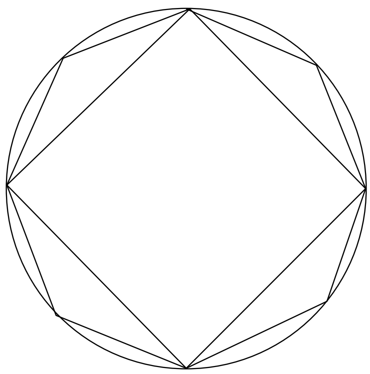
e logo $\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = \frac{\pi}{180}$ quando o ângulo θ for medido em graus. A equação (3) se escreve então

$$\lim_{n \to \infty} 2^n \operatorname{sen} \frac{180}{2^n} = 180 \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 180 \frac{\pi}{180} = \pi \leq 4.$$

Capítulo 5

O perímetro de um círculo

Neste capítulo vamos calcular o perímetro de um círculo de raio R usando as mesmas técnicas do capítulo anterior, ou seja, vamos aproximar o círculo por polígonos regulares inscritos, com 2^n lados, começando pelo quadrado, passando ao octógono e assim sucessivamente.

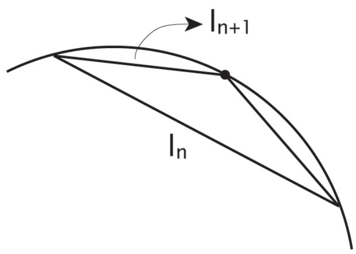


Sejam p_n o polígono com 2^n lados, l_n o comprimento de cada um de seus lados e $c_n = 2^n l_n$ seu perímetro.

Para passarmos de p_n a p_{n+1}, tomamos como novos vértices os pontos médios de cada arco de círculo que une dois vértices consecutivos de p_n.

Sabemos, da geometria elementar, que qualquer lado de um triângulo é menor que a soma dos outros dois. Temos então que c_2, o perímetro do quadrado, é maior que o diâmetro $2R$.

Podemos concluir também que, qualquer que seja $n \geq 2$, $l_n < 2l_{n+1}$



e logo

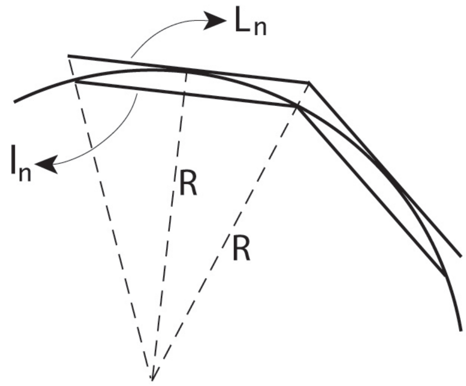
$$c_n = 2^n l_n < 2^n \cdot 2l_{n+1} = 2^{n+1} l_{n+1} = c_{n+1}.$$

Temos então que

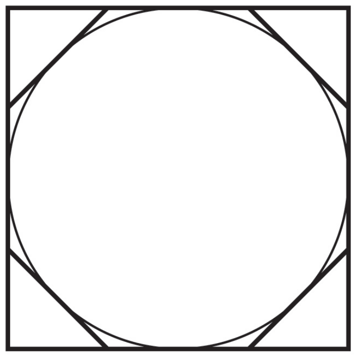
$$2R < c_2 < c_3 < ... < c_n < c_{n+1} < ...,$$

ou seja, a sequência $\{c_n\}$ é positiva e estritamente crescente.

Tomemos agora P_n, o polígono regular circunscrito com 2^n lados. Seja L_n o comprimento do lado e seu perímetro $C_n = 2^n L_n$. Como $L_n > l_n$ segue imediatamente que $C_n > c_n$.



Por outro lado, para passarmos de P_n a P_{n+1} tomamos os segmentos que tangenciam os pontos médios de cada arco de círculo que une dois vértices de P_n, como na figura, ao passar de P_2 a P_3.



Mais uma vez, como qualquer lado de um triângulo é menor que a soma dos outros dois, teremos que

$$C_{n+1} < C_n < ... < C_2$$

e logo

$$c_n < C_n \leq C_2 = 8R.$$

Assim

$$2R < c_2 < c_3 < ... < c_n < c_{n+1} < ... < 8R$$

o que nos garante que $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ existe e podemos definir o perímetro de um círculo como

$$l(C) = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Se um círculo tem raio R_1 então $l_n = 2R_1 \operatorname{sen} \frac{180}{2^n}$, $c_n = 2^n \cdot 2R_1 \operatorname{sen} \frac{180}{2^n}$ e seu perímetro será

$$l(C_1) = 2R_1 \lim_{n\to\infty} 2^n \operatorname{sen} \frac{180}{2^n}.$$

Para um círculo de raio R_2, o mesmo raciocínio nos dá o perímetro

$$l(C_2) = 2R_2 \lim_{n\to\infty} 2^n \operatorname{sen} \frac{180}{2^n}.$$

Logo

$$\frac{l(C_1)}{2R_1} = \lim_{n\to\infty} 2^n \operatorname{sen} \frac{180}{2^n} = \frac{l(C_2)}{2R_2},$$

ou seja, $\frac{l(C)}{2R}$ **dá sempre o mesmo número, qualquer que seja o círculo**.

A notação para esta constante $\lim_{n\to\infty} 2^n \operatorname{sen} \frac{180}{2^n}$ também é a letra grega π e temos a fórmula

$$l(C) = 2\pi R.$$

No cálculo da área havíamos obtido que $\dfrac{a(C)}{R^2} = \lim_{n\to\infty} 2^n \operatorname{sen} \dfrac{180}{2^n} = \pi$, ou seja, a constante obtida para a área é a mesma obtida para o perímetro, ou, em outras palavras, **o π da área é o mesmo π do perímetro**.

O uso da letra grega π para representar esta constante foi inicialmente proposto pelo matemático galês William Jones (1675-1749). A razão desta escolha fica óbvia se observarmos a história: o famoso matemático e cientista grego Arquimedes, no seu tratado *Da Medida do Círculo*, designa o comprimento da circunferência pela palavra grega $\pi\varepsilon\rho\iota\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma$ ("perímetro"). Em 1647, o matemático inglês William Oughtred, e depois outro matemático também inglês, Isaac Barrow, professor de Newton, abreviam para π o perímetro de um círculo de raio R.

Em 1706, William Jones publica *A New Introduction to Mathematics* e usa a letra π não mais para designar o perímetro de um círculo, mas para designar a razão entre este e seu diâmetro, como fazemos hoje.

Mas nem todo mundo usava a mesma notação. Por exemplo, na mesma época, Jean Bernoulli usa a letra c para designar a mesma razão. Em 1737, Leonhard Euler retoma o símbolo π na sua obra sobre séries infinitas *Variae observationes circa series infinitas*. A notoriedade de Euler e de suas obras imporá definitivamente a notação π para esta constante.

Mas voltemos aos polígonos regulares circunscritos com 2^n lados. Já vimos que $0 < ... < C_{n+1} < C_n < ... < C_2$ e logo a sequência $\{C_n\}$ é decrescente e limitada por baixo. Pelo mesmo raciocínio anterior temos que $\lim_{n\to\infty} C_n$ existe e podemos definir o perímetro do círculo por este limite. Chamemos de D este limite. Será que este limite D também mede o perímetro do círculo, isto é, $D = l(C) = \lim_{n\to\infty} c_n$?

Sabemos que $l_n = 2R \operatorname{sen} \frac{180}{2^n}$ e $L_n = 2R \operatorname{tg} \frac{180}{2^n}$. Logo $l_n = L_n \cos \frac{180}{2^n}$ e $c_n = C_n \cos \frac{180}{2^n}$. Temos então que $C_n - c_n = C_n(1 - \cos \dfrac{180}{2^n})$. Mas $\lim_{n\to\infty} C_n = D$ e $\lim_{n\to\infty} \cos \dfrac{180}{2^n} = 1$. Logo $\lim_{n\to\infty}(C_n - c_n) = 0$ e $l(C) = D$ e o perímetro de um círculo pode ser definido tomando-se polígonos regulares de 2^n lados, tanto inscritos quanto circunscritos.

Capítulo 6

Que polígonos podemos usar?

6.1 O caso da área

No capítulo 4 definimos e calculamos a área do círculo usando polígonos regulares com 2^n lados. Se tivéssemos pego outros polígonos, por exemplo polígonos inscritos regulares mas com 3^m lados, teríamos obtido o mesmo resultado? Ou se fossem inscritos mas não regulares? Ou uns inscritos e outros circunscritos?

Vamos aproveitar o que já sabemos para tentar responder a estas questões. Comecemos com o seguinte resultado:

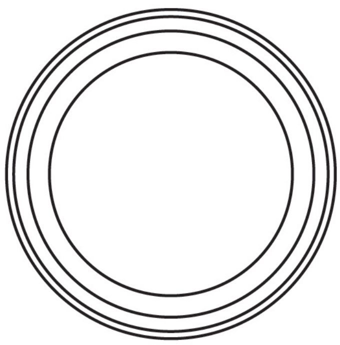
Lema 6.1 *Seja $\{R_n\}$ uma sequência de raios, com $\lim_{n\to\infty} R_n = R$. Então a sequência das áreas dos círculos com raio R_n converge para a área do círculo de raio R.*

Demonstração: A área do círculo de raio R_n é $a(C_n) = \pi R_n^2$. Tomando o limite temos que

$$\lim_{n\to\infty} a(C_n) = \lim_{n\to\infty} \pi R_n^2 = \pi \lim_{n\to\infty} R_n^2 = \pi(\lim_{n\to\infty} R_n)^2 = \pi R^2,$$

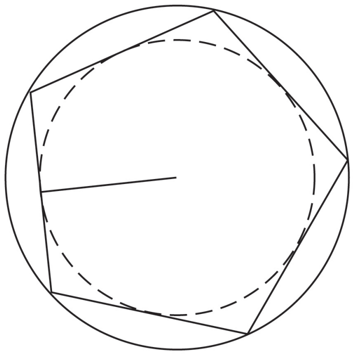
que é a área $a(C)$ do círculo de raio R. □

Se pegarmos uma sequência R_n crescente, $R_1 < R_2 < R_3 < \ldots$, com limite R, e todos os círculos C_n e C com o mesmo centro, teremos uma figura como a abaixo, onde a sequência de círculos C_n se aproxima de C, vindo por dentro de C.



Poderíamos também pegar círculos se aproximando por fora, tomando uma sequência R_n decrescente e com limite R, e todos os círculos centrados todos no mesmo ponto. O lema continuará válido mesmo se tomarmos sequências mais complicadas, alternando, por exemplo, círculos se aproximando por dentro com outros se aproximando por fora.

Isto posto, tomemos um polígono regular inscrito p_n com n lados e área a_n. A flecha relativa a cada lado mede $h_n = R\cos\dfrac{180}{n}$ e logo podemos inscrever em p_n um círculo de raio $R_n = R\cos\dfrac{180}{n}$.



Observemos que

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} R\cos\frac{180}{n} = R\lim_{n\to\infty}\cos\frac{180}{n} = R\cos\lim_{n\to\infty}\frac{180}{n} = R$$

e como p_n está compreendido entre o círculo de raio R_n e o de raio R, sua área a_n satisfaz

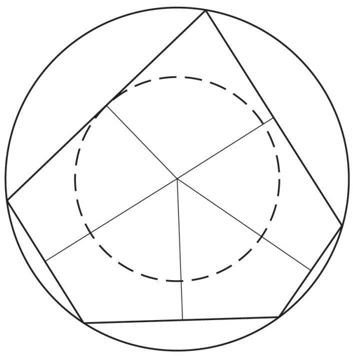
$$\pi R_n^2 < a_n < \pi R^2.$$

Logo, tomando o limite, temos

$$\pi R^2 = \lim_{n\to\infty}\pi R_n^2 \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \pi R^2 \quad \text{ou seja} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \pi R^2 = a(C).$$

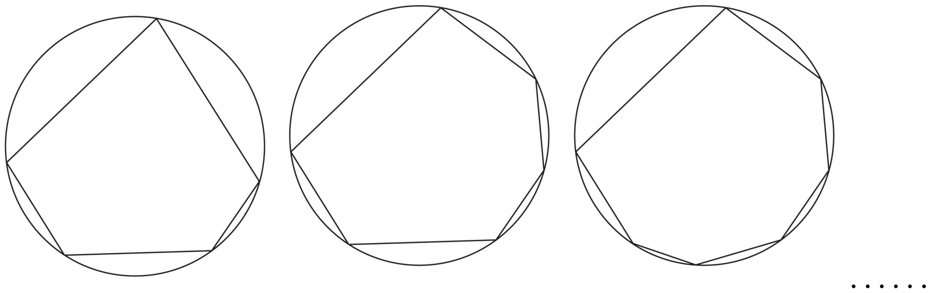
Conclusão: *obtemos a área do círculo aproximando-o por polígonos regulares inscritos com um número cada vez maior de lados, mas não precisando ser necessariamente potências de 2, como fizemos no capítulo 4.*

Tomemos agora um polígono inscrito p_n, com n lados e área a_n, mas que pode ser regular ou não. A flecha relativa a cada lado vai variar mas podemos escolher a menor delas para ser o raio R_n de um círculo que não será mais inscrito em p_n, mas estará contido no polígono.



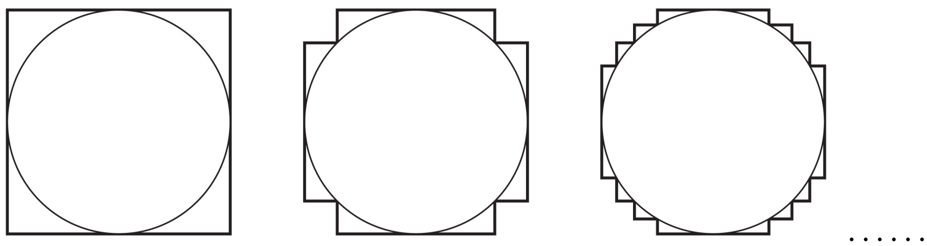
E, como antes, teremos $\pi R_n^2 < a_n < \pi R^2$. Se, para a sequência de polígonos escolhida tivermos que a sequência das menores flechas tende a R, o mesmo raciocínio que fizemos anteriormente valerá e logo obteremos a área do círculo como limite de áreas dos polígonos.

É fácil ver que para que $\lim_{n\to\infty} R_n = R$ é preciso que o número de lados cresça. Mas podemos ter polígonos com cada vez mais lados sem que esse limite seja verificado, ou seja, sem que a área dos polígonos preencha (exaura) a área do círculo, como pode ser visto no desenho abaixo, onde mantemos um lado fixo e vamos subdividindo os outros.



Se em vez de polígonos inscritos, tivéssemos pego circunscritos, faríamos o mesmo raciocínio, mas tomando círculos contendo os polígonos e cujos raios tendam ao raio R do círculo inicial.

Podemos também pegar polígonos diferentes, como na figura abaixo, desde que ao longo do processo a área dos polígonos vá tendendo para a área do círculo, ou, usando as ideias de Eudoxo no Método de Exaustão, desde que o que exceda ou o que falte vá ficando cada vez menor e tendendo a zero.



6.2 O caso do perímetro

No capítulo 5 definimos e calculamos o perímetro $l(C)$ de um círculo C de raio R mostrando que, se c_{2^n} é o perímetro do polígono regular inscrito com 2^n lados então $\lim_{n\to\infty} c_{2^n} = l(C)$.

O resultado será o mesmo se tomarmos polígonos regulares inscritos com m lados, não necessariamente potências de 2. Para prová-lo, precisaremos de alguns outros fatos.

Primeiramente, dado $m \geq 4$, seja l_m o comprimento do lado do polígono regular inscrito de m lados, chamado de p_m. Como vimos, $l_m = 2R \operatorname{sen} \dfrac{180}{m}$ e logo, se $m_1 < m_2$ então $l_{m_1} < l_{m_2}$. Chamando por c_m o perímetro de p_m temos que se $m_1 < m_2$ então $c_{m_1} = m_1 l_{m_1} < m_2 l_{m_2} < c_{m_2}$.

Temos também que $c_m < 8R$, o perímetro do quadrado circunscrito, para todo valor de $m > 4$.

Dado um número inteiro $m > 4$, se n é a parte inteira do número $\log_2 m$ então n é o maior inteiro positivo tal que $2^n \leq m$. Segue então que $l_{2^n} \leq l_m$ e $c_{2^n} \leq c_m < 8R$. Logo

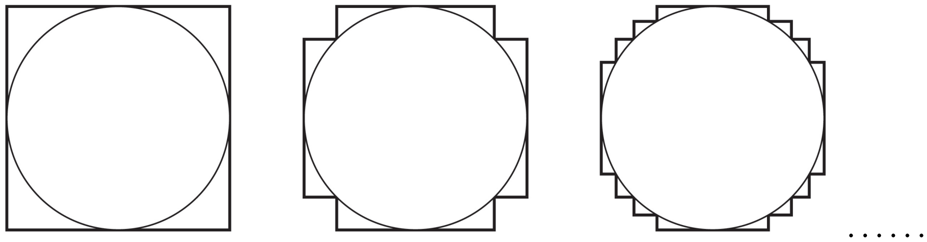
$$l(C) = \lim_{n\to\infty} c_{2^n} \leq \lim_{m\to\infty} c_m = D < 8R.$$

Para provar que $D = l(C)$ tomemos a sequência P_m dos polígonos regulares circunscritos a C, com lado L_m e perímetro C_m. Usando as mesmas ideias do capítulo 5 e analogamente ao parágrafo anterior, podemos mostrar que $c_{2^n} \leq c_m < C_m \leq C_{2^{n+1}}$ e

$$l(C) = \lim_{n\to\infty} c_{2^n} \leq \lim_{m\to\infty} c_m = \lim_{m\to\infty} C_m \leq \lim_{n\to\infty} C_{2^{n+1}} = l(C)$$

ou seja *o perímetro pode ser definido e calculado usando-se qualquer sequência de polígonos regulares, inscritos ou circunscritos, cujo número de lados cresça indefinidamente com n.*

Mas se quisermos usar outro tipo de polígonos, a coisa muda de figura. Retomemos o último exemplo da seção anterior: temos um sequência de polígonos que se aproxima do círculo, mas não são nem inscritos nem circuncritos.



Cada um dos polígonos, independentemente do número n de lados, tem sempre perímetro $c_n = 8R$. Assim, apesar da sequência de polígonos se aproximar cada vez mais do círculo, o $\lim_{n\to\infty} c_n = 8R \neq l(C)$.

Como diz G. de la Roque Palis, [7], "a frase:

> Se uma sequência de curvas C_n "se aproxima" de uma curva C então o limite das medidas dos perímetros das C_n é o perímetro da curva limite C.

pode parecer evidente, mas cuidado pois nesta generalidade, ela é falsa", como mostra o exemplo acima.

Para o cálculo do perímetro não basta que a sequência de polígonos aproxime o círculo, como no caso do cálculo da área. Precisamos de condições muito mais fortes. Em geral o que se pede é o que vemos no Cálculo quando calculamos comprimentos de curvas fechadas usando a integral:

- cada polígono p_n seja inscrito em C, isto é, que tenha todos os seus vértices no círculo;
- o número de lados (ou de vértices) cresça indefinidamente com n;
- o comprimento dos lados tenda a zero, quando n tende a infinito.

Para qualquer sequência de polígonos p_n satisfazendo a estas 3 condições teremos que $l(C) = \lim_{n\to\infty} c_n$, onde c_n é o perímetro de p_n.

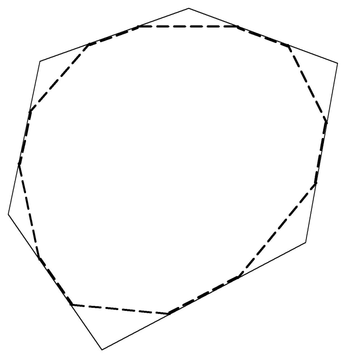
6.3 Nem tudo que reluz é ouro

Podemos então definir e calcular o perímetro de um círculo tomando sequências de polígonos inscritos verificando as condições da seção anteiror. Vamos agora examinar mais um exemplo mostrando quão complicada (ou divertida) pode ser esta questão de sequências de polígonos convergindo para uma curva, no caso de polígonos circunscritos.

Imagine que temos um pedaço de papel quadrado, uma tesoura e que queiramos recortar um círculo. O que primeiro nos vem à cabeça é tentar construir uma sequência de polígonos circunscritos, começando com o quadrado que temos em mão, recortando os cantos de modo a ir formando polígonos com cada vez mais lados. Acreditamos que, depois de vários recortes, obteremos um polígono com tantos lados que visualmente não o diferenciaremos de um círculo.

Ora, o matemático suiço G. de Rham (1903-1990) estudou este tipo de processo, construindo polígonos a partir de polígonos por recortes dos cantos e se perguntou que curva ele obteria se executasse este processo indefinidamente.

Partindo de um polígono qualquer, ele bolou, entre outros, o seguinte processo, que chamou de processo de trisseção: sobre cada lado tomamos os 2 pontos que dividem o lado em 3 pedaços iguais e recortamos o polígono nestes pontos, obtendo assim um novo polígono com mais lados.



De Rham provou que este processo, quando começamos com um quadrado, converge para uma curva fechada, mas que esta curva não é um círculo[1]. Logo, não é qualquer jeito de recortar os cantos que nos dará um círculo no final.

Isto nos mostra que a convergência de sequências de polígonos circunscritos é ainda mais complicada do que sonha a nossa vã filosofia, que pode ser muito diferente do que o que se espera e que é preciso tomar muito cuidado com estas questões, pois podemos estar tomando sequências que, apesar de nossas boas intenções e intuições, não convirjam para a curva dada.

[1]Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada na monografia de iniciação científica de Guilherme Henrique de Paula Reis [8].

Capítulo 7

Área e perímetro do círculo nos livros didáticos

Durante a realização do I Colóquio de Matemática da Região Sudeste em São João del Rey, os participantes do minicurso *O perímetro e a área de um círculo* analisaram alguns livros didáticos, levando em consideração apenas o tema do minicurso. Os textos que se seguem são o resultado deste trabalho. Os livros analisados estão colocados em ordem cronológica inversa (do mais atual ao mais antigo).

- **Tudo é Matemática**, de Luiz Roberto Dante, Editora Ática, 2004, 1^a edição.
  Nível: 8^a série

  Análise feita por Cintia Aparecida Pinto Chaves, Gilsara Aparecida Leme, Mauro Junio Prado e Felipe Otávio dos Santos, alunos de graduação em Matemática na Universidade Federal de São João del Rey, Minas Gerais.

  O livro traz um capítulo sobre circunferências, círculos, arcos e côngruos dando suporte ao estudo de perímetro e área do círculo. Ao longo de cada capítulo é introduzido uma breve história da matemática sobre cada assunto. Os temas são introduzidos com situações problemas a partir das quais se desenvolvem as fórmulas e teorias.

  No capítulo sobre circunferência o tema foi abordado adequadamente para a faixa etária, porém de forma muito breve e consequentemente foram omitidos alguns detalhes. A parte sobre área de círculo traz uma idéia de limite e define a área através de aproximações utilizando um quadrado circunscrito; desta maneira, os alunos conseguem ter uma idéia intuitiva da área compreendendo as fórmulas.

  O livro traz muitos exercícios, alguns contextualizados, que favorecem a compreensão da matéria.

  Em geral o livro é uma excelente referência didática, pois contempla o conteúdo de perímetro e área da circunferência satisfatoriamente.

- **PROFMAT: projeto oficina de matemática** de Maria Cecília Grasseschi, Maria Capucho Andreta e Aparecida Borges dos Santos Silva, Editora FTD, 1999.
  Nível: 8^a série

  Análise feita por Fernanda Rodrigues Alves Costa (professora da E.M. Ver. José Ferreira de Aguiar, em Contagem, MG e aluna do Curso de Especialização para Professores da UFMG), Renata Rodrigues de Matos Oliveira (professora da E.M. Ver. José Ferreira de Aguiar, em Contagem, MG), Regina Ferreira (professora da E.E. Agrotécnica Afonso Queiroz, em Patos de Minas, MG, e tutora EAD pelas UFSJ e UNISA) e Maria Rachel Alves (professora da Unimontes e da E.E. Irmã Beata, em Montes Claros, MG).

  O livro tem linguagem simples e apresenta os conceitos matemáticos de forma intuitiva, através de atividades orientadas recorrendo a práticas. O leitor necessita de orientação para elaborar conceitos.

  Ao final do capítulo as autoras propõem o "Amarrando as ideias" através de recortes históricos e da prática.

  A área do círculo é definida como a área do triângulo de base $2\pi R$ e altura R, o que gerou grande discussão no grupo pela falta de rigor matemático.

  Análise feita por Brian Diniz Amorim, aluno de graduação em Matemática na Universidade Federal de Minas Gerais, em Belo Horizonte.

  Integrante de um projeto de matemática, o livro tenta apresentar o conteúdo particionado de forma lúdica e com uma abordagem baseada em grande parte em exercícios. Apresenta alguns desvios de conteúdo matemática e não apresenta linguagem matemática minimamente rebuscada.

- **Atividades e jogos com o círculo** de Marion Smoothey, Editora Scipione, 1998.

  Análise feita por Fernando Geraldo de Carvalho, aluno de graduação em Matemática na Universidade Federal de São João del Rey, Minas Gerais.

  É um livro "bem ilustrado", interessante para a introdução de círculos. Uma parte muito pequena deste livro pode ser aproveitada conforme o conteúdo apresentado no mini curso ofertado neste I Colóquio da Regional Sudeste.

  Este livro é muito interessante para o sétimo ano, onde os alunos precisam consolidar os conceitos.

- **Matemática - Você Constrói** de Maria Aparecida Barroso de Lima, Nicola Siani Filho e Thales do Couto Filho, Editora Ediouro, 1997, 1^a edição.
  Nível: 8^a série

  Análise feita por Cristiane Duarte, Geiziane Silva, Thássia Souza e Marianna Resende, alunas de graduação em Matemática na Universidade Federal de São João del Rey, Minas Gerais.

  Com relação ao perímetro, primeiro trabalha-se com a razão entre o comprimento e o diâmetro, verificando que o resultado é sempre o mesmo; aproximadamente 3,14. A esse resultado dão o nome de π, ou seja,

$$\frac{C}{d} = 3,14 = \pi$$

e conclui-se através de exercício que

$$C = d \cdot \pi = 2r \cdot \pi = 2\pi r.$$

Com relação a área, através de exercícios chegam à conclusão de que quanto maior o número de lados do polígono regular inscrito na circunferência, mais seu apótema se aproxima do raio da circunferência e o perímetro / área do plígono se aproxima do perímetro / área da circunferência.

No caso de um octógono tem-se que o perímetro do polígono é $2p = 8l$ e logo o semiperímetro é $p = 4l$. A área do octógono será então $A_p = 8\frac{l \cdot a}{2} = 4l \cdot a = p \cdot a$, ou seja, o semiperímetro vezes o apótema.

Conclui-se então a área do círculo através da comparação com o polígono, ou seja, $A_c = p \cdot a = \frac{2\pi r}{2} \cdot a = \pi \cdot r \cdot r = \pi \cdot r^2$.

- **Matemática e Realidade**, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado, Editora Atual, 1996.
  Nível: 8^a série

  Análise feita por Brian Diniz Amorim, aluno de graduação em Matemática na Universidade Federal de Minas Gerais, em Belo Horizonte.

  Com introduções ao conteúdo de forma muito breve, o livro apresenta uma abordagem rápida, sem muita preocupação com a linguagem matemática. É, porém, excepcionalmente hábil em número de exercícios. Também separa o conteúdo em área e perímetro.

  Dentre todos os livros que analisei, considero a abordagem deste como a mais completa para ensino fundamental.

- **Fundamentos da Matemática Elementar** de Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo, Editora Atual, 1993.
  Nível: 7^a série

  Análise feita por Ana Carolina Nicolau, aluna de graduação em Matemática na Universidade Federal de Minas Gerais, em Belo Horizonte.

  A parte relativa ao perímetro é bem mais completa do que a parte relativa à área do círculo. O perímetro é estimado pelo método de comparar polígonos inscritos e circunscritos. Já para a área não é apresentada nenhuma demonstração - simplesmente admite-se que A = semiperímetro $\times$ raio, sem maiores explicações.

  Uma observação interessante é que a área do setor circular é igual á área do triângulo de base igual ao arco e altura igual ao raio. Isso é mostrado em desenhos bem autoexplicativos.

  O valor de π é estimado calculando a razão do perímetro de polígonos inscritos e o diâmetro da circunferência e depois comparando este valor com o encontrado para polígonos circunscritos. Uma tabela com os valores encontrados para polígonos com 4, 8, 16 e 32 lados é apresentada, ressaltando-se que, quanto mais lados, mais os valores se aproximam de π.

O primeiro capítulo tratando do assunto não fala de perímetro nem de área, mas de definições do círculo. Ele explica interior/exterior, corda, raio, diâmetro, tangente, secante, centro, às vezes com notações que podem ser desconhecidas para meninos de 7^a série.

- **Geometria: noções de matemática** de Aref Antar Neto, Nilton Lapa e José Luiz Pereira, Volume 5, Editora Moderna, 1982, 1^a edição.
  Nível: Segundo Grau.

  Análise feita por Brian Diniz Amorim, aluno de graduação em Matemática na Universidade Federal de Minas Gerais, em Belo Horizonte.

  É um livro específico de geometria e que é trabalhado segundo a legislação vigente em 1971. Vale relatar que na época o ensino era estruturado de forma profissionalizante no que se refere á parte equivalente ao ensino médio. Presume-se que o livro era trabalhado com alunos de curso científico ou profissionalizantes na área de exatas.

  O livro introduz os conteúdos de forma bastante elaborada e procura enunciar o conteúdo programático. Primeiramente, aborda a circunferência enquanto espaço geométrico, para depois introduzir as noções de área e perímetro.

  Considero o livro adequado e similar ao conteúdo trabalhado atualmente. Preocupa-se com exercícios e traz uma abordagem de fácil entendimento.

- **Matemática - Método Moderno** de Henrique Morandi, Editora Paulo Azevedo, 1971.
  Nível: Curso Médio - ciclo ginasial (6^o a 9^o anos)

  Análise feita por Fernanda Rodrigues Alves Costa (professora da E.M. Ver. José Ferreira de Aguiar, em Contagem, MG e aluna do Curso de Especialização para Professores da UFMG), Renata Rodrigues de Matos Oliveira (professora da E.M. Ver. José Ferreira de Aguiar, em Contagem, MG), Regina Ferreira (professora da E.E. Agrotécnica Afonso Queiroz, em Patos de Minas, MG, e tutora EAD pelas UFSJ e UNISA) e Maria Rachel Alves (professora da Unimontes e da E.E. Irmã Beata, em Montes Claros, MG).

  O livro apresenta um texto estruturado com linguagem simples e trabalha conceitos matemáticos com rigor, enunciando postulados, toremas e realizando demonstrações. O leitor não precisa, necessariamente, de orientação no estudo do conteúdo abordado.

  Ao final do capítulo encontramos uma sequência de exercícios de aplicação, seguido de um recorte da história da matemática, sem remeter ao conteúdo estudado.

  Concluimos que este livro é um material de apoio para alunos e professores, apesar de utilizar recursos que não envolvem questões contextualizadas e práticas.

  Análise feita por Brian Diniz Amorim, aluno de graduação em Matemática na Universidade Federal de Minas Gerais, em Belo Horizonte.

  Pela reforma de Juscelino Kubistchek, de 1961, induzia-se no ciclo ginasial (5^a a 8^a séries), uma abordagem mais conteudista que na forma atual, o que pode ser visto no somatório dos conteúdos dos Ensinos Médio e Fundamental enquanto Educação Básica. O livro, ao ministrar, o círculo e a circunferência (perímetro e área, respectivamente) enuncia o postulado, demonstra-o (mesmo que de forma trivial) e expõe demasiadamente a teoria, assim como, propõe como adendo a história da matemática.

Avalio que o material atualmente traria muito conteúdo, uma vez que a legislação atual possibilita um trabalho de forma mais particionada com o aluno.

Capítulo 8

π é irracional

Sabemos que os números reais se dividem em duas categorias: os que são da forma $\frac{a}{b}$, com a e b números inteiros, $b \neq 0$, chamados de racionais, e os que não são desta forma e que, por contraposição, chamamos de irracionais. Observe que o denominador b pode ser 1 e assim os números inteiros são números racionais.

Vimos no capítulo 1 que os gregos já sabiam que $\sqrt{2}$ é irracional. Vamos mostrar neste capítulo que π também o é. Apresentaremos aqui a demonstração dada por Niven, em 1947 [20], que é feita por redução ao absurdo.

Suponhamos que $\pi = \frac{a}{b}$, com a e b inteiros, $b \neq 0$. Podemos tomar $a > 0$ e $b > 0$, pois π sendo a constante dos círculos, é maior que o diâmetro de um círculo de raio 1, que vale 2, e menor que a área de um quadrado circunscrito a este círculo, que vale $(2R)^2$, ou seja 4, no nosso caso. Melhor dizendo, temos $2 < \pi < 4$.

Dado um número inteiro positivo n, sejam

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \quad \text{e} \\ F(x) &= f(x) - \frac{d^2 f}{dx^2}(x) + \frac{d^4 f}{dx^4}(x) + \ldots + (-1)^n \frac{d^{2n} f}{dx^{2n}}(x). \end{aligned}$$

Lema 8.1 $\int_0^\pi f(x) \operatorname{sen} x \, dx = F(0) + F(\pi)$.

Demonstração: Derivando duas vezes o polinômio $F(x)$, obtemos

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + F(x) = f(x),$$

pois o polinômio $f(x)$ tem grau $2n$ e logo $\frac{d^{2n+2} f}{dx^{2n+2}}(x)$ é identicamente nulo.

Temos então que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dx} \operatorname{sen} x - F(x)\cos x\right) &= \frac{d^2F}{dx^2}\operatorname{sen} x + \frac{dF}{dx}\cos x - \frac{dF}{dx}\cos x + F(x)\operatorname{sen} x \\ &= \left(\frac{d^2F}{dx^2} + F(x)\right)\operatorname{sen} x \\ &= f(x)\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo teremos então que

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{sen}\,x\,dx &= \left(\frac{dF}{dx}\,\mathrm{sen}\,x - F(x)\cos x\right)_0^\pi \\
&= \frac{dF}{dx}(\pi)\,\mathrm{sen}\,\pi - F(\pi)\cos\pi - \frac{dF}{dx}(0)\,\mathrm{sen}\,0 + F(0)\cos 0 \\
&= F(0) + F(\pi)
\end{aligned}$$

□

Lema 8.2 *$F(0) + F(\pi)$ é um número inteiro.*

Demonstração: Fazendo a expansão temos que $(a - bx)^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$, onde cada $c_k, k = 1, 2, \ldots, n$, é um número inteiro, pois a e b são números inteiros. Então

$$f(x) = \frac{c_0}{n!}x^n + \frac{c_1}{n!}x^{n+1} + \ldots \frac{c_n}{n!}x^{2n}$$

e assim

$$\begin{aligned}
\frac{d^kf}{dx^k}(0) &= 0 \qquad \text{se} \qquad k < n \\
\frac{d^kf}{dx^k}(0) &= \frac{k!}{n!}c_k \qquad \text{se} \qquad n \leq k \leq 2n
\end{aligned}$$

o que mostra que $\dfrac{d^kf}{dx^k}(0)$ é um número inteiro.

Por outro lado

$$f(\pi - x) = f(\frac{a}{b} - x) = \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n \left(a - b(\frac{a}{b} - x)\right)^n}{n!} = f(x).$$

Derivando temos que

$$(-1)^k\frac{d^kf}{dx^k}(\pi - x) = \frac{d^kf}{dx^k}(x),$$

logo $\dfrac{d^kf}{dx^k}(\pi) = \dfrac{d^kf}{dx^k}(0)$ e também é um número inteiro.

Concluimos então que $F(0)$, $F(\pi)$ e sua soma são números inteiros. □

Precisamos ainda de mais um resultado:

Lema 8.3 *Seja c um número real positivo. Então* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c^n}{n!} = 0.$

Demonstração: Dado o número $c > 0$, existe um inteiro positivo n_0 tal que $c < n_0$, ou, reescrevendo, $\dfrac{c}{n_0} < 1$.

Tomemos então $n > n_0$. Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{c^n}{n!} &= \frac{c.c.c \ldots c}{1.2.3 \ldots (n_0 - 1)n_0(n_0 + 1) \ldots n} \\
&= \left(\frac{c}{1}\right)\left(\frac{c}{2}\right)\left(\frac{c}{3}\right) \cdots \left(\frac{c}{n_0 - 1}\right)\left(\frac{c}{n_0}\right)\left(\frac{c}{n_0 + 1}\right) \cdots \left(\frac{c}{n}\right).
\end{aligned}$$

Denotemos $K = \left(\frac{c}{1}\right)\left(\frac{c}{2}\right)\left(\frac{c}{3}\right)\dots\left(\frac{c}{n_0-1}\right)$. Lembrando que $\frac{c}{n_0} > \frac{c}{j}$ se $j > n_0$ temos

$$0 \le \frac{c^n}{n!} = K\left(\frac{c}{n_0}\right)\left(\frac{c}{n_0+1}\right)\dots\left(\frac{c}{n}\right) \le K\left(\frac{c}{n_0}\right)\left(\frac{c}{n_0}\right)\dots\left(\frac{c}{n_0}\right) = K\left(\frac{c}{n_0}\right)^{n-n_0}$$

e como $\frac{c}{n_0} < 1$

$$0 \le \lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!} \le \lim_{n\to\infty} K\left(\frac{c}{n_0}\right)^{n-n_0} = 0$$

o que mostra que $\lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!} = 0$. □

Vamos então provar nosso resultado principal:

Teorema 8.4 *π é um número irracional*

Demonstração: Suponhamos, como acima, que π é racional, isto é, $\pi = \frac{a}{b}$, com a e b inteiros positivos, $b \neq 0$.

Para $0 < x < \pi = \frac{a}{b}$ temos que $0 < \operatorname{sen} x < 1$ e $0 < x(a-bx) < \pi a$. Logo

$$\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen} x\, dx \le \pi\frac{(\pi a)^n}{n!}.$$

Mas, como $\lim_{n\to\infty}\frac{(\pi a)^n}{n!} = 0$, podemos tomar n suficientemente grande de modo que $\pi\frac{(\pi a)^n}{n!} < 1$ e assim teremos $0 < F(0)+F(\pi) < 1$, sendo $F(0)+F(\pi)$ um número inteiro, o que não é possível.

Logo, π é irracional. □

Capítulo 9

Algumas maneiras de estimar π

O número *pi* é irracional e nunca poderemos conhecê-lo integralmente através de sua expansão decimal. Entretanto, perguntas simples como quanto de material é necessário para fazer uma lata de óleo ou quanto de tecido precisamos para fazer uma saia godê são respondidas usando-se a área e o perímetro do círculo, precisando desta forma do valor de π.

Fenômenos como a órbita de satélites no céu, o movimento de engrenagens, o crescimento de uma colônia de bactérias, que envolvem simetria circular ou esférica, farão uso do π em alguma etapa de seu estudo ou construção.

Estes e outros exemplos nos dizem que é preciso conhecer um valor estimado de π que possamos usar.

Desde cedo, na história do conhecimento humano, encontramos estimativas de π: os antigos babilônicos, via de regra, calculavam a área de um círculo multiplicando por 3 o quadrado do raio, mas em uma tabuleta, datada de entre 1900 e 1680 aC, encontramos o valor 3,125. No Papiro de Rhind (Egito, $\sim$ 1650 aC) encontramos uma fórmula que nos dá o valor de π como 3,1605. A partir daí, e ao longo dos séculos, foram desenvolvidas muitas técnicas e ideias para calcular mais e mais decimais de π.

Ora, do ponto de vista do uso prático, 20 decimais depois da vírgula é mais do que suficiente. Mas, mesmo depois desta meta ter sido atingida, as pessoas continuaram tentando ampliar o número de decimais.

A razão de tal procura, pelo menos por alguns séculos, é mais conceitual do que prática. Quando pegamos uma fração e tentamos escrevê-la com a notação decimal, temos, antes da vírgula, a quantidade correspondendo à parte inteira do número e, depois da vírgula, duas possibilidades: ou temos um tanto de dígitos e depois a expansão para, ou caímos numa dízima periódica, que, por definição, não tem fim. Por exemplo $\dfrac{71}{4} = 17,75$ corresponde ao primeiro caso enquanto que $\dfrac{71}{13} = 5,461538461538...$ corresponde ao segundo[1].

Já os irracionais, como π ou $\sqrt{2}$, tem uma expansão decimal infinita e não-periódica. Assim, quando dizemos que $\pi = 3,141592$ estamos cometendo um erro: π é $3,141592$ e mais infinitos números depois deste 2. O número $3,141592$ aproxima o valor de π, mas só isso.

Mas isto sabemos hoje, pois temos uma demonstração de que π é irracional. Até

[1] Um livro muito bonito, onde podemos encontrar a demonstração deste e de outros fatos interessantes sobre os números reais é I.Niven [21]

1671, quando Lambert faz a primeira prova deste fato, as pessoas calculavam decimais e decimais de π na tentativa de ver se em algum momento a sequência de dígitos obtida começava a se repetir. Se repetisse, seria uma evidência forte de que π era uma fração (repare que poderia repetir por um certo tempo e depois deixar de fazê-lo).

Mas porque, ainda hoje, apesar de sabermos que π é irracional, as pessoas continuam a calcular mais e mais decimais de π? Kanada e seus colaboradores, por exemplo, calcularam 1.241.100.000.000 decimais de π em 2002.

Por um lado, calculamos porque podemos. Com computadores cada vez mais rápidos e potentes, pode-se calcular cada vez mais decimais. Também há o desafio de se "bolar" algoritmos cada vez mais rápidos e eficientes. O cálculo de 100.265 decimais de π em 1961 precisou de 105.000 operações aritméticas, segundo J.F.Porto da Silveira [23]. Já o algoritmo inventado em 1984 pelos irmãos Borwein, obteve os mesmos dígitos com apenas 112 operações.

Uma vez que se tem bons algoritmos, eles passam a ser usados para testar e comparar o desempenho de novos softwares e computadores.

Talvez o mais intrigante, contudo, seja poder ver se a conjectura sobre a distribuição aleatória dos dígitos na expansão decimal de π parece correta. O que se imagina é que um dígito tem a mesma probabilidade de aparecer na expansão de π do que qualquer outro. Assim, ao calcularmos as decimais deveríamos encontrar basicamente a mesma frequência para qualquer dígito e, que quanto mais casas decimais tivermos, melhor deve ser esta estimativa. Ora, em 1999, examinando 200 bilhões de casas decimais de π, Kanada e Takahashi obtiveram o seguinte número de ocorrências, que parece concordar com a conjectura:

Dígito	Número de ocorrências
0	20.000.030.841
1	19.999.914.711
2	20.000.136.978
3	20.000.069.393
4	19.999.921.691
5	19.999.917.053
6	19.999.881.515
7	19.999.967.594
8	20.000.291.044
9	19.999.869.180

A seguir apresentamos algumas maneiras de se estimar π. Há muitas referências interessantes sobre este assunto, como por exemplo [3], [6], [23], [24].

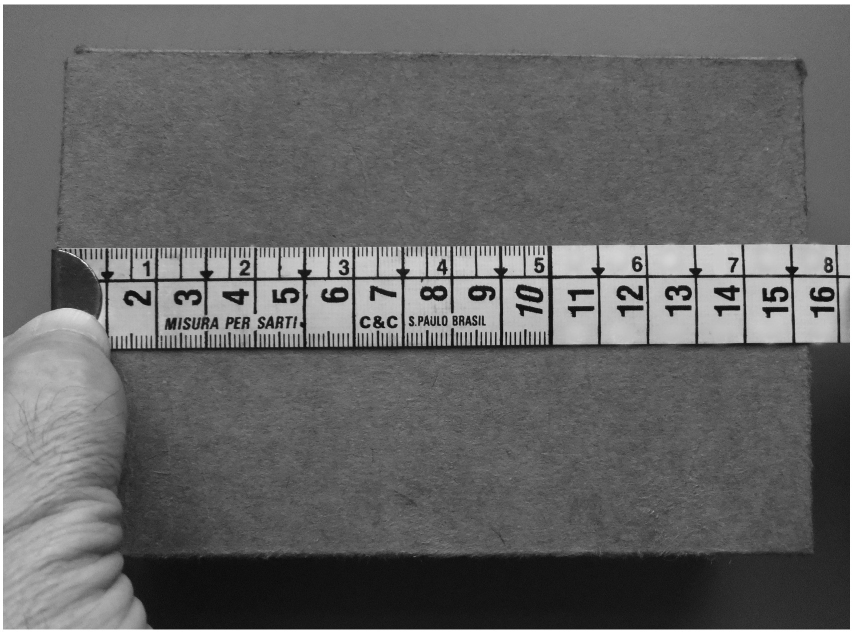
9.1 Medindo círculos

Pela própria definição de π, pensamos imediatamente em calculá-lo usando círculos. Uma maneira "prática" de estimarmos seu valor é tomar muitos objetos redondos, com tamanhos diferentes, medir o perímetro e o diâmetro de cada um deles e calcular a razão entre estas duas medidas. Depois, faz-se a média das razões obtidas.

Esta média deve ser uma aproximação de π. Nas muitas vezes que utilizamos este método, obtivemos sempre algo da ordem de 3,2.

Esse método, apesar de (ou talvez exatamente por) ser simples, tem uma série de problemas: os círculos usados são **realmente** círculos? O que medimos era **realmente** o diâmetro?

Fora estes problemas da ordem do concreto, temos erros decorrentes da própria maneira de medir. Todo instrumento de medida tem um erro. Por exemplo, se medirmos o diâmetro e o perímetro com uma fita métrica graduada em centímetros, sempre teremos um erro de $\pm$ 0,5 cm, o que significa que a diferença entre o valor real e o valor estimado não excede 0,5 cm. A foto abaixo ilustra este caso: ao medir a largura de uma caixa, vemos que está entre 15 e 16 cm. Estimamos um valor de 15,3 cm, pois estamos mais perto de 15 do que de 16 e o erro cometido não excede 0,5 cm.



Suponhamos então que acabamos de medir um perímetro e um diâmetro e achamos $C \pm \Delta C$, para o perímetro, e $D \pm \Delta D$, para o diâmetro, onde ΔC e ΔD são os erros dados pelo instrumento de medida.

O valor EXATO de π seria $\dfrac{C}{D}$. Então o erro $\Delta\pi$ que podemos estar cometendo será o valor calculado menos o valor exato. Olhando o maior e menor erros cometidos possíveis temos

$$\frac{C}{D} - \frac{C-\Delta C}{D+\Delta D} \leq \Delta\pi \leq \frac{C+\Delta C}{D-\Delta D} - \frac{C}{D}.$$

Ora

$$\frac{C+\Delta C}{D-\Delta D} = \frac{C}{D}\left(\frac{1+\frac{\Delta C}{C}}{1-\frac{\Delta D}{D}}\right).$$

Como o erro ΔD é menor que o valor de D, $\dfrac{\Delta D}{D} < 1$. Logo, usando a soma de uma PG com razão menor do que 1 temos

$$\frac{1}{1-\frac{\Delta D}{D}} = 1 + \frac{\Delta D}{D} + \dots$$

e assim

$$\begin{aligned}
\frac{C+\Delta C}{D-\Delta D} &= \frac{C}{D}\left(1+\frac{\Delta C}{C}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{\Delta D}{D}}\right) \\
&= \frac{C}{D}\left(1+\frac{\Delta C}{C}\right)\left(1+\frac{\Delta D}{D}+\dots\right) \\
&= \frac{C}{D}+\frac{1}{D}\Delta C+\frac{C}{D^2}\Delta D+\dots
\end{aligned}$$

Fazendo contas análogas, obtemos também que

$$\begin{aligned}
\frac{C-\Delta C}{D+\Delta D} &= \frac{C}{D}\left(1-\frac{\Delta C}{C}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{\Delta D}{D}}\right) \\
&= \frac{C}{D}\left(1-\frac{\Delta C}{C}\right)\left(1+\frac{\Delta D}{D}+\dots\right) \\
&= \frac{C}{D}-\frac{1}{D}\Delta C-\frac{C}{D^2}\Delta D+\dots
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\frac{C}{D}-\frac{C-\Delta C}{D+\Delta D} &= \frac{1}{D}\Delta C+\frac{C}{D^2}\Delta D+\dots \\
\frac{C+\Delta C}{D-\Delta D}-\frac{C}{D} &= \frac{1}{D}\Delta C+\frac{C}{D^2}\Delta D+\dots
\end{aligned}$$

e o erro relativo será estimado pela soma dos erros relativos das duas medidas:

$$\frac{\Delta\pi}{\pi} \approx \frac{\Delta C}{C}+\frac{\Delta D}{D}.$$

Assim, se usamos sempre a mesma fita métrica, ou a mesma régua, pequenos círculos darão um erro maior do que os grandes...

Existem outros métodos concretos para estimar π a partir da área ou do perímetro: podemos por exemplo estimar a área medindo a quantidade de tinta necessária para pintar o círculo, ou pesando círculos feitos com material com densidade conhecida e depois dividir este valor pelo raio ao quadrado. Mas enfrentaremos sempre os mesmos problemas: não temos como saber se o que chamamos de círculo é realmente um círculo e sempre teremos um erro de medida dado pelo instrumento usado.

9.2 Jogando dardos

Uma outra maneira concreta de estimar π consiste em construir um alvo quadrado de lado L e marcar, dentro dele, um círculo circunscrito, com raio L. Se jogarmos um número muito grande de dardos no alvo teremos:

$$\frac{\text{número de dardos que acertaram o círculo}}{\text{total de dardos que acertaram o alvo}} \approx \frac{\text{área do círculo}}{\text{área do quadrado}} = \frac{\pi L^2}{4L^2} = \frac{\pi}{4}$$

e assim basta contarmos quantos dardos atingiram o alvo quadrado e quantos atingiram o círculo para estimarmos π.

É claro que continuamos com todos os problemas ligados aos métodos concretos: não sabemos se o quadrado é realmente um quadrado, nem se o círculo é realmente um círculo e não podemos afirmar que os eventos (lugar onde o dardo atingiu) são realmente aleatórios e independentes....

Existem muitas variantes deste método: usar um gerador de números aleatórios num computador, contar estrelas em uma região dada do céu, dentre tantos outros. São todos ligados ao que chamamos de Método de Monte Carlo.

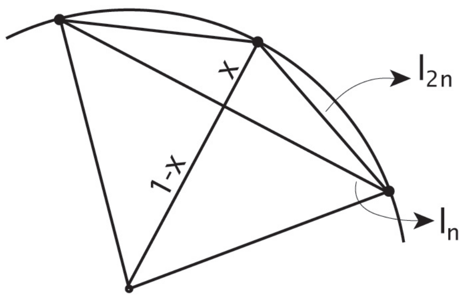
Um método um pouco mais elaborado, mas que também se baseia em métodos estatísticos, é o conhecido como a "Agulha de Buffon". Há inúmeras referências tratando deste método, como por exemplo o livro de J-P. Delahaye [6].

9.3 Aproximando por polígonos

Como calculamos a área e o perímetro usando aproximações por polígonos, é de se esperar que muitos métodos para calcular π utilizem polígonos inscritos ou circunscritos.

Um método muito usado ao longo da história consiste em tomar o hexágono inscrito em um círculo e supor que o perímetro do hexágono aproxima bem o do círculo. Obtem-se $2\pi R \approx 6R$ e logo $\pi \approx 3$.

Arquimedes ($\sim$287 aC - $\sim$212 aC) melhora este método determinando uma fórmula que lhe permite calcular o perímetro de polígonos com muitos lados. Seu método consiste em: toma-se um círculo de raio 1 e inscreve-se um polígono regular de n lados. Seja l_n o comprimento do lado e $1 - x$ o comprimento da flecha relativa a este lado.



Ao compararmos estas medidas com o lado l_{2n} do polígono de $2n$ lados temos que

$$x^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 = l_{2n}^2 \tag{1}$$

$$(1-x)^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 = 1 \tag{2}$$

de onde tiramos que $2x = l_{2n}^2$. Substituindo em (1) obtemos

$$\frac{l_{2n}^4}{4} + \frac{l_n^2}{4} - l_{2n}^2 = 0 \;\Rightarrow\; l_{2n}^4 - 4l_{2n}^2 + l_n^2 = 0 \;\Rightarrow (l_{2n}^4 - 4l_{2n}^2 + 4) - 4 + l_n^2 = 0$$

Como o raio do círculo é 1, $l_n < 2$ para todo n e logo $4 - l_n^2 > 0$, podemos concluir que

$$l_{2n}^2 - 2 = \pm\sqrt{4 - l_n^2}.$$

Por outro lado, ainda porque o raio é 1, $l_4 = \sqrt{2}$, $l_6 = 1$ e $l_{2n} < l_6 = 1$ se $n > 4$. Assim, $l_{2n}^2 - 2 < 0$ e

$$l_{2n}^2 - 2 = -\sqrt{4 - l_n^2} \;\;\Rightarrow\;\; l_{2n} = \pm\sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}.$$

Mas $l_{2n} > 0$, pois é a medida do comprimento do lado de um polígono. Então

$$l_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}$$

e o perímetro do polígono com $2n$ lados é

$$p_{2n} = 2n\sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}.$$

Podemos então usar esta fórmula, como fez Arquimedes, para aproximar $\pi \approx \dfrac{p_{2n}}{2}$.

Número $2n$ de lados	l_{2n}	$\dfrac{p_{2n}}{2}$
6	1	3
12	$\sqrt{2 - \sqrt{4 - l_6^2}}$	$6\sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 3,1058$
24	$\sqrt{2 - \sqrt{4 - l_{12}^2}}$	$12\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \approx 3,1326$

Vemos que se tomarmos um polígono regular inscrito com 24 lados obtemos a estimativa $\pi \approx 3,1326$.

9.4 Usando funções trigonométricas

No capítulo 4 vimos que

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n \operatorname{sen} \frac{180}{2^n}.$$

Para facilitar nossa vida, vamos chamar $2^n \operatorname{sen} \frac{180}{2^n}$ de x_n. Temos então que

$$x_4 = 4 \operatorname{sen} \frac{180}{4} = 4\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Para calcular $x_8 = 8 \operatorname{sen} \frac{180}{8}$ observemos primeiro que

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}}{2} &= \operatorname{sen}\frac{180}{4} = \operatorname{sen} 2\frac{180}{8} = 2\operatorname{sen}\frac{180}{8}\cos\frac{180}{8} \\
\frac{\sqrt{2}}{2} &= \cos\frac{180}{4} = \cos 2\frac{180}{8} = \cos^2\frac{180}{8} - \operatorname{sen}^2\frac{180}{8}
\end{aligned}$$

de onde obtemos que $\operatorname{sen}\frac{180}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Logo

$$x_8 = 4\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 3,0614$$

De maneira análoga obtemos

$$x_{16} = 2^3\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \approx 3,1214$$

e assim por diante, obtendo

$$x_{2^n} = 2^{n-1}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+(-1)^n\sqrt{2}}}}}$$

na qual temos $n-1$ raízes quadradas.

É claro que quanto maior o n, mais perto de π estará x_{2^n}. Por volta de 480 dC, o matemático chinês T'su Ch'ung Chi usou esta fórmula para calcular π com 7 decimais certas (calculando mais de 13 raizes quadradas a mão!).

9.5 Usando séries

Com o advento do Cálculo, aparecem novas formas para estimar π. Por exemplo, sabe-se que para se x é um número entre -1 e 1 então

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

Como a série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ converge absolutamente se $-1 < x < 1$, podemos integrá-la termo a termo neste intevalo e logo se z satisfaz $-1 < z < 1$ temos

$$\begin{aligned}
\arctan z &= \arctan z - \arctan 0 = \int_0^z \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \int_0^z (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots)dx = (x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots)_{x=0}^{x=z} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}.
\end{aligned}$$

Sejam $a = \arctan \frac{1}{2}$ e $b = \arctan \frac{1}{3}$. Temos

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = 1,$$

logo $a + b = \frac{\pi}{4}$ ou seja

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}.$$

Usando a expansão em série de arctan, obtemos

$$\pi = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{(\frac{1}{2})^3}{3} + \frac{(\frac{1}{2})^5}{5} + \ldots + \frac{1}{3} - \frac{(\frac{1}{3})^3}{3} + \frac{(\frac{1}{3})^5}{5} + \ldots\right).$$

Se somarmos alguns termos desta série conseguiremos uma estimativa para π. Mas quantos termos temos que somar para garantir que temos, por exemplo,pelo menos 2 decimais corretas, depois da vírgula?

Para responder esta pergunta precisaremos fazer mais umas continhas. Seja c um número tal que $0 \le c < 1$. Então

$$\arctan c = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{c^{2n+1}}{2n+1}.$$

Chamemos de S_k a soma dos k primeiros termos desta série, isto é,

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{c^{2n+1}}{2n+1}.$$

Temos então que

$$\begin{aligned}
|\arctan c - S_k| &= \left|\sum_{n=k+1}^{\infty} (-1)^n \frac{c^{2n+1}}{2n+1}\right| = \left|\pm\left(\frac{c^{2k+3}}{2k+3} - \frac{c^{2k+5}}{2k+5} + \frac{c^{2k+7}}{2k+7}\ldots\right)\right| \\
&= \left(\frac{c^{2k+3}}{2k+3}\right)\left|1 - \frac{2k+3}{2k+5}c^2 + \frac{2k+3}{2k+7}c^4 + \ldots\right| \\
&< \left(\frac{c^{2k+3}}{2k+3}\right)\left(1 + c^2 + c^4 + \ldots\right) = \left(\frac{c^{2k+3}}{2k+3}\right)\left(\frac{1}{1-c^2}\right).
\end{aligned}$$

Vamos aplicar esta estimativa de erro ao caso anterior. Se ao calcularmos o erro cometido e obtivermos que erro=|valor exato-valor estimado| $< 10^{-3} = 0,001$ então o valor estimado será igual ao valor exato até a segunda decimal depois da vírgula. Queremos então achar um número a ser csomado que garanta que o erro cometido fique menor do que 10^{-3}.

Se somarmos os N primeiros termos da série de $\arctan \frac{1}{2}$ obtemos a estimativa de erro

$$|\arctan\frac{1}{2} - S_N| < \left(\frac{(\frac{1}{2})^{2N+3}}{2N+3}\right)\left(\frac{1}{1-(\frac{1}{2})^2}\right) = \frac{1}{3(2N+3)2^{2N+1}}.$$

Somando os M primeiros termos da série de arctan $\frac{1}{3}$ obtemos

$$|\arctan\frac{1}{3} - S_M| < \left(\frac{(\frac{1}{3})^{2M+3}}{2M+3}\right)\left(\frac{1}{1-(\frac{1}{3})^2}\right) = \frac{1}{8(2M+3)3^{2M}}.$$

Precisamos então saber quantos termos (valores de N e M) devemos calcular em cada série para que

$$|\arctan\frac{1}{2} - S_N| < \frac{10^{-3}}{2} \quad \text{e} \quad |\arctan\frac{1}{3} - S_M| < \frac{10^{-3}}{2} \tag{3}$$

de modo que a soma ficará menor do que 10^{-3}, que é o que queremos.

É fácil ver que se tomarmos $N = 3$ e $M = 2$, as desigualdades em (3) são satisfeitas. Logo basta somar 3 termos da primeira série e 2 da segunda para termos certeza de pelo menos duas decimais de π.

Este método foi inventado por G.Leibniz (1646-1716) e aperfeiçoado por J.Machin (1686?-1751), em 1706. Ele é só um exemplo do poder das séries para o cálculo de π. Existem muitos outros métodos, que podem ser vistos nos livros de Delahaye [6] ou de Posamentier [24] ou no sítio na internet de Porto da Silveira [23], por exemplo.

9.6 Ainda hoje...

A procura de métodos cada vez mais rápidos e eficientes para se calcular π continua até hoje. Cada vez temos séries com convergência mais rápida, métodos numéricos mais confiáveis e potentes e máquinas com cada vez mais velocidade de computação.

Por exemplo, em fevereiro de 2010, F. Bellard anuncia em seu sítio na internet [1] ter calculado 2699999990000 decimais de π usando a série de Chudnovsky

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(6n)!(A+Bn)}{(n!)^3(3n)!C^{3n+3/2}}$$

com $A = 13591409$, $B = 545140134$ e $C = 640320$, um potente algoritmo numérico desenvolvido por ele e um PC standard, acom Core i7 CPU de 2.93 GHz, gastando no total, incluindo a verificação das contas, 131 dias.

E, com certeza, ainda aparecerão muitos outros algoritmos calculando mais e mais decimais de π.

Referências Bibliográficas

[1] F. Bellard: disponível em http://bellard.org/pi/pi2700e9/

[2] J.D. Bernal: Ciência na História, 1^o volume, Livros Horizonte Ltda, Lisboa, 1975.

[3] D. Blatner: The Joy of π, Walker & Company, 1999.

[4] F. Cajori: A History of Mathematics, The MacMillan Co, NY, 1924.

[5] R.Courant: Differential and Integral Calculus, vols 1 e 2, Blackie and Son Limited, 1962

[6] J-P. Delahaye: Le fascinant nombre π, Pour la Science, Ed. Belin, 1977.

[7] G. de la Roque Palis: Comprimento da Circunferência no Ensino Elementar, RPM 14, 29-37.

[8] G.H. de Paula Reis, Uma Curva de G. de Rham e os Números Diádicos, 2010, disponível em www.mat.ufg.br/docentes/ronaldo.

[9] O.A.W. Dilke: Mathematics and measurement, British Museum Publications, 1991.

[10] C.H. Edwards Jr.: The Historical Development of the Calculus, Springer-Verlag, Ny, 1982.

[11] D.G. Figueiredo: Análise I, LTC, 1996

[12] E. Helm: The vibrating string of the pythagoreans, ScientificAmerican, 217(6), 1967

[13] T.L. Heath (transl): The Thirteen Books of the Elements, Dover , 1956.

[14] L.W.H. Hull: Historia y Filosofia de la Ciencia, Ed. Ariel, Barcelona, 1973.

[15] M. Kline: Mathematics - the loss of certainty, Oxford Univ. Press, NY, 1980.

[16] M. Kline: Mathematics in the Western Culture, G.Allen and Unwin Ltda, Londres, 1954.

[17] A. Koestler: Os sonâmbulos, IBASA, São Paulo, 1961.

[18] E.L. Lima: Medida e Forma em Geometria, comprimento, área, volume e semelhança, Col. Professor de Matemática, SBM, 1991

[19] J.L.Marques Barbosa: Geometria Euclidiana Plana, Col. Professor de Matemática, SBM.

[20] I. Niven: A simple proof that π is irrational, Bull. AMS 53 (6), p. 509, 1947.

[21] I. Niven: Números: racionais e irracionais. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, Sociedade Brasileira de Matemática, 1961.

[22] E. Noel(org.): Le Matin des Mathématiciens, Ed.Belin, Paris, 1985.

[23] J.F. Porto da Silveira: Cálculo das Constantes Elementares Clássicas: o caso do Pi, 2001, disponível em em http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/aplcom1a.html.

[24] A.S. Posamentier, I.Lehmann: π: A Biography of the World's Most Mysterious Number, Prometheus Books, 2004.

[25] A. Reymond: Histoire des Sciences Exactes et Naturelles dans l'Antiquité Greco Romaine, PUF, Paris, 1955.

[26] J.Roche: The Mathematics of Measurement, Springer 1998

[27] G.F.Simmons: Cálculo com Geometria Analítica, vols 1 e 2, McGraw-Hill, 1987

[28] M. Spivak: Calculus, Ed. Publish or Perish, 4^a edição 2008.

[29] S.B.A. Viana: Sobre Pitágoras e pitagóricos, Rev. Kriterion, 20, 1973/74.