Estudo de algumas funções complexas de uma variável complexa: aspectos algébricos e geométricos

Cecília S. Fernandez

Universidade Federal Fluminense

$1^{\underline{o}}$ Colóquio da Região Sudeste

Abril de 2011

Aos meus grandes amores,

Ana Cecília e Belmira.

Prefácio

Este pequeno texto está baseado nos dois primeiros capítulos do livro intitulado "Introdução às Funções de uma Variável Complexa" publicado pela SBM na coleção Textos Universitários, de minha autoria e em parceria com o Prof. Nilson Bernardes Junior. Várias modificações foram feitas no texto original para melhor adequá-lo ao público alvo do presente minicurso, que são alunos e professores do ensino médio.

O objetivo deste minicurso é estudar funções complexas em uma variável num contexto meramente algébrico e geométrico, sem levar em consideração qualquer conceito que envolva a topologia do plano complexo. Vamos apresentar as chamadas funções elementares, a saber, as funções racionais, as funções polinomiais, a função exponencial e as funções trigonométricas. Apresentaremos a noção de função inversa à direita para estudarmos as "funções logaritmos", já que como veremos todo número complexo não nulo possui uma infinidade de logaritmos.

No primeiro capítulo deste texto definimos de modo rigoroso os números complexos e apresentamos suas propriedades aritméticas básicas. Consideramos também o problema de extração de raízes de números complexos. Introduzimos os conceitos de exponencial e de logaritmo para números complexos. No segundo capítulo vamos introduzir as chamadas funções elementares e apresentar várias de suas propriedades. No terceiro capítulo vamos apresentar vários exercícios sobre os tópicos anteriormente apresentados. Os exercícios variam muito em seus graus de dificuldade, porém encorajamos o leitor a resolver muitos (ou todos) deles.

Ao terminar, agradeço ao Comitê do I Colóquio da Região Sudeste pela oportunidade de apresentar este minicurso e a Rogério Trindade pelo excelente trabalho de digitação.

A autora.

Abril de 2011.

Sumário

Capítulo 1

Números Complexos

1.1 Introdução

Os números complexos surgiram no século 16, motivados pelo interesse em se calcular soluções de equações polinomiais. Por um longo tempo, eles não foram considerados como números legítimos, mas existentes apenas na imaginação humana. É interessante observar que ainda hoje chamamos o número complexo $i = \sqrt{-1}$ de "algarismo imaginário". O passo decisivo no sentido de formalizar o conceito de número complexo foi a representação geométrica desses números como pontos do plano. O primeiro matemático a ter uma visão clara de tal representação e explorá-la em suas investigações foi Gauss, conforme fica claro, embora de modo implícito, em sua dissertação escrita em 1797. Todavia, Gauss expôs ao público suas idéias a esse respeito de modo explícito apenas em 1831, com o propósito de introduzir os "inteiros Gaussianos". O corpo dos números complexos $\mathbb{C}$ foi finalmente definido de modo rigoroso por Hamilton em 1837.

A famosa fórmula de Bhāskara (século 12)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

para o cálculo das soluções da equação do 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0),$$

que na verdade já era conhecida pelos babilônios há quase 2000 anos a.C., nos mostra que uma tal equação sempre possui soluções em $\mathbb{C}$. Um fato notável sobre os números complexos é que *toda* equação polinomial não constante com coeficientes reais (ou complexos) possui pelo menos uma solução em $\mathbb{C}$. Este fato, conhecido como teorema fundamental da álgebra, foi provado por Gauss em 1797. Não apresentaremos aqui uma demonstração deste teorema por estar além do nível do presente minicurso.

Na Seção 2 definimos de modo rigoroso os números complexos e apresentamos suas propriedades aritméticas básicas. Além disso, definimos o algarismo imaginário i e explicamos como a definição formal de número complexo se relaciona com a representação desses números na forma $x + yi$ (x e y reais), que é a forma como normalmente trabalhamos com eles.

Na Seção 3 definimos os conceitos de parte real, parte imaginária, conjugado e valor absoluto de um número complexo. Também estabelecemos diversas propriedades desses conceitos, incluindo a desigualdade triangular.

Na Seção 4 definimos o conceito de argumento e apresentamos a forma polar de um número complexo.

Na Seção 5 consideramos o problema de extração de raízes de números complexos. Mostramos que todo número complexo não nulo possui exatamente n raízes n-ésimas distintas, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, e exibimos uma fórmula para o cálculo dessas raízes. Mostramos também que as soluções de uma equação quadrática em $\mathbb{C}$ são dadas pela fórmula quadrática usual (fórmula de Bhāskara).

Nas Seções 6 e 7 introduzimos os conceitos de exponencial e de logaritmo para números complexos, e estabelecemos algumas de suas propriedades.

Na Seção 8 definimos e estudamos as potências com expoentes complexos.

1.2 O corpo dos números complexos

Definimos o *corpo dos números complexos* como sendo o conjunto

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\},$$

com as seguintes operações de *adição* e *multiplicação*: se $z = (x, y)$ e $w = (a, b)$ pertencem a $\mathbb{C}$, então

$$z + w = (x + a, y + b) \quad \text{e} \quad zw = (xa - yb, xb + ya). \tag{1}$$

Os elementos de $\mathbb{C}$ são chamados de *números complexos*. Denotamos o número complexo $(0, 0)$ simplesmente por 0 e o número complexo $(1, 0)$ simplesmente por 1. Para cada $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, definimos

$$-z = (-x, -y) \quad \text{e} \quad z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) \text{ se } z \neq 0.$$

O número z^{-1} também é denotado por $\dfrac{1}{z}$ ou $1/z$.

Proposição 1.1 *As seguintes propriedades se verificam para quaisquer* $z, w, t \in \mathbb{C}$ *:*

(a) $z + (w + t) = (z + w) + t$ *(associatividade da adição).*

(b) $z + w = w + z$ *(comutatividade da adição).*

(c) $0 + z = z$ *(elemento neutro).*

(d) $z + (-z) = 0$ *(elemento oposto).*

(e) $z(wt) = (zw)t$ *(associatividade da multiplicação).*

(f) $zw = wz$ *(comutatividade da multiplicação).*

(g) $1z = z$ *(elemento unidade).*

(h) $zz^{-1} = 1$ *se* $z \neq 0$ *(elemento inverso).*

(i) $z(w+t) = zw + zt$ *(distributividade da multiplicação em relação à adição).*

Demonstração: Todas as propriedades acima decorrem diretamente das definições das operações de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$. Por esta razão, provaremos apenas o item (a) e deixaremos os demais como exercício.
(a): Se $z = (x,y)$, $w = (a,b)$ e $t = (c,d)$, então

$$\begin{aligned} z + (w+t) &= (x,y) + (a+c, b+d) = (x + (a+c), y + (b+d)) \\ &= ((x+a)+c, (y+b)+d) = (x+a, y+b) + (c,d) \\ &= (z+w)+t, \end{aligned}$$

onde usamos a associatividade da adição de números reais.

□

Tendo definido as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$, definimos as operações de *subtração* e *divisão* da maneira usual: dados $z, w \in \mathbb{C}$,

$$z - w = z + (-w) \quad \text{e} \quad \frac{z}{w} = zw^{-1} \text{ se } w \neq 0.$$

Além disso, a *potenciação* também é definida da maneira usual:

$$z^0 = 1, \quad z^n = \underbrace{z \cdots z}_{n\text{-vezes}} \quad \text{e} \quad z^{-n} = \underbrace{z^{-1} \cdots z^{-1}}_{n\text{-vezes}} \text{ se } z \neq 0 \quad (n \geq 1).$$

Decorre da Proposição 1 que diversas propriedades das operações aritméticas de números reais são válidas para números complexos. Por exemplo, a soma e o produto de duas frações z_1/w_1 e z_2/w_2 de números complexos podem ser obtidas pelas fórmulas

$$\frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1 w_2 + z_2 w_1}{w_1 w_2} \quad \text{e} \quad \frac{z_1}{w_1}\frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1 z_2}{w_1 w_2},$$

exatamente como ocorre no caso real. Destacamos outras propriedades nos exercícios 2 e 3.

Um conjunto no qual estão definidas uma operação de adição e uma operação de multiplicação satisfazendo as propriedades mencionadas na Proposição 1 é chamado um *corpo*. Por esta razão é que chamamos $\mathbb{C}$ de corpo dos números complexos. Isto também explica por que muitas vezes $\mathbb{R}$ é chamado corpo dos números reais e $\mathbb{Q}$ é chamado corpo dos números racionais. A Teoria dos Corpos é um ramo da Álgebra Abstrata, e assim está fora do objetivo do presente livro. Aqui, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ serão os únicos corpos que nós encontraremos.

O leitor certamente lembra de ter visto no ensino médio os números complexos como sendo os "números" da forma

$$x + yi,$$

onde x e y são números reais e i é um "algarismo imaginário", que satisfaz à estranha igualdade $i^2 = -1$. Vejamos como obter tal representação dos números complexos. Primeiramente, denotamos o número complexo $(x,0)$, com $x \in \mathbb{R}$, simplesmente por

x. Note que isto está de pleno acordo com o que já fizemos com o elemento neutro 0 e o elemento unidade 1 ($0 = (0,0)$ e $1 = (1,0)$). Em outras palavras, fazemos a seguinte convenção:

$$x = (x, 0) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Dessa forma, passamos a ver $\mathbb{R}$ como um subconjunto de $\mathbb{C}$, ou seja, todo número real é considerado um número complexo. A princípio, a inclusão $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ pode gerar uma certa ambigüidade: dados $x \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, o que entendemos por

$$x + a \quad \text{e} \quad xa\,?$$

A soma e o produto dos números reais x e a ou a soma e o produto dos números complexos x e a ? A resposta é que tanto faz, uma vez que os valores são os mesmos. De fato,

$$(x,0) + (a,0) = (x+a,0) = x + a$$

e

$$(x,0)(a,0) = (xa - 0 \cdot 0, x \cdot 0 + 0 \cdot a) = (xa, 0) = xa,$$

por (1) e nossa convenção (2). Agora, note que $(0,1)^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$, ou seja, o número -1 possui uma "raiz quadrada" em $\mathbb{C}$! O número complexo $(0,1)$ é denotado por i e é chamado de *algarismo imaginário*. Assim, temos a propriedade básica do algarismo imaginário:

$$i^2 = -1. \tag{3}$$

Finalmente, dado um número complexo qualquer $z = (x, y)$, temos

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (y,0)(0,1),$$

isto é,

$$z = x + yi. \tag{4}$$

Logo, o par (x, y) e a expressão $x + yi$ representam o mesmo número complexo. A expressão (4) é chamada a *forma algébrica* de z; essa é a forma na qual os números complexos são usualmente denotados.

Sempre que tomarmos um número complexo na forma $z = x + yi$ assumiremos implicitamente que x e y são números reais.

Observamos que com a forma algébrica não precisamos nos preocupar em memorizar as definições de $z + w$ e zw dadas em (1). De fato, basta usarmos algumas das propriedades da adição e da multiplicação em $\mathbb{C}$ já apresentadas: se $z = x + yi$ e $w = a + bi$ são números complexos, então

$$z + w = (x + yi) + (a + bi) = x + a + yi + bi = (x + a) + (y + b)i$$

e

$$zw = (x + yi)(a + bi) = xa + yia + xbi + ybi^2 = (xa - yb) + (xb + ya)i.$$

1.3 Conjugado e valor absoluto

Dado um número complexo $z = x + yi$, definimos a *parte real* e a *parte imaginária* de z por

$$\operatorname{Re} z = x \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} z = y,$$

respectivamente. Quando $\operatorname{Re} z = 0$, dizemos que z é *imaginário puro*.

Como um número complexo $z = x + yi$ é o par ordenado (x, y), podemos representá-lo graficamente como o ponto do plano cartesiano de abscissa x e ordenada y, ou como o vetor que liga a origem a este ponto (Figura 1). Neste contexto, chamamos o plano cartesiano de *plano complexo*, o eixo dos x de *eixo real* e o eixo dos y de *eixo imaginário*.

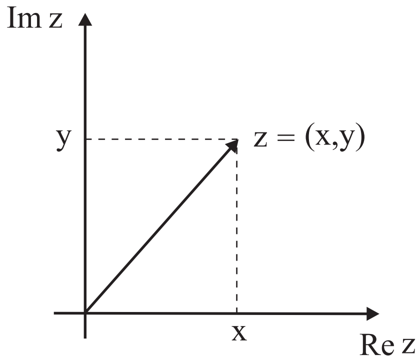

Figura 1

Abaixo indicamos as interpretações gráficas da adição e da subtração de números complexos.

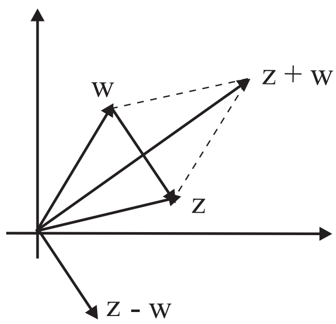

Figura 2

Definimos o *conjugado* de um número complexo $z = x + yi$ como sendo o número complexo

$$\bar{z} = x - yi.$$

Graficamente, $\bar{z}$ é o ponto do plano complexo obtido através da reflexão de z em relação ao eixo real (Figura 3).

Proposição 1.2 *As seguintes propriedades se verificam para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$:*

(a) $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$ *e* $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$.

(b) $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$ *se* $w \neq 0$.

(c) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$ *e* $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$.

(d) $z \in \mathbb{R}$ *se e somente se* $\overline{z} = z$.

(e) z *é imaginário puro se e somente se* $\overline{z} = -z$.

Demonstração: Provaremos apenas que $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ e deixaremos a demonstração das demais propriedades ao leitor. De fato, se $z = x + yi$ e $w = a + bi$, então

$$\overline{z+w} = \overline{(x+a) + (y+b)i} = (x+a) - (y+b)i = \overline{z} + \overline{w}.$$

□

Através da noção de conjugado, podemos deduzir a expressão do inverso de um número complexo $z = x + yi \neq 0$ da seguinte maneira:

$$z^{-1} = \left(\frac{1}{x+yi}\right)\left(\frac{\overline{x+yi}}{\overline{x+yi}}\right) = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2}\,i.$$

O *valor absoluto* (ou *módulo*) de um número complexo $z = x + yi$ é definido por

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Graficamente, o número real $|z|$ nos dá o comprimento do vetor correspondente a z no plano complexo (Figura 3). Mais ainda, $|z - w|$ é a distância entre os pontos do plano que representam z e w.

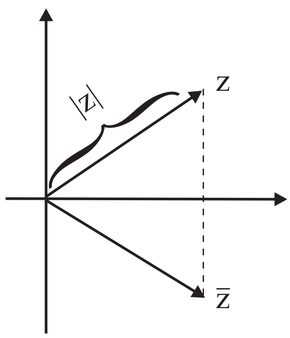

Figura 3

Proposição 1.3 *As seguintes propriedades se verificam para quaisquer* $z, w \in \mathbb{C}$:

(a) $\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z|$ *e* $\operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

(b) $|z|^2 = z\overline{z}$, $|\overline{z}| = |z|$ *e* $|zw| = |z||w|$.

(c) $|z/w| = |z|/|w|$ *se* $w \neq 0$.

(d) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

(e) $|z + w| \geq ||z| - |w||$.

A desigualdade (d) é conhecida como *desigualdade triangular*.

Demonstração: Provaremos apenas as duas últimas propriedades, deixando as demais para o leitor.

(d): Afirmamos que

$$|z+w|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2. \tag{5}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2, \end{aligned}$$

onde usamos o item (b) e a Proposição 2. Como

$$\begin{aligned} |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 &\le |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2 \end{aligned}$$

(pelos itens (a) e (b)), segue de (5) que

$$|z+w|^2 \le (|z|+|w|)^2.$$

Extraindo as raízes quadradas de ambos os lados da desigualdade acima obtemos a desigualdade desejada.

(e): Pela desigualdade triangular,

$$|z| = |(z+w) - w| \le |z+w| + |-w| = |z+w| + |w|,$$

donde

$$|z+w| \ge |z| - |w|.$$

Trocando os papéis de z e w na desigualdade acima, obtemos

$$|z+w| \ge |w| - |z|.$$

Como $||z|-|w|| = |z|-|w|$ se $|z| \ge |w|$ e $||z|-|w|| = |w|-|z|$ se $|w| \ge |z|$, vemos que em qualquer caso, $|z+w| \ge ||z|-|w||$. □

Se $z \neq 0$, a Proposição 3(b) implica que

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}\,. \tag{6}$$

Em particular, $z^{-1} = \overline{z}$ se $|z| = 1$. A identidade (6) mostra como z e z^{-1} se comparam graficamente: z^{-1} aponta na direção de $\overline{z}$ e tem valor absoluto $1/|z|$ (Figura 4).

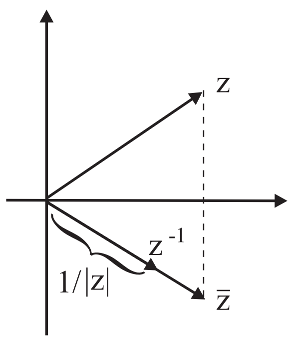

Figura 4

1.4 A forma polar

Consideremos um número complexo $z = x + yi \neq 0$. Seja θ_0 o ângulo que o eixo real positivo forma com o vetor correspondente a z no sentido anti-horário (Figura 5).

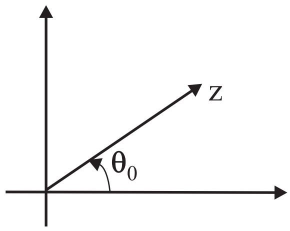

Figura 5

Como $\cos\theta_0 = x/|z|$ e $\operatorname{sen}\theta_0 = y/|z|$, temos que

$$z = |z|(\cos\theta_0 + i\operatorname{sen}\theta_0).$$

Assim, é sempre possível representar z na forma

$$z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta), \tag{7}$$

onde $\theta \in \mathbb{R}$. Uma tal representação é chamada uma *representação polar* de z. Se $\theta \in \mathbb{R}$ satisfaz (7), dizemos que θ é um *argumento* de z. Assim, θ_0 é um argumento de z. Entretanto, qualquer θ da forma $\theta_0 + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, também satisfaz (7). Em particular, z possui infinitos argumentos. Por outro lado, se θ satisfaz (7) então $\cos\theta = \cos\theta_0$ e $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta_0$, o que implica que $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Assim, o conjunto $\arg z$ de todos os argumentos de z é dado por

$$\arg z = \{\theta_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Por exemplo,

$$1 + i = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}) \quad \text{e} \quad 1 + i = \sqrt{2}\,(\cos\frac{-7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{-7\pi}{4})$$

são representações polares do número $1 + i$; note que $\arg(1 + i) = \{\pi/4 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. O único argumento de z que pertence ao intervalo $(-\pi, \pi]$ é chamado o *argumento principal* de z e é denotado por $\operatorname{Arg} z$. Por exemplo,

$$\operatorname{Arg} i = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Arg}(-1 - i) = -\frac{3\pi}{4} \quad \text{e} \quad \operatorname{Arg}(-2) = \pi.$$

A identidade

$$z = |z|(\cos\operatorname{Arg} z + i\operatorname{sen}\operatorname{Arg} z) \tag{8}$$

é chamada a *forma polar* de z.

Sejam

$$z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \quad \text{e} \quad w = |w|(\cos\psi + i\operatorname{sen}\psi)$$

representações polares de dois números complexos não nulos z e w. Vamos agora obter representações polares para z^{-1} e zw. Por (6),

$$z^{-1} = |z|^{-1}[\cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta)]. \tag{9}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)(\cos\psi + i\operatorname{sen}\psi) \\ &= |z||w|[(\cos\theta\cos\psi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi) + i(\cos\theta\operatorname{sen}\psi + \operatorname{sen}\theta\cos\psi)], \end{aligned}$$

donde concluímos que

$$zw = |z||w|[\cos(\theta+\psi) + i\operatorname{sen}(\theta+\psi)]. \tag{10}$$

Esta igualdade nos dá a interpretação gráfica do produto de dois números complexos: zw tem valor absoluto $|z||w|$ e tem $\theta+\psi$ como um argumento (Figura 6). Definindo

$$-A = \{-a; a \in A\} \ \text{ e } \ A+B = \{a+b; a \in A \text{ e } b \in B\} \quad (A, B \subset \mathbb{C}),$$

decorre das fórmulas (9) e (10) que

$$\arg(z^{-1}) = -\arg z \quad \text{e} \quad \arg(zw) = \arg z + \arg w. \tag{11}$$

Porém, não é sempre verdade que $\operatorname{Arg}(z^{-1}) = -\operatorname{Arg} z$ nem que $\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w$ De fato, tome $z = -1$.Então, $\operatorname{Arg}(z^{-1}) = \pi \neq -\pi = -\operatorname{Arg} z$. Tomando agora $z = w = -i$, temos que $\operatorname{Arg}(zw) = \pi \neq -\pi = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w$. De (9) e (10) obtemos que

$$z^n = |z|^n[\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)] \ \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

No caso em que $|z| = 1$, a igualdade (12) nos diz que

$$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta). \tag{13}$$

Esta igualdade é conhecida como a *fórmula de De Moivre*.

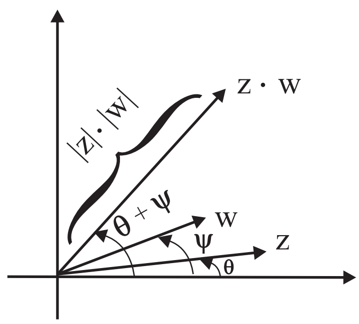

Figura 6

1.5 Extração de raízes

Dados um número complexo w e um número natural $n \geq 1$, dizemos que $z \in \mathbb{C}$ é uma *raiz n-ésima* de w se

$$z^n = w.$$

Se $w = 0$, é claro que $z = 0$ é a única solução da equação $z^n = w$. Logo, o número 0 possui uma única raiz n-ésima que é o próprio 0. Veremos a seguir que se $w \neq 0$ então existem exatamente n soluções distintas da equação $z^n = w$.

Teorema 1.4 *Fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Todo número complexo não nulo w possui exatamente n raízes n-ésimas complexas distintas, a saber,*

$$\sqrt[n]{|w|}\Big[\cos\Big(\frac{\operatorname{Arg}(w)+2k\pi}{n}\Big)+i\operatorname{sen}\Big(\frac{\operatorname{Arg}(w)+2k\pi}{n}\Big)\Big], \tag{14}$$

onde $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Demonstração: Para cada $k \in \mathbb{Z}$, denotemos por z_k o número complexo dado em (14). Escreva $w = |w|(\cos\psi + i\operatorname{sen}\psi)$, onde $\psi = \operatorname{Arg} w$. Nós estamos procurando todos os números complexos $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ para os quais é verdade que

$$z^n = w.$$

Pela fórmula (12), a equação acima se transforma em

$$|z|^n[\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)] = |w|(\cos\psi + i\operatorname{sen}\psi),$$

o que equivale a dizer que

$$|z|^n = |w|, \quad \cos(n\theta) = \cos\psi \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(n\theta) = \operatorname{sen}\psi.$$

A primeira condição é satisfeita precisamente quando $|z| = \sqrt[n]{|w|}$, enquanto as duas últimas são satisfeitas quando $n\theta = \psi + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, isto é, $\theta = \frac{\psi+2k\pi}{n}$ com $k \in \mathbb{Z}$. Assim, as raízes n-ésimas de w são os números z_k para $k \in \mathbb{Z}$. Fazendo $k = 0, 1, \ldots, n-1$ obtemos distintas raízes n-ésimas de w. Entretanto, os demais valores de k nos dão apenas repetições das raízes $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$. De fato, tome $k \in \mathbb{Z}$ arbitrário. Escreva

$$k = qn + r \ \text{ com } q \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \le r < n.$$

Como

$$\frac{\psi+2k\pi}{n} = \frac{\psi+2(qn+r)\pi}{n} = \frac{\psi+2r\pi}{n} + 2q\pi,$$

vemos que $z_k = z_r \in \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$. □

A raiz n-ésima de w obtida fazendo $k = 0$ em (14) é chamada a *raiz n-ésima principal* de w. A notação $\sqrt[n]{w}$ é *reservada* para esta raiz. Note que esta notação é coerente com a notação $\sqrt[n]{|w|}$ que indica a única raiz real positiva de $|w|$. Portanto,

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|}\left[\cos\left(\frac{\operatorname{Arg} w}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{Arg} w}{n}\right)\right]. \tag{15}$$

Como a única raiz n-ésima do zero é o próprio zero, convencionamos que $\sqrt[n]{0} = 0$. O símbolo $\sqrt{w}$ também é usado em lugar de $\sqrt[2]{w}$.

Observe que todas as n raízes n-ésimas de w possuem o mesmo módulo, a saber, $\sqrt[n]{|w|}$. Logo, elas são representadas por n pontos sobre a circunferência com centro na origem e raio $\sqrt[n]{|w|}$. Além disso, estes pontos estão igualmente espaçados ao longo desta circunferência devido à relação de seus argumentos. Como exemplo, consideremos as raízes cúbicas de 8. Pelo Teorema 4, elas são os números

$$z_k = 2\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{3}\right) \quad \text{para } k = 0, 1, 2.$$

Calculando, obtemos $z_0 = 2$, $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ e $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$. Temos que z_0, z_1 e z_2 dividem a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 2 em três partes congruentes (Figura 7).

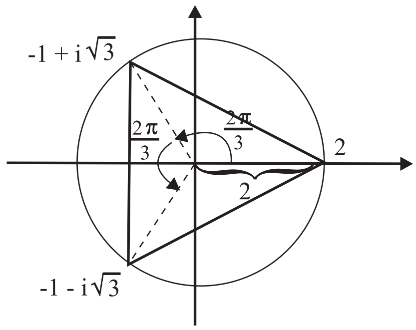

Figura 7

Finalizaremos esta seção verificando que as soluções da equação quadrática

$$az^2 + bz + c = 0,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$, são dadas pela fórmula quadrática usual, isto é, por

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

onde $\sqrt{b^2 - 4ac}$ denota, como vimos anteriormente, a raiz quadrada principal do número complexo $b^2 - 4ac$. Com efeito, usando a técnica de completar quadrados, temos que

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad z^2 + \frac{b}{a}z = -\frac{c}{a} \\
&\Longleftrightarrow \quad z^2 + \frac{b}{a}z + (\frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad (z + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
&\Longleftrightarrow \quad z + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&\Longleftrightarrow \quad z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

Por exemplo, as soluções da equação $z^2 + 4z + 5 = 0$ são os números complexos $2 + i$ e $2 - i$, já que

$$z = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(5)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = -2 \pm i.$$

1.6 A exponencial

Nosso objetivo nesta seção é definir a exponencial e^z de um número complexo z e derivar algumas de suas propriedades.

Lembremos do Cálculo que a expansão em série de Taylor de e^t para t real é

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots .$$

Substituindo t por iy ($y \in \mathbb{R}$) nesta série e computando formalmente (sem nos preocuparmos com qualquer significado preciso de convergência), obtemos

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Essas duas últimas séries devem novamente nos trazer lembranças do Cálculo – elas são as expansões em série de Taylor de $\cos y$ e de $\operatorname{sen} y$, respectivamente. Em outras palavras, $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$ parece uma boa interpretação para e^{iy}. Além disso, como $e^{s+t} = e^s e^t$ se $s, t \in \mathbb{R}$, é natural esperarmos que $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Motivados por estas considerações, damos a seguinte definição: dado um número complexo $z = x + yi$, definimos a *exponencial* de z por

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

A notação $\exp z$ é freqüentemente usada em lugar de e^z. Com $z = iy$ obtemos a *fórmula de Euler*:

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y.$$

Como exemplo,

$$e^{\frac{\pi i}{2}} = i, \quad e^{1+\pi i} = -e \quad \text{e} \quad e^{\pi - \frac{\pi i}{2}} = -e^{\pi} i.$$

Vemos diretamente da definição que

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \quad \text{e} \quad \arg(e^z) = \{\operatorname{Im} z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}. \tag{16}$$

Em particular, $e^z \neq 0$ para todo número complexo z. A fórmula (12) implica diretamente que

$$(e^z)^n = e^{nz} \tag{17}$$

para quaisquer $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}$. Em particular, $(e^z)^{-1} = e^{-z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Se $z = x + yi$ e $w = a + bi$ são dois números complexos, a fórmula (10) nos mostra que

$$\begin{aligned} e^z e^w &= [e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)][e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)] \\ &= e^{x+a}[\cos(y+b) + i \operatorname{sen}(y+b)] = e^{z+w}. \end{aligned}$$

Em outras palavras,

$$e^{z+w} = e^z e^w \tag{18}$$

para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

É interessante obsevarmos que, ao contrário do que acontece no caso real, é possível termos $e^z = e^w$ com $z \neq w$. Por exemplo, $e^0 = e^{2\pi i} = 1$. A proposição abaixo esclarece por completo esse fenômeno.

Proposição 1.5 *Para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$, temos que*

$$e^z = e^w \text{ se e somente se } z = w + 2k\pi i \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração: Escreva $z = x + yi$ e $w = a + bi$ com $x, y, a, b \in \mathbb{R}$. Se $e^z = e^w$, isto é,

$$e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b),$$

então $e^x = e^a$ (donde $x = a$) e $y = b + 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Daí, $z = w + 2k\pi i$, como desejado.

Reciprocamente, se $z = w + 2k\pi i$ com $k \in \mathbb{Z}$, então

$$e^z = e^{w+2k\pi i} = e^w e^{2k\pi i} = e^w(\cos 2k\pi + i \operatorname{sen} 2k\pi) = e^w.$$

□

Na Seção 4 vimos que todo número complexo não nulo z tem uma representação polar $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, onde $r = |z|$ e θ é um argumento de z. Com a noção de exponencial esta igualdade pode ser escrita de uma forma mais econômica, a saber,

$$z = re^{i\theta}. \tag{19}$$

Observemos também que as n raízes n-ésimas de um número complexo não nulo w (dadas por (14)) podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\sqrt[n]{|w|}\; e^{i\left(\frac{\operatorname{Arg}(w)+2k\pi}{n}\right)} \quad \text{para } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Em particular, as n raízes n-ésimas do número 1 (conhecidas como as *raízes n-ésimas da unidade*) são dadas por

$$\zeta_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \quad \text{para } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Notemos também que as n raízes n-ésimas de w podem ser obtidas multiplicando-se a raiz n-ésima principal $\sqrt[n]{w}$ de w pelas raízes n-ésimas da unidade. De fato,

$$\sqrt[n]{|w|}\; e^{i\left(\frac{\operatorname{Arg}(w)+2k\pi}{n}\right)} = \zeta_k \sqrt[n]{w} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Por exemplo, se $n = 2$ então $\zeta_0 = 1$ e $\zeta_1 = -1$. Logo, as raízes quadradas de w são

$$\sqrt{w} \quad \text{e} \quad -\sqrt{w}.$$

1.7 Logaritmos

Relembremos que um número real s é dito o logaritmo natural (ou o logaritmo na base e) de um número real positivo t (em símbolos, $s = \ln t$) quando $e^s = t$. Imitando este conceito, dizemos que um número complexo w é um *logaritmo* de um número complexo não nulo z se $e^w = z$.

Existe uma diferença muito importante entre o caso real e o caso complexo. Enquanto no caso real todo número positivo possui um único logaritmo, veremos a seguir que todo número complexo não nulo possui uma infinidade de logaritmos. Denotamos por $\log z$ o conjunto de todos os logaritmos do número complexo $z \neq 0$. Assim, para todo número complexo não nulo z,

$$\log z = \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\}. \tag{20}$$

Vamos agora determinar $\log z$. Se $w = \ln|z| + i\theta$ com $\theta \in \arg z$, então $e^w = e^{\ln|z|}e^{i\theta} = |z|e^{i\theta} = z$. Por outro lado, suponhamos $w \in \log z$. Então $e^w = z$, o que equivale a dizer que

$$e^{\operatorname{Re} w} = |e^w| = |z| \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} w = \operatorname{Arg} z + 2k\pi \text{ para algum } k \in \mathbb{Z},$$

donde $w = \ln|z| + i\theta$ com $\theta \in \arg z$. Portanto,

$$\begin{aligned} \log z &= \{\ln|z| + i\theta : \theta \in \arg z\} \\ &= \{\ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned} \tag{21}$$

Fazendo $k = 0$ em (21) obtemos o *logaritmo principal* de z, que é denotado por $\operatorname{Log} z$. Assim,

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z. \tag{22}$$

Por (21) e (22),

$$\log z = \{\operatorname{Log} z + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}. \tag{23}$$

Notemos que $\operatorname{Log} x = \ln x$ para todo número real positivo x. De agora em diante, escreveremos $\operatorname{Log} x$ em vez de $\ln x$ quando x for um número real positivo. Como exemplo, temos que

$$\operatorname{Log}(-1) = \pi i,\ \operatorname{Log}(e^2 i) = 2 + \frac{\pi}{2}i,\ \operatorname{Log}(1+i) = \operatorname{Log}\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i.$$

Definindo

$$A - B = \{a - b : a \in A \text{ e } b \in B\} \quad \text{e} \quad mA = \{ma : a \in A\}$$

para $A, B \subset \mathbb{C}$ e $m \in \mathbb{Z}$, temos a seguinte

Proposição 1.6 *Dados dois números complexos não nulos z_1 e z_2, temos que:*

(a) $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$.

(b) $\log(z_1/z_2) = \log z_1 - \log z_2$.

(c) $\log(z_1^m) = m \log z_1$ *para todo* $m \in \mathbb{Z}^*$.

Demonstração: Provaremos (a) e deixaremos (b) e (c) como exercício para o leitor. (a): Tomemos $w \in \log z_1 + \log z_2$. Então, $w = w_1 + w_2$ com $w_1 \in \log z_1$ e $w_2 \in \log z_2$. Daí, $e^w = e^{w_1}e^{w_2} = z_1 z_2$, ou seja, $w \in \log(z_1 z_2)$. Tomemos agora $w \in \log(z_1 z_2)$. Então, por (21), $w = \operatorname{Log}|z_1 z_2| + i\theta$ com $\theta \in \arg(z_1 z_2)$. Por (11), $\theta = \theta_1 + \theta_2$ com $\theta_1 \in \arg z_1$ e $\theta_2 \in \arg z_2$. Assim, $w = (\operatorname{Log}|z_1| + i\theta_1) + (\operatorname{Log}|z_2| + i\theta_2) \in \log z_1 + \log z_2$.

□

Terminamos esta seção observando que não é sempre verdade que $\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2$, nem que $\operatorname{Log}(z_1/z_2) = \operatorname{Log} z_1 - \operatorname{Log} z_2$ e nem que $\operatorname{Log}(z_1^m) = m \operatorname{Log} z_1$ De fato, tome $z = w = -i$. Temos que $\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(z^2) = \pi i \neq -\pi i = 2\operatorname{Log} z = \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w$. Tomando agora $z = -i$ e $w = i$, temos que $\operatorname{Log}(\frac{z}{w}) = \pi i \neq -\pi i = \operatorname{Log} z - \operatorname{Log} w$.

1.8 Potências complexas

Relembremos que se t é um número real positivo e a é um número real arbitrário, é usual definirmos a potência t^a pela fórmula

$$t^a = e^{a \log t}.$$

Ao tentarmos imitar esta definição no contexto dos números complexos, com o objetivo de definirmos a potência z^λ onde z é um número complexo não nulo e λ é um número complexo arbitrário, nós nos deparamos com o seguinte problema: z tem uma infinidade de logaritmos! Qual deles devemos usar? A resposta: todos eles. Mais precisamente, para cada $w \in \log z$, o número complexo $e^{\lambda w}$ é chamado a *λ-potência de z associada ao logaritmo w*. Se $w = \operatorname{Log} z$, então o número complexo $e^{\lambda w}$ é chamado a *λ-potência principal de z*. Para denotarmos esta λ-potência especial de z, usaremos a notação familiar z^λ. Assim, neste livro, z^λ denotará exclusivamente a λ-potência principal de z, isto é:

$$z^\lambda = e^{\lambda \operatorname{Log} z}. \tag{24}$$

Como exemplo, temos que

$$(-i)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(-i)} = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{-\pi i}{2}\right)} = e^{\frac{-\pi i}{4}} = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}.$$

Como todo logaritmo de z é da forma $\operatorname{Log} z + 2k\pi i$ com $k \in \mathbb{Z}$, segue que as λ-potências de z são os números da forma

$$e^{2k\pi\lambda i} z^\lambda \tag{25}$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Analisaremos a seguir dois casos que merecem um comentário especial. Primeiramente, vejamos o que ocorre quando λ é um número inteiro; digamos $\lambda = n$. Como $e^{2k\pi\lambda i} = 1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, segue de (25) que todas as λ-potências de z se reduzem ao número complexo z^n, a n-ésima potência usual de z definida na Seção 2. Com efeito,

$$e^{2k\pi\lambda i} z^\lambda = 1\, e^{n \operatorname{Log} z} = z^n,$$

já que $n \operatorname{Log} z$ é um logaritmo de z^n (Proposição 6(c)). Vejamos agora o que ocorre quando $\lambda = 1/n$ com $n \in \mathbb{N}^*$. Segue de (25) que o conjunto das λ-potências de z coincide com o conjunto das raízes n-ésimas de z apresentadas no Teorema 4, já que:

$$\begin{aligned} e^{2k\pi\lambda i} z^\lambda &= \exp\left(\frac{2k\pi i}{n}\right) \exp\left(\frac{\operatorname{Log} z}{n}\right) \\ &= \exp\left[\frac{\operatorname{Log}|z|}{n} + i\left(\frac{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi}{n}\right)\right] \\ &= \exp(\operatorname{Log}\sqrt[n]{|z|}) \exp\left[i\left(\frac{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi}{n}\right)\right] \\ &= \sqrt[n]{|z|} \exp\left[i\left(\frac{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi}{n}\right)\right]. \end{aligned}$$

Em particular,

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}. \tag{26}$$

É sempre verdade que $z^{\lambda+\mu} = z^\lambda \cdot z^\mu$. De fato,

$$z^{\lambda+\mu} = e^{(\lambda+\mu)\log z} = e^{\lambda \log z + \mu \cdot \log z} = e^{\lambda \log z} \cdot e^{\mu \log z} = z^\lambda \cdot z^\mu.$$

Porém, outras "regras de exponenciação" não são válidas em geral. Por exemplo, não é sempre verdade que $(zw)^\lambda = z^\lambda w^\lambda$ e nem que $(z^\lambda)^\mu = z^{\lambda\mu}$.

Capítulo 2

Funções Complexas

2.1 Introdução

Tendo estudado o corpo dos números complexos no Capítulo 1, vamos agora iniciar o estudo das *funções complexas de uma variável complexa*, isto é, das funções $f : A \to \mathbb{C}$ cujo domínio A está contido em $\mathbb{C}$. Tais funções constituem o principal objeto de estudo da Análise Complexa em uma variável.

Na Seção 2 relembramos alguns conceitos importantes sobre funções e introduzimos as funções complexas de uma variável complexa, assim como algumas noções básicas associadas a tais funções.

Nas Seções 3, 4 e 5 apresentamos exemplos importantes de funções complexas de uma variável complexa, a saber: as funções racionais, as funções polinomiais, a função exponencial, as funções trigonométricas e as funções hiperbólicas. Além disso, estabelecemos algumas propriedades destas funções.

Na Seção 6 introduzimos o conceito de função inversa à direita e definimos a função raiz quadrada principal e a função logaritmo principal.

Na Seção 7 vamos apresentar como certas funções complexas de uma variável complexa transformam retas, círculos e discos.

2.2 Funções de uma variável complexa

Comecemos relembrando alguns conceitos básicos sobre funções. Dados dois conjuntos A e B, uma *função f de A em B* é uma regra de correspondência que associa a cada elemento a de A um elemento $f(a)$ de B, chamado o *valor de f em a*. As notações $f : A \to B$ e $f : a \in A \mapsto f(a) \in B$ são usadas para indicar que f é uma tal função. O conjunto A é chamado o *domínio* de f e o conjunto B é chamado o *contradomínio* de f. Se $S \subset A$, definimos a *imagem de S por f* como sendo o conjunto $f(S) = \{f(a) : a \in S\}$. O conjunto $f(A)$ é chamado a *imagem* de f. Quando $f(A) = B$, dizemos que f é *sobrejetiva*. Se $f(a_1) \neq f(a_2)$ sempre que $a_1 \neq a_2$ ($a_1, a_2 \in A$), dizemos que f é *injetiva*. Finalmente, f é dita ser *bijetiva* quando é injetiva e sobrejetiva.

Se $f : A \to B$ e $g : C \to D$ são funções tais que $f(A) \subset C$, definimos a *composta de g com f* como sendo a função $g \circ f : A \to D$ dada por

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \quad \text{para todo } a \in A.$$

Se $f : A \to B$ é bijetiva, então existe uma única função $h : B \to A$ tal que $(h \circ f)(a) = a$ para todo $a \in A$ e $(f \circ h)(b) = b$ para todo $b \in B$. Tal função h é chamada a *inversa* de f e é denotada por f^{-1}.

No presente livro estamos interessados em funções $f : A \to \mathbb{C}$ cujo domínio A é um subconjunto de $\mathbb{C}$. Uma tal função é chamada de *função complexa de uma variável complexa*. Assim, a menos que se diga explicitamente o contrário, sempre que considerarmos uma função $f : A \to \mathbb{C}$ assumiremos implicitamente que $A \subset \mathbb{C}$.

É comum definirmos uma função complexa de uma variável complexa simplesmente dando uma expressão explícita dos valores da função, como, por exemplo, $f(z) = (2z+1)/(z^2+1)$ e $g(z) = z/\operatorname{Re} z$. Nesse caso, convencionamos que o domínio da função é o conjunto de todos os números complexos para os quais a expressão dada tem sentido. Nos exemplos acima, temos que o domínio de f é $\mathbb{C}\backslash\{-i, i\}$ e o domínio de g é $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \neq 0\}$.

Dadas duas funções $f : A \to \mathbb{C}$ e $g : B \to \mathbb{C}$ e dado um número complexo c, definimos as funções *múltiplo* cf, *soma* $f+g$, *diferença* $f-g$, *produto* fg e *quociente* f/g por

$$(cf)(z) = cf(z), \quad (f \pm g)(z) = f(z) \pm g(z),$$
$$(fg)(z) = f(z)g(z) \quad \text{e} \quad (f/g)(z) = f(z)/g(z).$$

Notemos que o domínio de cf é A, os domínios de $f \pm g$ e fg são iguais a $A \cap B$ e o domínio de f/g é o conjunto $\{z \in A \cap B : g(z) \neq 0\}$. Também definimos o *conjugado* $\overline{f}$ e o *módulo* $|f|$ de f por

$$\overline{f}(z) = \overline{f(z)} \quad \text{e} \quad |f|(z) = |f(z)| \quad (z \in A).$$

Por exemplo, se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é dada por $f(z) = z^2$, então

$$\overline{f}(z) = \overline{z^2} = \overline{z}^2 = (x^2 - y^2) - 2xyi \text{ e } |f|(z) = |z^2| = |z|^2 = x^2 + y^2,$$

para todo $z = x + yi \in \mathbb{C}$.

Muitas vezes é conveniente expressarmos uma função $f : A \to \mathbb{C}$ em termos de sua *parte real* e de sua *parte imaginária*, isto é, representarmos f na forma

$$f = u + iv,$$

onde

$$u(z) = \operatorname{Re}[f(z)] \quad \text{e} \quad v(z) = \operatorname{Im}[f(z)] \quad (z \in A).$$

Note que u e v são funções reais em A. Se escrevermos $z = (x, y)$ com $x, y \in \mathbb{R}$, podemos considerar u e v como funções reais de duas variáveis reais:

$$u(z) = u(x, y) \quad \text{e} \quad v(z) = v(x, y).$$

Por exemplo, se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é dada por $f(z) = z + 1$, então as partes real e imaginária de f são $u(z) = u(x, y) = x + 1$ e $v(z) = v(x, y) = y$.

Dados uma função $f : A \to \mathbb{C}$ e um subconjunto S de A, dizemos que f é *limitada* em S se existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq M \quad \text{para todo } z \in S.$$

Por exemplo, a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^2$ é limitada em $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, mas não é limitada em $\mathbb{C}$.

2.3 As funções racionais

Uma *função racional* é uma função do tipo

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}$$

onde os *coeficientes* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ e $b_0, b_1, \ldots, b_m$ são números complexos. O domínio de f é o conjunto de todos os elementos de $\mathbb{C}$ nos quais o denominador de f não se anula.

Uma função racional da forma

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \tag{1}$$

é chamada uma *função polinomial*. Se $a_n \neq 0$ em (1), dizemos que f é uma função polinomial de *grau n*. Observamos que não é atribuído grau à função polinomial nula $f(z) = 0$.

Vejamos algumas funções racionais especiais:

a) *Funções constantes:* São as funções da forma

$$f(z) = c,$$

onde c é uma constante complexa. Se $c = 0$, temos a *função nula*.

b) *Translações:* São as funções da forma

$$f(z) = z + b,$$

onde b é uma constante complexa. Se $b = 0$, temos a *função identidade*.

c) *Rotações:* São as funções da forma

$$f(z) = az,$$

onde a é uma constante complexa de módulo 1.

d) *Homotetias:* São as funções da forma

$$f(z) = az,$$

onde a é uma constante real não nula. Dizemos que f é uma *dilatação* se $a > 1$ e uma *contração* se $0 < a < 1$.

e) *Função inversão:* É a função

$$f(z) = 1/z.$$

f) *Função n-ésima potência:* É a função

$$f(z) = z^n,$$

onde $n \in \mathbb{N}^*$.

Dada uma função $f : A \to \mathbb{C}$ e dado um número $z_0 \in A$, dizemos que z_0 é um *zero* de f (ou uma *raiz* de f) se $f(z_0) = 0$. Por exemplo, $i/2$ é o único zero da função $f(z) = 2\overline{z} + i$ e os zeros da função polinomial $g(z) = z^2 + 4z + 5$ são os números $-2 - i$ e $-2 + i$.

Proposição 2.1 *Seja $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ uma função polinomial. Se $z_0 \in \mathbb{C}$ é uma raiz de f, então $z - z_0$ é um* fator *de f, isto é, existe uma função polinomial g tal que*

$$f(z) = (z - z_0)g(z) \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Demonstração: Por hipótese,

$$f(z_0) = a_0 + a_1 z_0 + \cdots + a_n z_0^n = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z) - f(z_0) \\ &= a_1(z - z_0) + a_2(z^2 - z_0^2) + \cdots + a_n(z^n - z_0^n). \end{aligned} \tag{2}$$

Agora,

$$z^k - z_0^k = (z - z_0)(z^{k-1} + z^{k-2}z_0 + \cdots + zz_0^{k-2} + z_0^{k-1})$$

para todo inteiro $k \geq 1$. Substituindo estas igualdades em (2) e colocando $(z - z_0)$ em evidência, vemos que $f(z) = (z - z_0)g(z)$, onde g é a função polinomial

$$g(z) = a_1 + a_2(z + z_0) + \cdots + a_n(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1}).$$

□

Proposição 2.2 *Toda função polinomial de grau $n \geq 0$ possui no máximo n raízes.*

Demonstração: A prova será feita por indução sobre n. Como toda função polinomial de grau zero não possui raízes, o resultado é obvio para $n = 0$. Suponhamos o resultado verdadeiro para um certo $n \geq 0$ e seja f uma função polinomial de grau $n + 1$. Vamos provar que f possui no máximo $n + 1$ raízes. Se f não possui raízes, nada temos a fazer. Digamos que f possui pelo menos uma raiz e seja z_0 uma raiz de f. Pela Proposição 1, existe uma função polinomial g tal que

$$f(z) = (z - z_0)g(z) \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Como f tem grau $n + 1$, temos que g tem grau n. Pela hipótese de indução, g possui no máximo n raízes. Como as raízes de f são exatamente z_0 e as raízes de g, concluímos que f possui no máximo $n + 1$ raízes, como desejado. □

De fato, toda função polinomial de grau $n \geq 1$ possui pelo menos uma raiz em $\mathbb{C}$. Este fato é conhecido como o Teorema Fundamental da Álgebra e não será provado aqui.

2.4 A função exponencial e as funções trigonométricas

A *função exponencial* é a função $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\exp z = e^z.$$

Como $|e^z| = e^x$ para todo $z = x + yi \in \mathbb{C}$, vemos que

$$\exp z \neq 0 \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Uma outra propriedade importante da função exponencial é que ela é periódica de período $2\pi i$, isto é,

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp z \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Outras propriedades da função exponencial são dadas pelas fórmulas (17) e (18) do Capítulo 1. Note que a função exponencial complexa estende a função exponencial real.

Para $y \in \mathbb{R}$, como $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$ e $e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y$, segue que

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}\,.$$

Portanto, é natural definirmos a *função cosseno* e a *função seno* de uma variável complexa por

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

As quatro outras funções trigonométricas são definidas em termos das funções cosseno e seno pelas relações usuais. Assim,

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \quad \text{e} \quad \sec z = \frac{1}{\cos z} \tag{5}$$

estão definidas para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\cos z \neq 0$, e

$$\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} \quad \text{e} \quad \csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z} \tag{6}$$

estão definidas para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{sen} z \neq 0$. Note que as funções trigonométricas complexas estendem as correspondentes funções reais.

As definições (5) e (6) nos conduzem a perguntar quais são os zeros da função $\cos z$ e da função $\operatorname{sen} z$. A resposta é dada pela seguinte

Proposição 2.3 *Temos que*

$$\cos z = 0 \ \textit{ se e somente se } \ z = \pi/2 + k\pi \textit{ com } k \in \mathbb{Z}$$

e

$$\operatorname{sen} z = 0 \ \textit{ se e somente se } \ z = k\pi \textit{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Em particular, os zeros do cosseno e do seno complexos são os zeros do cosseno e do seno reais, respectivamente.

Demonstração: Comecemos relembrando que o cosseno hiperbólico e o seno hiperbólico de um número real y são definidos por

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

respectivamente. Seja $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Então,

$$\begin{aligned} \cos z = \cos(x+yi) &= \frac{e^{-y+xi} + e^{y-xi}}{2} \\ &= \frac{e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) + e^{y}(\cos x - i \operatorname{sen} x)}{2} \\ &= (\cos x)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) - i\,(\operatorname{sen} x)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\cos z = \cos(x+yi) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y. \tag{7}$$

De modo análogo obtemos que

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x+yi) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y. \tag{8}$$

Por (7), $\cos z = 0$ se e somente se

$$\cos x \cosh y = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y = 0. \tag{9}$$

Como $\cosh y > 0$, a primeira igualdade em (9) é válida exatamente quando $\cos x = 0$, ou seja, $x = \pi/2 + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Substituindo este valor de x, vemos que a segunda igualdade em (9) equivale a $\operatorname{senh} y = 0$, o que ocorre exatamente quando $y = 0$. Portanto, $\cos z = 0$ se e somente se $z = \pi/2 + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. O caso da função $\operatorname{sen} z$ se prova de modo análogo, usando a fórmula (8).

$\square$

A maioria das propriedades válidas para as funções trigonométricas reais permanecem válidas no caso complexo. Por exemplo, temos a seguinte

Proposição 2.4 *Para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$, temos:*

(a) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$.

(b) $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$.

(c) $\cos(-z) = \cos z$.

(d) $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w$.

(e) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w$.

Demonstração: (a): De fato,

$$\begin{aligned}\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z &= \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2iz}+2e^{iz}e^{-iz}+e^{-2iz}}{4} - \frac{e^{2iz}-2e^{iz}e^{-iz}+e^{-2iz}}{4} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Deixamos a demonstração dos demais itens ao leitor.

□

Entretanto, há diferenças entre o caso real e o caso complexo. Por exemplo, sabemos que as funções cosseno e seno são limitadas em $\mathbb{R}$. De fato, $|\cos t| \leq 1$ e $|\operatorname{sen} t| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Contudo, elas não são limitadas em $\mathbb{C}$, pois

$$|\cos(yi)| = \left|\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\right| = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} \to +\infty \text{ quando } y \to +\infty$$

e

$$|\operatorname{sen}(yi)| = \left|\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}\right| \geq \frac{e^{y}-e^{-y}}{2} \to +\infty \text{ quando } y \to +\infty.$$

2.5 As funções hiperbólicas

Definimos a *função cosseno hiperbólico* e a *função seno hiperbólico* de uma variável complexa por

$$\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{senh} z = \frac{e^z-e^{-z}}{2} \quad (z \in \mathbb{C}),$$

respectivamente.

As demais funções hiperbólicas são definidas pelas relações usuais. Assim,

$$\operatorname{tgh} z = \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z} \quad \text{e} \quad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ com $\cosh z \neq 0$, e

$$\operatorname{cotgh} z = \frac{\cosh z}{\operatorname{senh} z} \quad \text{e} \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\operatorname{senh} z}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{senh} z \neq 0$.

Proposição 2.5 *Temos que*

$$\cosh z = 0 \text{ } textse \text{ e somente se } z = (1/2+k)\pi i \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

e

$$\operatorname{senh} z = 0 \text{ se e somente se } z = k\pi i \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração: Como

$$\cos(iz) = \frac{e^{iiz} + e^{-iiz}}{2} = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \cosh z,$$

segue da Proposição 3 que os zeros de $\cosh z$ são os números z tais que $iz = (1/2 + k)\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, são os números da forma $(1/2 + k)\pi i$ com $k \in \mathbb{Z}$. O caso da função $\operatorname{senh} z$ se prova de modo análogo, usando o fato de que

$$\operatorname{sen}(iz) = \frac{e^{iiz} - e^{-iiz}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = i \operatorname{senh} z.$$

□

Vejamos algumas propriedades das funções hiperbólicas:

Proposição 2.6 *Para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$, temos:*

(a) $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$.

(b) $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z$.

(c) $\cosh(-z) = \cosh z$.

(d) $\operatorname{senh}(z + w) = \operatorname{senh} z \cosh w + \cosh z \operatorname{senh} w$.

(e) $\cosh(z + w) = \cosh z \cosh w + \operatorname{senh} z \operatorname{senh} w$.

Deixamos a demonstração desta proposição ao leitor.

2.6 Funções inversas à direita

Dada uma função $f : A \to \mathbb{C}$ e dado um subconjunto B de $f(A)$, dizemos que uma função $g : B \to A$ é uma *inversa à direita de f em B* se

$$f(g(w)) = w \quad \text{para todo } w \in B;$$

no caso em que $B = f(A)$, dizemos simplesmente que g é uma *inversa à direita de f*. É interessante observar que toda função $f : A \to \mathbb{C}$ possui pelo menos uma inversa à direita em qualquer $B \subset f(A)$. De fato, as inversas à direita de f em B podem ser facilmente obtidas da seguinte maneira: Para cada $w \in B$, escolha qualquer $z_w \in A$ tal que $f(z_w) = w$, e defina $g(w) = z_w$.

Por exemplo, as funções

$$g(z) = \sqrt{z} \quad \text{e} \quad h(z) = -\sqrt{z} \quad (z \in \mathbb{C})$$

são inversas à direita da função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^2$. A função g é chamada *função raiz quadrada principal*. Definindo

$$m(z) = \begin{cases} \sqrt{z} & \text{se } z \in \mathbb{C} \text{ e } \operatorname{Im} z \geq 0 \\ -\sqrt{z} & \text{se } z \in \mathbb{C} \text{ e } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

obtemos uma outra inversa à direita de f. Como o leitor já percebeu, existem inúmeras "funções raiz quadrada". Mas geralmente, existem inúmeras "funções raiz n-ésima".

Consideremos agora a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = e^z$. A função

$$L(z) = \operatorname{Log} z \quad (z \in \mathbb{C}\backslash\{0\})$$

é uma inversa à direita de f, chamada *função logaritmo principal*. Mais geralmente, para todo $k \in \mathbb{Z}$, a função

$$L_k(z) = \operatorname{Log} z + 2k\pi i \quad (z \in \mathbb{C}\backslash\{0\})$$

é uma inversa à direita de f. Assim, vemos que também existem inúmeras "funções logaritmo".

Concluímos esta seção observando que se g é uma inversa à direita de uma função $f : A \to \mathbb{C}$ em um subconjunto B de $f(A)$, então g é injetiva em B. De fato, se $w_1, w_2 \in B$ e $g(w_1) = g(w_2)$, então

$$w_1 = f(g(w_1)) = f(g(w_2)) = w_2.$$

2.7 Transformações por funções complexas

No estudo das funções reais de uma variável real, considerável ênfase é dada à visualização geométrica das funções através de seus gráficos. Embora tal visualização tenha limitações, ela nos ajuda a desenvolver nossa intuição e a compreender muitos conceitos importantes (como os de derivada e integral, por exemplo). Já para funções complexas de uma variável complexa, os gráficos em questão são subconjuntos de $\mathbb{C}^2$, que é naturalmente identificado ao espaço 4-dimensional $\mathbb{R}^4$. Assim, perdemos a capacidade de desenhar tais gráficos. Todavia, podemos frequentemente melhorar nossa compreensão de uma dada função $f : A \to \mathbb{C}$ se analisarmos como f transforma certas figuras geométricas, como retas, círculos, discos, etc. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.7 *A função $f(z) = e^z$ transforma a reta vertical $R = \{z \in \mathbb{C} : Rez = a\}$ no círculo $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = e^a\}$ e transforma a reta horizontal $S = \{z \in \mathbb{C} : Imz = b\}$ na semi-reta $L = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{ib} \text{ com } r > 0\}$. De fato, como*

$$|f(z)| = |e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C},$$

temos que $f(R) \subset C$. Para verificarmos que $C \subset f(R)$, fixamos $w_0 \in C$ e resolvemos a equação $w_0 = e^z$ para z em termos de w_0. As soluções são

$$z = \operatorname{Log}|w_0| + i(\operatorname{Arg} w_0 + 2k\pi) \;\text{ para } k \in \mathbb{Z}.$$

Seja z_0 uma dessas soluções. Então, $z_0 \in R$ (pois $|w_0| = e^a$) e $w_0 = f(z_0)$.

Agora, se $z \in S$ então $f(z) = e^z = e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z} = e^{\operatorname{Re} z} e^{ib} \in L$. Logo, $f(S) \subset L$. Por outro lado, dado $w_0 \in L$, temos que $z_0 = \operatorname{Log}|w_0| + bi \in S$ e $f(z_0) = w_0$. Assim, $L \subset f(S)$. Portanto, $f(S) = L$, como queríamos demonstrar.

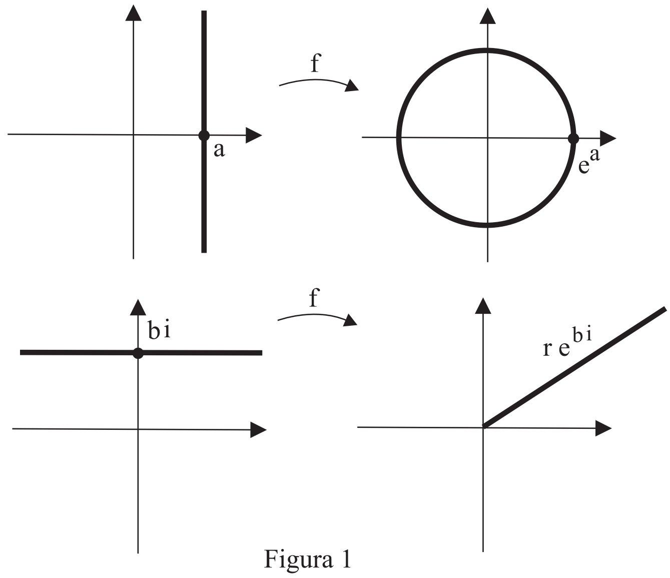

Figura 1

Exemplo 2.8 *A função $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$ transforma o disco $D = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1\}$ no semi-plano $H = \{w \in \mathbb{C} \,:\, Rew > 0\}$. Com efeito, se $z = x + yi$ então*

$$f(z) = \frac{1-z}{1+z} = \frac{1-z}{1+z}\,\frac{1+\bar{z}}{1+\bar{z}} = \frac{1-z+\bar{z}-z\bar{z}}{|1+z|^2} = \frac{(1-|z|^2)-2yi}{|1+z|^2}\,.$$

Portanto,

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1-|z|^2}{|1+z|^2} > 0 \ \text{ se e somente se } \ |z| < 1.$$

Logo, $f(D) \subset H$. Para verificarmos que $H \subset f(D)$, fixamos $w_0 \in H$ e resolvemos a equação $w_0 = (1-z)/(1+z)$ para z em termos de w_0. A solução é $z_0 = (1-w_0)/(1+w_0)$. Por construção, $w_0 = f(z_0)$. Como $\operatorname{Re} w_0 > 0$, temos que $z_0 \in D$. Isto prova que $f(D) = H$.

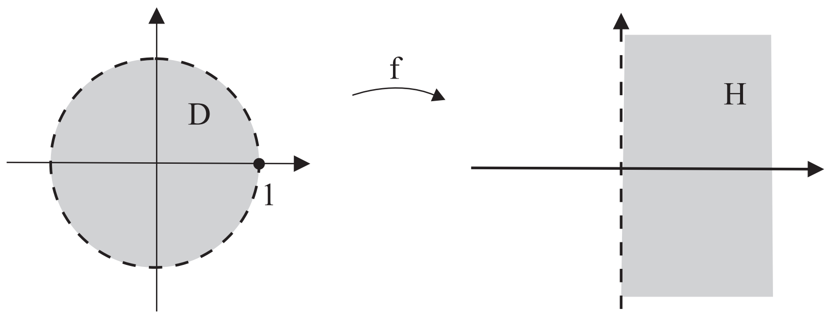

Figura 2

Capítulo 3

Exercícios

1. Conclua a demonstração da Proposição 1.

2. Sejam z e w dois números complexos não nulos. Mostre que:

(a) Se $zw = 1$, então $w = z^{-1}$ e $z = w^{-1}$.

(b) $(z^{-1})^{-1} = z$ e $(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$.

3. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Mostre que se $zw = 0$, então $z = 0$ ou $w = 0$.

4. Sejam $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ com $w_1 \neq 0$ e $w_2 \neq 0$. Mostre que

$$\frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1 w_2 + z_2 w_1}{w_1 w_2} \quad \text{e} \quad \frac{z_1}{w_1}\,\frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1 z_2}{w_1 w_2}\,\cdot$$

5. Se $z = 1 - i$ e $w = 4i$, expresse os seguintes números complexos na forma $x + yi$:

(a) $3z + iwz - z\overline{w}^3$.

(b) $2|w| + (1 - i)z + |z^2|$.

(c) $(w + z)/(w - z)$.

(d) $\operatorname{Im}(\overline{z}w^2) + 16i\operatorname{Re}(zw^{-1})$.

(e) $5i\operatorname{sen}(\operatorname{Arg} w) + z\cos(\operatorname{Arg}(3z))$.

6. Mostre que se $z = x + yi$ e $w = a + bi \neq 0$, então

$$\frac{z}{w} = \frac{ax + by}{a^2 + b^2} + \frac{ay - bx}{a^2 + b^2}\,i.$$

7. Mostre que:

(a) $|(2\overline{z} + 5)(\sqrt{2} - i)| = \sqrt{3}\,|2z + 5|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(b) $(-1 + i)^7 = -8(1 + i)$.

(c) $(1+i\sqrt{3})^{-10} = 2^{-11}(-1+i\sqrt{3})$.

8. Calcule $(1+i)^{12} - (1-i)^{12}$

9. Sejam $u = 1+i$ e $v = 1-i$. Determine $u^{52} \cdot v^{-51}$

10. Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que $iz + 2\bar{z} + 1 - i = 0$

11. Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$ dois números complexos. Que condições devemos ter sobre a, b, c e d para que $z + w$ e $z \cdot w$ sejam ambos números reais?

12. Mostre que a identidade $1 + z + \cdots + z^n = (1 - z^{n+1})/(1-z)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $z \in \mathbb{C}$ com $z \neq 1$.

13. Conclua a demonstração da Proposição 2.

14. Dados dois números complexos não nulos z e w, mostre que $|z+w| = |z| + |w|$ se e somente se $w = tz$ para algum $t > 0$.

15. Conclua a demonstração da Proposição 3.

16. Represente graficamente cada um dos seguintes subconjuntos do plano complexo:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z-i|\}$.

(b) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = \operatorname{Re} z\}$.

(c) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z^2) > 0\}$.

(d) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(1/z) < 1/2\}$.

(e) $\{z \in \mathbb{C} : |z-4| > |z|\}$.

(f) $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} i| < \pi/6\}$.

(g) $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg}(z-i)| < \pi/6\}$.

17. Compute:

(a) As raízes quadradas de $1 - i\sqrt{3}$.

(b) As raízes cúbicas de -27.

(c) As raízes de ordem 4 de -1.

18. Mostre que a igualdade $\sqrt{zw} = \sqrt{z}\sqrt{w}$ não é necessariamente verdadeira para z e w quaisquer em $\mathbb{C}$. Confirme, porém, que esta fórmula é válida se z ou w for um número real não negativo.

19. Ache as soluções das seguintes equações:

(a) $z^2 - 4iz - 4 - 2i = 0$.

(b) $iz^4 - (2+4i)z^2 - i = 0$.

20. Prove que $\sqrt{2}\,|z| \geq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

21. Para que números complexos $z \neq 0$ temos que $\sqrt{z/\overline{z}} = z/|z|$?

22. Sejam z e w dois números complexos não nulos. Mostre que

$$\operatorname{Re}(z\overline{w}) = |z||w| \text{ se e somente se } \arg w = \arg z.$$

23. Seja $c \in \mathbb{C}$ com $|c| < 1$. Mostre que $|z + c| \leq |1 + \bar{c}z|$ se e somente se $|z| \leq 1$, com igualdade ocorrendo se e somente se $|z| = 1$.

24. Prove que $e^{-|z|} \leq |e^z| \leq e^{|z|}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

25. Conclua a demonstração da Proposição 6.

26. Expresse os seguintes números complexos na forma $x + yi$:

(a) $\operatorname{Log}(-e^3) + i^i$.

(b) $(-1)^i \operatorname{Log}(-i)$.

27. Calcule todas as λ-potências de z quando:

(a) $z = ie^{\pi}$ e $\lambda = i$.

(b) $z = 1$ e $\lambda = 2 - i$.

28. Dê exemplos mostrando que é possível termos:

(a) $(zw)^{\lambda} \neq z^{\lambda} w^{\lambda}$.

(b) $(z^{\lambda})^{\mu} \neq z^{\lambda\mu}$.

29. Prove que se $z_0 \in \mathbb{C}$ é uma raiz de uma função polinomial $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ com coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reais, então $\overline{z_0}$ também é uma raiz de f.

30. Dada uma função $f : A \to \mathbb{C}$ e dado um ponto $z_0 \in A$, dizemos que z_0 é um *ponto fixo* de f se $f(z_0) = z_0$. Determine todos os pontos fixos da função

$$f(z) = \frac{z^2 + 2z}{z^2 + 1}\,.$$

31. Mostre que

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y \quad \text{e} \quad |\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$$

para todo $z = x + yi \in \mathbb{C}$.

32. Mostre que

$$|\cos z| \geq |\cos x| \quad \text{e} \quad |\operatorname{sen} z| \geq |\operatorname{sen} x|$$

para todo $z = x + yi \in \mathbb{C}$.

33. Ache todas as raízes da equação $\operatorname{senh} z = i$.

34. Sejam $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ e $f : A \to \mathbb{C}$ a função dada por

$$f(z) = \operatorname{Log}(z^2 + 1).$$

(a) Prove que f é uma função injetiva.

(b) Determine sua imagem $B = f(A)$.

(c) Calcule sua inversa $f^{-1} : B \to A$.

35. Determine o domínio de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(z) = (e^z + e^{-z})/(z^2 + \overline{z}^2)$.

(b) $g(z) = (z^2 + 5z)/(e^z - 1)$.

(c) $h(z) = \operatorname{Log}(e^z - e^{-z})$.

(d) $k(z) = (z \cos z)/(z^4 + 3z^2 - 4)$.

36. Expresse as partes real e imaginária das seguintes funções como funções das variáveis reais x e y:

(a) $f(z) = z^3 + iz^2$.

(b) $g(z) = \overline{z}e^z - ze^{\overline{z}}$.

(c) $h(z) = i\overline{z}^2 - 2z^2 + i$.

(d) $k(z) = z \operatorname{Log} z$ para $\operatorname{Re} z > 0$.

37. Sejam $f : A \to \mathbb{C}$ e $g : A \to \mathbb{C}$ funções. Mostre que se f e g são limitadas em um subconjunto S de A, então $f + g$ e fg também são limitadas em S.

38. Determine $f(S)$, onde $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < r\}$ e $f(z) = e^{1/z}$.

39. Considere a função $f(z) = 1/z$. Determine a imagem dos seguintes conjuntos por f:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2| = 1\}$.

(b) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 1\}$.

(c) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$.

40. Determine a imagem do triângulo com vértices em $3 + 4i$, $-3 + 4i$ e $-5i$ pela função $f(z) = z + 5i$.

41. Determine a imagem do conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ pelas seguintes funções:

(a) $f(z) = 2iz - i$.

(b) $g(z) = i/z - 1$.

42. Conclua a demonstração da Proposição 4.

43. Mostre que a imagem do disco $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ pela função $f(z) = e^z$ está contida no anel $A = \{w \in \mathbb{C} : 1/e \leq |w| \leq e\}$.

44. Mostre que a imagem do disco $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ pela função $f(z) = \cos z$ (resp. $f(z) = \operatorname{sen} z$) está contida no disco $D' = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq (e^2+1)/(2e)\}$.

45. Demonstre a Proposição 6.

46. Ache todas as raízes das equações:

(a) $\cosh z = 1/2$.

(b) $\operatorname{senh} z = 1$.

(c) $\cosh z = -2$.

47. Prove que

$$\operatorname{senh}(iz) = i \operatorname{sen} z \quad \text{e} \quad \cosh(iz) = \cos z$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

48. Determine os pontos fixos das seguintes funções:

(a) $f(z) = (1-i)z + 2$.

(b) $g(z) = \bar{z} + i$.

(c) $h(z) = ze^z$.

49. Exiba uma inversa à direita da função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^3$.

50. Exiba uma inversa à direita g da função $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^4$ satisfazendo $g(-1) = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})/2$.

Referências Bibliográficas

[1] M.P. Carmo, A.C. Morgado e E. Wagner, *Trigonometria - Números Complexos*, 3ª edição, Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2005.

[2] C.S. Fernandez e N.C. Bernardes Jr., *Introdução às Funções de uma Variável Complexa*, 2ª edição, Coleção Textos Universitários, SBM, 2008.