

**Leis de Conservação  
e  
Aplicações ao Tráfego nas Cidades**

**Cesar S. Eschenazi**  
**Universidade Federal de Minas Gerais**

**1º Colóquio da Região Sudeste**  
**Abril de 2011**



# Prefácio

Estas notas apresentam um estudo introdutório às leis de conservação. Apesar do caráter introdutório, apresentamos os conceitos de dois importantes componentes no estudo de soluções de leis de conservação: as ondas de choque e as ondas de rarefação. Apresentamos também o conceito de solução fraca para as leis de conservação aqui consideradas, além de introduzir o tratamento numérico às leis de conservação lineares. Como aplicação desses conceitos descrevemos os fenômenos ondulatórios que aparecem nas soluções das equações que modelam o fluxo de trânsito nas cidades.

O material apresentado aqui é acessível a estudantes que completaram(ou estejam completando) o ciclo de disciplinas básicas da área ciências exatas. Devido ao caráter introdutório, os conceitos acima mencionados são apresentados para o caso de leis de conservação escalares. O mesmo ocorre com os modelos de tráfego que escolhemos.

Outros tópicos não tratados aqui, tais como condição de entropia método de viscosidade e outros fenômenos ondulatórios podem ser encontrados com a mesma abordagem em [6]. Para um estudo de modelos de tráfego mais completos, bem como outras aplicações de leis de conservação indicamos [4] e [12].

Agradeço aos Comitês Científico e Organizador do Colóquio da Região Sudeste a oportunidade de apresentar este mini-curso. Esta oportunidade permitiu o aprimoramento das notas de mini-curso homônimo que apresentei em conjunto com o Professor Arthur Azevedo durante a II Bienal de Matemática da SBM.

Finalmente, agradeço ao Professor Arthur Azevedo, pela leitura crítica das primeiras versões e pelo inestimável apoio, que possibilitou a concretização destas notas.

Belo Horizonte, Fevereiro de 2011.



# Sumário

<b>Prefácio</b>	<b>iii</b>
<b>1 Introdução às Leis de Conservação</b>	<b>1</b>
1.1 Leis de Conservação . . . . .	1
1.2 Um Modelo de Fluxo de Trânsito . . . . .	4
<b>2 O Método das Características</b>	<b>7</b>
2.1 Equação de Advecção Homogênea: . . . . .	7
2.2 Equação de Advecção Não Homogênea: . . . . .	9
2.3 Leis de Conservação Lineares . . . . .	10
2.4 Leis de Conservação Não Lineares: . . . . .	12
<b>3 Ondas de Choque</b>	<b>15</b>
<b>4 Ondas de Rarefação</b>	<b>23</b>
<b>5 Soluções Clássicas e Fracas de Leis de Conservação:</b>	<b>29</b>
<b>6 Introdução ao Método das Diferenças Finitas</b>	<b>33</b>
6.1 Introdução . . . . .	33
6.2 Esquemas numéricos . . . . .	33
6.3 Convergência, Consistência e Estabilidade . . . . .	37
6.4 A Condição CFL . . . . .	40
<b>7 Outras Aplicações de Leis de Conservação</b>	<b>43</b>
7.1 Aplicação 1: Difusão . . . . .	43
7.2 Aplicação 2: Reação química em um tubo . . . . .	44
7.3 Aplicação 3: Ondas de enchente em um rio . . . . .	45
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>47</b>



# Capítulo 1

## Introdução às Leis de Conservação

### 1.1 Leis de Conservação

Sistemas de equações diferenciais parciais da forma

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

onde  $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , e  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ , são de grande interesse tanto do ponto de vista prático quanto do ponto de vista teórico. Estas equações são geralmente denominadas *leis de conservação* em analogia a exemplo de sistemas que surgem na física, tais como conservação de massa, conservação de energia e conservação de momento.

Por se tratar de um estudo introdutório limitaremos nosso estudo ao caso de leis de conservação escalares ( $n = 1$ ), que permite introduzir de forma intuitiva os conceitos de onda de choque e onda de rarefação, presentes no estudo de fenômenos de ondas não lineares.

Em outras palavras, uma lei de conservação é uma equação que procura expressar a conservação de alguma entidade física, tais como massa, energia, momento, população, etc...

No nosso caso, essa equação é uma equação diferencial parcial obtida supondo que uma quantidade  $Q$  de uma substância  $\mathcal{S}$  pode fluir em um meio unidimensional (ao longo do eixo- $x$ ) e no tempo  $t$ . Ou seja, vamos supor que  $\mathcal{S}$  ocupa um tubo, de seção transversal  $A$  constante. Nesse tubo, selecionamos um pedaço qualquer, que denotaremos por  $S$ , com extremidades  $\alpha$  e  $\beta$ , como mostra a Figura 1.1. Vamos estudar equações que descrevem o comportamento de  $\mathcal{S}$  em cada ponto  $x$  do tubo e em cada instante de tempo  $t$ . Para isto, seja  $u(x, t)$  a densidade ou concentração de  $\mathcal{S}$  na posição  $x$  e no tempo  $t$ .

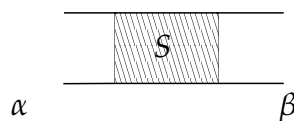


Figura 1.1: Uma seção do meio unidimensional com extremidades  $\alpha$  e  $\beta$ .

Observe que  $Q$  pode variar em  $S$  de duas formas:

1.  $S$  entra (ou sai) de  $S$  através dos extremos  $\alpha$  e  $\beta$
2.  $S$  é adicionado ao (ou removido do) meio na seção  $S$ .

Se denotarmos por  $Q_\alpha$  a taxa com que  $S$  entra ou sai de  $S$  pelo extremo  $\alpha$ , por  $Q_\beta$  a taxa com que  $S$  entra ou sai de  $S$  por  $\beta$ , por  $Q_{int}$  a taxa com que  $S$  é adicionado ou removido de  $S$  e por  $\frac{dQ}{dt}$  a taxa de variação de  $Q$  em  $S$ , segue que:

$$\frac{dQ}{dt} = Q_\alpha + Q_\beta + Q_{int} \quad (1)$$

Lembrando que  $u(x, t)$  é a densidade de  $S$  ao longo do meio, temos que o total de  $Q$  em  $S$  é dado por  $\int_\alpha^\beta u(x, t) dx$ . Assim, a taxa de variação de  $Q$  em  $S$  é dada por

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_\alpha^\beta u(x, t) dx \quad (2)$$

Denotaremos por  $\phi(\alpha, t)$  a taxa com que  $S$  entra em  $S$  por  $x = \alpha$ . O fato de  $\phi(\alpha, t) > 0$  implica que o fluxo está no sentido esquerda-direita e  $\phi(\alpha, t) < 0$  implica que o fluxo está no sentido direita-esquerda. A taxa com que  $S$  entra em  $S$  por  $x = \beta$  é  $-\phi(\beta, t)$ , o sinal negativo em  $x = \beta$  é necessário pois  $\phi(\beta, t) > 0$  indica que  $Q$  está diminuindo em  $S$ . Segue que a taxa com que  $Q$  entra em  $S$  através de seus extremos é

$$\phi(\alpha, t) - \phi(\beta, t). \quad (3)$$

Representaremos por  $f(x, t)$  a taxa com que a substância  $S$  está sendo adicionada ao (ou removida do) meio na posição  $x$  no tempo  $t$ . Uma tal função  $f$  é denominada função fonte. Valores positivos dessa função indicam que  $S$  está sendo adicionado (ou gerado) na posição  $x$ , no tempo  $t$  e valores negativos significam o contrário. Assim, a taxa total com que  $S$  está sendo adicionado em  $S$  é dada por:

$$\int_\alpha^\beta f(x, t) dx. \quad (4)$$

Substituindo as equações (2), (3), (4) na equação (1) obtemos:

$$\frac{d}{dt} \int_\alpha^\beta u(x, t) dx = \phi(\alpha, t) - \phi(\beta, t) + \int_\alpha^\beta f(x, t) dx. \quad (5)$$

A equação (5) é denominada *forma integral da lei de Conservação*.

A equação (5) pode ser reescrita como:

$$\int_\alpha^\beta u_t(x, t) dx = - \int_\alpha^\beta \phi_x(x, t) dx + \int_\alpha^\beta f(x, t) dx,$$

ou equivalentemente,

$$\int_\alpha^\beta (u_t(x, t) + \phi_x(x, t) - f(x, t)) dx = 0. \quad (6)$$

Observe que se as funções  $u_t(x, t)$ ,  $\phi_x(x, t)$  e  $f(x, t)$  são contínuas em  $S$  e  $S$  é qualquer ( $\alpha$  e  $\beta$  são quaisquer), então o integrando  $u_t(x, t) + \phi_x(x, t) - f(x, t)$  é nulo.



Para mostrar o resultado acima, vamos denotar o integrando por  $I(x, t)$  ( $I(x, t) = u_t(x, t) + \phi_x(x, t) - f(x, t)$ ), que é uma função contínua.

Assim, queremos mostrar que  $I(x, t) = 0, \forall x \in S$ .

Vamos supor que existe um ponto  $x_0 \in S$  tal que  $I(x_0, t) \neq 0$ . Sem perda de generalidade, podemos supor  $I(x_0, t) > 0$ .

Como  $I(x, t)$  é contínua em  $S$ , existe um intervalo  $S_{x_0} \subset S$ , com  $x_0 \in S_{x_0}$ , tal que  $I(x, t) > 0, \forall x \in S_{x_0}$ .

Como  $S$  é qualquer, podemos tomar  $S$  coincidindo com  $S_{x_0}$ , o que implica que  $\int_{S_{x_0}} I(x, t) dx > 0$ , que contradiz (6). Portanto,  $I(x, t) = 0$  em  $S$ .

O fato de  $I(x, t)$  ser nulo em  $S$  implica que

$$u_t(x, t) + \phi_x(x, t) = f(x, t). \quad (7)$$

A equação (7) é denominada *forma diferencial da Lei de Conservação*. Nestas notas trabalharemos apenas com a forma diferencial das leis de conservação, que é uma equação diferencial parcial de primeira ordem.

A equação (7) relaciona 3 funções: a função densidade, a função de fluxo e a função fonte. As duas primeiras são as funções incógnitas e a função fonte geralmente é determinada pelo problema físico modelado. Uma segunda equação relacionando  $u(x, t)$  e  $\phi(x, t)$  é dada a partir de evidências experimentais ou a partir de hipóteses sobre o problema físico modelado. Esta segunda relação entre  $u$  e  $\phi$  é denominada *equação constitutiva*. Em geral, nossos modelos consistem de duas partes: A lei de conservação e a equação constitutiva.

A equação constitutiva frequentemente fornece o fluxo  $\phi$  como função da densidade  $u$ , isto é,  $\phi = \phi(u)$ . Neste caso, a equação (7) se escreve como

$$u_t(x, t) + \phi'(u)u_x = f(x, t). \quad (8)$$

Quando modelamos um fenômeno físico, em geral, desprezamos várias informações, com o objetivo de tornar o problema matemático possível de ser tratado. Ao desprezarmos essas informações, corremos o risco de obter um modelo que não descreve adequadamente o fenômeno físico. Para evitar isto, devemos fazer testes buscando validar nosso modelo. Um desses testes consiste em verificar se o modelo matemático possui solução e se ela é única.

Quando um teste indica que o modelo apresenta falha(s), em geral, procuramos considerar informações que foram inicialmente desprezadas, obter um novo modelo e fazer novos testes.

Como um exemplo, veja o caso da equação (8) com  $f(x, t)$  nula, *i.e.*,

$$u_t(x, t) + (\phi(u(x, t)))_x = 0. \quad (9)$$

Qualquer função  $u(x, t)$  igual a uma constante é solução de (9). Em outras palavras, um modelo dado apenas pela equação (9) tem infinitas soluções (não possui uma única solução), indicando que ele não é adequado para modelar um fenômeno físico. Olhando para as informações que não foram levadas em conta na obtenção de (9), verificamos que a informação de como estava o fenômeno físico em um instante inicial não foi levada em conta. Procurando corrigir esta falha, levamos em conta o que acontecia em um instante inicial, digamos  $t = 0$ , ou seja, consideramos a informação

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (10)$$

Esta informação é conhecida como *dado inicial*.

**Definição 1.1** *Um problema da forma*

$$\begin{cases} u_t(x, t) + \phi_x(x, t) = f(x, t), & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (11)$$

é chamado problema de valor inicial para a equação  $u_t(x, t) + \phi_x(x, t) = f(x, t)$ .

Veja que se considerarmos um problema de valor inicial para a equação (9), com  $u(x, 0) = 4$ , funções constantes com valores diferentes de 4 não satisfazem a condição inicial, *i.e.*, não satisfazem o problema de valor inicial.

**Observação 1.2** É oportuno salientar que considerar apenas informações sobre o comportamento do fenômeno físico em um instante inicial não garante que nosso modelo é adequado, no sentido de possuir uma única solução. Em outras palavras, não é verdade que um problema de valor inicial sempre tem solução e que ela é única.

Uma aplicação do Teorema da Função Implícita garante, sob certas condições, que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t(x, t) + \phi'(u)u_x = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (12)$$

tem solução diferenciável, pelo menos para valores pequenos de  $t$ .

De fato, considere  $F(x, t, u) = u - u_0(x - a(u)t)$ , onde  $a(u) = \phi'(u)$  satisfaz  $a'(u) \neq 0$ . Assumindo  $u_0$  diferenciável, o Teorema da Função Implícita garante que  $F(x, t, u) = 0$  define implicitamente  $u$  como função de  $(x, t)$ , uma vez que  $F_u = 1 + u_{0,x}a'(u)t$ , onde  $u_{0,x} = \frac{du_0(x)}{dx}$ , é não nulo para valores pequenos de  $t$ .

Além disso, ainda do Teorema da Função Implícita, temos

$$u_t = -\frac{u_{0,x}a(u)}{1 + u_{0,x}a'(u)t} \quad \text{e} \quad u_x = \frac{u_{0,x}}{1 + u_{0,x}a'(u)t}. \quad (13)$$

Portanto, de (13) temos que  $u$  definida por  $F(x, t, u) = 0$  satisfaz a equação diferencial parcial. De  $F(x, 0, u_0(x)) = u_0(x) - u_0(x) = 0$ , temos que  $u$  satisfaz a condição inicial. O que foi feito acima pode ser encontrado em [10] e [7]

Para estudar resultados sobre unicidade de solução para o problema de valor inicial, convidamos o leitor a olhar as referências [10] e [3].

Voltaremos ao assunto de existência e unicidade de solução na seção 6.3, onde introduziremos o conceito de problema bem posto.

## 1.2 Um Modelo de Fluxo de Trânsito

Nesta seção, baseados em [6], deduziremos a lei de conservação e a equação constitutiva para o modelo de fluxo de trânsito que usaremos para estudar os exemplos de tráfego após a abertura e após o fechamento de um sinal(semáforo).

A popularização do uso de automóveis e a falta de infra-estrutura das cidades para comportar o aumento de tráfego “repentino”, tornaram os problemas de congestionamentos cada vez mais agudos. Com o objetivo de amenizar as consequências desses problemas, a partir de meados do século passado estudos científicos procuram responder algumas perguntas tais como: Quanto tempo um sinal (semáforo) pode ficar fechado sem comprometer o fluxo de trânsito das vias urbanas? Como desenvolver um sistema progressivo de sinais de trânsito (as chamadas “onda verde”) em grandes vias urbanas? Onde construir entradas e saídas das vias principais? As respostas a estas e a muitas outras perguntas relacionadas permitem entender e solucionar, parcial ou totalmente, os problemas gerados pelo complexo fenômeno do tráfego.

Nestas notas trataremos de problemas de tráfego mais simples como o fluxo de trânsito em uma rua de mão única com apenas uma faixa, sem entradas e sem saídas laterais. A formulação matemática desse problema ocorreu por volta da metade dos anos 50. Estudos mais detalhados desse problema podem ser encontrados em [4] e [12].

Vamos considerar o trânsito em uma via de mão única com apenas uma faixa em um trecho que não tem entradas e saídas. Vamos representar por  $u(x, t)$  a densidade de carros (número de carros por quilômetro) na posição  $x$  no tempo  $t$ . Esta função em princípio é uma função discreta pois carros são objetos discretos, contudo, vamos supor que  $u(x, t)$  é uma representação contínua da densidade de tráfego. A lei de conservação geral para a densidade de tráfego  $u(x, t)$  é dada por

$$u_t(x, t) + \phi_x(x, t) = f(x, t).$$

A função fonte  $f(x, t)$  neste caso representa a taxa de carros que entram ou saem do trecho da via analisado. Como, por hipótese, não existem entradas e saídas no trecho analisado, temos  $f(x, t) = 0$ .

A função de fluxo  $\phi(x, t)$  representa a taxa com que os carros passam na posição  $x$  no tempo  $t$ . Para um observador fixo ao longo da via, a taxa com que os carros passam por ele depende da densidade de tráfego  $u$  e da velocidade  $v$ . Se  $v$  é medido em km/hora temos que o fluxo  $\phi$  é dado por

$$\phi = u(\text{carros/km}) \cdot v (\text{km/hora}) = uv \text{ carros/hora}.$$

A velocidade  $v$  depende de vários fatores tais como condições climáticas, densidade de tráfego, hora do dia, entre outros. Por simplicidade vamos supor que a velocidade  $v$  dos carros depende somente da densidade de tráfego, ou seja, quanto maior o número de carros menor a velocidade.

Para deduzir nosso modelo, suponha que se a densidade de tráfego é nula ( $u = 0$ ) ou quase nula, a velocidade máxima que cada carro pode atingir é  $v_1$ . Suponha além disso, que a densidade máxima  $u_1$  de carros/km só é atingida quando o trânsito estiver totalmente parado, ou seja,  $v = 0$ . Dessa forma a velocidade  $v$  é uma função linear de  $u$  e é dada por

$$v = v_1 - \frac{v_1}{u_1}u, \quad 0 \leq u < u_1.$$

Segue que a função de fluxo  $\phi = uv$  é dada pela expressão

$$\phi(u) = v_1\left(u - \frac{u^2}{u_1}\right).$$

Calculando  $\phi_x$  e substituindo na lei de conservação geral obtemos que a lei de conservação que modela a densidade de tráfego com aproximação linear da velocidade é dada por:

$$u_t + v_1 \left(1 - \frac{2u}{u_1}\right) u_x = 0. \quad (14)$$

# Capítulo 2

## O Método das Características

Nesta seção usaremos curvas especiais no plano  $xt$ , denominadas curvas características, para resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t(x,t) + \phi_x(x,t) = f(x,t), & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \quad (1)$$

Dizemos que estas curvas são especiais porque elas transmitem o perfil do dado inicial  $u(x,0)$  para tempos futuros. Usaremos estas curvas para resolver problemas de valor inicial da forma (1), para a equação de advecção, leis de conservação lineares e leis de conservação não lineares.

A geometria das soluções geradas por curvas características nos permite tratar o problema (1) de forma simples mesmo nos casos não lineares que, em geral, são de tratamento difícil.

Esta seção está baseada na referência [6]

### 2.1 Equação de Advecção Homogênea:

O caso mais simples de leis de conservação aparece quando a equação constitutiva é da forma  $\phi(x,t) = au(x,t)$ , onde  $a$  é constante. Uma lei de conservação com este tipo de equação constitutiva é denominada *equação de advecção*. Para esta  $\phi$  e  $f(x,t) = 0$  o problema (1) se escreve como

$$\begin{cases} u_t(x,t) + au_x(x,t) = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \quad (2)$$

Seja  $r(t) = (x(t), t)$ , uma curva parametrizada com ponto inicial  $(x_0, 0)$  sobre o eixo  $x$ . Se restringimos a função  $u(x, t)$  à curva  $r(t)$ , isto é, se consideramos a função  $(u(x(t), t))$ , temos que a taxa de variação de  $u$  ao longo da curva  $r(t)$  é dada por  $\frac{d}{dt}u(x(t), t)$ . Usando a regra da cadeia temos

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t(x(t), t) + u_x(x(t), t) \frac{dx}{dt}. \quad (3)$$

Ao compararmos o lado direito de (3) com a equação de advecção vemos que, se dentre todas as curvas com ponto inicial em  $(x_0, 0)$ , escolhermos aquela tal que  $\frac{dx}{dt} = a$ ,

então teremos que o lado direito de (3) é a equação de advecção, isto é,

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t(x(t), t) + au_x(x(t), t) = 0.$$

A última igualdade implica que  $u(x(t), t)$  é constante ao longo desta curva particular. Assim, o valor de  $u$  em cada ponto dessa curva é o mesmo valor de  $u(x_0, 0)$ . Usando o dado inicial vemos que  $u(x_0, 0) = u_0(x_0)$ .

A curva  $r(t) = (x(t), t)$  que escolhemos é obtida resolvendo a equação diferencial ordinária

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = a, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4)$$

cuja solução é dada por  $x(t) = at + x_0$ .

Esta curva é denominada *curva característica* ou *característica* para a equação  $u_t + au_x = 0$ . Ou seja, para a equação de advecção, as curvas características são retas no plano  $xt$ , dadas por  $x(t) = at + x_0$  (ou  $t = (x - x_0)/a$ ), que são paralelas, com inclinação  $\frac{1}{a}$ . A Figura 2.1 ilustra as características para a equação de advecção. A derivada  $\frac{dx}{dt}$  é denominada *velocidade das características*.



Figura 2.1: Curvas características da equação de advecção.

Para sabermos a solução do problema (2) num determinado ponto  $(x_*, t_*)$  do plano, procedemos como segue:

1. Encontramos a curva característica passando pelo ponto dado;
2. Encontramos o ponto  $(x_0, 0)$ , interseção da característica com o eixo  $x$ ;
3. Calculamos  $u_0(x_0)$ .

Como o ponto  $x_0$  é dado por  $x_0 = x_* - at_*$ , temos que a solução de (2) no ponto  $(x_*, t_*)$  dado é dada por  $u(x_*, t_*) = u_0(x_* - at_*)$  ou, em um ponto  $(x, t)$  qualquer,  $u(x, t) = u_0(x - at)$ .

**Observação 2.1** Para  $t = \bar{t}$  fixo,  $u(x, \bar{t}) = u_0(x - a\bar{t})$  representa um deslocamento de  $u_0(x)$ , de amplitude  $a\bar{t}$ , para a direita, se  $a > 0$ , ou para a esquerda, se  $a < 0$ . Pensando em  $x$  como espaço e  $t$  como tempo,  $x'(t) = a$ , obtido na curva característica, significa que velocidade do deslocamento é constante e dada por  $a$ .

**Exemplo 2.2** Ache a solução de

$$\begin{cases} u_t + 2u_x = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2}, \end{cases}$$

usando o método das características.

**Solução:** Ao longo das curvas características  $(x(t), t)$  temos

$$\frac{du}{dt} = u_t + \frac{dx}{dt}u_x.$$

Considerando  $\frac{dx}{dt} = 2$  com  $x(0) = x_0$ , temos as curvas características dadas por  $x(t) = 2t + x_0$ . Ao longo destas curvas (retas)  $u(x, t)$  é constante e seu valor em qualquer ponto  $(x, t)$  é dado por

$$u(x, t) = u_0(x_0, 0) = u_0(x_0) = e^{-x_0^2} = e^{-(x-2t)^2},$$

pois  $x_0 = x - 2t$ .

## 2.2 Equação de Advecção Não Homogênea:

Nesta seção usaremos o método das características para resolver o problema

$$\begin{cases} u_t(x, t) + au_x(x, t) = f(x, t), & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

O método de construção da solução do problema não homogêneo é análogo ao da seção anterior: Se  $(x(t), t)$  é uma curva no plano  $xt$ , segue que a taxa de variação da função  $u(x, t)$  ao longo da curva é dada por

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t(x(t), t) + u_x(x(t), t)\frac{dx}{dt}.$$

Se  $\frac{dx}{dt} = a$ , o lado direito da última equação é a equação de advecção, o que leva ao problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(x(t), t) = f(x(t), t) \\ u(x(0), 0) = u_0(x_0) = u_0(x_0). \end{cases}$$

Observe que, neste caso,  $u(x(t), t)$  não é constante se  $f(x(t), t) \neq 0$ .

**Exemplo 2.3** Resolva o problema

$$\begin{cases} u_t + 2u_x = -u, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}, \end{cases}$$

usando o método das características.

**Solução:** Pelo exemplo da seção anterior sabemos que as curvas características para essa equação são dadas por  $x = 2t + x_0$ . A taxa de variação de  $u(x, t)$  ao longo desta curva é dada por

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = -u.$$

Resolvendo esta equação, obtemos  $u(x(t), t) = Ce^{-t}$ . Lembrando que  $C = u(x(0), 0) = u(x_0, 0) = \frac{1}{1+x_0^2}$  temos que  $u(x, t) = \frac{1}{1+x_0^2}e^{-t}$ . Usando o fato de que  $x_0 = x - 2t$ , temos

$$u(x, t) = \frac{1}{1+(x-2t)^2}e^{-t}.$$

**Exercício 2.4** Resolva os problemas abaixo usando o método das características.

1.

$$\begin{cases} u_t + 4u_x = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \arctg(x); \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} u_t + 4u_x = 1, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \arctg(x); \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} u_t + 2u_x = k, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2}. \end{cases}$$

## 2.3 Leis de Conservação Lineares

Nesta seção usaremos o método das características para resolver problemas de valor inicial de leis de conservação lineares da forma

$$\begin{cases} u_t + a(x, t)u_x = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x_0), \end{cases} \quad (5)$$

Contrariamente aos casos estudados nas duas seções anteriores aqui o coeficiente  $a$  pode não ser constante, isto é,  $a = a(x, t)$ . Nestes problemas a característica com ponto inicial  $(x_0, 0)$  é obtida resolvendo o problema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (6)$$

O fato de  $a$  não ser constante implica que as características não são necessariamente retas como nos caso de equação de advecção. Contudo, como veremos abaixo, para este caso, a solução  $u(x, t)$  permanece constante ao longo das curvas características.

Se  $(x(t), t)$  é uma curva característica, a taxa de variação de  $u$  ao longo desta curva é dada por

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t(x(t), t) + u_x(x(t), t)\frac{dx}{dt}.$$



Como  $(x(t), t)$  é uma característica temos que  $\frac{dx}{dt} = a(x, t)$  e, dessa forma, o lado direito da última equação é a lei de conservação considerada em (5). Segue que  $\frac{d}{dt}u(x(t), t) = 0$ , ou seja,  $u(x, t)$  é constante ao longo das curvas características.

O valor da função  $u(x, t)$ , solução do problema (5), em um ponto  $(x_*, t_*)$  no plano  $xt$  é obtido da seguinte forma:

1. Encontre a característica passando por  $(x_*, t_*)$ ;
2. determine o ponto  $(x_0, 0)$ , obtido da interseção da característica com o eixo  $x$ ;
3. Usando  $x_0$  temos que  $u(x, t) = u(x_0, 0) = u_0(x_0)$ .

**Exemplo 2.5** Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + txu_x = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}. \end{cases}$$

- a. Mostre que as curvas características com ponto inicial  $(x_0, 0)$  são dadas por  $x(t) = x_0 e^{\frac{t^2}{2}}$ .
- b. Encontre a solução  $u(x, t)$  do problema.

**Solução:**

a. As curvas características para o problema dado são obtidas resolvendo o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = tx, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (7)$$

Usando o método da separação de variáveis na resolução de (7), temos que as curvas características são dadas por  $x(t) = x_0 e^{\frac{t^2}{2}}$ .

b. Sabemos que  $\frac{du}{dt} = 0$  ao longo das características dadas por (7). Ou seja,  $u(x, t) = k$ , onde  $k$  é uma constante obtida fazendo  $t = 0$ . Mais precisamente,  $k = u(x(0), 0) = u(x_0, 0) = u_0(x_0) = \frac{1}{1+x_0^2}$  e  $u(x, t) = \frac{1}{1+x_0^2}$ . Como, do item a,  $x_0 = x e^{-\frac{t^2}{2}}$ , a solução do problema é dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{1+x^2 e^{-t^2}}.$$

## 2.4 Leis de Conservação Não Lineares:

Nesta seção estudaremos leis de conservação em que, na equação constitutiva  $u_t + \phi_x = 0$ , a função  $\phi = \phi(u)$  é não linear. Em outras palavras, denotando  $\phi'(u) = a(u)$ , usaremos o método das características para resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + a(u)u_x = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (8)$$

com  $a(u)$  não constante.

As curvas características são obtidas do problema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(u(x, t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (9)$$

Observe que, como não conhecemos a função  $u(x, t)$ , não podemos determinar as curvas características. Contudo, neste caso, sabemos que  $u(x, t)$  é constante ao longo da curva  $(x(t), t)$  solução de (9) uma vez que

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t(x(t), t) + u_x(x(t), t)\frac{dx}{dt} = u_t(x(t), t) + a(u(x(t), t))u_x(x(t), t) = 0.$$

Segue que o valor de  $u$  ao longo de cada característica é o mesmo valor de  $u$  no ponto inicial  $(x_0, 0)$ , ou seja,  $u(x, t) = u(x_0, 0) = u_0(x_0)$ . Dessa forma o problema (9) se reescreve como

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(u_0(x_0)) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

que tem solução  $x(t) = a(u_0(x_0))t + x_0$ .

Como no caso da equação de advecção as características são retas que não são necessariamente paralelas pois a inclinação de cada uma dessas retas é dada por  $\frac{1}{a(u_0(x_0))}$  que depende do valor da função  $u$  no ponto inicial  $(x_0, 0)$ .

**Observação 2.6** O fato das retas características não serem paralelas pode ocasionar interseção entre as mesmas, isto significa que a solução por características só é válida até o tempo  $t$  de interseção. Este tipo de problema será tratado na próxima seção.

O procedimento para se determinar o valor da solução  $u$  em um ponto  $(x_*, t_*)$  do plano é:

1. Construir as características  $x(t) = a(u_0(x_0))t + x_0$ , usando a velocidade  $a(u)$  e o dado (perfil) inicial  $u_0(x_0)$ .
2. Determinar o ponto inicial,  $(x_0, 0)$ , da característica passando por  $(x_*, t_*)$ , resolvendo  $x(t) = a(u_0(x_0))t + x_0$  para  $x_0$ .
3. Use o  $x_0$  para calcular  $u(x, t) = u(x_0, 0) = u_0(x_0)$ .

**Exemplo 2.7** Para  $\phi = \frac{u^2}{2}$ , a lei de conservação geral se escreve como  $u_t + uu_x = 0$ , denominada *equação de Burgers sem viscosidade*. Resolva o problema

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

**Solução:** A velocidade característica é  $a(u) = u$ , assim,  $a(u_0(x_0)) = u_0(x_0)$  a característica começando em  $(x_0, 0)$  é obtida resolvendo (9) com  $u_0(x_0)$  em lugar de  $a(u(x, t))$  o que dá:

$$x(t) = \begin{cases} x_0 & \text{se } x_0 \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x_0}t} + x_0 & \text{se } x_0 > 0, \end{cases}$$

Para  $x \leq 0$ , a característica passando pelo ponto  $(x, t)$  é uma reta vertical com ponto inicial  $(x, 0)$ . Nesse caso, da condição inicial, temos  $u(x, t) = u(x, 0) = 0$ .

Para  $x > 0$ , a abscissa do ponto de partida,  $(x_0, 0)$  é obtida resolvendo  $x = e^{-\frac{1}{x_0}t} + x_0$  para  $x_0$ ; contudo, neste caso, isto não pode ser feito explicitamente.

Para  $x \leq 0$ , a característica passando pelo ponto  $(x, t)$  é uma reta vertical com ponto inicial  $(x, 0)$ . Nesse caso, da condição inicial, temos  $u(x, t) = u(x, 0) = 0$ .

Para  $x > 0$ , a abscissa do ponto de partida,  $(x_0, 0)$  é obtida resolvendo  $x = e^{-\frac{1}{x_0}t} + x_0$  para  $x_0$ ; contudo, neste caso, isto não pode ser feito explicitamente. Independentemente, o valor de  $u$  no ponto  $(x, t)$  é calculado por  $u(x, t) = u(x_0, 0) = e^{-\frac{1}{x_0}}$ .

Assim, a solução do problema é dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x_0}} & \text{se } x > 0, \quad x_0 + e^{-\frac{1}{x_0}t} = x, \end{cases}$$

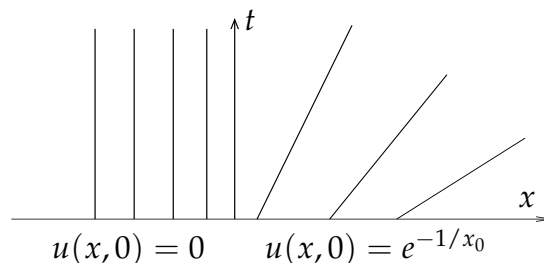


Figura 2.2: Características da equação de Burgers com dado inicial do Exemplo.



# Capítulo 3

## Ondas de Choque

Na seção anterior vimos que as características para o problema:

$$\begin{cases} u_t + a(u)u_x = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (1)$$

com  $a(u)$  não constante, são geralmente retas não paralelas com inclinação  $a(u_0(x_0))$ . Como observamos no final daquela seção o fato das retas serem não paralelas implica que pode haver interseção entre as características, o que significa que a solução do problema a partir do ponto de interseção não está bem definida. Em outras palavras podemos usar o método das características para construir a solução  $u(x, t)$  começando em  $t = 0$  mas terminando no tempo  $t = t_i$ , correspondente ao primeiro ponto de interseção das características. Nosso objetivo nesta seção é estender a solução  $u(x, t)$  além do tempo  $t_i$  permitindo que  $u(x, t)$  seja uma função contínua por partes. Esta solução descontínua é denominada *onda de choque*.

Para descrever essas soluções, seja  $(x_s(t), t)$  uma curva no plano  $xt$  que divide o semiplano  $t > 0$  em duas partes:  $R^+$  a direita da curva e  $R^-$  a esquerda da curva, como mostra a Figura 3.1.

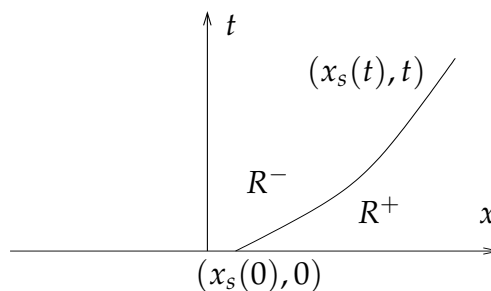


Figura 3.1: A curva  $(x_s(t), t)$  que divide o plano  $xt$  em duas regiões.

**Definição 3.1** Uma função  $u(x, t)$  é denominada *solução contínua por partes* do problema (1) com *descontinuidade do tipo salto* ao longo da curva  $(x_s(t), t)$ , se  $u(x, t)$  tem as seguintes propriedades:

(i)  $u(x, t)$  tem derivadas primeiras contínuas em  $R^+$  e  $R^-$  e é solução do problema

$$\begin{cases} u_t + a(u)u_x = 0, & (x, t) \in R^-, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x < x_s(0), \end{cases}$$

em  $R^-$  e do problema

$$\begin{cases} u_t + a(u)u_x = 0, & (x, t) \in R^+, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x > x_s(0), \end{cases}$$

em  $R^+$ .

(ii) Em cada ponto  $(x_0, t_0)$  da curva  $(x_s(t), t)$  os limites de  $u(x, t)$  com  $(x, t) \rightarrow (x_0, t_0)$ ,  $(x, t) \in R^-$  e  $(x, t) \rightarrow (x_0, t_0)$ ,  $(x, t) \in R^+$  existem mas não são necessariamente iguais.

Embora a solução de uma lei conservação por características não esteja bem definida a partir da interseção de duas ou mais características, o processo físico modelado pela lei de conservação não se encerra necessariamente. A extensão da solução para além do tempo  $t = t_i$ , correspondente ao primeiro tempo de interseção das características, é obtida permitindo que ela seja uma função contínua por partes satisfazendo a lei de conservação.

Para estender a solução obtida pelo método das características à região  $t > t_i$ , traçamos uma curva  $(x_s(t), t)$ , nessa região, de modo a separar as características. Dentre as várias curvas com esta propriedade, escolhemos a que satisfaz as propriedades físicas do fenómeno modelado, isto é, aquela que satisfaz a lei de conservação.

Para seleccionar a curva  $(x_s(t), t)$  para o problema (1), vamos supor que as características começam a se intersectar em  $t_i = 0$  e que  $u(x, t)$  é uma solução contínua por partes do problema (1) com descontinuidade do tipo salto ao longo de  $x_s(t)$ . Segue que  $u$  satisfaz a  $u_t + a(u)u_x = 0$  em  $R^+$  e  $R^-$ , mas suas derivadas primeiras deixam de existir em pontos da curva. Para se entender o que acontece em pontos da curva  $(x_s(t), t)$ , usaremos a forma integral da lei de conservação (5) com  $f = 0$ , ou seja, usaremos a forma integral da lei de conservação sem fontes que é dada por

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha}^{\beta} u(x, t) dx = \phi(\alpha, t) - \phi(\beta, t). \quad (2)$$

Fixando um ponto  $(x_s(t), t)$  na curva, tome  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $\alpha < x_s(t) < \beta$ . A integral em (2) pode ser escrita como

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(x, t) dx = \int_{\alpha}^{x_s^-(t)} u(x, t) dx + \int_{x_s^+(t)}^{\beta} u(x, t) dx,$$

onde  $x_s^-(t)$  e  $x_s^+(t)$  são obtidos fazendo  $(x, t)$  em  $R^-$  tender para  $(x_s(t), t)$  em  $R^-$  e  $(x, t)$  em  $R^+$  tender para  $(x_s(t), t)$  em  $R^+$ , respectivamente.

Substituindo esta última expressão em (2) e usando a regra da cadeia para calcular as derivadas envolvidas, a lei de conservação se escreve como

$$\int_{\alpha}^{x_s^-(t)} u_t(x, t) dx + u(x_s^-, t) \frac{dx_s}{dt} + \int_{x_s^+(t)}^{\beta} u_t(x, t) dx - u(x_s^+, t) \frac{dx_s}{dt} = \phi(\alpha, t) - \phi(\beta, t).$$

Fazendo  $\alpha \rightarrow x_s^-(t)$  e  $\beta \rightarrow x_s^+(t)$ , temos

$$(u(x_s^+, t) - u(x_s^-, t)) \frac{dx_s}{dt} = \phi(x_s^+(t), t) - \phi(x_s^-(t), t),$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{\phi(x_s^+(t), t) - \phi(x_s^-(t), t)}{u(x_s^+, t) - u(x_s^-, t)}. \quad (3)$$

Isto mostra que a curva  $(x_s(t), t)$  deve ser tal que sua derivada satisfaz a relação (3) dada pela forma integral da lei de conservação. A equação diferencial (3) é conhecida como *condição de salto de Rankine-Hugoniot* para  $u(x, t)$ , denotada por R-H, e  $\frac{dx}{ds}$  representa a velocidade de propagação da descontinuidade, denominada *velocidade de choque*, que denotaremos por  $s$ .

Por simplicidade denotaremos o lado direito de (3) por

$$\frac{[\phi]}{[u]} = \frac{\phi^+ - \phi^-}{u^+ - u^-}$$

**Definição 3.2** Uma solução contínua por partes  $u(x, t)$  de (8) com salto ao longo de uma curva  $x_s(t)$  satisfazendo a condição de salto de Rankine-Hugoniot é denominada uma onda de choque solução da lei de conservação. A curva  $x_s(t)$  é denominada caminho de choque.

**Exemplo 3.3** Determine uma onda de choque solução para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + u^2 u_x = 0 & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

**Solução:** As características para o problema são dadas por  $x(t) = a(u_0(x_0))t + x_0$ , o que dá

$$x_s(t) = \begin{cases} 4t + x_0 & \text{se } x_0 \leq 0 \\ t + x_0 & \text{se } x_0 > 0, \end{cases}$$

as quais começam a se cortar na origem do plano  $xt$ . Por este motivo vamos considerar o ponto inicial do caminho de choque como sendo o ponto  $(0, 0)$ . Para encontrar o caminho de choque usamos a condição de salto de Rankine-Hugoniot e resolvemos o problema de valor inicial

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{[\phi]}{[u]}, \quad x(0) = 0,$$

com  $\phi(u) = \frac{u^3}{3}$ . Observe que como  $[\phi] = \frac{1}{3}(u^{+3} - u^{-3})$  e  $[u] = u^+ - u^-$ , temos

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{3} \left( \frac{u^{+3} - u^{-3}}{u^+ - u^-} \right) = \frac{1}{3} (u^{+2} + u^+ u^- + u^{-2}),$$

lembrando que  $u^+ = 1$  e  $u^- = 2$ , a última igualdade se escreve como  $\frac{dx}{ds} = 7/3$ , o que implica  $x_s(t) = \frac{7}{3}t$ . Como anteriormente, as soluções para  $(x, t) \in R^+$  e  $(x, t) \in R^-$  são encontradas pelo método das características. Isso leva a

$$u(x, t) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < \frac{7}{3}t \\ 1 & \text{se } x > \frac{7}{3}t, \end{cases}$$

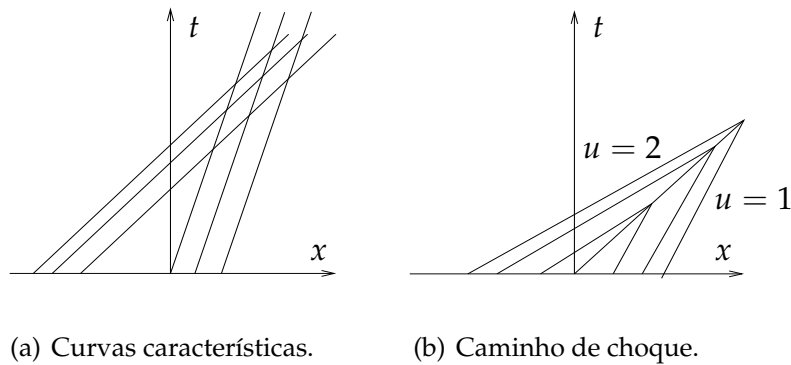


Figura 3.2: (a) Características dos Exemplo 3.3, (b) caminho de choque para o Exemplo 3.3.

#### Exemplo 3.4 Tráfego no sinal fechado.

Vamos supor uma via como a considerada no modelo apresentado na seção 1.2, com as seguintes condições:

1. Os carros que já estão parados estão alinhados com densidade máxima  $u_1$  carros /km.
2. Os carros que chegam têm densidade uniforme  $u_0$  carros/km. Como  $u_1$  é máxima temos  $0 < u_0 < u_1$ .

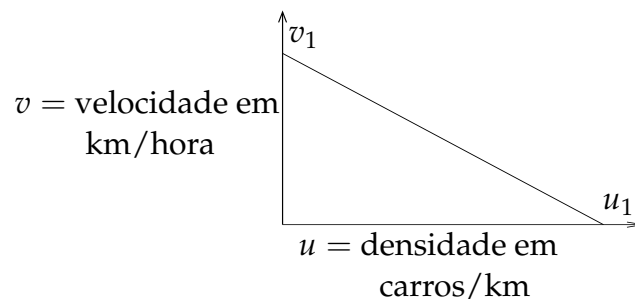


Figura 3.3: Gráfico da função de fluxo com a modelagem do Exemplo 3.4.



Para este problema, como vimos na seção 1.2, a função de fluxo é dada por  $\phi = uv$ , onde  $v$  é definida por  $v = v_1(1 - \frac{u}{u_1})$ , e  $v_1$  é a velocidade máxima na via, o fluxo é dado por

$$\phi = v_1(u - \frac{u^2}{u_1}).$$

A lei de conservação para este problema é a lei definida pela equação (14), e o problema de valor inicial que resolveremos é:

$$\begin{cases} u_t + v_1(1 - \frac{2u}{u_1})u_x = 0 & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & \text{se } x < 0 \\ u_1 & \text{se } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

as características são dadas por  $x(t) = a(u(x_0, 0))t + x_0$ , onde  $a(u) = v_1(1 - \frac{2u}{u_1})$ , isto é

$$x(t) = \begin{cases} v_1(1 - \frac{2u_0}{u_1})t + x_0 & x_0 < 0 \\ -v_1t + x_0 & x_0 > 0, \end{cases}$$

Observe que a característica pode ter inclinação positiva ou negativa dependendo de  $v_1(1 - \frac{2u}{u_1})$  ser positivo ou negativo. Se  $u_0 < \frac{u_1}{2}$ , a inclinação é positiva e se  $u_0 > \frac{u_1}{2}$ , a inclinação é negativa. Os diagramas das características são mostrados na Figura 3.4.

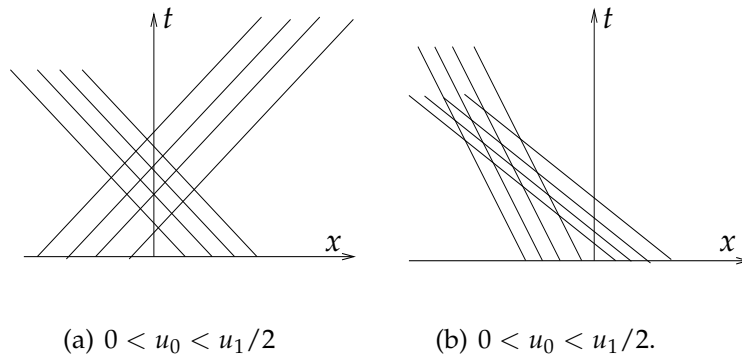


Figura 3.4: Característica para o exemplo do tráfego com sinal fechado.

Como as características se cruzam na origem, o caminho de choque é obtido resolvendo o problema de valor inicial:

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{[\phi]}{[u]}, \quad x_s(0) = 0,$$

para calcular  $\frac{[\phi]}{[u]}$ , lembramos que  $[\phi] = \phi(u^+) - \phi(u^-)$  e  $[u] = u^+ - u^-$ . Assim,

$$[\phi] = v_1(u^+ - \frac{u^{+2}}{u_1}) - v_1(u^- - \frac{u^{-2}}{u_1}) = v_1(u^+ - u^-) - \frac{v_1}{u_1}(u^{+2} - u^{-2}),$$

o que implica em,

$$\frac{[\phi]}{[u]} = v_1 - \frac{v_1}{u_1}(u^+ + u^-).$$

Para este problema  $u^+ = u_1$  e  $u^- = u_0$ , substituindo esses valores em  $\frac{[\phi]}{[u]}$ , temos que  $\frac{dx_s}{dt} = -v_1 \frac{u_0}{u_1}$ . Integrando em relação a  $t$ , temos que o caminho de choque é a reta  $x_s(t) = -v_1 \frac{u_0}{u_1} t$ . A interpretação física para o caminho de choque obtido é que a velocidade com que a última fila de carros parados se propaga para trás é  $v_1 \frac{u_0}{u_1}$  km/hora. A solução para pontos  $(x, t)$  com  $x < -v_1 \frac{u_0}{u_1} t$  e para pontos  $(x, t)$  com  $x > -v_1 \frac{u_0}{u_1} t$  são obtidas como anteriormente pelo método das características. Dessa forma  $u(x, t)$  é

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0 & x < -v_1 \frac{u_0}{u_1} t \\ u_1 & x > -v_1 \frac{u_0}{u_1} t. \end{cases} \quad (4)$$

O caminho de choque para o caso  $0 < u_0 < u_1/2$  é mostrado na Figura 3.5.

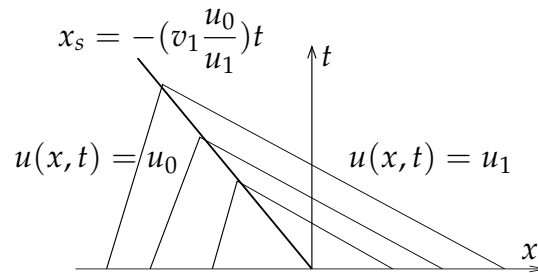


Figura 3.5: Caminho de choque para o caso  $0 < u_0 < u_1/2$ .

**Exemplo 3.5** Considerando o Exemplo 3.4, suponha que a densidade de tráfego máxima é  $u_1 = 300$  carros/km e que a velocidade máxima ao longo da via é  $v_1 = 45$  km/hora. Suponha além disso que a velocidade com que o fluxo de tráfego chega na última linha de carros parados é  $v = 15$  km/hora. Resolva o problema de valor inicial para esses dados

**Solução:**

Observe que para esse exemplo não foi dada a densidade de carros do fluxo de tráfego que chega na última linha de carros parados, pelo Exemplo 3.4, a velocidade com que os carros chegam na última linha de carros parados é  $v = v_1(1 - \frac{u}{u_1})$ . Segue daí que

$15 = 45(1 - \frac{u_0}{300})$  o que implica  $u_0 = 200$  carros/km. Ainda segundo o exemplo 2, temos que o caminho de choque é a reta  $x_s(t) = -30t$  o que significa que a velocidade com que a última linha de carros parados se propaga para trás é de 30 km/hora. A solução (4) para este exemplo se escreve como:

$$u(x, t) = \begin{cases} 200 \text{ carros/km, se } x < -30t \\ 300 \text{ carros/km, se } x > -30t. \end{cases}$$

### Exercício 3.6

1. Resolva o problema de valor inicial para a equação de Burgers sem viscosidade

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

2. Suponha que a velocidade do tráfego que chega na última linha de carros parados é 30 km/hora.

- Considere a velocidade com que a última linha de carros parados se propaga para trás em direção ao tráfego que chega. Sem calcular o caminho de choque você diria que esta velocidade seria maior ou menor do que a velocidade de 30 km/hora do Exemplo 3.5?
- Determine o caminho de choque e a onda de choque do problema de valor inicial do Exemplo 3.4 para esses dados e represente a solução no plano  $xt$ . Qual a diferença entre a velocidade do caminho de choque da solução desse exercício para a do Exemplo 3.5?

3. Suponha que a velocidade dos carros é modelada por  $v = v_1(1 - \frac{u^2}{u_1^2})$ .

- Esboce o gráfico de  $v$  como uma função da densidade de tráfego  $u$ . Compare com o gráfico do modelo de velocidade do Exemplo 3.4, qual dos dois modelos é mais realista?
- Encontre a onda de choque solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + \phi_x = 0 & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & \text{se } x < 0 \\ u_1 & \text{se } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

com função de fluxo  $\phi$  modelada por  $\phi = uv = v_1(u - \frac{u^3}{u_1^2})$ . Faça um esboço da solução no plano  $xt$ .

- Resolva o item b. com os dados do Exemplo 3.5.

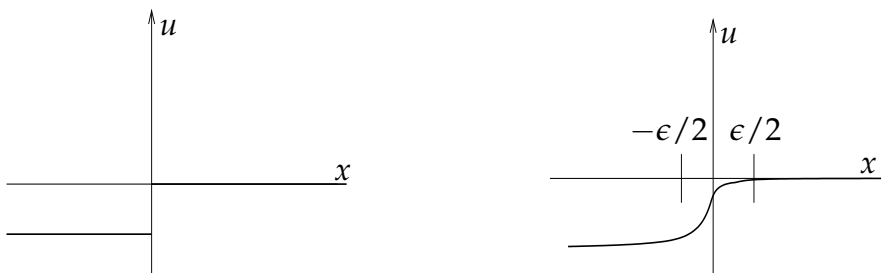




que tenhamos uma transição suave entre  $u = -1$  e  $u = 0$  numa vizinhança de comprimento  $\epsilon$  de  $x = 0$ . Em outras palavras, vamos considerar o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + u u_x = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq -\epsilon, \\ -\frac{x}{\epsilon} & \text{se } -\epsilon \leq x < 0, \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

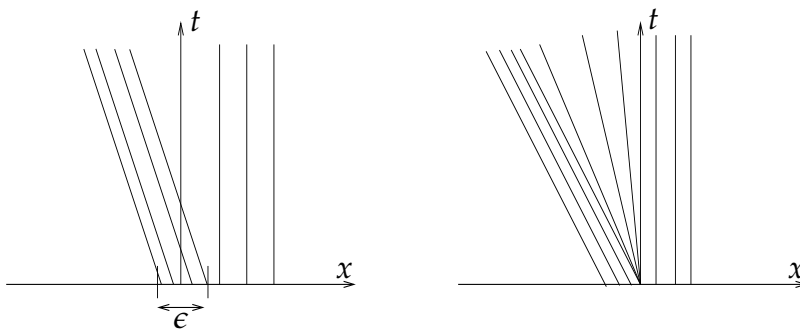
Esta modificação gera características que fazem uma transição das retas de inclinação  $-1$  para as retas de inclinação  $0$ . De fato, para  $x_0 \leq -\epsilon$ , as características são dadas por  $x(t) = -t + x_0$ , para  $-\epsilon < x_0 \leq 0$ , elas são dadas por  $x(t) = -(x_0 t)/\epsilon + x_0$  e, para  $x_0 > 0$ , elas são dadas por  $x(t) = x_0$ , como mostra a Figura 4.3(a).



(a) Gráfico do dado inicial.

(b) Dado inicial modificado na vizinhança da origem.

Figura 4.2:



(a) Características para o dado inicial modificado.

(b) quando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Figura 4.3:

A Figura 4.3(b) ilustra o comportamento das características quando fazemos  $\epsilon \rightarrow 0$ . Neste caso, encontramos uma solução da lei de conservação na região  $-t < x < 0$ , formada por características pela origem, isto é, retas da forma  $x = at$ ,  $-1 < a < 0$ , dando origem ao que denominamos “leque de características”. Como, neste problema, a solução  $u(x, t)$  é constante ao longo das características, devemos ter  $u$  em função da

constante  $a$ , ou seja,  $u(x, t) = g(a) = g(\frac{x}{t})$ . Assim, na região  $-t < x < 0$ , onde inicialmente parecia não haver solução, devemos procurar uma solução da equação de Burgers que seja da forma  $u(x, t) = g(\frac{x}{t})$ .

Vamos mostrar que  $g(\frac{x}{t}) = \frac{x}{t}$ . Para tal, substituímos  $u(x, t) = g(\frac{x}{t})$  na equação de Burgers. Lembrando que, pela regra da cadeia,  $u_t(x, t) = \frac{-x}{t^2} g'(\frac{x}{t})$  e  $u_x(x, t) = \frac{1}{t} g'(\frac{x}{t})$ , obtemos

$$\frac{1}{t} g'(\frac{x}{t}) (g(\frac{x}{t}) - \frac{x}{t}) = 0.$$

Segue que  $g(\frac{x}{t}) = \frac{x}{t}$  ou  $g'(\frac{x}{t}) = 0$ , (o que significa que a função  $g(\frac{x}{t})$  é constante).

Vamos mostrar que  $g(\frac{x}{t})$  não é a função constante. De fato, pelo método das características temos que  $u(x, t) = -1$ , se  $x < -t$  e  $u(x, t) = 0$ , se  $x > 0$ . Se  $g(\frac{x}{t}) = K$ ,  $K$  constante, temos que a solução do problema é dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < -t \\ K & \text{se } -t < x < 0 \\ 0 & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (1)$$

ou seja,  $u(x, t)$  é uma função contínua por partes.

Como  $u(x, t)$  deve satisfazer a condição de salto de Rankine-Hugoniot, se consideramos a condição R-H ao longo da reta  $x = -t$  temos  $\frac{dx_s}{dt} = \frac{K+1}{2}$  e se consideramos a condição R-H ao longo da reta  $x = 0$  temos  $\frac{dx_s}{dt} = \frac{K}{2}$ , o que significa que a função  $u(x, t)$  dada em (1) não satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot. Logo  $g(\frac{x}{t})$  não é constante, assim  $g(\frac{x}{t}) = \frac{x}{t}$  e a solução do problema é dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < -t \\ \frac{x}{t} & \text{se } -t < x < 0 \\ 0 & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (2)$$

Como aplicação, usaremos as ideias do exemplo anterior no problema que modela o fluxo de trânsito quando o sinal (semáforo) passa de fechado para aberto (na mudança da luz vermelha para a luz verde).

**Exemplo 4.2** Suponha que num sinal fechado os carros estão alinhados de tal forma que a densidade máxima de  $u_1$  carros/km tenha sido atingida e que não existe tráfego à frente do sinal, ou seja, a densidade de carros é zero nesta região. Suponha ainda que o sinal está localizado na posição  $x = 0$  e que abre no tempo  $t = 0$ . Use o modelo descrito na seção 1.2 para resolver o problema de valores iniciais para estes dados. **Solução:** De acordo com o modelo com velocidade linear, consideramos  $v = v_1(1 - \frac{u}{u_1})$ , onde  $v_1$  é a velocidade máxima permitida na via, e obtemos a função de fluxo  $\phi = v_1(1 - \frac{u^2}{u_1^2})$ .

Em resumo, temos o seguinte problema de valor inicial que descreve o tráfego após a abertura do sinal:

$$\begin{cases} u_t + v_1(1 - \frac{2u}{u_1})u_x = 0 & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_1 & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

As características para este problema de valor inicial são dadas por  $x(t) = a(u(x_0, 0))t + x_0$ , com  $a(u) = v_1(1 - \frac{2u}{u_1})$ . Se  $x_0 < 0$ ,  $a(u(x_0, 0)) = -v_1$  e se  $x_0 > 0$ ,  $a(u(x_0, 0)) = v_1$ . Segue que as características são dadas por:

$$x(t) = \begin{cases} -v_1 t + x_0 & \text{se } x_0 \leq 0 \\ v_1 t + x_0 & \text{se } x_0 > 0, \end{cases}$$

Observe que como o tempo começa a ser contado a partir da abertura do sinal, temos  $x(0) = 0$ . Assim as características que atingem a origem são as retas  $x(t) = -v_1 t$  e  $x(t) = v_1 t$ , como mostra a Figura 4.4, a região entre as duas retas não tem características.

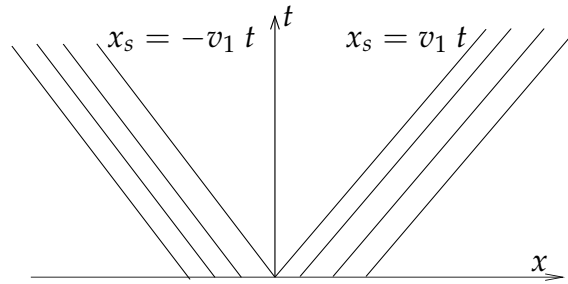


Figura 4.4: A região sem características quando o sinal passa da luz vermelha para a luz verde.

Antes de construirmos a onda de rarefação vamos analisar a solução na região onde temos características. Se  $x > 0$  só existem retas características se  $x \geq v_1 t$  e nesta região a densidade é zero pois  $u(x, t) = 0$ . Isto significa dizer que nenhum carro atingiu esta região. De fato, se um carro é o primeiro da fila, quando o sinal abre ele leva um tempo  $t = \frac{x}{v_1}$  para atingir o ponto  $x$ , portanto, não existe carro no ponto  $x$  para  $t < \frac{x}{v_1}$ . A reta  $x(t) = v_1 t$  pode ser interpretada como sendo a onda que propaga, para a região de densidade nula, a informação que o sinal abriu.

Vamos agora analisar a solução na região  $x < 0$ , as retas características só existem para  $x \leq -v_1 t$ , nesta região a densidade de carros é máxima pois  $u(x, t) = u_1$ . Isto significa que após a abertura do sinal existe um intervalo de tempo em que o carro permanece parado. De fato, se um carro está parado na posição  $x$ , quando o sinal abre, ele leva um tempo  $t = \frac{-x}{v_1}$  para andar. A reta  $x(t) = -v_1 t$  pode ser interpretada como sendo a onda que propaga, para a região de densidade máxima, a informação que o sinal abriu.



Seguindo o Exemplo 4.1, a solução na região  $-v_1 t < x < v_1 t$  é  $u(x, t) = \frac{x}{t}$ , lembrando que  $\frac{x}{t}$  é a velocidade das características temos que a onda de rarefação é dada por

$$\frac{x}{t} = a(u(x, 0)) = v_1 \left(1 - 2 \frac{u(x, t)}{v_1}\right).$$

Resolvendo essa equação para  $u(x, t)$ , obtemos

$$u(x, t) = \frac{1}{2} u_1 \left(1 - \frac{x}{v_1 t}\right).$$

Segue então que a solução  $u(x, t)$  do problema tem a expressão:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{se } x \leq -v_1 t \\ \frac{1}{2} u_1 \left(1 - \frac{x}{v_1 t}\right) & \text{se } -v_1 t < x < v_1 t \\ 0 & \text{se } x \geq v_1 t, \end{cases}$$

Se consideramos um carro que em  $t = 0$  está na posição  $x = -x_0$ , o diagrama das características no plano  $xt$  pode ser interpretado como segue: O carro permanece parado até que onda de propagação da informação de sinal aberto chegue a ele. Isto leva um tempo  $t = \frac{x_0}{u_1}$ .

Após esse tempo o carro anda na região em “leque”, onde sua velocidade cresce continuamente até atingir a velocidade máxima  $v_1$ , pois  $u(x, t) = 0$  quando a velocidade é máxima.

Knobel [6] considera também um problema de valor inicial cuja solução é uma combinação de onda de choque e onda de rarefação. Este tipo de problema de valor inicial permite estudar, simultaneamente, o efeito da mudança da luz vermelha para luz verde no fluxo de tráfego atrás e à frente do sinal em uma via. Apresenta ainda um modelo que leva em consideração o fato de que o motorista aumenta ou diminui a velocidade de seu carro de acordo com a diminuição ou aumento da densidade de carros à sua frente. Haberman [4] e Witham [12], o primeiro de forma mais detalhada, também apresentam outros modelos de tráfego.

**Exercício 4.3** No Exemplo 4.2, considere  $v_1 = 60$  km/hora e  $u_1 = 300$  carros/km, obtenha a solução do problema e faça o diagrama das características no plano  $xt$ .



## Capítulo 5

# Soluções Clássicas e Fracas de Leis de Conservação:

Nas seções anteriores apresentamos funções contínuas e descontínuas como soluções de leis de conservação. Como estamos considerando uma equação diferencial parcial, é natural questionarmos se uma função descontínua pode ser chamada solução de tal equação. Mais ainda, é natural questionarmos o conceito de solução.

Nesta seção vamos apresentar o conceito de solução para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + \phi_x = 0 & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

onde  $\phi(x, t)$  tem derivadas primeira contínuas e  $u_0(x)$  é contínua.

**Definição 5.1** Uma função  $u(x, t)$  é uma solução clássica deste problema de valor inicial se:

- (i)  $u$  é contínua para todos  $x$  e  $t > 0$ ,
- (ii)  $u_x$  e  $u_t$  existem e são contínuas para todos  $x$  e  $t > 0$ ,
- (iii)  $u$  satisfaz  $u_t + \phi_x = 0$  para todos  $x$  e  $t > 0$ ,
- (iv)  $u(x, 0) = u_0(x)$  para todo  $x$ .

Considerando apenas soluções clássicas, teríamos situações em que o problema de valor inicial não tem solução. Para garantirmos a existência de solução, precisamos estender o conceito de solução, isto é, permitir que funções que não são necessariamente contínuas ou diferenciáveis sejam soluções. Isto é feito considerando algumas funções especiais denominadas *funções teste*.

**Definição 5.2** Uma função real  $T(x, t)$  é denominada uma função teste se:

- (i)  $T_t$  e  $T_x$  existem e são contínuas para todo  $(x, t)$ .
- (ii) Existe um retângulo  $R$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $a \leq x \leq b$  no semiplano  $t \geq 0$  tais que  $T(x, t) = 0$  fora de  $R$  e sobre as linhas  $t = T$ ,  $x = a$ , e  $x = b$ .

**Exemplo 5.3** A função

$$T(x, t) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-x^2-t^2}} & \text{se } x^2 + t^2 < 1, \\ 0 & \text{se } x^2 + t^2 \geq 1, \end{cases}$$

é um exemplo de função teste. De fato, se  $(x, t)$  se aproxima do círculo  $x^2 + t^2 = 1$  pelo interior deste, temos que a exponencial de  $T(x, t)$  tende a zero o que leva esta função ter derivadas  $T_t$  e  $T_x$  contínuas sobre o círculo.

Para generalizar a noção de solução, suponha que  $u(x, t)$  é solução clássica do problema

$$\begin{cases} u_t + \phi_x = 0 & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (1)$$

e seja  $T(x, t)$  uma função teste qualquer. Segue que a função  $T(x, t)u(x, t)$  se anula em qualquer ponto  $(x, t)$  fora de um círculo no plano  $xt$ , isto é, o produto isola uma parte de  $u(x, t)$ . Multiplicando a equação diferencial  $u_t + \phi_x = 0$  por  $T(x, t)$  e integrando em  $x$  e  $t \geq 0$  temos

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t(x, t)T(x, t) + \phi_x(x, t)T(x, t)) dx dt = 0. \quad (2)$$

A integral acima pode ser escrita como

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t(x, t)T(x, t) + \phi_x(x, t)T(x, t)) dx dt = I_1 + I_2,$$

onde  $I_1 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u_t(x, t)T(x, t) dx dt$  e  $I_2 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \phi_x(x, t)T(x, t) dx dt$ .

Mudando a ordem de integração em  $I_1$ , obtemos

$$I_1 = \int_{-\infty}^\infty \left[ \int_0^\infty u_t(x, t)T(x, t) dt \right] dx.$$

Aplicando integração por partes, obtemos

$$I_1 = \int_{-\infty}^\infty \left[ u(x, t)T(x, t) \Big|_{t=0}^{t \rightarrow \infty} - \int_0^\infty u_t(x, t)T_t(x, t) dt \right] dx.$$

Lembrando que o produto  $u(x, t)T(x, t)$  se anula fora de qualquer círculo no plano  $xt$ , segue que  $u(x, t)T(x, t) = 0$  para  $t \rightarrow \infty$ . Assim, a primeira parcela entre os colchetes se escreve como  $-u_0(x)T(x, 0)$  uma vez que  $u(x, 0) = u_0(x)$ . Dessa forma temos que  $I_1$  é dada por

$$I_1 = - \int_{-\infty}^\infty u_0(x)T(x, 0) dx - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u_t(x, t)T_t(x, t) dx dt.$$

Aplicando integração por partes em  $I_2$ , obtemos

$$I_2 = \int_0^\infty \left[ \phi(x, t)T(x, t) \Big|_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow \infty} - \int_{-\infty}^\infty \phi(x, t)T_x(x, t) dx \right] dt.$$

Como  $T(x, t) = 0$  para  $x \rightarrow \pm\infty$  temos que  $I_2$  se escreve como

$$I_2 = - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \phi(x,t) T_x(x,t) dx dt.$$

Substituindo a integral em (2) pela soma de  $I_1$  com  $I_2$  obtemos

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u(x,t) T_t(x,t) + \phi(x,t) T_x(x,t)) dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) T(x,0) dx = 0 \quad (3)$$

**Definição 5.4** Uma função  $u(x,t)$  é denominada uma solução fraca de (1) se  $u(x,t)$  satisfaz (3) para toda função teste  $T(x,t)$ . A equação (3) é denominada forma fraca de (1).

**Observação 5.5** Como (3) não envolve as derivadas  $u_x$  e  $u_t$  da função  $u$ , uma solução fraca pode ser descontínua.

**Exemplo 5.6** Ache a forma fraca do problema de valor inicial

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(x,0) = e^{-x^2}.$$

**Solução:** A função de fluxo para essa lei de conservação é  $\phi(u) = \frac{u^2}{2}$ . Substituindo essa função de fluxo e o valor inicial  $u(x,0)$  em (3) obtemos

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u(x,t) T_t(x,t) + \frac{u^2}{2} T_x(x,t)) dx dt + \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} T(x,0) dx = 0,$$

que é a forma fraca do problema de valor inicial dado para toda função teste  $T(x,t)$ .

**Exercício 5.7** Ache a forma fraca dos seguintes problemas de valor inicial

$$1. \quad u_t + (e^u)_x = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

$$2. \quad u_t + u^2 u_x = 0, \quad u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$3. \quad u_t + v_{max} \left(1 - \frac{2u}{u_{max}}\right) u_x = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} u_{max} & \text{se } x \leq 0 \\ u_0 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

**Exercício 5.8** Seguindo os passos para obter (3) mostre que a forma fraca do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + \phi_x = f & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

é dada por:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u(x,t) T_t(x,t) + \phi(x,t) T_x(x,t) - f(x,t) T(x,t)) dx dt \\ + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) T(x,0) dx = 0 \end{aligned}$$



# Capítulo 6

## Introdução ao Método das Diferenças Finitas

### 6.1 Introdução

Nem sempre é possível obter soluções explícitas de problemas envolvendo equações diferenciais. Isto é bastante frustrante quando desejamos informações sobre o comportamento dessas soluções.

Uma forma de minimizar o problema é utilizar os chamados esquemas numéricos. Eles têm como objetivo obter valores aproximados da solução em certos pontos de seu domínio.

Neste capítulo faremos uma breve introdução a tais esquemas numéricos, obtidos via os chamados métodos de diferenças finitas, aplicados a leis de conservação escalares unidimensionais lineares do tipo

$$u_t + au_x = 0, \quad (1)$$

e satisfazendo condições iniciais do tipo

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (2)$$

onde  $u = u(x, t)$ ,  $x$  representa variável espacial e  $t (\geq 0)$  representa o tempo.

Este capítulo está baseado nas referências [8] e [11].

### 6.2 Esquemas numéricos

A construção de um esquema numérico começa pela definição de uma malha de pontos no plano  $(x, t)$ . Para tanto, tomamos  $h$  e  $k$  números positivos pequenos e consideramos a malha obtida pelos pontos  $(x_m, t_n) = (mh, nk)$  (Fig. 6.1), onde  $m$  e  $n$  são inteiros arbitrários. No caso de leis de conservação, consideramos apenas  $n \geq 0$ .

Para uma função  $v$  definida nos pontos da malha, denotaremos por  $v_m^n = v(mh, nk)$  o valor aproximado de  $u$  nos pontos  $(mh, nk)$  ( $v_m^n \approx u(mh, nk)$ ).

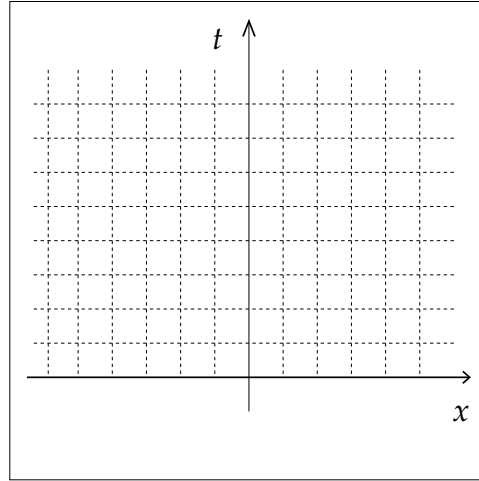


Figura 6.1: Malha de pontos no plano  $(x, t)$ .

A ideia básica dos esquemas de diferenças finitas é aproximar derivadas por diferenças finitas. Uma maneira de fazer isto é considerar a aproximação

$$\frac{\partial}{\partial x}u(mh, nk) \approx \frac{u((m+1)h, nk) - u(mh, nk)}{h}. \quad (3)$$

Podemos entender como a aproximação acima foi obtida e obter outras, usando série de Taylor. De fato, da fórmula de Taylor temos

$$u((m+1)h, nk) = u(mh, nk) + \frac{\partial}{\partial x}u(mh, nk)h + \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(mh, nk)\frac{h^2}{2} + o(h^2), \quad (T1)$$

ou

$$u((m-1)h, nk) = u(mh, nk) - \frac{\partial}{\partial x}u(mh, nk)h + \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(mh, nk)\frac{h^2}{2} + o(h^2), \quad (T2)$$

onde  $o(h^2)$  significa que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^2)}{h^2} = 0$ .

De (T1) e (T2) podemos obter, dentre outros

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}u(mh, nk) &= \frac{u((m+1)h, nk) - u(mh, nk)}{h} + o(1) \\ &\approx \frac{u((m+1)h, nk) - u(mh, nk)}{h}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}u(mh, nk) &= \frac{u((m+1)h, nk) - u((m-1)h, nk)}{2h} + o(h) \\ &\approx \frac{u((m+1)h, nk) - u(mh, nk)}{2h}, \end{aligned} \quad (5)$$

De (4) e (5) vemos que a aproximação em (5) é melhor que a aproximação em (4), no sentido de  $o(h)$  tender para zero mais rápido que  $o(1)$ .

De modo análogo, podemos obter aproximações para  $\frac{\partial}{\partial t}u(mh, nk)$ .

Usando as aproximações acima podemos obter vários esquemas de diferenças finitas. Alguns exemplos para a equação  $u_t + au_x = 0$ , onde  $a$  é uma constante seguem abaixo.



E1) Esquema para frente no tempo e no espaço:

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = 0. \quad (6)$$

E2) Esquema para frente no tempo e para trás no espaço:

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = 0. \quad (7)$$

E3) Esquema “leapfrog”:

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^{n-1}}{2k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0. \quad (8)$$

E4) Esquema Lax-Friedrichs:

$$\frac{v_m^{n+1} - \frac{v_{m+1}^n + v_{m-1}^n}{2}}{k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0. \quad (9)$$

Conhecendo a solução aproximada  $v_m^l$  ( $l \leq n$ ) para certos níveis de tempo, via os esquemas de diferenças finitas é possível obter  $v_m^{n+1}$  para o nível seguinte. Por exemplo, no esquema (6), denotando  $\lambda = \frac{k}{h}$ ,

$$v_m^{n+1} = (1 + a\lambda)v_m^n - a\lambda v_{m+1}^n, \quad (10)$$

no esquema de Lax-Friedrichs (9),

$$v_m^{n+1} = \frac{1}{2}[(1 - a\lambda)v_{m+1}^n - (1 + a\lambda)v_{m-1}^n] \quad (11)$$

e no esquema de leapfrog (8),

$$v_m^{n+1} = v_m^{n-1} + a\lambda(v_{m+1}^n - v_{m-1}^n). \quad (12)$$

Esquemas que envolvem  $v$  apenas em dois níveis de tempo são chamados *esquemas de passo simples* ou *passo um*, enquanto esquemas que envolvem  $v$  apenas em três ou mais níveis de tempo são chamados *esquemas de passo múltiplo*.

Esquemas de passo múltiplo precisam de um procedimento inicial para determinar valores de  $v$  em tempos iniciais. Por exemplo, para o esquema de leapfrog usualmente é empregado um esquema de passo simples para determinar  $v$  para  $n = 1$  e, após, para  $n > 1$ , aplicado o esquema de passo múltiplo.

Como podemos ver, obter um esquema de diferenças finitas não é uma tarefa difícil. Mas, até agora, não temos garantia de que os valores de  $v_m^n$  obtidos desses esquemas representam boas aproximações para  $u(x_m, t_n)$ . De fato, vejamos um exemplo.

**Exemplo 6.1** Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + 2u_x = 0, \text{ em } -5 < x < 5, \\ u_0(x, 0) = \begin{cases} 2, & \text{se } -5 \leq x < 0 \\ 2 - x, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{se } 1 \leq x \leq 5, \end{cases} \end{cases}$$

encontre uma aproximação para  $u$ , no tempo  $t = 1$ , usando o esquema de Lax-Friedrichs.

**Solução:** Considerando uma malha com  $h = 0,1$  e  $k = 0,2$ , usando um programa em Maple podemos obter  $v_m^5$  dada pela distribuição de pontos apresentada na Fig. 6.2. Neste caso temos  $\lambda = 2$  em (11).

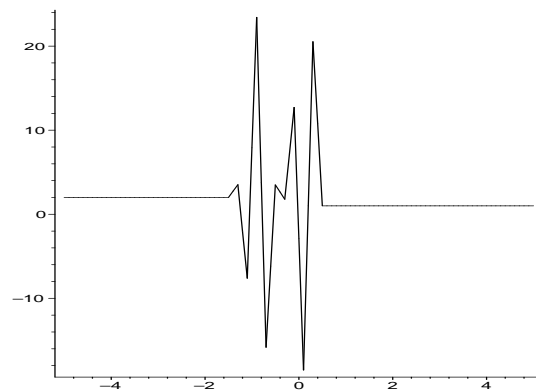


Figura 6.2: Solução numérica com  $h = 0,1$  e  $k = 0,2$ .

**Observação 6.2** Como podemos ver, a primeira solução não é aceitável, enquanto a segunda solução tem um comportamento bem mais próximo do desejado.

O exemplo acima ilustra o fato de que não basta simplesmente obtermos um esquema numérico para considerarmos aceitável uma aproximação da solução do problema de valor inicial.

Na próxima seção vamos procurar entender os motivos da diferença entre as duas soluções numéricas apresentadas no exemplo acima.

**Exercício 6.3** Resolva numericamente o problema de valor inicial do exemplo 6.1, considerando  $u(-10, t) = 2$ , usando os seguintes esquemas de diferenças finitas:

1. Para frente no tempo e no espaço com  $\lambda = 0.8$  e  $h = 0.1$ ;
2. Para frente no tempo e no espaço com  $\lambda = 0.8$  e  $h = 0.2$ ;
3. Para Lax-Friedrichs com  $\lambda = 0.8$  e  $h = 0.1$ ;
4. Para Lax-Friedrichs com  $\lambda = 0.8$  e  $h = 0.2$ ;
5. Para Lax-Friedrichs com  $\lambda = 2.0$  e  $h = 0.1$ ;
6. Para Lax-Friedrichs com  $\lambda = 2.0$  e  $h = 0.2$ ;

7. Para leapfrog com  $\lambda = 0.8$  e  $h = 0.1$ ;

8. Para leapfrog com  $\lambda = 0.8$  e  $h = 0.2$ ;

Quando for preciso, na fronteira direita, use a condição  $v_M^{n+1} = v_{M-1}^{n+1}$ , onde  $x_M = 3$ .

Para iniciar o esquema de leapfrog, use o esquema para frente no tempo e no espaço.

## 6.3 Convergência, Consistência e Estabilidade

Ao utilizarmos um esquema numérico, buscamos encontrar uma aproximação para a solução da equação diferencial correspondente. Em outras palavras, gostaríamos que a aproximação  $v_m^n$  fosse cada vez melhor quando  $h$  e  $k$  estivessem cada vez mais próximos de zero. Esquemas que satisfazem esta condição são chamados *esquemas convergentes*. Mais precisamente,

**Definição 6.4** *Um esquema de diferenças finitas de passo simples é chamado convergente se a solução  $v_m^n$ , onde  $v_m^0$  converge para  $u_0(x)$  quando  $mh \rightarrow x$  para  $h \rightarrow 0$ , converge para  $u(x, t)$  quando  $(mh, nk) \rightarrow (x, t)$  com  $h, k \rightarrow 0$ .*

A definição de esquemas de passos múltiplos convergente é análoga, lembrando que condições em níveis iniciais de tempo estão relacionadas com esquemas numéricos de menor número de passos. Não abordaremos este assunto neste texto.

Provar que um esquema numérico converge, em geral, não é uma tarefa fácil. Porém, dois outros conceitos mais simples de serem provados ajudam neste trabalho. Antes de apresentá-los vamos introduzir as notações

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u = Pu = u_t + au_x = 0 \quad (13)$$

para representar uma equação diferencial parcial linear e  $P_{hk}v = 0$  para denotar uma equação de diferenças finitas. Por exemplo, em (6)

$$P_{hk}v = \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h}$$

Introduzidas as notações, o primeiro conceito a ser apresentado é:

**Definição 6.5** *Um esquema de diferenças finitas  $P_{hk}v = 0$  é chamado consistente com a equação diferencial parcial  $Pu = 0$  se, para qualquer função suave  $\Phi(x, t)$ , temos que  $P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi - P_{hk}\Phi$  converge pontualmente para zero, em cada ponto da malha, quando  $h, k \rightarrow 0$ .*

**Exemplo 6.6** Do esquema (7), temos

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi &= \Phi_t + a\Phi_x \\ P_{hk}\Phi &= \frac{\Phi_m^{n+1} - \Phi_m^n}{k} + a \frac{\Phi_m^n - \Phi_{m-1}^n}{h}, \end{aligned} \quad (14)$$

onde  $\Phi_m^n = \Phi(mh, nk)$ , como anteriormente.

Da série de Taylor em  $(mh, nk)$ , temos

$$\begin{aligned}\Phi_m^{n+1} &= \Phi_m^n + \Phi_t(mh, nk)k + \Phi_{tt}(mh, nk)\frac{k^2}{2} + O(k^3) \\ \Phi_{m-1}^n &= \Phi_m^n - \Phi_x(mh, nk)h + \Phi_{xx}(mh, nk)\frac{h^2}{2} + O(h^3).\end{aligned}\tag{15}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\Phi_m^{n+1} - \Phi_m^n}{k} &= \Phi_t(mh, nk) + \Phi_{tt}(mh, nk)\frac{k}{2} + O(k^2) \\ \frac{\Phi_m^n - \Phi_{m-1}^n}{h} &= \Phi_x(mh, nk) - \Phi_{xx}(mh, nk)\frac{h}{2} + O(h^2).\end{aligned}\tag{16}$$

Assim,

$$P\Phi - P_{hk}\Phi = -\Phi_{tt}(mh, nk)\frac{k}{2} + O(k^2) + a\Phi_{xx}(mh, nk)\frac{h}{2} + O(h^2),\tag{17}$$

que tende a zero quando  $h, k \rightarrow 0$ .

### Exercício 6.7

1. Mostre que o esquema (6) é consistente;
2. Mostre que o esquema de Lax-Friedrichs é consistente, se  $h^2/k \rightarrow 0$ .

O segundo conceito a ser introduzido é:

**Definição 6.8** Um esquema de diferenças finitas  $P_{hk}v_m^n = 0$  é chamado estável em uma região  $\Omega$ , se existir um inteiro  $J$ , para todo  $T$  positivo, e uma constante  $C_T$  tal que

$$h \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^n|^2 \leq C_T h \sum_{j=0}^J \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^j|^2,\tag{18}$$

para  $0 \leq nk \leq T$ , com  $(h, k) \in \Omega$ .

**Exemplo 6.9** Usando o esquema (6), podemos escrever

$$v_m^{n+1} = (1 + a\lambda)v_m^n - a\lambda v_{m+1}^n = \alpha v_m^n + \beta v_{m+1}^n,$$

onde  $\alpha = 1 + a\lambda$  e  $\beta = -a\lambda$ .

Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^{n+1}|^2 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\alpha v_m^n + \beta v_{m+1}^n|^2 \\ &\leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{|\alpha|^2 |v_m^n|^2 + |\alpha||\beta|(2|v_m^n||v_{m+1}^n|) + |\beta|^2 |v_{m+1}^n|^2\}.\end{aligned}$$

Lembrando que  $0 \leq (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$  implica que  $2xy \leq x^2 + y^2$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^{n+1}|^2 &\leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{|\alpha|^2 |v_m^n|^2 + |\alpha||\beta|(|v_m^n|^2 + |v_{m+1}^n|^2) + |\beta|^2 |v_{m+1}^n|^2\} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{|\alpha|^2 |v_m^n|^2 + |\alpha||\beta| |v_m^n|^2 + |\alpha||\beta| |v_{m+1}^n|^2 + |\beta|^2 |v_{m+1}^n|^2\} \\ &= (|\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2) \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^n|^2 = (|\alpha| + |\beta|)^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^n|^2 \end{aligned}$$

Logo, se  $|\alpha| + |\beta| = |1 + a\lambda| + |a\lambda| \leq 1$ , o esquema (6) é estável. Em outras palavras, se  $-1 \leq a\lambda \leq 0$ , o esquema (6) é estável.

A quantidade  $\sqrt{h \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^n|^2}$  tem uma interpretação bastante interessante. Ela define uma norma, chamada norma  $L^2$  da função  $v^n$ , denotada por  $\|v^n\|_h$ , que mede o “tamanho” de  $v^n$ . Usando esta notação, podemos escrever (18) como

$$\|v_m^n\|_h^2 \leq C_T \sum_{j=0}^J \|v_m^j\|_h^2. \quad (19)$$

A relação entre convergência, consistência e estabilidade é obtida pelo importante teorema de equivalência de Lax-Richtmyer. Para enunciar esse teorema abaixo, precisamos introduzir a seguinte definição:

**Definição 6.10** *Um problema de valor inicial para a equação diferencial parcial é chamado bem posto se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i) *A solução do problema existe.*
- (ii) *A solução é única.*
- (iii) *A solução depende continuamente do dado inicial do problema.*

Para maiores detalhes sobre o conceito de problema bem posto, veja livros de equações diferenciais parciais como [13], [5], etc.

**Teorema 6.11** *Dado um problema de valor inicial bem posto para uma equação diferencial parcial  $Pu = 0$ , um esquema de diferenças finitas consistente para  $Pu = 0$  é convergente se, e somente se, ele é estável.*

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em [11] e [9].

Agora que conhecemos os conceitos de convergência, consistência e estabilidade e sabemos como eles estão relacionados, vamos ver um exemplo que ilustra a necessidade da estabilidade para garantir a convergência de um esquema consistente.

**Exemplo 6.12** Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{se } x \notin [-1, 1], \end{cases} \end{cases} \quad (20)$$

utilizando o esquema (6) tente obter uma aproximação para a solução de (20) no tempo  $t = 0.25$ .

**Solução:** O esquema (6) pode ser escrito como

$$v_m^{n+1} = v_m^n - \frac{k}{h}(v_{m+1}^n - v_m^n) = (1 + \lambda)v_m^n - \lambda v_{m+1}^n \quad (21)$$

Tomando  $h = 0.1$ ,  $k = 0.2$  e  $\lambda = 2$  e utilizando um programa em Maple, obtemos o gráfico da solução aproximada mostrado na Fig. 6.3

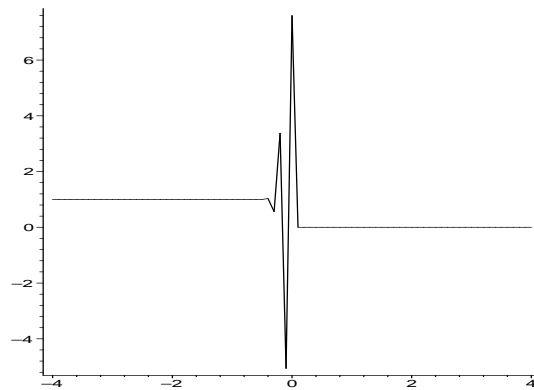


Figura 6.3: Solução numérica com  $h = 0,1$  e  $k = 0,2$ .

Por outro lado, via o método das características, sabemos que a solução do problema acima é dada por um deslocamento no dado inicial.

Portanto, embora o esquema (6) seja consistente, como mostrado no exercício 1, a solução numérica obtida usando (21) não converge para a solução de (20).

## 6.4 A Condição CFL

Courant, Friedrichs e Lewy, em um artigo escrito em 1928 [1] e traduzido para o inglês em 1967 [2], usaram o método de diferenças finitas como uma ferramenta analítica para provar existência de soluções de certas equações diferenciais parciais.

A ideia básica do trabalho deles é definir uma sequência de soluções aproximadas (via equações de diferenças finitas), provar que elas convergem quando a malha é refinada, e então mostrar que a função limite deve satisfazer a equação diferencial parcial, obtendo a existência de uma solução.

Quando estavam provando a convergência dessas sequências eles identificaram que uma condição necessária para estabilidade é que o domínio de dependência do esquema numérico deve conter o domínio de dependência da equação diferencial parcial, pelo menos no limite quando  $h, k \rightarrow 0$ . Esta condição é conhecida como *condição CFL*.

**Exemplo 6.13** Para o esquema numérico (6),  $v_m^n$  depende dos pontos que estão entre  $(mh, 0)$  e  $((m+n)h, 0)$  e o domínio de dependência da solução analítica é o ponto  $(x_m - at_n, 0) = (mh - ank, 0)$ , pois  $u(x_m, t_n) = u_0(x_m - at_n)$ .

Como podemos ver, a condição CFL não é satisfeita no exemplo 6.12

Na verdade, vale o seguinte teorema:

**Teorema 6.14** Considere um esquema da forma  $v_m^{n+1} = \alpha v_{m-1}^n + \beta v_m^n + \gamma v_{m+1}^n$  para  $u_t + au_x = 0$ , com  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  não nulos. Uma condição necessária e suficiente para ele ser estável é

$$|a\lambda| \leq 1. \quad (22)$$





# Capítulo 7

## Outras Aplicações de Leis de Conservação

Nesta seção apresentamos outros exemplos de aplicação de leis de conservação unidimensional, justificando a escolha (em alguns casos deduzindo) da equação constitutiva de cada problema.

### 7.1 Aplicação 1: Difusão

Vamos obter a lei de conservação que governa a propagação por difusão de um poluente na água.

Considere um tubo cheio de água parada. Suponha que devido a uma rachadura temporária no tubo uma pequena seção da água no interior do tubo foi contaminada por um poluente. Se denotamos por  $u(x, t)$  a concentração (massa por unidade de comprimento) do poluente na posição  $x$  no tempo  $t$ , a lei de conservação geral para  $u(x, t)$  terá a forma  $u_t + \phi_x = f$ . As funções de fluxo  $\phi$  e fonte  $f$  são obtidas com base nas hipóteses que fazemos e no problema físico.

Neste exemplo,  $\phi$  representa a taxa (massa por unidade de tempo) com que o poluente passa na posição  $x$  no tempo  $t$ . Como a água está parada no tubo, a única forma de propagação do poluente na água é por difusão. O poluente, em geral, se move de uma região de concentração alta para uma região de concentração mais baixa, como uma forma de distribuir-se uniformemente no interior do tubo. Se a concentração tem o perfil como o mostrado na Figura 7.1, nos pontos onde  $u_x(x, t) > 0$  o poluente fluirá para a esquerda (região com menos poluente) e nos pontos onde  $u_x(x, t) < 0$  o poluente fluirá para a direita (região com menos poluente). Para processo de difusão em estado estacionário como este, o fluxo é dado por  $\phi = -Du_x$ , onde  $D$  é uma constante positiva e o sinal negativo indica que o poluente flui na direção oposta ao sinal da inclinação  $u_x$  do gráfico de  $u$ . Esta relação é conhecida como primeira lei de difusão de Fick.

A função fonte  $f(x, t)$  representa a taxa com que o poluente está entrando ou sendo removido do tubo na posição  $x$ . Lembrando que a rachadura no tubo foi temporária e que não ocorreu nenhum processo para eliminar o poluente do tubo temos que  $f = 0$ . Dessa forma, a lei de conservação tem a forma da equação de difusão  $u_t - Du_{xx} = 0$ .

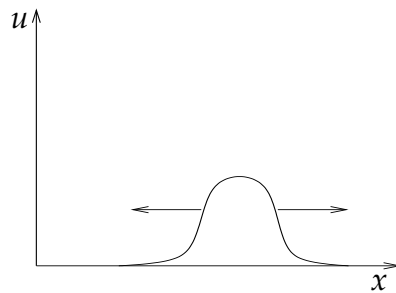


Figura 7.1: O poluente flui de regiões de maior concentração para regiões de menor concentração.

## 7.2 Aplicação 2: Reação química em um tubo

Considere um tubo longo no qual inserimos um produto químico  $A$  por um dos seus extremos, dentro do tubo ocorre uma reação e um produto químico  $B$  é recolhido na outra extremidade do tubo, como mostra a Figura 7.2. Se denotarmos por  $u(x, t)$  a concentração (massa por unidade de comprimento) do produto  $A$  na posição  $x$ , no tempo  $t$ , segue da seção 1.1 que a lei de conservação geral para  $u(x, t)$  é dada por

$$u_t(x, t) + \phi_x(x, t) = f(x, t),$$



Figura 7.2: Esquema da reação química em cadeia da aplicação 2

onde  $\phi(x, t)$  é a taxa (massa por unidade de tempo) com que o produto  $A$  passa pela posição  $x$ , no tempo  $t$  e  $f(x, t)$  é a taxa com que o produto  $A$  (massa/por tempo por unidade de comprimento) desaparece na posição  $x$ , no tempo  $t$ , devido a reação química.

A fim de modelar a lei de conservação para a reação acima vamos supor que:

- 1- A reação que ocorre no interior do tubo se move da esquerda para a direita com velocidade constante  $a$ .
- 2- A taxa com que o produto  $A$  se transforma no produto  $B$  no interior do tubo é proporcional à concentração de  $A$ .

A primeira hipótese implica que o fluxo  $\phi(x, t) = au(x, t)$  e a segunda implica que  $f(x, t) = -pu(x, t)$ , onde  $p$  é uma constante positiva e o sinal negativo indica que o produto  $A$  está desaparecendo. Com isso a lei de conservação para a reação química é a seguinte:

$$u_t(x, t) + au_x(x, t) = -pu(x, t).$$

**Observação:** A relação  $\phi(x, t) = au(x, t)$  é um exemplo de equação constitutiva obtida a partir da hipótese que fizemos para a modelagem do problema. Este tipo de função de fluxo descreve um processo de *advecção* ou *convecção* no qual a mudança no valor de  $u(x, t)$  ocorre devido ao movimento do meio.

### 7.3 Aplicação 3: Ondas de enchente em um rio

Para este problema  $u(x, t)$  representa a área de uma seção transversal do rio, que varia com  $x$  e  $t$  quando o nível do rio aumenta. Se  $\phi$  é o volume do fluxo pela seção, a lei de conservação geral (7), nesse caso, expressa a conservação da água.

Considerando que o fluxo do rio é extremamente complicado, qualquer modelo para a relação entre  $u$  e  $\phi$  (equação constitutiva) deve considerar apenas os efeitos qualitativos que elementos tais como velocidade de propagação, perfil de onda, entre outros, têm na relação. Por observação em fluxos estáveis (fluxos sem alterações bruscas) pequenas alterações no nível do rio podem ser usadas para se estabelecer que o fluxo  $\phi$  depende da profundidade e da área  $u$ , isto é,

$$\phi = \phi(u, x).$$

Usando esta relação em (7) obtemos

$$u_t(x, t) + a(u)u_x = f(x, t), \quad (1)$$

onde  $a = \frac{\partial \phi}{\partial u}$  e  $f(x, t) = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$ .

**Observação:** A equação constitutiva que usamos aqui é um exemplo de relação obtida a partir de observação. A relação  $\phi = \phi(u, x)$  acima é uma primeira aproximação para fluxos não estáveis com pequenas alterações. Este modelo é bastante simplificado e deve ser aprimorado para estudos de modificações bruscas no comportamento do fluxo de rios.

As aplicações 1 e 2 se encontram em [6]. Nos capítulos 2 e 3 de [12], além da aplicação 3, o autor apresenta e discute vários aspectos teóricos da solução de outras aplicações de leis de conservação, tais como: movimento de geleiras; processo de troca de íons, cromatografia e sedimentação em rios.



# Referências Bibliográficas

- [1] R. Courant, K. O. Friedrichs, and H. Lewy, *Über die partiellen differenzengleichungen der mathematischen physik*, Math. Ann. **100** (1928), 32–74.
- [2] ———, *On the partial difference equations of mathematical physics*, IBM Journal **11** (1967), 215–234.
- [3] E. Godlewski and P. A. Raviart, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [4] R. Haberman, *Mathematical models: Mechanical vibrations, population dynamics and traffic flow*, SIAM, 1998.
- [5] F. John, *Partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [6] R. Knobel, *An introduction to the mathematical theory of waves*, Student Mathematical Library, IAS/PARK CITY MATH SUBSERIES, vol. 3, AMS, 1999.
- [7] P. Lax, *The formation and decay of shock waves*, The American Mathematical Monthly **79** (1972), no. 3, 227–241.
- [8] R. J. LeVeque, *Numerical methods for conservation laws*, Birkhäuser Verlag, Basel–Boston–Berlin, 1992.
- [9] R. D. Richtmyre and K. W. Morton, *Difference methods for initial-value problems*, Krieger Publishing Company, Malabar, FL, 1994.
- [10] J. Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion equations, second edition*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1994.
- [11] J. C. Strikwerda, *Finite difference schemes and partial differential equations*, Chapman & Hall, New York, 1989.
- [12] G. B. Whitham, *Linear and nonlinear waves*, John Wiley & Sons, 1976.
- [13] E. C. Zachmanoglou, *Introduction to partial differential equations with applications*, The Williams & Wilkins Company, Baltimore, 19767.