

# Isometrias do Plano Hiperbólico

**Claudia Candida Pansonato** <sup>1</sup>

Departamento de Matemática  
Centro de Ciências Naturais e Exatas – CCNE  
Universidade Federal de Santa Maria – UFSM

**Rosane Rossato Binotto** <sup>2</sup>

Departamento de Matemática  
Centro de Ciências Naturais e Exatas – CCNE  
Universidade Federal de Santa Maria – UFSM

---

<sup>1</sup>panonato@smail.ufsm.br  
<sup>2</sup>rrbinotto@smail.ufsm.br

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>1 Modelo do Semiplano</b>	<b>7</b>
1.1 Retas Hiperbólicas . . . . .	7
1.2 A esfera de Riemann . . . . .	10
1.3 A Fronteira no Infinito de $\mathbb{H}$ . . . . .	17
<b>2 O Grupo Geral de Möbius</b>	<b>19</b>
2.1 Transformações de Möbius . . . . .	19
2.2 Propriedades Transitivas de $\text{Möb}^+$ . . . . .	25
2.3 Classificação das Transformações de Möbius . . . . .	28
2.4 Transformações de Möbius como Matrizes . . . . .	29
2.5 A Conjugação Complexa . . . . .	32
2.6 Principais Propriedades de $\text{Möb}$ . . . . .	33
2.7 O Subgrupo $\text{Möb}(\mathbb{H})$ . . . . .	36
<b>3 Distância em <math>\mathbb{H}</math></b>	<b>44</b>
3.1 Elementos de Comprimento de Arco . . . . .	44
3.2 Comprimento de Arco em $\mathbb{H}$ . . . . .	46
3.3 Métrica em $\mathbb{H}$ . . . . .	51
3.4 Fórmula para Distância Hiperbólica . . . . .	55
3.5 Isometrias . . . . .	57
<b>4 Área e o Teorema de Gauss-Bonnet</b>	<b>62</b>
4.1 Convexidade . . . . .	62
4.2 Polígonos Hiperbólicos . . . . .	63

4.3	Área Hiperbólica . . . . .	68
4.4	Teorema de Gauss-Bonnet . . . . .	70
	<b>Bibliografía</b>	<b>76</b>

# Apresentação

O objetivo principal deste minicurso é estudar a geometria do plano hiperbólico  $\mathbb{H}$  através da ação do grupo geral de Möbius. Para isto, inicialmente faremos um breve apanhado histórico sobre a geometria hiperbólica, relacionando-a com a geometria euclidiana e procurando motivar a adoção de um modelo euclidiano para o estudo da geometria hiperbólica. Maiores detalhes podem ser encontrados em [3], [4] e [5].

Utilizando o modelo do semiplano superior, boa parte do minicurso será dedicada ao estudo do grupo geral de Möbius e sua ação sobre  $\mathbb{H}$ . A partir daí será explorada a noção de distância e ângulos em  $\mathbb{H}$ . Finalmente, abordaremos também o Teorema de Gauss-Bonnet.

A principal referência utilizada na preparação deste texto foi o livro [1].

# Introdução

As noções elementares de geometria nasceram da necessidade de se efetuar medidas, isto é, comparar distâncias e determinar as dimensões dos objetos que rodeavam os seres humanos.

O historiador grego Heródoto (500 a.C.) atribuiu aos egípcios o início da geometria, mas outras civilizações mais antigas (babilônios, hindus e chineses) também possuíam muitas informações geométricas. Mas foi na Grécia antiga que a geometria teve grande desenvolvimento, principalmente entre os séculos VI e II a.C., destacando-se os trabalhos de Tales de Mileto, Pitágoras, Euclides, Apolônio e Arquimedes. O seu apogeu deu-se em torno do ano 300 a.C., quando o matemático grego Euclides coletou, sistematizou e ampliou os conhecimentos matemáticos da época. Partindo de noções primitivas de ponto, reta, plano e espaço, desenvolveu um dos primeiros exemplos de uma teoria dedutiva, estabelecendo sob forma de axiomas ou postulados (proposições aceitas sem demonstração), as relações entre noções primitivas e suas propriedades. Os axiomas e suas consequências, os teoremas, demonstráveis a partir dos próprios axiomas, foram reunidos por ele numa obra composta por 13 livros, denominada *Elementos*, a qual abrangia resultados de geometria, de teoria de números e de álgebra (geométrica) elementar. Este livro se tornou, ao longo do tempo, a obra mais lida e mais publicada, vigorando por muitos e muitos séculos como o texto padrão de geometria. Além disso, o livro *Elementos* é considerado um marco na história da Matemática, pois ele é o primeiro grande exemplo do uso do método axiomático.

A origem das geometrias não euclidianas está ligada ao questionamento de um dos cinco postulados estabelecido por Euclides,

mais precisamente, o quinto postulado. Esse postulado, também conhecido como postulado das paralelas, afirma que: “se uma reta, cortando duas outras retas no plano, forma ângulos internos de um mesmo lado menores que dois retos, então as duas retas, prolongadas ao infinito se encontrarão na parte em que os dois ângulos são menores que dois retos”.

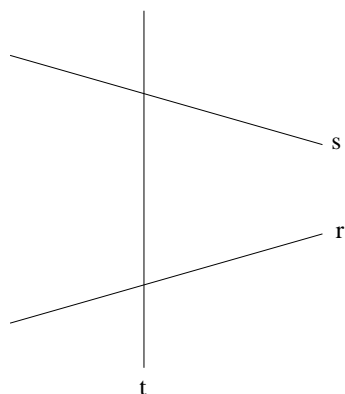


Figura 1: Retas não paralelas

Desde o início, esse postulado foi criticado, por ele ter uma elaboração mais complexa que os demais, e sobretudo por dar a impressão de redundância. Ele não parecia ter a evidência suficiente para ser aceito sem demonstração. Suspeitava-se que ele pudesse ser provado a partir das noções primitivas e dos quatro primeiros postulados. Além disso, outro fato que os intrigava era o retardamento do uso deste postulado por parte de Euclides. Ele provou vinte e oito proposições sem usar o quinto postulado numa prova. Iniciaram-se então, tentativas para se provar o quinto postulado. Elas surgiram logo após o aparecimento dos *Elementos* e só terminaram na primeira metade do século XIX. Nestas tentativas, geômetras frequentemente faziam suposições e as usavam para provar o quinto postulado. Só que cada uma destas hipóteses foi provada como equivalente ao postulado das paralelas. Uma destas equivalências atribui-se ao matemático e geólogo inglês John Playfair (1748-1819) e diz o seguinte: “por um

ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada”. Também foi mostrado que o quinto postulado é independente dos quatro primeiros. Em outras palavras, eles descobriram que existem geometrias nas quais a negação do quinto postulado é um axioma. Estas geometrias são conhecidas como *geometrias não euclidianas* e dentre elas destacam-se a *geometria hiperbólica* e a *geometria elíptica*.

A geometria hiperbólica, tema deste trabalho, é baseada nos postulados um, dois, três e quatro da geometria euclidiana, ([2] e [3]), e na negação do axioma de Playfair, “por um ponto fora de uma reta podem-se traçar mais de uma reta paralela a reta dada”. A outra negação do postulado das paralelas, segundo a versão de Playfair, diz que: “por um ponto fora de uma reta não passa nenhuma reta paralela à reta dada”. Este postulado é a base da geometria elíptica. Assim, todos os resultados que dependem do quinto postulado sofrem alterações nestas novas geometrias. Um exemplo é o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo. Como veremos no Capítulo 5, na geometria hiperbólica este teorema estabelece que: “a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que dois ângulos retos”.

As geometrias hiperbólica e elíptica não foram muito bem aceitas no início. Isto se deve, em parte, ao questionamento da consistência dessas geometrias. Uma teoria é chamada consistente se não pudermos, a partir de seus axiomas, provar um teorema e a negação dele, o que representa uma questão lógica de grande dificuldade. Uma importante contribuição ao desenvolvimento dessa questão foi dada em 1930 pelo lógico austríaco Kurt Gödel (1906-1978). Gödel provou que, em teorias suficientemente complexas não é possível demonstrar consistência partindo de elementos da própria teoria, mas pode-se detectar uma “consistência relativa” através de modelos. Assim, um modelo para a geometria hiperbólica, construído a partir de elementos da geometria euclidiana, mostra que, se esta for consistente, a hiperbólica também o será. Os modelos permitem concluir que as três geometrias são equivalentes quanto à consistência. Um dos primeiros modelos para a geometria hiperbólica foi elaborado em 1868 pelo matemático italiano Eugenio Beltrami (1835-1900).

A descoberta da geometria hiperbólica deve-se em particular ao matemático russo Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856) e ao matemático húngaro János Bolyai (1802-1860) que publicaram seus trabalhos independentemente em 1829 e 1832, respectivamente. Ou-

tro matemático que trabalhou extensivamente na geometria hiperbólica foi Karl Friedrich Gauss (1777-1855), porém este não publicou os resultados obtidos.

Também é importante mencionar o extraordinário trabalho do matemático alemão Georg Bernhard Riemann (1826-1866). Baseado nos trabalhos de Gauss, Riemann propunha uma geometria fundada no conceito de curvatura. As geometrias euclidiana, hiperbólica e elíptica, onde a curvatura é constante, passaram a ser descritas depois como casos especiais da geometria de Riemann. Foi a geometria riemanniana que deu suporte à Teoria Geral da Relatividade, proposta por Albert Einstein (1879-1955) em 1917. O trabalho de Riemann só foi publicado em 1868. Neste mesmo ano, Beltrami mostrou que em uma superfície de curvatura constante negativa, tomando um conceito apropriado de retas (geodésicas), todos os resultados obtidos por Lobachevsky eram localmente verificados. Modelos para a geometria hiperbólica são dados por superfícies com curvatura constante negativa, enquanto para a geometria euclidiana são dados por superfícies com curvatura constante zero. Uma idéia local para a geometria hiperbólica pode ser dada pelo *parabolóide hiperbólico* (sela). Porém, este modelo não é plenamente adequado, pois esta superfície tem curvatura variável.

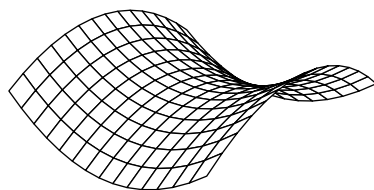


Figura 2: Parabolóide hiperbólico

Um outro modelo local para a geometria hiperbólica é dado pela *pseudoesfera*. Este modelo também não é totalmente adequado, pois possui pontos singulares que impedem o prolongamento das geodésicas, o que contradiz o Postulado 2 estabelecido por Euclides.



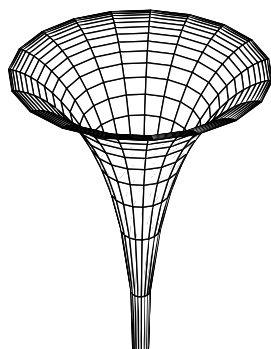


Figura 3: Pseudoesfera

O fenômeno dos pontos singulares ocorre em todas as superfícies de curvatura constante negativa, como demonstrou David Hilbert (1862-1943). Dessa forma, não é possível obter um modelo concreto (superfície do espaço usual) para o que é denominado plano hiperbólico. O modelo, neste caso, é desenvolvido de forma abstrata, pela introdução de diferentes noções de distância e ângulo. Um modelo mais satisfatório para a geometria hiperbólica foi obtido pelo matemático alemão Felix Klein (1849-1925) e está relacionado com a geometria projetiva. O francês Henri Poincaré (1854-1912), por sua vez, introduziu modelos locais abstratos para a geometria hiperbólica através de uma nova noção de distância para pontos do plano. Esses modelos foram utilizados por ele no estudo de variáveis complexas. Um destes modelos é conhecido como *modelo do semiplano superior* (ou modelo do *semiplano de Poincaré*) e será o modelo que adotaremos para o estudo das isometrias do plano hiperbólico.

# Capítulo 1

## Modelo do Semiplano

### 1.1 Retas Hiperbólicas

Como foi observado na Introdução, uma das possíveis maneiras de se estudar a geometria hiperbólica é através da adoção de um modelo. O modelo que vamos considerar aqui para o plano hiperbólico  $\mathbb{H}$  é o modelo do *semiplano superior* definido por

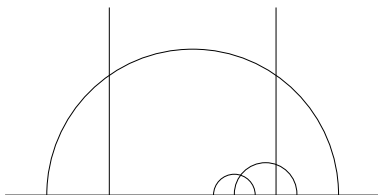
$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}.$$

As noções de pontos e de ângulos são as mesmas do plano complexo  $\mathbb{C}$ . Faremos agora a definição de reta hiperbólica em  $\mathbb{H}$ . Observamos que esta definição é feita de modo a tornar as propriedades de retas compatíveis com os axiomas da geometria hiperbólica.

**Definição 1.** *Existem dois diferentes tipos de reta hiperbólica, ambas definidas em termos de objetos euclidianos em  $\mathbb{C}$ . Uma é a intersecção de  $\mathbb{H}$  com a reta euclidiana em  $\mathbb{C}$  perpendicular ao eixo real  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{C}$ . A outra é a intersecção de  $\mathbb{H}$  com o círculo euclidiano centrado no eixo real  $\mathbb{R}$ .*

Veremos a seguir algumas propriedades de retas hiperbólicas.

**Proposição 1.** *Para cada par  $p$  e  $q$  de pontos distintos em  $\mathbb{H}$ , existe uma única reta hiperbólica  $\rho$  em  $\mathbb{H}$  através de  $p$  e  $q$ .*

Figura 1.1: Retas hiperbólicas em  $\mathbb{H}$ 

*Demonstração.* Existem dois casos a considerar. Suponhamos inicialmente que  $\operatorname{Re}(p) = \operatorname{Re}(q)$ . Então a reta euclidiana  $R$  dada pela equação  $R = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(p)\}$  é perpendicular ao eixo real e passa através de  $p$  e  $q$ . Portanto, a reta hiperbólica  $\rho = \mathbb{H} \cap R$  é uma reta hiperbólica entre  $p$  e  $q$ .

Suponha agora que  $\operatorname{Re}(p) \neq \operatorname{Re}(q)$ . Como neste caso não é possível obter uma reta euclidiana através de  $p$  e  $q$ , precisamos construir um círculo euclidiano centrado no eixo real  $\mathbb{R}$  passando através de  $p$  e  $q$ .

Seja  $R_{pq}$  o segmento de reta euclidiano através de  $p$  e  $q$  e seja  $K$  a mediatriz deste segmento. Como os pontos  $p$  e  $q$  têm partes reais distintas, a reta euclidiana  $K$  não é paralela a  $\mathbb{R}$ . Logo,  $K$  e  $\mathbb{R}$  interceptam-se num único ponto  $c$ .

Seja  $A$  o círculo euclidiano de centro  $c$  e raio  $|c - p|$ ; logo, o ponto  $p$  pertence a  $A$ . Como  $c \in K$ , temos que  $|c - p| = |c - q|$ , e portanto  $q$  também pertence a  $A$ . A intersecção  $\rho = \mathbb{H} \cap A$  é então uma reta hiperbólica através de  $p$  e  $q$ .

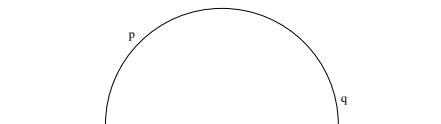


Figura 1.2: Reta hiperbólica

A unicidade da reta hiperbólica através de  $p$  e  $q$  vem da unicidade da reta e do círculo euclidianos utilizados na demonstração.  $\square$

Observamos que se  $\rho$  é uma reta hiperbólica através de  $p$  e  $q$  e  $p$  e  $q$  possuem partes reais iguais, então podemos descrever  $\rho$  explicitamente como  $\rho = R \cap \mathbb{H}$ , onde  $R$  é a reta euclidiana dada por  $R = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(p)\}$ . No caso em que  $\operatorname{Re}(p) \neq \operatorname{Re}(q)$  temos que  $\rho$  é um círculo através de  $p$  e  $q$  e, analisando a demonstração da Proposição 1, é possível obter uma expressão explícita para o centro e o raio deste círculo.

Como no caso euclidiano, dizemos que duas retas hiperbólicas são *paralelas* se elas são disjuntas.

Na geometria euclidiana, temos que retas paralelas existem e, dados uma reta  $R$  e um ponto  $p$  não pertencente a  $R$ , existe uma única reta  $T$  paralela a  $R$  através de  $p$ . Como foi discutido na Introdução este é o *postulado das paralelas* e sua negação leva a diferentes tipos de geometria. Com o modelo de geometria hiperbólica que estamos trabalhando, junto com a definição de reta adotada, obtemos o seguinte teorema.

**Teorema 1.** *Seja  $\rho$  uma reta hiperbólica em  $\mathbb{H}$  e seja  $p$  um ponto em  $\mathbb{H}$  não pertencente a  $\rho$ . Então, existem infinitas retas hiperbólicas através de  $p$  que são paralelas a  $\rho$ .*

*Demonstração.* Vamos inicialmente considerar o caso em que  $\rho$  está contida numa reta euclidiana  $R$ . Como  $p$  não pertence a  $R$ , existe uma reta euclidiana  $K$  através de  $p$  e paralela a  $R$ . Como  $R$  é perpendicular a  $\mathbb{R}$ , temos que  $K$  também é perpendicular a  $\mathbb{R}$ . Logo, uma reta hiperbólica em  $\mathbb{H}$  através de  $p$  e paralela a  $\rho$  é  $\mathbb{H} \cap K$ .

Para construir outra reta hiperbólica através de  $p$  e paralela a  $\rho$ , tome um ponto  $x$  sobre  $\mathbb{R}$  entre  $K$  e  $L$  e seja  $A$  o círculo euclidiano centrado em  $\mathbb{R}$  que passa através de  $x$  e  $p$ . Sabemos que tal círculo euclidiano existe, pois  $\operatorname{Re}(x) \neq \operatorname{Re}(p)$ .

Por construção,  $A$  é disjunto de  $R$ , e portanto a reta hiperbólica  $\mathbb{H} \cap A$  é disjunta de  $\rho$ . Como existem infinitos pontos em  $\mathbb{R}$  entre  $K$  e  $L$ , esta construção nos dá infinitas retas hiperbólicas através de  $p$  e paralelas a  $\rho$  (ver figura 1.3).

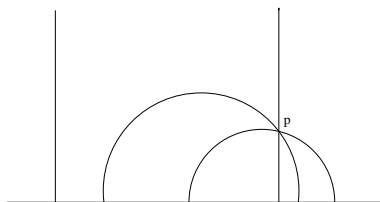


Figura 1.3: Retas hiperbólicas através de  $p$  e paralelas a  $\rho$

Vamos supor agora que  $\rho$  está contida num círculo euclidiano  $A$ . Seja  $D$  o círculo euclidiano que é concêntrico a  $A$  passando através de  $P$ . Como círculos concêntricos são disjuntos, uma reta hiperbólica através de  $p$  e paralela a  $\rho$  é  $\mathbb{H} \cap D$ .

Para construir uma segunda reta hiperbólica através de  $p$  e paralela a  $\rho$ , tome qualquer ponto  $x$  em  $\mathbb{R}$  entre  $A$  e  $D$ . Seja  $E$  o círculo euclidiano centrado em  $\mathbb{R}$  passando por  $x$  e  $p$ . Novamente por construção,  $E$  e  $A$  são disjuntos, e portanto  $\mathbb{H} \cap E$  é uma reta hiperbólica através de  $p$  e paralela a  $\rho$ .

De modo análogo ao caso anterior, temos que, como existem infinitos pontos em  $\mathbb{R}$  entre  $A$  e  $D$ , existem infinitas retas hiperbólicas através de  $p$  e paralelas a  $\rho$  (ver figura 1.4).

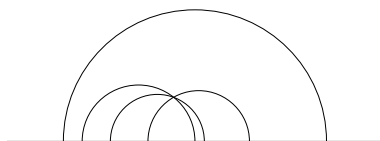


Figura 1.4: Retas hiperbólicas através de  $p$  e paralelas a  $\rho$

□

## 1.2 A esfera de Riemann

Com o objetivo de estudar as transformações que levam retas hiperbólicas em retas hiperbólicas precisamos de uma maneira de unificar

os dois tipos de retas hiperbólicas, ou seja, aquelas que estão contidas em retas euclidianas e aquelas que estão contidas em círculos euclidianos. Para isto vamos considerar a *projeção estereográfica* que é definida como segue.

Seja  $\mathbb{S}^1$  um círculo unitário em  $\mathbb{C}$ , e considere a função

$$\xi : \mathbb{S}^1 - \{i\} \rightarrow \mathbb{R}$$

que associa a cada ponto  $z \in \mathbb{S}^1 - \{i\}$  o ponto  $\xi(z) = \mathbb{R} \cap K_z$ , onde  $K_z$  é a reta através de  $i$  e  $z$ . Observe que esta função está bem definida, pois  $K_z$  e  $\mathbb{R}$  interceptam-se num único ponto.

A função acima é conhecida como *projeção estereográfica*.

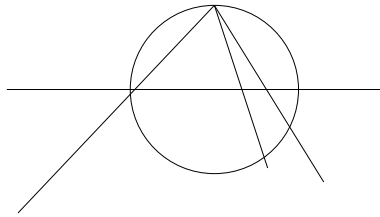


Figura 1.5: Projeção estereográfica

Temos que, em termos das coordenadas cartesianas usuais do plano o coeficiente angular da reta  $K_z$  é dado por

$$m = \frac{\operatorname{Im}(z) - 1}{\operatorname{Re}(z)}.$$

Logo, a equação de  $K_z$  é dada por

$$y - 1 = \frac{\operatorname{Im}(z) - 1}{\operatorname{Re}(z)}x,$$

e assim a intersecção de  $K_z$  com  $\mathbb{R}$  é

$$\xi(z) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{1 - \operatorname{Im}(z)}.$$

É importante notar que se  $z$  e  $w$  são pontos distintos em  $\mathbb{S}^1 - \{i\}$ , então as retas  $K_z$  e  $K_w$  são distintas e, portanto  $\xi(z) \neq \xi(w)$ . Logo, a função  $\xi$  é uma bijeção entre  $\mathbb{S}^1 - \{i\}$  e  $\mathbb{R}$ .

Como obtemos uma reta euclidiana removendo um ponto de  $\mathbb{S}^1$ , podemos pensar no caminho inverso, isto é, podemos acrescentar um ponto a uma reta para obtermos um círculo. Este ponto será denotado por  $\infty$ . O conjunto de pontos

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

é classicamente conhecido por *esfera de Riemann*. Este espaço contém  $\mathbb{H}$ , e círculos e retas estão unificados, pois imaginamos um círculo como uma reta unida com  $\infty$ .

Para explorar as propriedades básicas deste espaço é necessário estudar alguns conceitos topológicos. Um conjunto  $X$  em  $\mathbb{C}$  é *aberto* se para cada  $z \in X$ , existe algum  $\epsilon > 0$  de modo que  $U_\epsilon(z) \subset X$ , onde

$$U_\epsilon(z) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < \epsilon\}.$$

Com o intuito de estender esta definição para  $\overline{\mathbb{C}}$  precisamos, neste caso, definir  $U_\epsilon(z)$ . Se  $z \in \mathbb{C}$ , então

$$U_\epsilon(z) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < \epsilon\}.$$

Definimos  $U_\epsilon(\infty)$  por

$$U_\epsilon(\infty) = \{w \in \mathbb{C} : |w| > \epsilon\} \cup \{\infty\}.$$

**Definição 2.** Dizemos que um conjunto  $X$  em  $\overline{\mathbb{C}}$  é aberto se, para cada ponto  $x \in X$ , existe algum  $\epsilon > 0$  tal que  $U_\epsilon(x) \subset X$ .

Um consequência importante desta definição é que se um determinado conjunto  $D$  é aberto em  $\mathbb{C}$ , então ele também é aberto em  $\overline{\mathbb{C}}$ . Outra importante consequência é dada pela seguinte proposição.

**Proposição 2.**  $\mathbb{H}$  é aberto em  $\overline{\mathbb{C}}$ .

*Demonstração.* Seja  $z \in \mathbb{H}$ . A distância euclidiana de  $z$  a  $\mathbb{R}$  é  $\text{Im}(z)$ . Logo  $U_{\text{Im}(z)}(z)$  está contida em  $\mathbb{H}$ .  $\square$

**Definição 3.** Um conjunto  $X$  em  $\overline{\mathbb{C}}$  é fechado se seu complementar  $\overline{\mathbb{C}} - X$  é aberto.

Por exemplo, o círculo unitário  $\mathbb{S}^1$  é fechado em  $\overline{\mathbb{C}}$ , pois seu complementar é a união

$$\overline{\mathbb{C}} - \mathbb{S}^1 = U_1(0) \cup U_1(\infty).$$

Podemos agora definir convergência em  $\overline{\mathbb{C}}$ . Isto é feito de modo análogo ao que é feito em  $\mathbb{C}$ . Dizemos que uma sequência  $\{z_n\}$  de pontos em  $\overline{\mathbb{C}}$  converge a um ponto  $z \in \overline{\mathbb{C}}$  se para cada  $\epsilon > 0$  existe  $N$  de modo que  $z_n \in U_\epsilon(z)$  para todo  $n > N$ .

Seja  $X$  um subconjunto de  $\overline{\mathbb{C}}$ . Definimos o fecho  $\overline{X}$  de  $X$  em  $\overline{\mathbb{C}}$  por

$$\overline{X} = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : U_\epsilon(z) \cap X \neq \emptyset, \forall \epsilon > 0\}.$$

A próxima definição nos permitirá unificar retas e círculos de  $\mathbb{C}$ .

**Definição 4.** Um círculo em  $\overline{\mathbb{C}}$  é um círculo euclidiano em  $\mathbb{C}$  ou a união de uma reta euclidiana em  $\mathbb{C}$  com  $\{\infty\}$ .

Se  $L$  é uma reta euclidiana em  $\mathbb{C}$ , denotaremos por  $\overline{L} = L \cup \{\infty\}$  o círculo em  $\overline{\mathbb{C}}$  contendo  $L$ . Por exemplo, o eixo real estendido  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  é o círculo em  $\overline{\mathbb{C}}$  contendo o eixo real  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{C}$ .

Vamos agora definir continuidade em  $\overline{\mathbb{C}}$ .

**Definição 5.** Uma função  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  é contínua em  $z$  se dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $w \in U_\delta(z)$  implica que  $f(w) \in U_\epsilon(f(z))$ . Uma função  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  é contínua se é contínua para todo  $z \in \overline{\mathbb{C}}$ .

Com esta definição, podemos demonstrar muitos resultados de modo análogo ao que fazemos para funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ . Porém, alguns casos são um pouco diferentes devido à presença do  $\infty$ .

Para o estudo das transformações de Möbius que faremos no Capítulo 2, precisaremos estudar um conjunto importante de funções em  $\overline{\mathbb{C}}$ , que definiremos a seguir.

**Definição 6.** Uma função  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  é um homeomorfismo se  $f$  é uma bijeção e se  $f$  e  $f^{-1}$  são contínuas.

Usaremos a notação  $\text{Homeo}(\overline{\mathbb{C}})$  para designar o conjunto dos homeomorfismos de  $\overline{\mathbb{C}}$ .



Temos, por definição, que o inverso de um homeomorfismo é um homeomorfismo. Além disto, a composição de dois homeomorfismos é também um homeomorfismo. Como a aplicação identidade  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  dada por  $f(z) = z$  também é um homeomorfismo, segue que  $\text{Homeo}(\overline{\mathbb{C}})$  é um grupo sob a operação de composição. A seguir obteremos importantes funções dentro deste grupo.

**Proposição 3.** *A função  $J : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  definida por*

$$J(z) = \frac{1}{z} \text{ para } z \in \mathbb{C} - \{0\}, \quad J(0) = \infty, \text{ and } J(\infty) = 0$$

*é contínua em  $\overline{\mathbb{C}}$ .*

*Demonstração.* Vamos mostrar inicialmente que  $J$  é contínua em 0. Seja  $\epsilon > 0$ . Como  $J(0) = \infty$ , precisamos mostrar que existe algum  $\delta > 0$  tal que

$$J(U_\delta(0)) \subset U_\epsilon(J(0)) = U_\epsilon(\infty).$$

Tome  $\delta = \frac{1}{\epsilon}$ . Para cada  $w \in U_\delta(0) - \{0\}$  temos

$$|J(w)| = \frac{1}{|w|} > \frac{1}{\delta} = \epsilon,$$

o que significa que  $J(w) \in U_\epsilon(\infty)$ . Como  $J(0) = \infty \in U_\epsilon(\infty)$  por definição, temos que  $J$  é contínua em 0.

Para provar que  $J$  é contínua em  $\infty$  procedemos de maneira análoga ao caso anterior. Dado  $\epsilon > 0$ , tomamos  $\delta = \frac{1}{\epsilon}$ . Então, para cada  $w \in U_\delta(\infty) - \{\infty\}$ , temos que

$$|J(w)| = \frac{1}{|w|} < \frac{1}{\delta} = \epsilon,$$

e portanto  $J(w) \in U_\epsilon(0)$ . Como  $J(\infty) = 0 \in U_\epsilon(0)$ ,  $J$  é contínua em  $\infty$ .

Resta provar que  $J$  é contínua em  $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ . Considere, então,  $\epsilon > 0$ . Precisamos encontrar  $\delta$  tal que  $w \in U_\delta(z)$  implica que  $J(w) \in U_\epsilon(J(z))$ . Seja  $\epsilon' = \min(\epsilon, \frac{1}{2|z|})$ . Observe que  $U_{\epsilon'}(z)$  não contém 0.

Para qualquer  $\xi \in U_{\epsilon'}(J(z))$ , temos que

$$|\xi| < |J(z)| + \epsilon' = \frac{1}{|z|} + \epsilon'.$$

Como  $\epsilon' \leq \frac{1}{2|z|}$ , temos que

$$|\xi| < \frac{3}{2|z|}.$$

Fazendo  $\xi = \frac{1}{w}$ , obtemos que

$$\frac{1}{|w|} < \frac{3}{2|z|}, \text{ e portanto } \frac{1}{|zw|} < \frac{3}{2|z|^2}.$$

Tomando  $\delta = \frac{2}{3}\epsilon'|z|^2$ , temos para  $|z - w| < \delta$  que

$$|J(z) - J(w)| = \left| \frac{1}{z} - \frac{1}{w} \right| = \frac{|z - w|}{|zw|} < \frac{2}{3}\epsilon'|z|^2 \frac{3}{2|z|^2} = \epsilon'.$$

Como  $\epsilon' < \epsilon$ , temos que  $J$  é contínua em  $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ .  $\square$

**Corolário 1.** A função  $J : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  dada pela proposição anterior é um homeomorfismo de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

*Demonstração.* Observe que  $J \circ J(z) = z$  para todo  $z \in \overline{\mathbb{C}}$ . Para mostrar que  $J$  é injetiva, suponha que existam pontos  $z$  e  $w$  para os quais  $J(z) = J(w)$  e note que  $z = J(J(z)) = J(J(w)) = w$ . Para mostrar que  $J$  é sobrejetiva, observe que para todo  $z \in \overline{\mathbb{C}}$ , tem-se que  $z = J(J(z))$ .

Além disto, como  $J^{-1}(z) = J(z)$  para todo  $z \in \overline{\mathbb{C}}$ , temos da proposição anterior que  $J^{-1}$  é contínua.  $\square$

**Proposição 4.** Seja  $g(z)$  uma função polinomial. A função  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , definida por

$$f(z) = g(z) \text{ para } z \in \mathbb{C} \text{ e } f(\infty) = \infty,$$

é contínua.

*Demonstração.* Usaremos o fato que  $f$  é contínua para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Resta então provarmos que  $f$  é contínua em  $\infty$ . Para isto precisamos provar que dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  de modo que se  $z \in U_\delta(\infty)$  então  $f(z) \in U_\epsilon(\infty)$ .

Temos que

$$g(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0,$$

para  $n \geq 1$ , e  $a_n \neq 0$ . Pela desigualdade triangular, temos que

$$|g(z)| \geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0|.$$

Seja  $A = \max\{|a_{n-1}|, \dots, |a_0|\}$ . Então

$$|a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \leq A(|z^{n-1}| + \cdots + |z| + 1) \leq nA|z|^{n-1}$$

para  $|z| \geq 1$ .

Portanto, dado  $\epsilon > 0$ , tome  $\delta > 0$  de modo que  $\delta > 1$  e  $|a_n|\delta^n - nA\delta^{n-1} > \epsilon$ . Então, para  $|z| > \delta$  temos que

$$\begin{aligned} |g(z)| &\geq |a_n||z|^n - |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0| \\ &\geq |a_n||z|^n - nA|z|^{n-1} \\ &\geq \delta^{n-1}(|a_n|\delta - nA) > \epsilon. \end{aligned}$$

□

**Corolário 2.** *Seja  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  como na proposição anterior. Então  $f$  é um homeomorfismo de  $\overline{\mathbb{C}}$  se e somente se o grau de  $g$  é um.*

*Demonstração.* Vamos mostrar que se  $d = \text{grau}(g) \geq 2$ , então  $f$  não é uma bijeção. Pelo teorema fundamental da álgebra, temos que existe um ponto  $c$  de  $\mathbb{C}$  de modo que a equação  $g(z) = c$  possui duas soluções distintas. Se  $g(z)$  não se fatora da forma  $g(z) = (z - a)^d$ , podemos tomar  $c = 0$ .

Se  $g(z) = (z - a)^d$ , então tomamos  $c = 1$  e as soluções de  $g(z) = 1$  são dadas por

$$\left\{ z = a + \exp\left(\frac{2\pi}{d}i\right) \mid 0 \leq k \leq d \right\}.$$

Se  $d = \text{grau}(g) = 0$ , então  $f$  é uma função constante e, portanto, não pode ser bijetiva.

Se  $d = \text{grau}(g) = 1$ , então  $g(z) = az + b$ ,  $a \neq 0$ . Pela proposição anterior,  $f$  é contínua. Para mostrarmos que  $f$  é bijetiva e que  $f^{-1}$  é contínua, escrevemos uma expressão explícita para  $f^{-1}$ .

$$f^{-1}(z) = \frac{1}{a}(z - b) \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \text{ e } f^{-1}(\infty) = \infty.$$

□

### 1.3 A Fronteira no Infinito de $\mathbb{H}$

Neste seção, faremos algumas considerações sobre o que chamaremos de *fronteira no infinito de  $\mathbb{H}$*  e obteremos dois tipos de retas paralelas em  $\mathbb{H}$ .

Como vimos anteriormente, um círculo em  $\overline{\mathbb{C}}$  é um círculo euclidiano em  $\mathbb{C}$  ou a união de uma reta euclidiana em  $\mathbb{C}$  com  $\{\infty\}$ .

O complementar de um círculo em  $\overline{\mathbb{C}}$  tem duas componentes. Se o círculo for o  $\mathbb{S}^1$ , as componentes de  $\overline{\mathbb{C}} - \mathbb{S}^1$  são o disco euclidiano  $\mathbb{D} = U_1(0)$  e o disco  $U_1(\infty)$ . Se o círculo for o *eixo real estendido*  $\overline{\mathbb{R}}$ , as componentes de  $\overline{\mathbb{C}} - \overline{\mathbb{R}}$  são o semiplano superior  $\mathbb{H}$  e o semiplano inferior  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) < 0\}$ .

**Definição 7.** *Um disco em  $\overline{\mathbb{C}}$  será definido como uma das componentes do complementar em  $\overline{\mathbb{C}}$  de um círculo em  $\overline{\mathbb{C}}$ .*

Note que todo disco em  $\overline{\mathbb{C}}$  determina um único círculo em  $\overline{\mathbb{C}}$ , e que todo círculo em  $\overline{\mathbb{C}}$  determina dois discos disjuntos em  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Centralizaremos agora nossa atenção em  $\mathbb{H}$  e no círculo de  $\overline{\mathbb{C}}$  que o determina,  $\overline{\mathbb{R}}$ .  $\overline{\mathbb{R}}$  será denominado *fronteira no infinito de  $\mathbb{H}$*  e seus pontos serão chamados de *pontos no infinito de  $\mathbb{H}$* . A razão para esta nomenclatura ficará mais clara quando falarmos de distância em  $\mathbb{H}$ .

Se  $X$  é um conjunto qualquer de  $\mathbb{H}$ , chamaremos de *fronteira no infinito de  $X$*  a intersecção  $\overline{X} \cap \overline{\mathbb{R}}$ , onde  $\overline{X}$  é o fecho de  $X$  em  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Considere agora uma reta hiperbólica  $\rho$  em  $\mathbb{H}$  e suponha que  $\rho$  esteja contida no círculo  $A$  em  $\overline{\mathbb{C}}$ . Então, a *fronteira no infinito de  $\rho$*  é o par de pontos contidos na intersecção  $A \cap \overline{\mathbb{R}}$ .

Considere agora duas retas hiperbólicas  $\rho_1$  e  $\rho_2$  paralelas em  $\mathbb{H}$ . Sejam  $C_1$  o círculo em  $\overline{\mathbb{C}}$  contendo  $\rho_1$  e  $C_2$  o círculo em  $\overline{\mathbb{C}}$  contendo  $\rho_2$ . Observe que os círculos  $C_1$  e  $C_2$  podem ser disjuntos ou podem se interceptar num ponto  $x \in \overline{\mathbb{R}}$ . No primeiro caso dizemos que as retas  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são *ultraparalelas*.

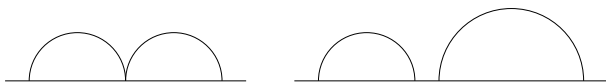


Figura 1.6: Duas possibilidades para retas hiperbólicas paralelas

Vimos na Proposição 1 que dois pontos em  $\mathbb{H}$  determinam uma única reta hiperbólica em  $\mathbb{H}$ . Podemos obter um resultado semelhante caso um dos pontos esteja no infinito.

**Proposição 5.** *Seja  $p$  um ponto em  $\mathbb{H}$  e  $q$  um ponto de  $\overline{\mathbb{R}}$ . Então existe uma única reta hiperbólica em  $\mathbb{H}$  determinada por  $p$  e  $q$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $q = \infty$ . De todas as retas hiperbólicas através de  $p$  existe exatamente uma que contém  $q$  em sua fronteira no infinito, que é a reta hiperbólica contida na reta euclidiana

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(p)\}.$$

A unicidade segue da observação de que nenhuma reta hiperbólica contida num círculo euclidiano contém  $\infty$  em sua fronteira no infinito.

Suponha agora que  $q \neq \infty$  e que  $\operatorname{Re}(p) = \operatorname{Re}(q)$ . Então, a reta hiperbólica contida na reta euclidiana

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(p)\}.$$

é a única reta hiperbólica através de  $p$  que contém  $q$  em sua fronteira no infinito.

Suponha agora que  $q \neq \infty$  e que  $\operatorname{Re}(p) \neq \operatorname{Re}(q)$ . Então, procedemos de maneira análoga ao que foi feito na Proposição 1, tomando-se a mediatriz do segmento determinado por  $p$  e  $q$  para encontrar o único círculo euclidiano centrado em  $\mathbb{R}$  passando por  $p$  e  $q$ . Tomando a intersecção deste círculo com  $\mathbb{H}$ , obtemos a única reta hiperbólica passando por  $p$  e  $q$ .  $\square$

## Capítulo 2

# O Grupo Geral de Möbius

Com o objetivo de estudar a geometria hiperbólica através da ação de um grupo de transformações que preserva, entre outras coisas, retas hiperbólicas, dedicaremos nosso estudo ao grupo das transformações de Möbius. Depois, faremos a composição das transformações de Möbius com a conjugação complexa, obtendo um grupo mais abrangente denominado *grupo geral de Möbius*. Finalmente restringiremos nossa atenção aos elementos deste grupo que preservam  $\mathbb{H}$ .

### 2.1 Transformações de Möbius

Como estamos interessados em determinar as transformações que levam retas hiperbólicas em retas hiperbólicas, e desde que toda reta hiperbólica está contida num círculo de  $\overline{\mathbb{C}}$ , determinaremos o grupo de homeomorfismos de  $\overline{\mathbb{C}}$  que leva círculos de  $\overline{\mathbb{C}}$  em círculos de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Denotaremos por  $\text{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}})$  o subconjunto do grupo  $\text{Homeo}(\overline{\mathbb{C}})$  que contém todos os homeomorfismos que levam círculos de  $\overline{\mathbb{C}}$  em círculos de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

O objetivo é iniciarmos com duas funções de  $\text{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}})$  e considerar todas as possíveis combinações lineares destas funções para chegarmos na definição de *transformações de Möbius*.

Vamos então considerar alguns homeomorfismos de  $\overline{\mathbb{C}}$  que estão em  $\text{Homeo}^{\mathbb{C}}(\overline{\mathbb{C}})$ . Usando a mesma notação do capítulo anterior, vamos associar à função  $g(z) = az + b$  em  $\mathbb{C}$  a função  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  dada por

$$f(z) = g(z) \text{ para } z \in \mathbb{C} \text{ e } f(\infty) = \infty.$$

Temos então o seguinte resultado.

**Proposição 6.** *A função  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  definida acima, com  $a, b, \in \mathbb{C}$  e  $a \neq 0$  é um elemento de  $\text{Homeo}^{\mathbb{C}}(\overline{\mathbb{C}})$ .*

Para a demonstração desta proposição precisaremos obter uma expressão para círculos de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

**Lema 1.** *Um círculo  $A$  de  $\overline{\mathbb{C}}$  pode ser visto como o conjunto das soluções de uma equação da forma*

$$\alpha z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0,$$

onde  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$  e  $\beta \in \mathbb{C}$ . Além disto,  $\alpha \neq 0$  se, e somente se,  $A$  é um círculo de  $\mathbb{C}$ .

*Demonstração.* Como um círculo de  $\overline{\mathbb{C}}$  é um círculo em  $\mathbb{C}$  ou uma reta em  $\mathbb{C}$  vamos inicialmente obter as expressões para as equações de retas e círculos em  $\mathbb{C}$ . Dado  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , podemos escrever

$$x = \text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ e } y = \text{Im}(z) = -\frac{i}{2}(z - \bar{z}).$$

Logo,

$$ax + by + c = a \frac{1}{2}(z + \bar{z}) + b \frac{-i}{2}(z - \bar{z}) + c = \frac{1}{2}(a - ib)z + \frac{1}{2}(a + ib)\bar{z} + c = 0$$

Chamando  $\frac{1}{2}(a - ib) = \beta$  e  $c = \gamma$ , temos que a equação acima fica

$$\beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0. \tag{2.1}$$

Dado um círculo  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ , tomando  $z_0 = h + ik$ , podemos reescrever a equação e obter

$$|z - z_0|^2 = z\bar{z} - \bar{z}_0 z - z_0 \bar{z} + |z_0|^2 = r^2.$$

Escrevendo  $-\bar{z}_0 = \beta$  e  $|z_0|^2 - r^2 = \gamma$ , a equação acima fica

$$z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0. \quad (2.2)$$

Combinando as equações 2.1 e 2.2 obtemos que um círculo  $A$  de  $\bar{\mathbb{C}}$  pode ser representado por uma equação da forma

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0, \quad (2.3)$$

onde  $\alpha \neq 0$  se e somente se  $A$  é um círculo de  $\mathbb{C}$ .  $\square$

Vamos agora fazer a demonstração da Proposição 6.

*Demonstração.* Começamos com o caso em que  $A$  é uma reta euclidiana em  $\mathbb{C}$ . Pelo lema anterior,  $A$  é uma solução da equação

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0\},$$

onde  $\beta \in \mathbb{C}$  e  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Vamos provar que se  $z$  satisfaz a equação acima, então  $w = az + b$  satisfaz uma equação semelhante. Como  $w = az + b$ , então  $z = \frac{1}{a}(w - b)$ . Substituindo isto na equação de  $A$ , obtemos

$$\begin{aligned} \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma &= \beta \frac{1}{a}(w - b) + \bar{\beta} \overline{\frac{1}{a}(w - b)} + \gamma \\ &= \frac{\beta}{a}w + \overline{\left(\frac{\beta}{a}\right)}\bar{w} - \frac{\beta}{a}b - \overline{\left(\frac{\beta}{a}b\right)} + \gamma = 0. \end{aligned}$$

Desde que  $\frac{\beta}{a}b + \overline{\left(\frac{\beta}{a}b\right)} = 2\operatorname{Re}\left(\frac{\beta}{a}b\right)$  é real, temos que  $w$  também satisfaz a equação de reta euclidiana. Logo,  $f$  leva retas euclidianas de  $\mathbb{C}$  em retas euclidianas de  $\mathbb{C}$ .

A demonstração no caso em que  $A$  é um círculo euclidiano é análoga. É feita substituindo-se  $z = \frac{1}{a}(w - b)$  na equação  $\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$ , o que resulta em

$$\frac{\alpha}{|a|^2} \left| w + \frac{\bar{\beta}a}{\alpha} - b \right|^2 + \gamma - \frac{|\beta|^2}{\alpha} = 0.$$

$\square$



Vimos no Corolário 6 que a função  $J : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  definida por

$$J(z) = \frac{1}{z} \text{ para } z \in \mathbb{C} - \{0\}, J(0) = \infty, \text{ and } J(\infty) = 0$$

é um homeomorfismo de  $\overline{\mathbb{C}}$ . Veremos agora que esta função também leva círculos de  $\overline{\mathbb{C}}$  em círculos de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

**Proposição 7.** *A função  $J : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  definida por*

$$J(z) = \frac{1}{z} \text{ para } z \in \mathbb{C} - \{0\}, J(0) = \infty, \text{ and } J(\infty) = 0$$

*é um elemento de  $\text{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}})$ .*

*Demonstração.* Seja  $A$  um círculo em  $\overline{\mathbb{C}}$  dado pela equação  $\alpha z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0$ , onde  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$  e  $\beta \in \mathbb{C}$ . Seja  $w = \frac{1}{z}$ . Logo,  $z = \frac{1}{w}$ . Substituindo isto na equação de  $A$ , temos

$$\alpha \frac{1}{w} \overline{\frac{1}{w}} + \beta \frac{1}{w} + \bar{\beta} + \overline{\frac{1}{w}} + \gamma = 0.$$

Multiplicando ambos os lados da equação por  $\bar{w}w$  temos que  $w$  satisfaz a equação

$$\alpha + \beta \bar{w} + \bar{\beta} w + \gamma w \bar{w} = 0.$$

Como  $\alpha$  e  $\gamma$  são reais e como os coeficientes de  $w$  e  $\bar{w}$  são conjugados, a equação acima representa um círculo em  $\overline{\mathbb{C}}$ .  $\square$

Observe que todas as possíveis composições dos dois tipos de homeomorfismos de  $\overline{\mathbb{C}}$  estudados anteriormente são do tipo  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Isto nos leva à seguinte definição.

**Definição 8.** *Uma transformação de Möbius é uma função  $m : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  da forma*

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

*onde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  e  $ad - bc \neq 0$ . Usaremos  $\text{Mob}^+$  para denotar o conjunto de todas as transformações de Möbius.*

**Observação.** É importante fazer uma análise sobre o comportamento destas aplicações com relação a  $\infty$ .

Definimos a  $m(\infty)$  por continuidade. Isto é,

$$m(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a}{c}.$$

Note que o valor  $m(\infty)$  é bem definido, desde que  $a$  e  $c$  não são simultaneamente nulos, devido à condição  $ad - bc \neq 0$  na definição. Além disto  $m(\infty) = \infty$  se e somente se  $c = 0$ .

Por outro lado, se  $z$  é tal que  $cz + d = 0$ , então podemos, por continuidade, dar um sentido a  $m(z)$ . Neste caso,  $c \neq 0$ , pois caso contrário, de  $cz + d = 0$  teríamos que  $d = 0$  e  $c$  e  $d$  não podem ser simultaneamente nulos. Então

$$cz + d = 0 \Rightarrow z = -\frac{d}{c} \neq 0.$$

Logo,

$$m(z) = \frac{a\frac{-d}{c} + b}{0} = \frac{-ad + bc}{0} = \frac{v}{0},$$

onde  $v \neq 0$ .

Então fazemos

$$\frac{v}{0} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{v}{w}.$$

Como  $v \neq 0$ ,  $\frac{v}{w} \neq 0$ , e considerando o módulo  $|\frac{v}{w}|$ , podemos concluir que  $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{v}{w} = \infty$  em  $\overline{\mathbb{C}}$ .

É importante notar que a composição de duas transformações de Möbius é também uma transformação de Möbius e que toda transformação de Möbius tem uma inversa, a saber, a inversa de  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  é  $m^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$ . Além disto, a aplicação identidade  $g(z) = z$  também é uma transformação de Möbius. Segue então que o conjunto das transformações de Möbius forma um grupo sob a operação de composição.

Veremos no próximo teorema que as transformações de Möbius são homeomorfismos de  $\overline{\mathbb{C}}$  que levam círculos em círculos.

**Teorema 2.**  $\text{Möb}^+ \subset \text{Homeo}^{\mathbb{C}}(\overline{\mathbb{C}})$ .

*Demonstração.* Vamos mostrar que se  $m$  é uma transformação de Möbius, então  $m$  é uma composição das aplicações  $f$  e  $J$  estudadas anteriormente. Como estas aplicações são homeomorfismos de  $\overline{\mathbb{C}}$  que levam círculos de  $\overline{\mathbb{C}}$  em círculos de  $\overline{\mathbb{C}}$ , então teremos que as aplicações de Möbius também terão estas propriedades.

Seja, então  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , com  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  e  $ad - bc \neq 0$ .

Se  $c = 0$ , então  $m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ .

Se  $c \neq 0$ , então  $m(z) = h(J(g(z)))$ , onde  $g(z) = c^2z + cd$  e  $h(z) = -(ad - bc)z + \frac{a}{c}$ .  $\square$

Vamos agora explicar a condição  $ad - bc \neq 0$  na definição de transformação de Möbius.

Para isto, considere a função  $p : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  dada por  $p(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , com  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  e  $ad - bc = 0$ . Vamos mostrar que  $p$  não é um homeomorfismo de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Observamos inicialmente que não pode ocorrer de todos os coeficientes de  $p$  serem zero, pois neste caso  $p$  seria indeterminada. Suponha, então,  $ad = bc$  e  $a \neq 0$ . Temos então que

$$p(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a(az+b)}{a(cz+d)} = \frac{a(az+b)}{acz+ad}.$$

Usando o fato que  $ad = bc$  na expressão do lado direito, obtemos

$$p(z) = \frac{a(az+b)}{acz+bc} = \frac{a(az+b)}{c(az+b)} = \frac{a}{c},$$

e portanto  $p$  é uma função constante. Logo,  $p$  não é um homeomorfismo de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Finalizaremos esta seção com um importante resultado sobre pontos fixos de uma transformação de Möbius. Dizemos que  $z \in \overline{\mathbb{C}}$  é um *ponto fixo* de uma transformação de Möbius  $m$  se  $m(z) = z$ .

**Teorema 3.** *Seja  $m(z)$  uma transformação de Möbius fixando três pontos distintos de  $\overline{\mathbb{C}}$ . Então,  $m$  é a transformação identidade.*

*Demonstração.* Suponha que  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  seja uma transformação de Möbius diferente da identidade. Vimos anteriormente que  $m(\infty) = \frac{a}{c}$  e, portanto,  $m(\infty) = \infty$  se e somente se  $c = 0$ .

Se  $c = 0$ ,  $m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ . Se  $\frac{a}{d} = 1$ , a equação  $m(z) = z$  não possui solução em  $\mathbb{C}$ . Se  $\frac{a}{d} \neq 1$ , então  $z = \frac{b}{d-a}$  é a única solução de  $m(z) = z$  em  $\mathbb{C}$ . Logo, se  $c = 0$  então  $m$  tem um ou dois pontos fixos.

Se  $c \neq 0$  então  $m(\infty) \neq \infty$ . Logo as soluções de  $m(z) = z$  estão em  $\mathbb{C}$  e são raízes da equação polinomial  $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ . Logo, neste caso  $m$  tem um ou dois pontos fixos.  $\square$

## 2.2 Propriedades Transitivas de Möb<sup>+</sup>

Uma das propriedades básicas satisfeitas pelo grupo das transformações de Möbius é que ele *atua transitivamente* de maneira única sobre o conjunto de triplas distintas de  $\overline{\mathbb{C}}$ . Isto significa que dadas duas triplas  $(z_1, z_2, z_3)$  e  $(w_1, w_2, w_3)$  de pontos distintos de  $\overline{\mathbb{C}}$ , existe uma única transformação de Möbius  $m$  tal que  $m(z_1) = w_1$ ,  $m(z_2) = w_2$  e  $m(z_3) = w_3$ .

Antes de mostrarmos este resultado, observamos que ele está inserido num contexto mais amplo de ação de um grupo sobre um conjunto que definiremos a seguir.

**Definição 9.** Dizemos que um grupo  $G$  atua num conjunto  $X$  se existe um homomorfismo de  $G$  no grupo das bijeções de  $X$ . Dizemos que  $G$  atua transitivamente sobre  $X$  se para cada par  $x$  e  $y$  de elementos de  $X$ , existe um elemento  $g$  de  $G$  satisfazendo  $g(x) = y$ .

O próximo lema nos dá um método mais fácil de saber se a ação de um grupo é transitiva.

**Lema 2.** Suponha que um grupo  $G$  atue sobre um conjunto  $X$ , e seja  $x_0$  um ponto de  $X$ . Suponha que para cada ponto  $y$  de  $X$  existe um elemento  $g$  de  $G$  tal que  $g(y) = x_0$ . Então,  $G$  atua transitivamente sobre  $X$ .

*Demonstração.* Dados dois pontos  $y$  e  $z$  de  $X$ , escolha elementos  $g_y$  e  $g_z$  de  $G$  de modo que  $g_y(y) = x_0 = g_z(z)$ . Então  $(g_z)^{-1} \circ g_y(y) = z$ .  $\square$

**Teorema 4.** Möb<sup>+</sup> atua transitivamente de maneira única no conjunto de triplas de pontos distintos de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

*Demonstração.* Vamos inicialmente provar a unicidade. Considere duas triplas  $(z_1, z_2, z_3)$  e  $(w_1, w_2, w_3)$  de pontos distintos de  $\overline{\mathbb{C}}$  e suponha que existam duas transformações de Möbius  $m$  e  $n$  satisfazendo  $n(z_1) = w_1 = m(z_1)$ ,  $n(z_2) = w_2 = m(z_2)$  e  $n(z_3) = w_3 = m(z_3)$ . Como  $m^{-1} \circ n$  fixa três pontos distintos de  $\overline{\mathbb{C}}$  temos pelo Teorema 3 que  $m^{-1} \circ n$  é a identidade. Logo,  $m = n$ .

Para demonstrar a existência de uma transformação de Möbius levando  $(z_1, z_2, z_3)$  em  $(w_1, w_2, w_3)$ , é suficiente mostrar que existe uma transformação de Möbius  $m$  satisfazendo  $m(z_1) = 0$ ,  $m(z_2) = 1$  e  $m(z_3) = \infty$ . Se pudermos construir uma tal transformação  $m$ , podemos também construir uma  $n$  satisfazendo  $n(w_1) = 0$ ,  $n(w_2) = 1$  e  $n(w_3) = \infty$  e, portanto,  $n^{-1} \circ m$  levará  $(z_1, z_2, z_3)$  em  $(w_1, w_2, w_3)$ .

Vamos considerar o caso em que os  $z_k$  estão em  $\mathbb{C}$ . Explicitamente, considere a função em  $\overline{\mathbb{C}}$  dada por

$$m(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{(z_2 - z_3)z - z_1(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_1)z - z_3(z_2 - z_1)}. \quad (2.4)$$

Através de um cálculo direto pode-se verificar que a função  $m$  acima satisfaz as condições  $m(z_1) = 0$ ,  $m(z_2) = 1$ ,  $m(z_3) = \infty$  e a condição da definição de transformação de Möbius.

No caso em que  $z_1 = \infty$ , a transformação de Möbius levando  $(\infty, z_2, z_3)$  em  $(0, 1, \infty)$  é dada por

$$m(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}.$$

□

**Observação.** A expressão  $m(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$  na equação 2.4 é conhecida como *razão cruzada* e é denotada por  $[z, z_1, z_2, z_3]$ . Um cálculo direto mostra que a razão cruzada é invariante por transformações de Möbius, isto é, se  $m$  é qualquer transformação de Möbius então  $[z, z_1, z_2, z_3] = [m(z), m(z_1), m(z_2), m(z_3)]$ .

Outro resultado envolvendo a ação de  $\text{Möb}^+$  sobre conjuntos de  $\overline{\mathbb{C}}$  é o seguinte.

**Teorema 5.** *O grupo das transformações de Möbius atua transitivamente sobre o conjunto de círculos de  $\overline{\mathbb{C}}$ .*

*Demonstração.* Para demonstrar o teorema devemos observar que uma tripla de pontos distintos  $(z_1, z_2, z_3)$  de  $\overline{\mathbb{C}}$  determina um único círculo de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

De fato, se todos os  $z_k$  estão em  $\mathbb{C}$  e não são colineares, existe um único círculo euclidiano através destes pontos. Se eles são colineares, existe uma única reta euclidiana através deste pontos. Se um dos  $z_k$  é  $\infty$  existe uma única reta euclidiana passando pelos outros dois pontos.

Então, sejam  $A$  e  $B$  dois círculos distintos de  $\overline{\mathbb{C}}$ . Escolha uma tripla de pontos distintos em  $A$  e uma tripla de pontos distintos em  $B$ , e seja  $m$  a transformação de Möbius levando a tripla de  $A$  na tripla de  $B$ . Como  $m(A)$  e  $B$  são dois círculos em  $\overline{\mathbb{C}}$  que passam pela mesma tripla, então  $m(A) = B$ .  $\square$

Observamos que como um círculo de  $\overline{\mathbb{C}}$  não determina uma única tripla de pontos, Möb<sup>+</sup> atua transitivamente nos círculos de  $\overline{\mathbb{C}}$ , porém não de maneira única.

Vamos agora analisar a ação do grupo de Möbius sobre o conjunto de discos de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

**Teorema 6.** *O grupo das transformações de Möbius atua transitivamente sobre o conjunto de discos em  $\overline{\mathbb{C}}$ .*

*Demonstração.* Sejam  $D$  e  $E$  dois discos em  $\overline{\mathbb{C}}$  e sejam  $C_D$  e  $C_E$  os respectivos círculos. Do teorema anterior sabemos que existe uma transformação de Möbius  $m$  tal que  $m(C_D) = C_E$ . Logo,  $m(D)$  é um disco determinado por  $C_E$ . Se este disco for  $E$ , o resultado está provado. Agora, se  $m(D)$  for o disco complementar a  $E$ , precisamos de uma transformação de Möbius que leve este disco em  $E$ , ou seja uma transformação de Möbius que troque os dois discos determinados por  $C_E$ .

Para isto observe que a transformação de Möbius  $J(z) = \frac{1}{z}$  tem a propriedade de levar  $\overline{\mathbb{R}}$  em  $\overline{\mathbb{R}}$  (pois  $J(0) = \infty$ ,  $J(\infty) = 0$  e  $J(1) = 1$ ). Como  $J(i) = -i$ , esta aplicação troca os dois discos determinados por  $\overline{\mathbb{R}}$ . Considere agora um círculo qualquer  $A$  em  $\overline{\mathbb{C}}$  e seja  $n$  uma transformação de Möbius satisfazendo  $n(A) = \overline{\mathbb{R}}$ . Então a transformação  $n^{-1} \circ J \circ n$  leva  $A$  nele mesmo e troca os dois discos determinados por  $A$ .  $\square$

## 2.3 Classificação das Transformações de Möbius

Nosso objetivo agora é conjugar uma dada transformação de Möbius numa forma padrão e então classificar estas formas padrões. Isto é feito estudando-se a quantidade de pontos fixos de uma transformação de Möbius. A próxima definição tornará preciso o conceito conjugação.

**Definição 10.** Dizemos que duas transformações de Möbius  $m_1$  e  $m_2$  são conjugadas se existe alguma transformação de Möbius  $p$  tal que  $m_2 = p \circ m_1 \circ p^{-1}$ .

Geometricamente, se  $m_1$  e  $m_2$  são conjugadas por  $p$ , então o efeito de  $m_1$  sobre  $\overline{\mathbb{C}}$  é o mesmo de  $m_2$  sobre  $p(\overline{\mathbb{C}}) = \overline{\mathbb{C}}$ . Além disto  $m_1$  e  $m_2$  têm o mesmo número de pontos fixos. Isto decorre do fato que se  $m_1$  fixa um ponto  $x$  de  $\overline{\mathbb{C}}$ , então  $m_2$  fixa  $p(x)$ . Por outro lado se  $m_2$  fixa um ponto  $y$  pode-se mostrar que  $m_1 = p^{-1} \circ m_2 \circ p$  fixa  $p^{-1}(y)$ .

Vamos agora trabalhar com uma transformação de Möbius  $m$  diferente da identidade. Suponha inicialmente que  $m$  tenha somente um ponto fixo  $x$  em  $\overline{\mathbb{C}}$ . Seja  $y$  qualquer ponto em  $\overline{\mathbb{C}} - \{x\}$  e observe que  $(x, y, m(y))$  é uma tripla de pontos distintos de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Seja  $p$  a transformação de Möbius levando a tripla  $(x, y, m(y))$  na tripla  $(\infty, 0, 1)$ , e considere a composição  $p \circ m \circ p^{-1}$ .

Pela construção de  $p$ , temos que  $p \circ m \circ p^{-1}(\infty) = \infty$ . Como  $p \circ m \circ p^{-1}$  fixa  $\infty$ , podemos escrever esta aplicação pondo  $p \circ m \circ p^{-1} = az + b$  com  $a \neq 0$ . Como esta aplicação fixa somente  $\infty$ , não existe solução em  $\mathbb{C}$  para a equação  $p \circ m \circ p^{-1} = z$ , e portanto  $a$  deve ser igual a 1.

Além disto, como  $p \circ m \circ p^{-1}(0) = p \circ m(y) = 1$  vemos que  $b = 1$ . Logo,  $p \circ m \circ p^{-1}(z) = z + 1$ . Com isto temos que qualquer transformação de Möbius com somente um ponto fixo é conjugada por uma transformação de Möbius a  $n(z) = z + 1$ . Neste caso dizemos que  $m$  é *parabólica* e sua *forma padrão* é  $z + 1$ .

Suponha agora que  $m$  tenha dois pontos fixos  $x$  e  $y$ . Seja  $q$  uma transformação de Möbius satisfazendo  $q(x) = 0$  e  $q(y) = \infty$ , e considere a composição  $q \circ m \circ q^{-1}$ .

Então  $q \circ m \circ q^{-1}(\infty) = \infty$ ,  $q \circ m \circ q^{-1}(0) = 0$  e podemos escrever  $q \circ m \circ q^{-1} = az$ , para algum  $a \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ . Dizemos neste caso que  $a$  é um *múltiplo* de  $m$ .

Se o múltiplo de  $m$  satisfaz  $|a| = 1$ , então podemos escrever  $a = e^{2i\varphi}$ , para algum  $\varphi$  em  $(0, \pi)$ , e  $q \circ m \circ q^{-1}(z) = e^{2i\varphi}z$  é uma rotação ao redor da origem de um ângulo de  $2\varphi$ . Dizemos neste caso que  $m$  é *elíptica*, e  $e^{2i\varphi}z$  é sua *forma padrão*.

Se, por outro lado,  $|a| \neq 1$ , então podemos escrever  $a = \lambda^2 e^{2i\varphi}$  para algum número real  $\lambda \neq 1$  e algum  $\varphi$  em  $[0, \pi)$ , de modo que  $q \circ m \circ q^{-1} = \lambda^2 e^{2i\varphi}z$  é a composição de uma dilatação por  $\lambda^2$  (uma expansão se  $\lambda^2 > 1$  ou uma contração se  $\lambda^2 < 1$ ) e uma rotação ao redor da origem de um ângulo de  $2\varphi$ . Dizemos neste caso que  $m$  é *loxodrômica* e sua *forma padrão* é  $\lambda^2 e^{2i\varphi}z$ .

## 2.4 Transformações de Möbius como Matrizes

Começamos associando a toda transformação de Möbius  $m$  uma matriz  $2 \times 2$ ,  $[m]$ .

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \longleftrightarrow [m] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Como os coeficientes da transformação de Möbius não são únicos, a matriz correspondente também não é única: se  $k$  é uma constante não nula, então a matriz correspondente  $k[m]$  corresponde à mesma transformação de Möbius que a matriz  $[m]$ . Entretanto, se  $[m]$  for normalizada impondo  $ad - bc = 1$ , então existem duas possíveis matrizes associadas a uma dada transformação de Möbius: se uma é  $[m]$ , então a outra é  $-[m]$ , o que significa que a matriz é unicamente determinada a menos de sinal.

A correspondência entre matrizes e transformações de Möbius pode ser feita de uma maneira explícita através do seguinte homomorfismo de grupos:



$$\begin{aligned} \mu : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{Möb}^+ \\ [m] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &\longmapsto m(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \end{aligned}$$

onde  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$  é dado por

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ e } ad - bc \neq 0 \right\}.$$

Através de um cálculo direto pode-se mostrar que a multiplicação de matrizes corresponde à composição das transformações de Möbius. Disto segue então que  $\mu$  é um homomorfismo.

Depois de termos normalizado uma transformação de Möbius, estudaremos agora uma outra quantidade útil associada a  $m$ , que corresponde a tomar o traço. Considere a função

$$\tau : \mathrm{Möb}^+ \rightarrow \mathbb{C}$$

definida por  $\tau(m) = (a + d)^2$ . Como a única ambiguidade na definição de uma transformação de Möbius normalizada surge de multiplicar todos os coeficientes por  $-1$ , vemos que  $\tau(m)$  está bem definida. Como o traço de uma matriz é invariante sob conjugação ( $\mathrm{traço}(M) = \mathrm{traço}(PMP^{-1})$ ), então  $\tau$  também é invariante por conjugação. Logo, via o homomorfismo  $\mu$  mencionado acima temos que  $\tau$  é invariante sob conjugação de transformações de Möbius.

Utilizando a invariância  $\tau$  sob conjugação, podemos distinguir diferentes tipos de transformações de Möbius sem precisar conjugá-las explicitamente em suas formas padrões. De fato, seja  $m$  uma transformação de Möbius e  $p$  a transformação que conjuga  $m$  em sua forma padrão. Desde que  $\tau(m) = \tau(p \circ m \circ p^{-1})$ , é suficiente considerar os valores de  $\tau$  nas formas padrões.

Se  $m$  é parabólica então, então  $p \circ m \circ p^{-1} = z + 1$ , e portanto

$$\tau(m) = \tau(p \circ m \circ p^{-1}) = (1 + 1)^2 = 4.$$

Observe que se  $e$  é a transformação identidade então  $\tau(e) = 4$ .

Se  $m$  é elíptica ou loxodrômica, podemos escrever  $p \circ m \circ p^{-1} = \alpha^2 z$ , onde  $\alpha \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ . Normalizando para que o determinante de  $m$  seja 1, podemos escrever

$$m(z) = \frac{\alpha}{\alpha^{-1}} z,$$

e portanto

$$\tau(m) = \tau(p \circ m \circ p^{-1}) = (\alpha + \alpha^{-1})^2.$$

No caso em que  $m$  é elíptica,  $|\alpha| = 1$ , e podemos escrever  $\alpha = e^{i\theta}$  para algum  $\theta \in (0, \pi)$ . Temos neste caso que

$$\tau(m) = (\alpha + \alpha^{-1})^2 = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2 = 4 \cos^2(\theta).$$

Note neste caso que  $\tau(m)$  é real e pertence ao intervalo  $[0, 4)$ .

No caso em que  $m$  é loxodrômica, podemos escrever  $\alpha = \rho e^{i\theta}$  para algum  $\rho > 0, \rho \neq 1, \theta \in [0, \pi)$ . Calculando  $\tau$  temos

$$\tau(m) = (\alpha + \alpha^{-1})^2 = \cos(2\theta)(\rho^2 + \rho^{-2}) + 2 + i \operatorname{sen}(2\theta)(\rho^2 - \rho^{-2}).$$

Como  $\rho \neq 1$ , temos que  $\operatorname{Im}(\tau(m)) \neq 0$  para  $\theta \neq 0$  e  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ .

Para os casos em que  $\theta = 0$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , usamos o fato  $\rho^2 + \rho^{-2} \geq 2$  e  $\rho^2 + \rho^{-2} = 2$  se e somente se  $\rho = 1$  e obtemos que para  $\theta = 0$   $\tau(m) > 4$ , enquanto para  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\tau(m) < 0$ .

Resumindo, obtemos o seguinte resultado.

**Proposição 8.** *Seja  $m$  uma transformação de Möbius diferente da identidade. Então,*

[1]  *$m$  é parabólica se e somente se  $\tau(m) = 4$ ;*

[2]  *$m$  é elíptica se e somente se  $\tau(m)$  é real e pertence ao intervalo  $[0, 4)$ ;*

[3]  *$m$  é loxodrômica se e somente se  $\tau(m)$  tem parte imaginária não nula, ou  $\tau(m)$  é real e pertence a  $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ .*

**Exemplo.** Considere  $m(z) = \frac{z+1}{z+3}$ . O determinante de  $m$  é 2. Para obtermos a forma normalizada de  $m$ , devemos multiplicar os

coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  da transformação de Möbius por  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  para que o determinante seja 1. Logo, a forma normalizada de  $m$  é

$$m(z) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}z + \frac{3}{\sqrt{2}}}.$$

Como  $\tau(m) = 8$  temos que  $m$  é loxodrômica.

## 2.5 A Conjugação Complexa

Vimos anteriormente que o grupo  $\text{Möb}^+$  está contido no conjunto dos homeomorfismos de  $\overline{\mathbb{C}}$  que levam círculos em círculos,  $\text{Homeo}^{\text{C}}(\overline{\mathbb{C}})$ . Nosso objetivo agora é estender o grupo  $\text{Möb}^+$ . Para isto consideraremos um homeomorfismo de  $\overline{\mathbb{C}}$  que não pertence a  $\text{Möb}^+$  dado por

$$C(z) = \bar{z} \text{ para } z \in \mathbb{C} \text{ e } C(\infty) = \infty,$$

que é denominado *conjugação complexa*.

Geometricamente, o efeito de  $C$  sobre  $\overline{\mathbb{C}}$  é a reflexão no eixo real estendido  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Proposição 9.** *A função  $C : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  definida por*

$$C(z) = \bar{z} \text{ para } z \in \mathbb{C} \text{ e } C(\infty) = \infty$$

*é um elemento de  $\text{Homeo}(\overline{\mathbb{C}})$ .*

*Demonstração.* Note que  $C$  é sua própria inversa, e portanto  $C$  é uma bijeção de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

A continuidade de  $C$  segue do fato que para qualquer  $z \in \overline{\mathbb{C}}$  e qualquer  $\epsilon > 0$ ,  $C(U_\epsilon(z)) = U_\epsilon(C(z))$ .  $\square$

Para ver que  $C$  não é um elemento de  $\text{Möb}^+$ , observe que  $C$  fixa todo ponto de  $\overline{\mathbb{R}}$ , e em particular  $C$  fixa 0, 1 e  $\infty$ . Entretanto,  $C$  não é a identidade. Como todo elemento de  $\text{Möb}^+$  que fixa três pontos distintos é a identidade, segue que  $C$  não pode pertencer a  $\text{Möb}^+$ .

**Definição 11.** O grupo geral de Möbius  $\text{Möb}$  é o grupo gerado por  $\text{Möb}^+$  e  $C$ . Isto é, todo elemento (não trivial)  $p$  de  $\text{Möb}$  pode ser expresso como uma composição

$$p = C \circ m_k \circ \cdots \circ C \circ m_1$$

para algum  $k \geq 1$ , onde  $m_k$  é um elemento de  $\text{Möb}^+$ .

Como  $\text{Möb}$  contém  $\text{Möb}^+$ , então todas as propriedades transitivas de  $\text{Möb}^+$  são herdadas por  $\text{Möb}$ , isto é,  $\text{Möb}$  atua transitivamente sobre o conjunto de triplas distintas de  $\overline{\mathbb{C}}$ , sobre o conjunto de círculos de  $\overline{\mathbb{C}}$  e sobre o conjunto de discos de  $\overline{\mathbb{C}}$ . Observe, porém, que  $\text{Möb}$  age transitivamente sobre triplas de pontos de  $\overline{\mathbb{C}}$ , mas não de maneira única, pois a aplicação de conjugação fixa mais que três pontos.

## 2.6 Principais Propriedades de Möb

Nesta seção obteremos importantes propriedades referentes ao grupo geral de Möbius.

O próximo teorema afirma que o grupo geral de Möbius está contido no conjunto dos homeomorfismos de  $\overline{\mathbb{C}}$  que levam círculos em círculos. Sua demonstração é análoga à do Teorema 2.

**Teorema 7.**  $\text{Möb} \subset \text{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}})$ .

Como vimos, a conjugação  $C(z) = \bar{z}$  é uma reflexão no círculo  $\overline{\mathbb{R}}$ . Definimos a *reflexão num círculo*  $A$  como sendo a composição  $C_A = m \circ C \circ m^{-1}$ , onde  $m$  é um elemento de  $\text{Möb}$  levando  $\overline{\mathbb{R}}$  em  $A$ . Observamos que, embora não haja um único elemento de  $\text{Möb}$  levando  $\overline{\mathbb{R}}$  em  $A$ , a reflexão independe da aplicação  $m$  escolhida. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [1].

**Proposição 10.** *Todo elemento de  $\text{Möb}$  pode ser expresso como a composição de reflexões em finitos círculos de  $\overline{\mathbb{C}}$ .*

*Demonstração.* Como todo elemento de  $\text{Möb}$  é gerado por  $\text{Möb}^+$  e por  $C(z) = \bar{z}$ , e como  $\text{Möb}^+$  é gerado por  $J(z) = \frac{1}{z}$  e por  $f(z) = az + b$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ , basta mostrar o resultado para estas aplicações.

No caso da aplicação  $J$ , considere  $A = \mathbb{S}^1$ . Um elemento de  $\text{Möb}^+$  levando  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{S}^1$  é a transformação levando a tripla  $(0, 1, \infty)$  na tripla  $(i, 1, -1)$ , que é dada por

$$m(z) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}}{\frac{i}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Logo,

$$C_A(z) = m \circ C \circ m^{-1}(z) = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Assim,  $J$  pode ser vista como a composição de  $C(z) = \bar{z}$  e da reflexão em  $\mathbb{S}^1$ ,  $C_A(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ .

No caso da aplicação  $f(z) = az + b$ , observamos que  $f$  é a composição de  $L(z) = az$  e  $P(z) = z + b$  e, portanto basta mostrar o resultado para estas aplicações.

Para a aplicação  $P$  a idéia é expressar a translação ao longo da reta  $\rho$  através de  $0$  e  $b$  como a composição de duas reflexões: uma através da reta  $A$  que passa por  $0$  e é perpendicular a  $\rho$  e a outra através da reta  $B$  que passa por  $\frac{1}{2}b$  e é perpendicular a  $\rho$ .

Para a aplicação  $L$ , escrevemos  $a = \alpha^2 e^{2i\theta}$ , e observamos que  $L$  é a composição de  $D(z) = \alpha^2 z$  e  $E(z) = e^{2i\theta} z$ . Assim, expressamos  $D$  como a composição da reflexão  $c(z) = \frac{1}{\bar{z}}$  em  $\mathbb{S}^1$  com a reflexão  $c_2(z) = \frac{\alpha}{\bar{z}}$  no círculo euclidiano de centro na origem e raio  $\alpha$ .

A aplicação  $E$  por sua vez pode ser expressa como a composição da reflexão  $C(z) = \bar{z}$  com a reflexão  $C_2(z) = e^{i\theta} \bar{z}$  da reta euclidiana através da origem fazendo um ângulo  $\theta$  com  $\mathbb{R}$ .  $\square$

Vimos no Teorema 7 que o grupo geral de Möbius está contido no conjunto dos homeomorfismos de  $\overline{\mathbb{C}}$  que levam círculos de  $\overline{\mathbb{C}}$  em círculos de  $\overline{\mathbb{C}}$ . O próximo teorema estabelece que, de fato, os dois conjuntos coincidem.

**Teorema 8.**  $\text{Möb} = \text{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}})$ .

*Idéia da Demonstração.* Pelo Teorema 7 basta mostrarmos que  $\text{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}}) \subset \text{Möb}$ . Para isto, considere um elemento  $f$  de  $\text{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}})$ . Seja  $p$  a transformação de Möbius levando a tripla  $(f(0), f(1), f(\infty))$  na tripla  $(0, 1, \infty)$ . Logo  $p \circ f$  fixa os pontos  $0$ ,  $1$  e  $\infty$ .

Como  $p \circ f$  leva círculos de  $\overline{\mathbb{C}}$  em círculos de  $\overline{\mathbb{C}}$ , então  $p \circ f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , pois  $\overline{\mathbb{R}}$  é o círculo determinado pela tripla  $(0, 1, \infty)$  e  $p \circ f$  fixa esta tripla de pontos.

De  $p \circ f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  segue que  $p \circ f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$  ou  $p \circ f(\mathbb{H})$  é o semi-plano inferior. No primeiro caso tomamos  $m = p$  e, no último caso, tomamos  $m = C \circ p$ , onde  $C(z) = \bar{z}$ .

Assim  $m \in \text{Möb}$  e  $m$  satisfaz  $m \circ f(0) = 0$ ,  $m \circ f(1) = 1$ ,  $m \circ f(\infty) = \infty$  e  $m \circ f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ . A idéia é então mostrar que  $m \circ f$  é a aplicação identidade. Isto é feito construindo-se um conjunto denso de pontos de  $\overline{\mathbb{C}}$  que são fixos por  $m \circ f$ . A continuidade de  $m \circ f$  implicará que  $m \circ f$  é a identidade. Desta forma, teremos que  $f = m^{-1}$ , ou seja,  $f \in \text{Möb}$  que completa o resultado.

Veremos, a seguir qual o efeito dos elementos de Möb sobre o ângulo entre curvas.

Dadas duas curvas  $C_1$  e  $C_2$  em  $\mathbb{C}$  que se interceptam num ponto  $z_0$ , definimos o *ângulo*  $\sphericalangle(C_1, C_2)$  entre  $C_1$  e  $C_2$  em  $z_0$  como sendo o ângulo entre as retas tangentes a  $C_1$  e  $C_2$  em  $z_0$  medido de  $C_1$  a  $C_2$ .

Vamos utilizar a convenção que ângulos medidos no sentido anti-horário são positivos e ângulos no sentido horário são negativos. Com esta convenção temos que

$$\sphericalangle(C_2, C_1) = -\sphericalangle(C_1, C_2).$$

Observe que dadas duas curvas, elas formam entre si dois ângulos cuja soma é  $\pi$ . Assim, para que o ângulo entre duas curvas fique bem definido, ele deve tomar seus valores em  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ .

Um homeomorfismo de  $\overline{\mathbb{C}}$  que preserva o valor absoluto do ângulo entre curvas é chamado de *conforme*. Temos então o seguinte resultado.

**Teorema 9.** *Os elementos de Möb são homeomorfismos conformes de  $\overline{\mathbb{C}}$ .*

*Demonstração.* Pela definição de ângulo, basta mostrarmos o resultado para duas retas. Sejam, então  $X_1$  e  $X_2$  duas retas euclidianas em  $\mathbb{C}$ . Vamos mostrar que  $\sphericalangle(X_1, X_2)$  é igual a  $\sphericalangle(m(X_1), m(X_2))$ .

Sejam  $z_0$  o ponto de intersecção entre as duas retas e  $z_k$  um ponto em  $X_k$  distinto de  $z_0$ . Chamando de  $s_k$  o coeficiente angular da reta

$X_k$  temos que

$$s_k = \frac{\operatorname{Im}(z_k - z_0)}{\operatorname{Re}(z_k - z_0)}.$$

Seja  $\theta_k$  o ângulo que  $X_k$  faz com o eixo real  $\mathbb{R}$ . Utilizando o fato que  $s_k = \tan(\theta_k)$ , temos que

$$\sphericalangle(X_1, X_2) = \theta_2 - \theta_1 = \arctan(s_2) - \arctan(s_1).$$

Sabemos que Möb é gerado pelas transformações da forma  $f(z) = az + b$ ,  $a, b, \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ ,  $J(z) = \frac{1}{z}$  e  $C(z) = \bar{z}$ . Para completar a prova devemos mostrar o resultado para cada uma destas aplicações. Faremos aqui para a aplicação  $f$ .

Dada  $f(z) = az + b$ , escrevemos  $a = \alpha e^{i\beta}$ . Como  $f(\infty) = \infty$ ,  $f(X_1)$  e  $f(X_2)$  são retas euclidianas em  $\mathbb{C}$ . Como  $f(X_k)$  passa pelos pontos  $f(z_0)$  e  $f(z_k)$ , o coeficiente angular da reta  $f(X_k)$  é

$$t_k = \frac{\operatorname{Im}(a(z_k - z_0))}{\operatorname{Re}(a(z_k - z_0))} = \frac{\operatorname{Im}(e^{i\beta}(z_k - z_0))}{\operatorname{Re}(e^{i\beta}(z_k - z_0))} = \tan(\beta + \theta_k).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sphericalangle(f(X_1), f(X_2)) &= \arctan(t_2) - \arctan(t_1) \\ &= (\beta + \theta_2) - (\beta + \theta_1) \\ &= \theta_2 - \theta_1 = \sphericalangle(X_1, X_2). \end{aligned}$$

Observamos que, para demonstrar o resultado para a aplicação  $J$ , temos mais casos a considerar, pois  $J(X_1)$  e  $J(X_2)$  não são necessariamente retas euclidianas em  $\mathbb{C}$ , mas podem ser dois círculos euclidianos ou uma reta e um círculo euclidianos.  $\square$

## 2.7 O Subgrupo Möb( $\mathbb{H}$ )

Nesta seção restringiremos nossa atenção ao subgrupo de Möb dado pelas transformações que preservam  $\mathbb{H}$ , isto é, ao subgrupo dado por

$$\operatorname{Möb}(\mathbb{H}) = \{m \in \operatorname{Möb} \mid m(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\}.$$

**Teorema 10.** *Todo elemento de Möb( $\mathbb{H}$ ) leva retas hiperbólicas de  $\mathbb{H}$  em retas hiperbólicas de  $\mathbb{H}$ .*

*Demonstração.* A demonstração deste teorema segue do Teorema 9, juntamente com o fato que toda reta hiperbólica é a intersecção de  $\mathbb{H}$  com um círculo em  $\overline{\mathbb{C}}$  perpendicular a  $\overline{\mathbb{R}}$ .  $\square$

O objetivo agora é obter uma forma explícita para os elementos de Möb( $\mathbb{H}$ ).

Para isto considere o seguinte resultado.

**Proposição 11.** *Todo elemento  $m$  de Möb tem uma das seguintes formas*

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{ou} \quad m(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d},$$

onde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  e  $ad - bc = 1$ .

*Demonstração.* Para isto devemos mostrar que todas as possíveis composições de pares de aplicações têm uma das formas acima. Já sabemos que a composição de duas transformações de Möbius é novamente uma transformação de Möbius.

Tomando  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  e compondo com a conjugação  $C$ , temos

$$(m \circ C)(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}.$$

A composição  $m \circ n$ , com  $n(z) = \frac{e\bar{z}+f}{g\bar{z}+h}$  é

$$(m \circ n)(z) = \frac{(ae + bg)\bar{z} + af + bh}{ce + dg}\bar{z} + cf + dh,$$

que tem a forma desejada.

Analogamente, pode-se mostrar que a composição  $(p \circ n)$ , onde  $p(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$  também tem uma das formas desejadas.  $\square$

Considere agora o subgrupo

$$\text{Möb}(\mathbb{H}) = \{m \in \text{Möb} \mid m(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}\}.$$

Vamos determinar quais condições devemos impor sobre  $a, b, c, d$  para que  $m(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$ .



Para isto observe que, na segunda forma de  $m$  dada pela Proposição 11, podemos tomar a composição

$$m \circ C(z) = m(\bar{z}) = \frac{az + b}{cz + d},$$

e portanto podemos considerar somente o caso em que  $m$  é dada por

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

onde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  e  $ad - bc = 1$ .

Como  $m$  leva  $\overline{\mathbb{R}}$  em  $\overline{\mathbb{R}}$ , temos que os três pontos

$$m^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}, \quad m(\infty) = \frac{a}{c} \quad \text{e} \quad m^{-1}(0) = -\frac{b}{a}$$

pertencem a  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Vamos supor inicialmente que  $a \neq 0$  e  $c \neq 0$  de modo que esses três elementos pertençam a  $\mathbb{R}$ . Logo podemos expressar  $m$  da seguinte forma

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{m(\infty)cz - m^{-1}(0)m(\infty)c}{cz - m^{-1}(\infty)c}.$$

Normalizando  $m$  podemos obter uma condição sobre  $c$ ,

$$1 = ad - bc = c^2[m(\infty)(m^{-1}(0) - m^{-1}(\infty))].$$

Como  $m(\infty)$ ,  $m^{-1}(0)$  e  $m^{-1}(\infty)$  são todos reais, isto significa que  $c$  é real ou imaginário puro, ou seja, os coeficientes de  $m$  são todos reais ou imaginários puros.

No caso  $a = 0$ , a condição  $ad - bc = 1$  implica que  $c \neq 0$ . Neste caso consideramos os pontos  $m(1) = \frac{b}{c+d}$  e  $m^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$ . Logo,

$$d = -cm^{-1}(\infty) \quad \text{e} \quad b = (1 - m^{-1}(\infty))cm(1).$$

E então temos que

$$1 = ad - bc = (m^{-1}(\infty) - 1)c^2m(1),$$

o que significa novamente que  $a, b, c, d$  são todos reais ou imaginários puros.

O caso  $c = 0$  é mostrado de forma análoga.

Temos então o seguinte resultado.

**Teorema 11.** *Todo elemento de  $\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$  tem uma das seguintes formas:*

$$[1] \quad m(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc = 1;$$

$$[2] \quad m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc = 1;$$

$$[3] \quad m(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ com } a, b, c, d \text{ imaginários puros e } ad - bc = 1;$$

$$[4] \quad m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \text{ com } a, b, c, d \text{ imaginários puros e } ad - bc = 1.$$

Vamos agora determinar os elementos de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ . Temos que cada elemento de  $\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$  preserva ou permuta cada um dos dois discos em  $\overline{\mathbb{C}}$  determinados por  $\overline{\mathbb{R}}$ . Então para saber qual é o caso, basta considerar a imagem de um ponto específico de um dos discos.

Um elemento  $m$  de  $\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$  é um elemento de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  se e somente se a parte imaginária de  $m(i)$  é positiva. Portanto, precisamos checar cada uma das quatro possíveis formas de um elemento de  $\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$ . Vamos fazer isto para o caso em que  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , onde  $a, b, c, d$  são reais e  $ad - bc = 1$ . Neste caso a parte imaginária de  $m(i)$  é dada por

$$\begin{aligned} \text{Im}(m(i)) &= \text{Im}\left(\frac{ai+b}{ci+d}\right) \\ &= \text{Im}\left(\frac{(ai+b)(-ci+d)}{(ci+d)(-ci+d)}\right) = \frac{1}{c^2+d^2} > 0, \end{aligned}$$

o que significa que  $m$  pertence a  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ .

Procedendo de modo análogo para as outras três possíveis formas de  $m$ , concluímos que se  $m$  tem as formas dadas por 2 e 3 no Teorema 11, então  $m$  não pertence a  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  e, se  $m$  tem a forma 4 então  $m$  pertence a  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ .

Resumindo, temos o seguinte teorema.

**Teorema 12.** *Todo elemento  $m$  de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  tem uma das seguintes formas:*

$$[1] \quad m(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ onde } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc = 1;$$

[2]  $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ , onde  $a, b, c, d$  são imaginários puros e  $ad-bc = 1$ .

Uma consequência do Teorema 12 é que todo elemento de  $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$  tem a forma

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ onde } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad-bc = 1,$$

visto que nenhum elemento de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  da forma

$$n(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \text{ com } a, b, c, d \text{ imaginários puros e } ad-bc = 1$$

pode ser um elemento de  $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$ .

**Corolário 3.** *O grupo  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  é gerado pelos elementos da forma  $m(z) = az + b$  para  $a > 0$  e  $b \in \mathbb{R}$ ,  $K(z) = -\frac{1}{z}$  e  $B(z) = -\bar{z}$ .*

*Demonstração.* Considere um elemento  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ .

Se  $c = 0$ ,  $m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ . Como  $1 = ad - bc = ad$ , segue que  $\frac{a}{d} = a^2 > 0$ .

Se  $c \neq 0$ ,  $m(z) = f(K(g(z)))$ , onde  $g(z) = c^2z + cd$  e  $f(z) = z + \frac{a}{c}$ .

Para  $n(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ , observamos que  $B \circ n = m$ , onde  $m(z) = \frac{ez+f}{gz+h}$  é um elemento de  $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$  e, portanto,  $n = B^{-1} \circ m$ .  $\square$

Vamos agora discutir a transitividade de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  sobre elementos de  $\mathbb{H}$ . Provaremos inicialmente que a ação de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  sobre  $\mathbb{H}$  é transitiva, isto é, dados dois pontos distintos  $w_1$  e  $w_2$  em  $\mathbb{H}$ , existe um elemento de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  levando  $w_1$  em  $w_2$ . Observamos que, embora  $\text{Möb}$  atue de forma transitiva sobre triplas de  $\overline{\mathbb{C}}$ , não é imediato que existe um elemento de  $\text{Möb}$  que preserve  $\mathbb{H}$  e que leve  $w_1$  em  $w_2$ .

**Proposição 12.**  *$\text{Möb}(\mathbb{H})$  atua transitivamente em  $\mathbb{H}$ .*

*Demonstração.* Utilizando o Lema 2, é suficiente mostrar que dado qualquer ponto  $w \in \mathbb{H}$ , existe um elemento  $m$  de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  satisfazendo  $m(w) = i$ .

Escrevendo  $w = a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b > 0$ , construiremos um elemento de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  levando  $w$  a  $i$ . Iniciamos primeiro levando  $w$  para o eixo imaginário positivo através da aplicação  $p(z) = z - a$ . Assim,  $p(w) = bi$ .

Depois aplicamos  $q(z) = \frac{1}{b}z$  a  $p(w)$ , obtendo  $q(p(w)) = i$ . Como  $-a \in \mathbb{R}$  e  $\frac{1}{b} > 0$ , temos pelo Teorema 12 que  $p(z)$  e  $q(z)$  pertencem a  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ . Logo,  $q \circ p(z)$  também pertence a  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ .  $\square$

A próxima proposição fala da ação de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  sobre o conjunto de retas hiperbólicas.

**Proposição 13.**  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  atua transitivamente sobre o conjunto de retas hiperbólicas em  $\mathbb{H}$ .

*Demonstração.* Seja  $\rho$  uma reta hiperbólica em  $\mathbb{H}$ . Pelo Lema 2, basta construirmos um elemento de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  levando  $\rho$  no eixo imaginário  $I$  em  $\mathbb{H}$ .

Para isto, escolha um ponto  $z$  em  $\rho$ . Pela Proposição 12, existe um elemento  $m$  de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  com  $m(z) = i$ . A idéia agora é tomarmos uma transformação de Möbius que leve  $m(\rho)$  em  $I$ .

Seja  $\varphi$  o ângulo entre as retas  $I$  e  $m(\rho)$ , medido de  $I$  a  $m(\rho)$ .

Para cada  $\theta$ , a transformação

$$n_\theta(z) = \frac{\cos(\theta)z - \text{sen}(\theta)}{\text{sen}(\theta)z + \cos(\theta)}$$

pertence a  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  e fixa  $i$ . Além disto, o ângulo entre  $I$  e  $n_{\theta(z)}(I)$  em  $i$ , medido de  $I$  a  $n_\theta(I)$ , é  $\theta$ .

Portanto, se tomarmos  $\theta = -\varphi$ , teremos que  $n_\theta(I)$  e  $m(\rho)$  são retas hiperbólicas através de  $i$  que fazem um ângulo  $\theta$  com  $I$ . Portanto,  $m(\rho) = n_\theta(I)$ , e  $I = n_\theta^{-1} \circ m(\rho)$ .  $\square$

É importante observar que, embora  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  atue transitivamente sobre o conjunto de retas hiperbólicas em  $\mathbb{H}$ ,  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  não atua transitivamente sobre o conjunto de pares de pontos distintos de  $\mathbb{H}$ .

De fato, suponha, por exemplo, que desejamos encontrar um elemento  $m$  de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  levando  $i$  em  $i$  e  $2i$  em  $3i$ . Como estes elementos estão sobre o eixo imaginário  $I$  e, por dois pontos distintos em  $\mathbb{H}$  existe uma única reta hiperbólica (Proposição 1),  $m$  deve fixar  $I$ .

Observe agora que como os pontos extremos de  $I$  são  $0$  e  $\infty$ , todo elemento de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  levando  $I$  nele mesmo deve fixar os pontos  $0$  e  $\infty$  ou permutá-los. Utilizando o Teorema 12, temos que um elemento de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  fixando  $0$  e  $\infty$  deve ter a forma  $m(z) = az$ , com  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , ou a forma  $m(z) = -a\bar{z}$ , onde novamente  $a \in \mathbb{R}$  e  $a > 0$ .

Por outro lado, um elemento de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  permutando 0 e  $\infty$  deve ter a forma  $m(z) = -\frac{b}{z}$ , onde  $b \in \mathbb{R}$  e  $b > 0$ , ou ter a forma  $m(z) = \frac{b}{\bar{z}}$ , com  $b \in \mathbb{R}$  e  $b > 0$ .

Em qualquer um dos casos acima, não existe um elemento  $m$  de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  satisfazendo as condições impostas inicialmente (levar  $i$  em  $i$  e  $2i$  em  $3i$ ). De fato, o único elemento de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  que leva  $I$  nele mesmo e que fixa  $i$  é dado por  $B(z) = -\bar{z}$ , que é a reflexão em  $I$  e que, portanto, fixa todo elemento de  $I$ .

Analisaremos agora a ação de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  sobre o análogo em  $\mathbb{H}$  de um disco em  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Um *semiplano em  $\mathbb{H}$*  é uma componente de uma reta hiperbólica em  $\mathbb{H}$ . Temos que cada reta hiperbólica em  $\mathbb{H}$  determina dois semiplanos cuja intersecção é a própria reta.

A reta que determina um semiplano é chamada de *reta fronteira* para o semiplano. Um semiplano é *fechado* se é a união de uma reta hiperbólica  $\rho$  com uma das componentes de  $\mathbb{H} - \rho$ , e é *aberto* se é somente uma das componentes de  $\mathbb{H} - \rho$ . Temos então o seguinte resultado.

**Proposição 14.**  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  atua transitivamente sobre o conjunto de semiplanos abertos em  $\mathbb{H}$ .

*Demonstração.* Seja  $H$  o semiplano aberto

$$H = \{z \in \mathbb{H} \mid \text{Re}(z) > 0\}$$

determinado pelo eixo imaginário positivo. Pelo Lema 2, dado qualquer semiplano aberto  $L$  em  $\mathbb{H}$ , basta construirmos um elemento de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  levando  $L$  em  $H$ .

Seja  $\rho$  a reta fronteira de  $L$ . Pela Proposição 13, existe um elemento  $m$  de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  satisfazendo  $m(\rho) = I$ . Então,  $m$  leva os dois semiplanos abertos determinados por  $\rho$  nos dois semiplanos abertos determinados por  $I$ .

Se  $m(\rho) = H$ , o resultado está demonstrado. Caso contrário, então  $B \circ m(L) = H$ , onde  $B(z) = -\bar{z}$  é a reflexão em  $I$ .  $\square$

Terminaremos esta seção analisando a ação de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  na fronteira no infinito  $\overline{\mathbb{R}}$  de  $\mathbb{H}$ .

**Proposição 15.** Möb( $\mathbb{H}$ ) atua transitivamente no conjunto de triplas de pontos distintos de  $\overline{\mathbb{R}}$ .

*Demonstração.* Pelo Lema 2 basta mostrarmos que, dada uma tripla de pontos distintos de  $\overline{\mathbb{R}}$ , existe um elemento de Möb( $\mathbb{H}$ ) levando  $(z_1, z_2, z_3)$  em  $(0, 1, \infty)$ .

Seja  $\rho$  a reta hiperbólica cujos pontos extremos no infinito sejam  $z_1$  e  $z_3$ , e seja  $m$  um elemento de Möb( $\mathbb{H}$ ) levando  $\rho$  no eixo imaginário positivo  $I$ . Considerando a composição de  $m$  com  $K(z) = -\frac{1}{z}$  se necessário, podemos assumir que  $m(z_1) = 0$  e que  $m(z_3) = \infty$ . Seja  $b = m(z_2)$ . Observe que  $b \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Se  $b > 0$ , então a composição de  $m$  com  $p(z) = \frac{1}{b}z$  leva  $(z_1, z_2, z_3)$  em  $(0, 1, \infty)$ .

Se  $b < 0$ , então a composição de  $m$  com  $q(z) = \frac{1}{b}\bar{z}$  leva  $(z_1, z_2, z_3)$  em  $(0, 1, \infty)$ .  $\square$

## Capítulo 3

# Distância em $\mathbb{H}$

O objetivo deste capítulo é construir a noção de distância em  $\mathbb{H}$ . Isto é feito construindo-se um elemento de comprimento de arco em  $\mathbb{H}$  invariante sob a ação do grupo  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ .

Obteremos também uma fórmula explícita para para o cálculo de distâncias em  $\mathbb{H}$ .

### 3.1 Elementos de Comprimento de Arco

Um caminho no plano  $\mathbb{R}^2$  é uma função diferenciável  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $f(t) = (x(t), y(t))$ , onde  $x(t)$  e  $y(t)$  são funções diferenciáveis em  $t$  e  $[a, b]$  é um intervalo em  $\mathbb{R}$ . A imagem de um intervalo  $[a, b]$  sob  $f$  é uma *curva* em  $\mathbb{R}^2$ .

Um caminho  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é *diferenciável por partes* se  $f$  é contínua e se existe uma partição de  $[a, b]$  em subintervalos  $[a = a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_n, a_{n+1} = b]$  tal que  $f$  é diferenciável em cada subintervalo  $[a_k, a_{k+1}]$ .

Qualquer cálculo feito com um caminho diferenciável pode ser feito também com um caminho diferenciável por partes, expressando-o como a união de caminhos diferenciáveis.

O *comprimento de arco euclidiano* de  $f$  é dado por

$$l(f) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt,$$

onde  $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$  é o elemento de comprimento de arco em  $\mathbb{R}^2$ .

Podemos também escrever o caminho  $f$  como  $f(t) = x(t) + iy(t)$  e olhá-lo como um caminho em  $\mathbb{C}$ . Neste caso,

$$|f'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

e o comprimento de arco pode ser expresso da seguinte forma

$$l(f) = \int_a^b |f'(t)| dt.$$

Assim o elemento de comprimento de arco padrão em  $\mathbb{C}$  pode ser escrito como

$$|dz| = |f'(t)| dt.$$

Com esta notação escreveremos o comprimento de arco  $l(f)$  da seguinte forma

$$l(f) = \int_a^b |f'(t)| dt = \int_f |dz|.$$

Considere agora uma função contínua  $\eta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ . A *integral de linha* de  $\eta$  ao longo de um caminho  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é dada pela integral

$$\int_f \eta(z) |dz| = \int_a^b \eta(f(t)) |f'(t)| dt.$$

Esta integral de linha pode ser interpretada como um novo elemento de comprimento de arco, denotado por  $\eta(z) |dz|$ , e a função  $\eta$  é vista como um fator de escala pontual em relação ao comprimento de arco euclidiano. Isto nos leva à seguinte definição.

**Definição 12.** *Dado um caminho diferenciável por partes  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , definimos o comprimento de  $f$  com relação ao elemento de comprimento de arco  $\eta(z) |dz|$  como sendo a integral*

$$l_\eta(f) = \int_f \eta(z) |dz| = \int_a^b \eta(f(t)) |f'(t)| dt.$$



O elemento de comprimento de arco da forma  $\eta(z)|dz|$  é referido como uma *distorção conforme* do comprimento de arco padrão  $|dz|$  em  $\mathbb{C}$ .

É importante observar que esta definição de comprimento de um caminho  $f$  é invariante por *reparametrizações*, isto é, se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é um caminho diferenciável por partes e  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  é uma função sobrejetiva diferenciável monótona, então  $l_\eta(f \circ h) = l_\eta(f)$ . Este resultado pode ser mostrado diretamente, utilizando-se a regra da cadeia. A demonstração completa encontra-se em [1]. Caso a função  $h$  seja apenas sobrejetiva vale  $l_\eta(f) \geq l_\eta(f \circ h)$  e a igualdade ocorre se, e somente se,  $h$  é monótona.

### 3.2 Comprimento de Arco em $\mathbb{H}$

Com o objetivo de construir uma noção de distância em  $\mathbb{H}$ , vamos inicialmente obter um elemento de comprimento de arco em  $\mathbb{H}$ . Para isto consideraremos aqueles elementos de comprimento de arco que são invariantes sob a ação de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ . Isto é, dado um caminho diferenciável  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  queremos encontrar uma função contínua  $\eta : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$l_\eta(f) = l_\eta(\gamma \circ f),$$

para todo elemento  $\gamma$  de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ .

Para isto, vamos considerar inicialmente um elemento  $\gamma$  de  $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$ . Temos então que

$$\int_a^b \eta(f(t))|f'(t)|dt = l_\eta(\gamma \circ f) = \int_a^b \eta((\gamma \circ f)(t))|(\gamma \circ f)'(t)|dt.$$

Usando a regra da cadeia obtemos

$$\int_a^b \eta(f(t))|f'(t)|dt = \int_a^b \eta((\gamma \circ f)(t))|\gamma'(f(t))| |f'(t)|dt,$$

o que é equivalente a

$$\int_a^b (\eta(f(t)) - \eta((\gamma \circ f)(t)) |\gamma'(f(t))|) |f'(t)| dt = 0.$$

Escrevendo

$$\mu_\gamma(z) = \eta(z) - \eta(\gamma(z)) |\gamma'(z)|, \quad (3.1)$$

a equação acima fica

$$\int_f \mu_\gamma(z) |dz| = \int_a^b \mu_\gamma(f(t)) |f'(t)| dt = 0,$$

para todo caminho diferenciável por partes  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  e todo elemento  $\gamma$  de  $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$ . Note que, como  $\eta(z)$  é contínua e  $\gamma$  é diferenciável,  $\mu_\gamma(z)$  é contínua.

Temos então o seguinte resultado.

**Lema 3.** *Sejam  $D$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{C}$  e  $\mu : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Suponha que  $\int_f \mu(z) |dz| = 0$  para todo caminho diferenciável por partes  $f : [a, b] \rightarrow D$ . Então  $\mu \equiv 0$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que exista  $z \in D$  tal que  $\mu(z) \neq 0$ . Podemos assumir, sem perda de generalidade que  $\mu(z) > 0$ .

Temos que  $\mu$  é contínua. Com a notação da Seção 1.2, segue então que dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $U_\delta(z) \subset D$  e  $w \in U_\delta(z)$  implica que  $\mu(w) \in U_\epsilon(\mu(z))$ .

Tomando  $\epsilon = \frac{1}{3}|\mu(z)|$ , vemos que existe  $\delta > 0$  tal que  $w \in U_\delta(z)$  implica que  $\mu(w) \in U_\epsilon(\mu(z))$ . Utilizando a desigualdade triangular e o fato que  $\mu(z) > 0$ , isto implica que  $\mu(w) > 0$  para todo  $w \in U_\delta(z)$ .

Escolhemos agora um caminho diferenciável por partes específico  $f : [0, 1] \rightarrow U_\delta(z)$  dado por

$$f(t) = z + \frac{1}{3}\delta t.$$

Observe que  $\mu(f(t)) > 0$  para todo  $t$  em  $[0, 1]$ , pois  $f(t) \in U_\delta(z)$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Assim temos que  $\int_f \mu(z) |dz| > 0$ , o que contradiz a hipótese.  $\square$

Vimos anteriormente que, utilizando a hipótese que o comprimento de arco é invariante sob  $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$ ,  $\int_f \mu_\gamma(z) |dz| = 0$  para todo

caminho diferenciável por partes  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  e  $\gamma \in \text{Möb}^+(\mathbb{H})$ . Utilizando o lema anterior, obtemos então que

$$\mu_\gamma(z) = \eta(z) - \eta(\gamma(z))|\gamma'(z)| = 0$$

para todo  $z \in \mathbb{H}$  e todo elemento  $\gamma$  de  $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$ .

Observe agora que se  $\gamma$  e  $\varphi$  são dois elementos de  $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$ , tem-se que

$$\begin{aligned} \mu_{\gamma \circ \varphi}(z) &= \eta(z) - \eta((\gamma \circ \varphi)(z))|(\gamma \circ \varphi)'(z)| \\ &= \eta(z) - \eta(\varphi(z))|\varphi'(z)| + \eta(\varphi(z))|\varphi'(z)| \\ &\quad - \eta((\gamma \circ \varphi)(z))|\gamma'(\varphi(z))||\varphi'(z)| \\ &= \mu_\varphi(z) + \mu_\gamma(\varphi(z))|\varphi'(z)|. \end{aligned}$$

Isto significa que se  $\mu_\gamma \equiv 0$  então  $\mu_{\gamma \circ \varphi} \equiv 0$ . Usando agora o Corolário 3, basta analisarmos nossa condição sobre  $\mu_\gamma$ , com  $\gamma(z) = az + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$  e  $\gamma'(z) = a$ .

Consideramos inicialmente  $\gamma(z) = z + b$ , para  $b \in \mathbb{R}$ . Como  $\gamma'(z) = 1$  para todo  $z \in \mathbb{H}$ , então

$$0 \equiv \mu_\gamma(z) = \eta(z) - \eta(z + b)$$

para todo  $z \in \mathbb{H}$  e todo  $b \in \mathbb{R}$ . Logo,

$$\eta(z) = \eta(z + b).$$

Como a igualdade acima vale para todo  $b \in \mathbb{R}$ , temos que  $\eta(z)$  depende somente da parte imaginária  $y = \text{Im}(z)$  de  $z$ . Isto significa que  $\eta$  pode ser vista como uma função de uma variável real  $y = \text{Im}(z)$ .

Considere agora o gerador  $\gamma(z) = az$  para  $a > 0$ . Como  $\gamma'(z) = a$  para todo  $z \in \mathbb{H}$ , a condição imposta sobre  $\eta(z)$  é

$$0 \equiv \mu_\gamma(z) = \eta(z) - a\eta(az),$$

para todo  $z \in \mathbb{H}$  e todo  $a > 0$ .

Como  $\eta$  depende somente da parte imaginária de  $z$  podemos escrever  $\eta(z)$  como uma função de uma variável  $y$ , isto é  $\eta(z) = f(y)$ . Portanto, a relação acima pode ser expressa como

$$f(y) = af(ay)$$

para todo  $y > 0$  e todo  $a > 0$ . Permutando  $a$  e  $y$  na igualdade acima temos

$$f(ay) = \frac{1}{y}f(a).$$

Tomando  $a = 1$ , obtemos  $f(y) = \frac{1}{y}f(1)$  e, usando que  $\eta(z) = f(\text{Im}(z))$ , temos que

$$\eta(z) = \frac{c}{\text{Im}(z)},$$

onde  $c$  é uma constante positiva arbitrária.

Resta-nos saber agora se este elemento de comprimento de arco é invariante sob todos os elementos de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ . Para isto basta saber se o elemento de comprimento de arco é invariante sob as aplicações  $K(z) = -\frac{1}{z}$  e  $B(z) = -\bar{z}$ .

Para mostrar a invariância sob  $K(z) = -\frac{1}{z}$ , devemos mostrar que  $0 = \mu_K(z)$ , com  $\mu_K(z)$  dada pela expressão 3.1 e  $\eta(z) = \frac{c}{\text{Im}(z)}$ .

Como

$$\mu_K(z) = \eta(z) - \eta\left(-\frac{1}{z}\right) \frac{1}{|z|^2}$$

e

$$\eta\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{c|z|^2}{\text{Im}(z)},$$

então

$$\eta(z) - \eta\left(-\frac{1}{z}\right) \frac{1}{|z|^2} = 0,$$

como queríamos.

O cálculo para  $B(z)$  é similar, mas neste caso temos que usar diretamente a definição de comprimento, visto que a função  $B(z)$  não é diferenciável em  $\mathbb{C}$ . Para isto tomamos um caminho  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  dado por  $f(t) = x(t) + iy(t)$  e consideramos a composição

$B \circ f(t) = -x(t) + iy(t)$ . Então  $|(B \circ f)'(t)| = |f'(t)|$  e  $\text{Im}(B \circ f)(t) = \text{Im}(f(t))$  e, portanto,

$$l(B \circ f) = l(f).$$

Temos mostrado então o seguinte teorema.

**Teorema 13.** *Para toda constante positiva  $c$ , o elemento de comprimento de arco*

$$\frac{c}{\text{Im}(z)} |dz|$$

em  $\mathbb{H}$  é invariante sob a ação de Möb( $\mathbb{H}$ ).

Observamos que não é possível determinar um valor específico de  $c$ . Para simplificar os cálculos, utilizaremos  $c = 1$ . Temos então a seguinte definição.

**Definição 13.** *Para um caminho diferenciável por partes  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ , definimos o comprimento de arco hiperbólico de  $f$  como*

$$l_{\mathbb{H}}(f) = \int_f \frac{1}{\text{Im}(z)} |dz| = \int_a^b \frac{1}{\text{Im}(f(t))} |f'(t)| dt.$$

**Exemplo.** Considere o caminho  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ , onde  $0 < a < b$ , dado por  $f(t) = it$ . A imagem  $f([a, b])$  é o eixo imaginário positivo. Temos então que

$$l_{\mathbb{H}}(f) = \int_f \frac{1}{\text{Im}(z)} |dz| = \int_a^b \frac{1}{t} dt = \ln \left[ \frac{b}{a} \right].$$

Observamos no exemplo acima que fixado um valor de  $b$ , quanto mais próximo  $a$  estiver de zero, maior será o comprimento hiperbólico do segmento. De fato, quando  $a$  tende a zero, o comprimento hiperbólico do segmento tende para o infinito, muito diferente do que ocorre no caso euclidiano. Porém, é possível mostrar que o comprimento de arco hiperbólico é sempre um número finito, veja [1].

### 3.3 Métrica em $\mathbb{H}$

Nosso objetivo agora é construir a noção de distância em  $\mathbb{H}$ . Para isto precisamos da definição de métrica.

Uma *métrica* sobre um conjunto  $X$  é uma função

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfazendo três condições

- [1]  $d(x, y) \geq 0$  para todo  $x, y \in X$ , e  $d(x, y) = 0$  se e somente se  $x = y$ ;
- [2]  $d(x, y) = d(y, x)$ ; e
- [3]  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (desigualdade triangular).

Se  $X$  é um conjunto munido de uma métrica  $d$ , dizemos que  $(X, d)$  é um *espaço métrico*.

Um exemplo é a métrica padrão em  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$  dada pelo valor absoluto.

Considere o semiplano superior  $\mathbb{H}$  e seja  $\Gamma[x, y]$  o conjunto de todos os caminhos diferenciáveis por partes  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  com  $f(a) = x$  e  $f(b) = y$ , ou seja, o conjunto de todos os caminhos unindo  $x$  e  $y$ .

Considere agora a função  $d_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  definida tomando o ínfimo

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = \inf\{l_{\mathbb{H}}(f) : f \in \Gamma(x, y)\},$$

onde  $l_{\mathbb{H}}(f)$  representa o comprimento hiperbólico do caminho  $f$ .

Baseado no fato que o comprimento hiperbólico de um caminho é invariante sob a ação de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ , vamos mostrar que  $d_{\mathbb{H}}$  também é invariante sob a ação de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ . Isto é estabelecido na seguinte proposição.

**Proposição 16.** *Para todo elemento  $\gamma$  de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  e para todo par de pontos  $x$  e  $y$  de  $\mathbb{H}$ , temos que*

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y)).$$

*Demonstração.* Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  um caminho em  $\Gamma(x, y)$ , com  $f(a) = x$  e  $f(b) = y$ . Como  $\gamma \circ f(a) = \gamma(x)$  e  $\gamma \circ f(b) = \gamma(y)$  então  $\gamma \circ f$  pertence a  $\Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]$ . Logo,

$$\{\gamma \circ f : f \in \Gamma[x, y]\} \subset \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]. \quad (3.2)$$

Como  $l_{\mathbb{H}}(f)$  é invariante sob a ação de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ , temos que

$$l_{\mathbb{H}}(f) = l_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f)$$

para todo caminho  $f$  em  $\Gamma[x, y]$ . Logo, usando 3.2 e as propriedades de ínfimo de um conjunto obtemos que

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y)) &= \inf\{l_{\mathbb{H}}(g) : g \in \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]\} \\ &\leq \inf\{l_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f) : f \in \Gamma[x, y]\} \\ &\leq \inf\{l_{\mathbb{H}}(f) : f \in \Gamma[x, y]\} \\ &= d_{\mathbb{H}}(x, y). \end{aligned}$$

Como  $\gamma$  é inversível e  $\gamma^{-1}$  é um elemento de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  temos que

$$\{\gamma^{-1} \circ g : g \in \Gamma[(\gamma(x), \gamma(y))]\} \subset \Gamma[x, y]$$

e, procedendo de modo análogo ao anterior obtém-se que  $d_{\mathbb{H}}(x, y) \leq d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y))$ .

Portanto, concluímos que  $d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y))$ .  $\square$

Existem duas questões a considerar. Uma é que  $d_{\mathbb{H}}$  define uma métrica em  $\mathbb{H}$ , ou seja,  $d_{\mathbb{H}}$  satisfaz as três condições de métrica. A prova deste fato é um pouco extensa e pode ser encontrada em [1]. A outra, é que existe um caminho  $g$  em  $\Gamma[x, y]$  tal que  $l_{\mathbb{H}}(g) = d_{\mathbb{H}}(x, y)$ , isto é, o ínfimo é atingido por um elemento do conjunto  $\Gamma[x, y]$ . De fato, veremos a seguir que este caminho  $g$  é um segmento de reta hiperbólico.

Sejam, então  $x$  e  $y$  um par de pontos distintos em  $\mathbb{H}$ , e seja  $\rho$  a reta hiperbólica passando através de  $x$  e  $y$ . Da Proposição 13 sabemos que existe um elemento  $\gamma$  de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  tal que  $\gamma(\rho)$  é o eixo imaginário positivo em  $\mathbb{H}$ .

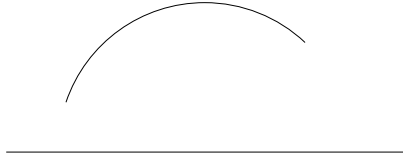


Figura 3.1: Segmento hiperbólico

Escreva  $\gamma(x) = \mu i$  e  $\gamma(y) = \lambda i$ . Podemos supor que  $\lambda > \mu$ , pois caso contrário, trocamos  $\gamma$  por  $K \circ \gamma$ , onde  $K(z) = -\frac{1}{z}$ .

Como observamos anteriormente,  $d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y))$ . Portanto basta mostrarmos que existe um caminho realizando a distância entre  $\mu i$  e  $\lambda i$  para  $\lambda > \mu$ .

Vamos primeiro calcular o comprimento de arco hiperbólico do caminho  $f_0 : [\mu, \lambda] \rightarrow \mathbb{H}$  definido por  $f_0(t) = ti$ , cuja imagem é o segmento de reta unindo  $\mu i$  e  $\lambda i$ . Vamos mostrar que este é o menor caminho entre  $\mu i$  e  $\lambda i$ .

Como  $\text{Im}(f_0(t)) = t$  e  $|f_0'(t)| = 1$ , temos

$$l_{\mathbb{H}}(f_0) = \int_{\mu}^{\lambda} \frac{1}{t} dt = \ln \left[ \frac{\lambda}{\mu} \right].$$

Seja agora  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  qualquer caminho em  $\Gamma[\mu i, \lambda i]$ . Se mostrarmos que  $l_{\mathbb{H}}(f_0) \leq l_{\mathbb{H}}(f)$  teremos que  $l_{\mathbb{H}}(f_0) = d_{\mathbb{H}}(\mu i, \lambda i)$ .

Para isto, escreva  $f(t) = x(t) + iy(t)$  e considere o caminho  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  definido por

$$g(t) = \text{Im}(f(t))i = y(t)i.$$

Observe que  $g \in \Gamma[\mu i, \lambda i]$ . Temos então que

$$\begin{aligned} l_{\mathbb{H}}(g) &= \int_a^b \frac{1}{y(t)} |y'(t)| dt \\ &\leq \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \\ &= l_{\mathbb{H}}(f). \end{aligned} \tag{3.3}$$



Assim, dado qualquer caminho  $f \in \Gamma[\mu i, \lambda i]$ , podemos construir um caminho mais curto  $g \in \Gamma[\mu i, \lambda i]$  pondo  $g(t) = \text{Im}(f(t))i$ . Para completar a prova, precisamos somente mostrar que se  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  é qualquer caminho em  $\Gamma[\mu i, \lambda i]$  da forma  $g(t) = y(t)i$ , então

$$l_{\mathbb{H}}(f_0) \leq l_{\mathbb{H}}(g).$$

A imagem  $g([a, b])$  de  $g$  é o segmento de reta hiperbólico ligando  $\alpha i$  e  $\beta i$ , onde  $\alpha \leq \mu < \lambda \leq \beta$ . Defina  $f_1 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{H}$  por  $f_1(t) = it$ , e note que

$$l_{\mathbb{H}}(f_0) = \ln \left[ \frac{\lambda}{\mu} \right] \leq \ln \left[ \frac{\beta}{\alpha} \right] = l_{\mathbb{H}}(f_1). \quad (3.4)$$

Então,  $g = f_1 \circ (f_1^{-1} \circ g)$ , onde  $f_1 \circ g : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  é por construção uma função sobrejetiva. Observe que  $f_1^{-1} \circ g$  não é necessariamente uma função monótona, o que significa que  $f_1^{-1} \circ g$  não é uma reparametrização de  $f$ . Neste caso em que a mudança de coordenadas é somente uma função sobrejetiva temos, como observado no final da seção 3.1, que

$$l_{\mathbb{H}}(f_1) \leq l_{\mathbb{H}}(g).$$

Juntando isto como a desigualdade 3.4 obtemos finalmente que

$$l_{\mathbb{H}}(f_0) \leq l_{\mathbb{H}}(f),$$

para todo caminho  $f$  em  $\Gamma[\mu i, \lambda i]$ . Assim temos mostrado parte do seguinte resultado.

**Teorema 14.**  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$  é um espaço métrico. Além disto, a distância entre dois pontos  $x$  e  $y$  em  $\mathbb{H}$  é realizada por um segmento de reta hiperbólico unindo  $x$  e  $y$ .

Como um exemplo, considere o caminho  $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{H}$  dado por

$$g(t) = (t^2 + 1)i.$$

O menor valor de  $g$  é 1, que é atingido em  $t = 0$ . Além disto, como  $g(-1) = g(1) = 2i$ , a imagem de  $[-1, 1]$  sob  $g$  é o segmento de reta hiperbólico unindo  $2i$  a  $i$ . O comprimento hiperbólico de  $g$  é

$$l_{\mathbb{H}}(g) = \int_g \frac{1}{\text{Im}(z)} |dz| = \int_{-1}^1 \frac{|2t|}{t^2 + 1} dt = 2 \ln(2).$$

No entanto, a distância hiperbólica entre  $i$  e  $2i$  é dada por  $d_{\mathbb{H}}(i, 2i) = \ln 2$ .

### 3.4 Fórmula para Distância Hiperbólica

Suponha que desejamos calcular a distância hiperbólica entre os pontos  $x = 2 + i$  e  $y = -3 + i$ . A reta hiperbólica  $\rho$  contendo estes pontos é dada pelo círculo euclidiano de centro  $-\frac{1}{2}$  e raio  $\frac{\sqrt{29}}{2}$ .

Como visto na demonstração do Teorema 14, devemos inicialmente determinar um elemento  $\gamma$  de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  que leve a reta hiperbólica  $\rho$  no eixo imaginário positivo de modo que  $\gamma(x) = i\mu$  e  $\gamma(y) = i\lambda$  e então a distância hiperbólica será dada por

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(i\mu, i\lambda) = \left| \ln \left[ \frac{\lambda}{\mu} \right] \right|.$$

Os pontos extremos no infinito de  $\rho$  são dados por

$$p = \frac{-1 + \sqrt{29}}{2} \text{ e } q = \frac{-1 - \sqrt{29}}{2}.$$

A aplicação  $\gamma(z) = \frac{z-p}{z-q}$  é tal que  $\gamma(p) = 0$  e  $\gamma(q) = \infty$ . Além disso,  $\gamma$  é um elemento de  $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$ . Logo,  $\gamma$  leva  $\rho$  no eixo imaginário positivo.

Temos então que

$$\gamma(2 + i) = \frac{p - q}{(2 - q)^2 + 1} i$$

e

$$\gamma(-3 + i) = \frac{p - q}{(3 + q)^2 + 1} i.$$

Logo,

$$d_{\mathbb{H}}(2 + i, -3 + i) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(2 + i), \gamma(-3 + i)) = \ln \left[ \frac{58 + 10\sqrt{29}}{58 - 10\sqrt{29}} \right].$$

Como vimos acima, este não é um método muito prático para se calcular a distância hiperbólica entre dois pontos. Vamos, então, obter uma fórmula mais fácil de ser usada.

Considere dois pontos  $z_1 = x_1 + iy_1$  e  $z_2 = x_2 + iy_2$ . Vamos assumir que  $x_1 \neq x_2$ , pois se  $x_1 = x_2$ ,

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \left| \ln \left[ \frac{y_1}{y_2} \right] \right|.$$

Sejam  $c$  e  $r$  o centro e o raio, respectivamente, do círculo euclidiano que contém a reta hiperbólica através de  $z_1$  e  $z_2$ . Suponha que  $x_1 > x_2$ , e seja  $\theta_k$  o argumento de  $z_k$ , variando no intervalo  $[0, \pi)$  e medido no senti anti-horário a partir do eixo  $x$  positivo.

Considere o caminho  $f : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{H}$  dado por  $f(t) = c + re^{it}$ . Observe que a imagem de  $f$  é o segmento de reta hiperbólico entre  $z_1$  e  $z_2$ . Logo,  $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = l_{\mathbb{H}}(f)$ . Como  $\text{Im}(f(t)) = r \sin(t)$  e  $|f'(t)| = r$ , temos que

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = l_{\mathbb{H}}(f) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\sin(t)} dt = \ln \left| \frac{\csc(\theta_2) - \cot(\theta_2)}{\csc(\theta_1) - \cot(\theta_1)} \right|.$$

Podemos também obter uma expressão em termos de  $x_1, x_2, y_1$  e  $y_2$  dada por,

$$\csc(\theta_k) = \frac{r}{y_k} \text{ e } \cot(\theta_k) = \frac{x_k - c}{y_k}.$$

Logo,

$$|\csc(\theta_k) - \cot(\theta_k)| = \left| \frac{r + c - x_k}{y_k} \right|,$$

e, portanto

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = l_{\mathbb{H}}(f) = \ln \left| \frac{\csc(\theta_2) - \cot(\theta_2)}{\csc(\theta_1) - \cot(\theta_1)} \right| = \ln \left| \frac{y_2(x_1 - c - r)}{y_1(x_2 - c - r)} \right|.$$

Se assumíssemos  $x_1 < x_2$  obteríamos uma expressão para  $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)$  que difere da expressão acima apenas pelo fator  $-1$ . Logo, em qualquer caso temos que

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \left| \ln \left| \frac{y_2(x_1 - c - r)}{y_1(x_2 - c - r)} \right| \right|.$$

### 3.5 Isometrias

Uma *isometria* de um espaço métrico  $(X, d)$  é um homeomorfismo  $f$  de  $X$  que preserva distância, isto é,  $f$  é um homeomorfismo de  $X$  tal que

$$d(x, y) = d(f(x), f(y))$$

para todo par de pontos  $x$  e  $y$  de  $X$ .

Observamos que se  $f$  é um homeomorfismo que preserva distância, então  $f^{-1}$  preserva distância e que a composição de dois homeomorfismos que preservam distância também é um homeomorfismo que preserva distância. Logo, o conjunto de todas as isometrias de um espaço métrico  $(X, d)$  forma um grupo.

Restringiremos nossa atenção às isometrias de  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$  e usaremos  $\text{Isom}(\mathbb{H})$  para denotar o *grupo das isometrias* de  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ .

O principal resultado desta seção estabelece que o grupo das isometrias de  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ ,  $\text{Isom}(\mathbb{H})$ , coincide com o grupo  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ . Observamos que, em virtude da Proposição 16, temos que  $\text{Möb}(\mathbb{H}) \subset \text{Isom}(\mathbb{H})$ . Para demonstrar a outra inclusão precisaremos de alguns resultados.

**Proposição 17.** *Sejam  $x, y$  e  $z$  pontos distintos em  $\mathbb{H}$ . Então,*

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z) = d_{\mathbb{H}}(x, z)$$

*se, e somente se,  $y$  está contido no segmento hiperbólico  $\rho_{xz}$  unindo  $x$  a  $z$ .*

*Demonstração.* Seja  $m$  um elemento de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  tal que  $m(x) = i$  e  $m(z) = \alpha i$ , para algum  $\alpha > 1$ . Para obtermos tal  $m$  tomamos  $\gamma$  em  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  de modo que  $\gamma$  leva a reta hiperbólica através de  $x$  e  $z$  no eixo imaginário. Seja  $\gamma(x) = \mu i$  e  $\gamma(z) = \lambda i$ . Podemos supor  $\mu < \lambda$ , pois caso contrário substituímos  $\gamma$  por  $K \circ \gamma$ , com  $K(z) = -\frac{1}{z}$ . Considere  $\varphi(z) = \frac{1}{\mu}z$ . Logo,

$$\varphi \circ \gamma(x) = i \text{ e } \varphi \circ \gamma(z) = \alpha i,$$

onde  $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} > 1$ . Escreva  $m(y) = a + bi$ .

Suponha inicialmente que  $y$  pertence ao segmento de reta hiperbólico  $\rho_{xz}$  ligando  $x$  a  $z$ . Então,  $m(y)$  pertence ao segmento de

reta hiperbólico ligando  $m(x) = i$  a  $m(z) = \alpha i$ . Logo,  $a = 0$  e  $1 \leq b \leq \alpha$  e, portanto

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(i, bi) = \ln(b)$$

e

$$d_{\mathbb{H}}(y, z) = d_{\mathbb{H}}(bi, \alpha i) = \ln \left[ \frac{\alpha}{b} \right] = d_{\mathbb{H}}(x, z) - \ln(b).$$

Assim,  $d_{\mathbb{H}}(x, z) = d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z)$ .

Suponha agora que  $y$  não pertence ao segmento hiperbólico  $\rho_{xz}$  ligando  $x$  a  $z$ . Então  $m(y)$  pertence ao eixo imaginário ou não.

No primeiro caso,  $a = 0$ , e então  $m(y) = bi$ , onde  $0 < b < 1$  ou  $b > \alpha$ .

Se  $0 < b < 1$ , então

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = -\ln(b) \quad \text{e} \quad d_{\mathbb{H}}(y, z) = \ln \left[ \frac{\alpha}{b} \right] = d_{\mathbb{H}}(x, z) - \ln(b).$$

Como  $\ln(b) < 0$ , temos que

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z) > d_{\mathbb{H}}(x, z).$$

No caso  $b > \alpha$  obtemos de modo análogo que

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z) = 2 \ln(b) - d_{\mathbb{H}}(x, z) > d_{\mathbb{H}}(x, z).$$

Considere agora  $a \neq 0$ . Seja  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{H}$  um caminho realizando a distância entre  $i = f(\alpha)$  e  $a + bi = f(\beta)$ . Seja  $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{H}$  o caminho dado por  $g(t) = \text{Im}(f(t))i$ . Temos pela expressão (?? da Seção 3.3 que  $l_{\mathbb{H}}(g) < l_{\mathbb{H}}(f)$ . Logo,

$$d_{\mathbb{H}}(i, bi) < d_{\mathbb{H}}(i, a + bi) = d_{\mathbb{H}}(x, y).$$

De modo análogo temos também que

$$d_{\mathbb{H}}(bi, \alpha i) < d_{\mathbb{H}}(a + bi, \alpha i) = d_{\mathbb{H}}(y, z).$$

Se  $1 \leq b \leq \alpha$ , então

$$d_{\mathbb{H}}(x, z) = d_{\mathbb{H}}(i, \alpha i) = d_{\mathbb{H}}(i, bi) + d_{\mathbb{H}}(bi, \alpha i) < d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z).$$

Quando  $b$  não pertence a  $[1, \alpha]$  temos dois casos a considerar. Quando  $0 < b < 1$ ,

$$d_{\mathbb{H}}(x, z) < d_{\mathbb{H}}(x, z) - 2 \ln(b) = d_{\mathbb{H}}(i, bi) + d_{\mathbb{H}}(bi, \alpha i) < d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z).$$

O caso  $b > \alpha$  é análogo ao anterior.  $\square$

**Corolário 4.** *Toda isometria de  $\mathbb{H}$  leva retas hiperbólicas em retas hiperbólicas.*

*Demonstração.* Suponha que  $y$  pertence ao segmento hiperbólico  $\rho_{xy}$  ligando  $x$  a  $z$ . Então,

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z) = d_{\mathbb{H}}(x, z).$$

Se  $f$  é uma isometria hiperbólica, então

$$d_{\mathbb{H}}(f(x), f(y)) + d_{\mathbb{H}}(f(y), f(z)) = d_{\mathbb{H}}(f(x), f(z)).$$

Portanto,  $f(y)$  pertence ao segmento hiperbólico  $\rho_{f(x)f(z)}$  unindo  $f(x)$  a  $f(z)$ . Logo,

$$f(\rho_{xz}) = \rho_{f(x)f(z)}.$$

Como uma reta hiperbólica pode ser expressa como uma união de segmentos hiperbólicos, temos que isometrias hiperbólicas levam retas hiperbólicas em retas hiperbólicas.  $\square$

**Proposição 18.** *Dados dois pares  $(z_1, z_2)$  e  $(w_1, w_2)$  de pontos distintos de  $\mathbb{H}$ , existe um elemento  $q$  de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  levando um par no outro se, e somente se,  $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{H}}(w_1, w_2)$ .*

*Demonstração.* Se existe um elemento  $q$  de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  levando  $(z_1, z_2)$  em  $(w_1, w_2)$ , então

$$d_{\mathbb{H}}(w_1, w_2) = d_{\mathbb{H}}(q(z_1), q(z_2)) = d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2).$$

Suponha agora que  $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{H}}(w_1, w_2)$  e tome um elemento  $m$  de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  levando  $z_1$  em  $i$  e  $z_2$  em  $e^{d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)}i$ . Considere agora um elemento  $n$  de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  levando  $w_1$  em  $i$  e  $w_2$  em  $e^{d_{\mathbb{H}}(w_1, w_2)}i$ . Observe que  $m(z_1) = n(w_1) = i$ . Como  $d_{\mathbb{H}}(w_1, w_2) = d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)$ , temos que  $m(z_2) = n(w_2)$  e, portanto,  $q = n^{-1} \circ m$  leva  $(z_1, z_2)$  em  $(w_1, w_2)$ .  $\square$

Vamos então mostrar que  $\text{Isom}(\mathbb{H}) \subset \text{Möb}(\mathbb{H})$ .

Seja  $f$  uma isometria hiperbólica. Considere agora dois elementos  $x$  e  $y$  sobre o eixo imaginário  $I$  em  $\mathbb{H}$ , e seja  $H$  um dos semiplanos em  $\mathbb{H}$  determinados por  $I$ . Como  $f$  é uma isometria hiperbólica temos, pela Proposição 18, que existe um elemento  $\gamma$  de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  tal que

$\gamma(f(x)) = x$  e  $\gamma(f(y)) = y$ . Se mostrarmos que  $\gamma \circ f$  é a identidade, teremos que  $f = \gamma^{-1}$  e, portanto,  $f$  pertence a  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ .

Como  $\gamma \circ f$  fixa  $x$  e  $y$  e, pelo Corolário 4,  $\gamma \circ f$  leva retas hiperbólicas em retas hiperbólicas, então  $\gamma \circ f$  leva  $I$  em  $I$ . Se necessário podemos substituir  $\gamma$  por  $B \circ \gamma$  com  $B(z) = -\bar{z}$  para obter um elemento de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  que leva  $I$  em  $I$  e  $H$  em  $H$ .

Seja  $z$  um ponto qualquer em  $I$ . Temos que  $z$  é unicamente determinado pelas duas distâncias hiperbólicas  $d_{\mathbb{H}}(x, z)$  e  $d_{\mathbb{H}}(y, z)$ . Como  $\gamma \circ f$  preserva as duas distâncias hiperbólicas, então  $\gamma \circ f$  fixa todo ponto  $z$  de  $I$ .

Considere agora um ponto qualquer  $w$  em  $\mathbb{H}$  que não pertence a  $I$ . Vamos mostrar que  $\gamma \circ f$  fixa  $w$ . Seja  $\rho$  a reta hiperbólica através de  $w$  e perpendicular a  $I$ . Temos que  $\rho$  está contida no círculo euclidiano de centro 0 e raio euclidiano  $|w|$ . Seja  $z$  o ponto de interseção entre  $\rho$  e  $I$ .

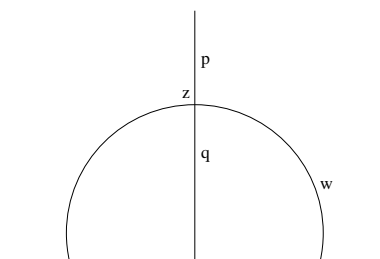


Figura 3.2: Segmento hiperbólico

Observe que  $\rho$  é a mediatriz de algum segmento hiperbólico  $\sigma_{pq}$  ligando pontos  $p$  e  $q$  em  $I$ , isto é

$$\rho = \{k \in \mathbb{H} \mid d_{\mathbb{H}}(p, k) = d_{\mathbb{H}}(k, q)\}.$$

Como  $\rho$  é definido em termos da distância hiperbólica e como  $\gamma \circ f$  é uma isometria hiperbólica, segue que  $\gamma \circ f(\rho)$  é a mediatriz de  $\gamma \circ f(\sigma_{pq})$ . Utilizando agora a Proposição 17, temos que o segmento hiperbólico  $\sigma_{\gamma \circ f(p)\gamma \circ f(q)}$  unindo  $\gamma \circ f(p)$  a  $\gamma \circ f(q)$  é igual a  $\gamma \circ f(\sigma_{pq})$ . Assim  $\gamma \circ f(\rho)$  é a mediatriz de  $\sigma_{\gamma \circ f(p)\gamma \circ f(q)}$ . Mas  $\gamma \circ f$  fixa  $I$ . Logo  $\gamma \circ f(\rho)$  é a mediatriz de  $\sigma_{pq}$ , ou seja,  $\gamma \circ f(\rho) = \rho$ .

Como  $d_{\mathbb{H}}(z, w) = d_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f(z), \gamma \circ f(w)) = d_{\mathbb{H}}(z, \gamma \circ f(w))$  e como  $\gamma \circ f$  preserva os dois semiplanos determinados por  $I$ , então  $\gamma \circ f$  fixa  $w$ . Com isto obtemos que  $\gamma \circ f$  fixa todo elemento de  $\mathbb{H}$  e, portanto,  $\gamma \circ f$  é a identidade. Com isto chegamos no seguinte teorema.

**Teorema 15.**  $\text{Isom}(\mathbb{H}) = \text{Möb}(\mathbb{H})$ .



## Capítulo 4

# Área e o Teorema de Gauss-Bonnet

Neste capítulo definiremos a área de um polígono hiperbólico e demonstraremos o Teorema de Gauss-Bonnet, que estabelece uma fórmula para a área de um polígono hiperbólico em função de seus ângulos. Para isto, precisaremos de algumas definições e resultados referentes a polígonos hiperbólicos e convexidade.

### 4.1 Convexidade

Para a definição de polígono hiperbólico que faremos na próxima seção, serão necessários alguns resultados sobre convexidade. As demonstrações destes resultados serão omitidas e podem ser encontradas em [1].

Um conjunto  $Z$  no plano complexo  $\mathbb{C}$  é convexo se para cada par de pontos  $z_0$  e  $z_1$  em  $Z$ , o segmento de reta euclidiano ligando  $z_0$  a  $z_1$  está inteiramente contido em  $Z$ . No plano hiperbólico fazemos uma definição análoga.

**Definição 14.** *Um subconjunto  $X$  do plano hiperbólico é convexo se para cada par de pontos  $x$  e  $y$  em  $X$ , o segmento de reta hiperbólico fechado  $\rho_{xy}$  ligando  $x$  e  $y$  e que contém os pontos  $x$  e  $y$ , está contido em  $X$ .*

Se  $p$  é um ponto em  $\mathbb{H}$  e  $q$  é um ponto em  $\overline{\mathbb{R}}$ , chamaremos de *raio hiperbólico* a parte da reta hiperbólica entre  $p$  e  $q$ .

**Proposição 19.** *Retas hiperbólicas, raios hiperbólicos e segmentos de reta hiperbólicos são convexos.*

Lembramos que dada uma reta hiperbólica  $\rho$  em  $\mathbb{H}$ , o complemento de  $\rho$  no plano hiperbólico tem duas componentes, que são os dois *semiplanos abertos determinados por  $\rho$* . Um *semiplano fechado* determinado por  $\rho$  é a união de  $\rho$  com um dos dois semiplanos abertos determinados por  $\rho$ . Temos então o seguinte resultado.

**Proposição 20.** *Semiplanos abertos e semiplanos fechados no plano hiperbólico são convexos.*

O próximo teorema estabelece uma importante caracterização de conjuntos convexos em termos de semiplanos.

**Teorema 16.** *Um subconjunto  $X$  no plano hiperbólico é convexo se e somente se  $X$  pode ser expresso como a intersecção de uma coleção de semiplanos.*

## 4.2 Polígonos Hiperbólicos

Vimos no Teorema 16 que um conjunto convexo em  $\mathbb{H}$  é a intersecção de uma coleção de semiplanos. Para a definição de polígono hiperbólico que faremos será necessário impor uma condição sobre esta coleção.

**Definição 15.** *Seja  $\mathcal{H} = \{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$  uma coleção de semiplanos em  $\mathbb{H}$ , e para cada  $\alpha \in A$ , seja  $\rho_\alpha$  a reta que determina  $H_\alpha$ . A coleção  $\mathcal{H}$  é localmente finita se para cada ponto  $z$  em  $\mathbb{H}$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que somente um número finito de retas  $\rho_\alpha$  intercepta o disco hiperbólico aberto  $U_\varepsilon(z)$  de raio hiperbólico  $\varepsilon$  e centro hiperbólico  $z$ .*

É claro que toda coleção finita de semiplanos é localmente finita. É possível mostrar que qualquer coleção não enumerável de semiplanos distintos em  $\mathbb{H}$  não pode ser localmente finita. Um exemplo de uma coleção infinita de semiplanos que é localmente finita é a coleção  $\{H_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  em  $\mathbb{H}$ , onde a reta que determina  $H_n$  fica no círculo euclidiano com centro euclidiano  $n$  e raio euclidiano 1, e  $H_n$  é o semiplano fechado determinado por  $\rho_n$  contendo o ponto  $2i$  (ver figura 4.1).



Figura 4.1: Coleção localmente finita

**Definição 16.** Um polígono hiperbólico é um conjunto fechado convexo no plano hiperbólico que pode ser expresso como a intersecção de uma coleção localmente finita de semiplanos fechados.

Vimos anteriormente um exemplo de polígono hiperbólico. Outro exemplo de polígono hiperbólico é dado pela figura 4.2. O polígono é dado pela intersecção dos semiplanos  $H_1 = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$ ,  $H_2 = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) \geq -1\}$ ,  $H_3 = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1\}$ ,  $H_4 = \{z \in \mathbb{H} \mid |z - 1| \geq 1\}$  e  $H_5 = \{z \in \mathbb{H} \mid |z + 1| \geq 1\}$ .

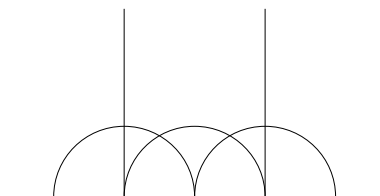


Figura 4.2: Polígono hiperbólico

Observe que na definição de polígono dada, uma reta é um polígono, já que ela é a intersecção dos dois semiplanos que a determinam. Mas uma reta tem interior vazio no plano hiperbólico. Quando um polígono  $X$  em  $\mathbb{H}$  tem interior vazio em  $\mathbb{H}$ , dizemos que  $X$  é um polígono *degenerado*. Caso contrário, isto é, quando  $X$  tem interior não vazio, dizemos que  $X$  é um polígono *não-degenerado*. No decorrer do texto estaremos sempre supondo que os polígonos hiperbólicos são não degenerados.

Tornaremos precisos agora os conceitos de lado e vértice de um polígono hiperbólico. Considere então um polígono hiperbólico  $P$  e sua fronteira  $\partial P$ . Seja  $\rho$  uma reta hiperbólica que intercepta  $P$ . Pode ser que  $\rho$  intercepte o interior de  $P$ . Neste caso, a intersecção  $P \cap \rho$  é um subconjunto convexo fechado de  $\rho$  que não é um ponto, logo  $P \cap \rho$

é um segmento de reta hiperbólico fechado em  $\rho$ , um raio fechado em  $\rho$  ou toda a reta  $\rho$ .

Por outro lado, pode acontecer que  $\rho$  não intercepte o interior de  $P$ . Neste caso,  $P$  está contido num dos semiplanos fechados determinados por  $\rho$ . A intersecção  $P \cap \rho$  é novamente um subconjunto fechado convexo de  $\rho$ , e portanto, é um ponto em  $\rho$ , um segmento de reta hiperbólico fechado em  $\rho$ , um raio hiperbólico fechado em  $\rho$ , ou toda a reta  $\rho$ . Todas estas possibilidades estão ilustradas na figura 4.3, cujo polígono  $P$  é dado pela intersecção dos semiplanos  $H_1 = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$ ,  $H_2 = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) \geq -1\}$ ,  $H_3 = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1\}$  e  $H_4 = \{z \in \mathbb{H} \mid |z + 1| \geq 1\}$ .

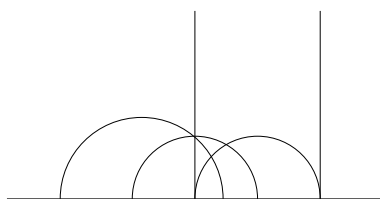


Figura 4.3: Intersecção de retas hiperbólicas com um polígono hiperbólico

As retas da fronteira de  $P$  interceptam  $P$  numa reta hiperbólica, num raio hiperbólico fechado, num raio hiperbólico fechado, e num segmento de reta hiperbólico fechado. A reta hiperbólica que intercepta a fronteira no infinito nos pontos  $-3$  e  $-\frac{1}{2}$  intercepta  $P$  num único ponto (figura 4.3).

De um modo geral, sejam  $P$  é um polígono hiperbólico e  $\rho$  uma reta hiperbólica tal que  $P$  intercepta  $\rho$  e  $P$  está contido num dos semiplanos fechados determinados por  $\rho$ . Se a intersecção  $P \cap \rho$  é um ponto, dizemos que este ponto é um *vértice* de  $P$ . Nos outros casos, isto é, quando a intersecção é um segmento de reta hiperbólico fechado, um raio hiperbólico fechado ou toda a reta, dizemos que a intersecção é um *lado* de  $P$ . O próximo resultado relaciona os lados e vértices de um polígono hiperbólico.

**Lema 4.** *Seja  $P$  um polígono hiperbólico. Os vértices de  $P$  são os pontos extremos dos lados de  $P$ .*

Considere agora um polígono hiperbólico  $P$ . Construa uma coleção  $\mathcal{H}$  de semiplanos fechados da seguinte maneira. Enumere os lados de  $P$  como  $s_1, \dots, s_k, \dots$ . Para cada  $s_k$ , seja  $\rho_k$  a reta hiperbólica que contém  $s_k$ , e seja  $H_k$  o semiplano fechado determinado por  $\rho_k$  contendo  $P$ . Então,  $\mathcal{H} = \{H_k\}$  é uma coleção localmente finita de semiplanos fechados, e

$$P = \bigcap_{H_k \in \mathcal{H}} H_k.$$

Como consequência disto tem-se que cada vértice  $v$  de um polígono hiperbólico  $P$  é a intersecção de dois lados de  $P$ . Podemos falar também sobre o ângulo interno em  $v$ .

**Definição 17.** *Seja  $P$  um polígono hiperbólico, e seja  $v$  um vértice de  $P$  que é a intersecção de dois lados  $s_1$  e  $s_2$  de  $P$ . Seja  $\rho_k$  a reta hiperbólica contendo  $s_k$ . A união  $\rho_1 \cup \rho_2$  divide o plano hiperbólico em quatro componentes, uma das quais contém  $P$ . O ângulo interior de  $P$  em  $v$  é o ângulo entre  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , medido na componente do complemento de  $\rho_1 \cup \rho_2$  contendo  $P$ .*

Vamos considerar agora alguns tipos básicos de polígonos hiperbólicos. Primeiro consideraremos polígonos hiperbólicos compactos. Neste caso, os lados de  $P$  são segmentos de reta hiperbólicos. Um *triângulo hiperbólico* é um polígono hiperbólico compacto com três lados. Um *quadrilátero hiperbólico* é um polígono hiperbólico compacto com quatro lados. Um *losango hiperbólico* é um quadrilátero hiperbólico cujos lados têm a mesma medida.

Mais geralmente, um  *$n$ -ágono hiperbólico* é um polígono hiperbólico compacto com  $n$  lados. Um  $n$ -ágono hiperbólico é *regular* se todos os seus lados têm a mesma medida e todos os seus ângulos internos são iguais.

Um *paralelogramo hiperbólico* é um quadrilátero hiperbólico cujos lados opostos estão contidos em retas hiperbólicas paralelas ou ultraparalelas.

Por exemplo, considere o quadrilátero hiperbólico  $Q$  em  $\mathbb{H}$  com vértices  $x_1 = i - 1$ ,  $x_2 = 2i - 1$ ,  $x_3 = i + 1$  e  $x_4 = 2i + 1$ . Uma ilustração de  $Q$  é dada na figura 4.4. Seja  $s_{jk}$  o lado de  $Q$  ligando os vértices  $x_j$  e  $x_k$  e seja  $\rho_{jk}$  a reta hiperbólica contendo  $s_{jk}$ .

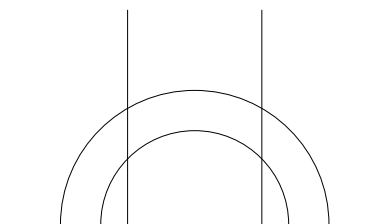


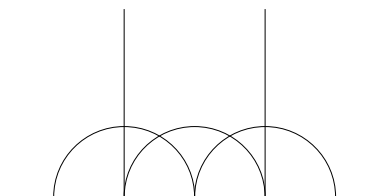
Figura 4.4: Quadrilátero hiperbólico

Como  $\rho_{12}$  e  $\rho_{34}$  estão contidas nas retas euclidianas  $\{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) = -1\}$  e  $\{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) = 1\}$ , respectivamente, temos que  $s_{12}$  e  $s_{34}$  estão contidos em retas hiperbólicas paralelas.

Como  $\rho_{13}$  e  $\rho_{24}$  estão contidas nas retas euclidianas  $\{z \in \mathbb{H} \mid |z| = \sqrt{2}\}$  e  $\{z \in \mathbb{H} \mid |z| = \sqrt{5}\}$ , respectivamente, temos que  $s_{13}$  e  $s_{24}$  estão contidos em retas hiperbólicas paralelas. Logo,  $Q$  é um paralelogramo.

Vamos agora falar sobre alguns polígonos hiperbólicos não compactos.

**Definição 18.** Dizemos que um polígono hiperbólico  $P$  em  $\mathbb{H}$  tem um vértice ideal em  $v \in \overline{\mathbb{R}}$  se existem dois lados de  $P$  que são raios hiperbólicos fechados ou retas hiperbólicas que compartilham  $v$  como um ponto extremo no infinito.

Figura 4.5: Polígono hiperbólico com um vértice ideal no  $\infty$ 

Para cada inteiro  $n \geq 3$ , um  $n$ -ágono ideal é um polígono hiperbólico que tem  $n$  lados e  $n$  vértices ideais. Cada lado de um polígono

ideal  $P$  é a reta hiperbólica determinada por um par de vértices ideais.

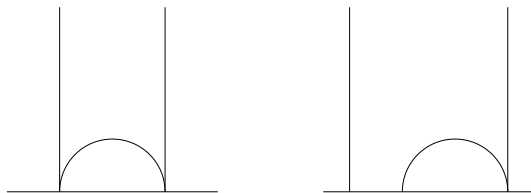


Figura 4.6: Triângulos hiperbólicos ideal e não ideal

### 4.3 Área Hiperbólica

Como vimos anteriormente, o comprimento hiperbólico de um caminho diferenciável por partes é calculado integrando o comprimento de arco hiperbólico  $\frac{1}{\text{Im}(z)}|dz|$  ao longo do caminho. A área hiperbólica de um conjunto  $X$  em  $\mathbb{H}$  é dada integrando o quadrado do elemento de comprimento de arco hiperbólico sobre o conjunto.

**Definição 19.** A área hiperbólica  $A_{\mathbb{H}}(X)$  de um conjunto  $X$  em  $\mathbb{H}$  é dada pela integral

$$A_{\mathbb{H}}(X) = \int_X \frac{1}{(\text{Im}(z))^2} dx dy,$$

onde  $z = x + iy$ .

Considere a região  $X$  em  $\mathbb{H}$  que é limitada pelas três retas euclidianas  $\{z \in \mathbb{H} \mid \text{Re}(z) = -1\}$ ,  $\{z \in \mathbb{H} \mid \text{Re}(z) = 1\}$  e  $\{z \in \mathbb{H} \mid \text{Im}(z) = 1\}$ . Observe que, como a terceira reta euclidiana não está contida numa reta hiperbólica, esta região não é um polígono hiperbólico.

A área hiperbólica de  $X$  é então dada por

$$A_{\mathbb{H}}(X) = \int_X \frac{1}{y^2} dx dy = \int_{-1}^1 \int_1^{\infty} \frac{1}{y^2} dx dy = 2.$$

O próximo teorema estabelece a invariância da área sob as isometrias do plano hiperbólico.

**Teorema 17.** *A área hiperbólica em  $\mathbb{H}$  é invariante sob a ação do grupo  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ .*

*Demonstração.* Temos que mostrar que se  $X$  é um conjunto em  $\mathbb{H}$  cuja área hiperbólica  $A_{\mathbb{H}}(X)$  está definida e se  $f$  é um elemento de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  então

$$A_{\mathbb{H}}(X) = A_{\mathbb{H}}(f(X)).$$

Para demonstrar o teorema precisamos utilizar o teorema de mudança de variáveis na integral dupla que garante que

$$\int_{F(X)} h(x, y) \, dx dy = \int_X h \circ F(x, y) |\det(DF)| \, dx dy,$$

onde  $X$  é um conjunto em  $\mathbb{R}^2$ ,  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma função diferenciável,  $h$  é uma função sobre  $X$  e  $DF$  é a matriz jacobiana de  $F$ .

Primeiro consideramos  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $ad - bc = 1$ . Escrevendo  $f$  em termos de  $x$  e  $y$ , obtemos

$$f(x, y) = \frac{acx^2 + acy^2 + bd + bcx + adx + iy}{(cx + d)^2 + c^2y^2}.$$

Portanto, considerando a função  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  dada por

$$f(x, y) = \left( \frac{acx^2 + acy^2 + bd + bcx + adx}{(cx + d)^2 + c^2y^2}, \frac{y}{(cx + d)^2 + c^2y^2} \right),$$

temos que o determinante da matriz jacobiana de  $f$  é dado por

$$\det(Df(x, y)) = \frac{1}{((cx + d)^2 + c^2y^2)^2}.$$

Para calcular a área hiperbólica precisamos integrar a função  $h(x, y) = \frac{1}{y^2}$  e calcular a composição

$$h \circ f(x, y) = \frac{((cx + d)^2 + c^2y^2)^2}{y^2}.$$

Utilizando o teorema de mudança de variáveis tem-se que



$$\begin{aligned}
A_{\mathbb{H}}(f(X)) &= \int_{f(X)} \frac{1}{y^2} dx dy \\
&= \int_X h \circ f(x, y) |\det(Df)| dx dy \\
&= \int_X \frac{1}{y^2} dx dy = A_{\mathbb{H}}(X).
\end{aligned}$$

Para completar a prova resta demonstrar que a área hiperbólica é invariante sob a aplicação  $B(z) = -\bar{z}$ . Esta demonstração é análoga à anterior e não será feita aqui.  $\square$

#### 4.4 Teorema de Gauss-Bonnet

Nosso objetivo agora é obter uma fórmula para a área de um triângulo hiperbólico. Para isto expressaremos um dado triângulo hiperbólico em termos de triângulos hiperbólicos cujas áreas são mais fáceis de calcular.

Considere, inicialmente um triângulo hiperbólico com um vértice ideal  $v_1$ , e com outros dois vértices  $v_2$  e  $v_3$ , que podem ou não ser vértices ideais. Seja  $\rho_{jk}$  a reta hiperbólica determinada por  $v_j$  e  $v_k$ .

Utilizando as propriedades transitivas do grupo de isometrias de  $\mathbb{H}$ , seja  $\gamma$  um elemento de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  que leva  $v_1$  em  $\infty$  e a reta  $\rho_{23}$  na reta hiperbólica contida no círculo unitário, de modo que  $v_2 = e^{i\varphi}$  e  $v_3 = e^{i\theta}$ , onde  $0 \leq \theta < \varphi \leq \pi$  (se  $\theta = 0$  e  $\varphi = \pi$ ,  $v_1$  e  $v_2$  são vértices ideais), figura 4.7.

Como a área hiperbólica é invariante sob a ação de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ , podemos assumir que  $P$  é um triângulo hiperbólico com um vértice ideal em  $\infty$ , e com outros dois vértices em  $e^{i\varphi}$  e  $e^{i\theta}$ , onde  $0 \leq \theta < \varphi \leq \pi$ . Observe que como  $P$  tem pelo menos um vértice ideal,  $P$  não é compacto. Calculando a área hiperbólica de  $P$ , temos

$$A_{\mathbb{H}}(P) = \int_P \frac{1}{y^2} dx dy = \int_{\cos \varphi}^{\cos \theta} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx = \int_{\cos \varphi}^{\cos \theta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Fazendo a substituição trigonométrica  $x = \cos(w)$ , temos que  $dx = -\text{sen}(w)dw$  e

$$\int_{\cos \varphi}^{\cos \theta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{\varphi}^{\theta} -dw = \varphi - \theta.$$

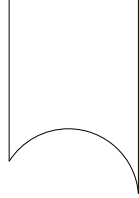


Figura 4.7: O caso de um vértice ideal

Através deste cálculo obtemos a seguinte proposição.

**Proposição 21.** *Seja  $P$  um triângulo hiperbólico com um vértice ideal, e sejam  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  os ângulos internos nos outros dois vértices, que podem ser vértices ideais ou não. Então,*

$$A_{\mathbb{H}}(P) = \pi - (\alpha_2 + \alpha_3).$$

*Demonstração.* Em vista dos cálculos anteriores, basta observar que o ângulo interno de  $P$  no vértice ideal  $v_1 = \infty$  é  $\alpha_1 = 0$ , o ângulo interno no vértice  $v_2 = e^{i\theta}$  é  $\alpha_2 = \theta$  e o ângulo interno no vértice  $v_3 = e^{i\varphi}$  é  $\alpha_3 = \pi - \varphi$ .  $\square$

Uma consequência da proposição acima é que a área de um triângulo ideal é  $\pi$ , pois neste caso cada ângulo interno é 0.

Vamos agora obter uma expressão para a área de um triângulo hiperbólico qualquer. A idéia é fazer uma construção para utilizar a proposição anterior.

Considere, então um triângulo hiperbólico  $P$  com vértices  $v_1, v_2$  e  $v_3$ . Seja  $\alpha_k$  o ângulo interno de  $P$  em  $v_k$ . Seja  $\rho$  o raio hiperbólico de  $v_1$  passando por  $v_2$  e seja  $x$  o ponto extremo de  $\rho$  no infinito.

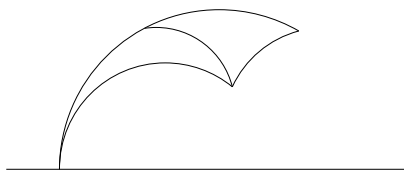


Figura 4.8: O caso de um triângulo sem vértices ideais

O triângulo hiperbólico  $T$  com vértices  $v_1$ ,  $v_3$  e  $x$  tem um vértice ideal em  $x$  e dois vértices não ideais  $v_1$  e  $v_3$ . O ângulo interno de  $T$  em  $v_1$  é  $\alpha_1$  e o ângulo interno de  $T$  em  $v_3$  é  $\delta > \alpha_3$ . Logo, pela Proposição 21 a área do triângulo hiperbólico  $T$  é

$$A_{\mathbb{H}}(T) = \pi - (\alpha_1 + \delta). \quad (4.1)$$

O triângulo hiperbólico  $T'$  com vértices  $v_2$ ,  $v_3$  e  $x$  tem um vértice ideal em  $x$  e dois vértices não ideais em  $v_2$  e  $v_3$ . O ângulo interno de  $T'$  em  $v_2$  é  $\pi - \alpha_2$  e o ângulo interno de  $T'$  em  $v_3$  é  $\delta - \alpha_3$ . Portanto, a área hiperbólica de  $T'$  é

$$A_{\mathbb{H}}(T') = \pi - (\pi - \alpha_2 + \delta - \alpha_3). \quad (4.2)$$

Como  $T$  é a união de  $T'$  e  $P$ , e como  $T'$  e  $P$  se interceptam apenas ao longo de um lado, temos que

$$A_{\mathbb{H}}(T) = A_{\mathbb{H}}(T') + A_{\mathbb{H}}(P).$$

Logo, utilizando as equações 4.1 e 4.2 obtemos

$$A_{\mathbb{H}}(P) = A_{\mathbb{H}}(T) - A_{\mathbb{H}}(T') = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3).$$

Com isto temos demonstrado o seguinte teorema.

**Teorema 18.** (*Teorema de Gauss-Bonnet*) *Seja  $P$  um triângulo hiperbólico com ângulos internos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Então,*

$$A_{\mathbb{H}}(P) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Observe que, do Teorema 18, temos que a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é menor que  $\pi$ . Este resultado é uma das consequências da negação do quinto postulado da geometria euclidiana, como descrito no Capítulo 1.

**Exemplo.** Considere o triângulo hiperbólico  $P$  de vértices  $v_1 = i$ ,  $v_2 = 2 + 2i$  e  $v_3 = 4 + i$ . Vamos denotar por  $\rho_{jk}$  a reta hiperbólica contendo os vértices  $v_j$  e  $v_k$  de  $P$  e por  $C_{jk}$  o círculo euclidiano contendo  $\rho_{jk}$ .

A equação de  $C_{12}$  é  $|z - \frac{7}{4}| = \frac{\sqrt{65}}{4}$ . A equação de  $C_{23}$  é  $|z - \frac{9}{4}| = \frac{\sqrt{65}}{4}$  e a equação de  $C_{13}$  é  $|z - 2| = \sqrt{5}$ . Para utilizarmos o Teorema 18 para o cálculo da área de  $P$ , precisamos calcular os ângulos internos nos vértices de  $P$ . Observamos inicialmente que se dois círculos  $C_1$  e  $C_2$  de centro euclidiano  $c_k$  e raio euclidiano  $r_k$  se interceptam, então, pela lei dos cossenos o ângulo entre  $C_1$  e  $C_2$  satisfaz

$$|c_1 - c_2|^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta.$$

Logo, o ângulo  $\alpha$  entre  $C_{12}$  e  $C_{13}$  é dado por

$$\cos \alpha = \frac{\frac{65}{16} + 5 - |\frac{7}{4} - 2|^2}{2\frac{\sqrt{65}}{4}\sqrt{5}} = \frac{18}{\sqrt{325}},$$

ou seja,  $\alpha \sim 0.0555$ .

O ângulo  $\beta$  entre  $C_{23}$  e  $C_{13}$  é dado por

$$\cos \beta = \frac{\frac{65}{16} + 5 - |\frac{9}{4} - 2|^2}{2\frac{\sqrt{65}}{4}\sqrt{5}} = \frac{18}{\sqrt{325}},$$

ou seja,  $\beta \sim 0.0555$ .

O ângulo  $\gamma$  entre  $C_{12}$  e  $C_{23}$  é dado por

$$\cos \gamma = \frac{\frac{65}{16} + \frac{65}{16} - |\frac{7}{4} - \frac{9}{4}|^2}{2\frac{\sqrt{65}}{4}\frac{\sqrt{65}}{4}} = \frac{126}{130},$$

ou seja,  $\gamma \sim 0.2487$ .

Portanto, pelo Teorema 18, temos

$$A_{\mathbb{H}}(P) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) \sim 2.7819.$$

Vamos agora obter uma generalização do Teorema 18 para polígonos hiperbólicos. Consideraremos apenas polígonos hiperbólicos  $P$  com um número finito de lados e tal que a quantidade total de vértices (ideais ou não) seja igual ao número de lados. Observamos que para um polígono hiperbólico com número finito de lados, a quantidade total de vértices é pelo menos o número de lados. Por exemplo, um semiplano fechado é um polígono que não tem vértice e possui um lado.

**Teorema 19.** *Seja  $P$  um polígono hiperbólico com um número finito de lados e vértices (ideais ou não)  $v_1, \dots, v_n$ . Além disto, suponha que a quantidade total de vértices de  $P$  seja igual ao número de lados. Então,*

$$A_{\mathbb{H}}(P) = (n - 2)\pi - \sum_{k=1}^n \alpha_k,$$

onde  $\alpha_k$  denota o ângulo interno em  $v_k$ .

*Demonstração.* Para provar o teorema, decomponos  $P$  em triângulos e utilizamos o Teorema 18.

Tome um ponto  $x$  no interior de  $P$ . Como  $P$  é convexo, o segmento de reta hiperbólico (ou raio hiperbólico)  $\rho_k$  ligando  $x$  a  $v_k$  está contido em  $P$ . Os segmentos de reta  $\rho_1, \dots, \rho_n$  dividem  $P$  em  $n$  triângulos  $T_1, \dots, T_n$ .

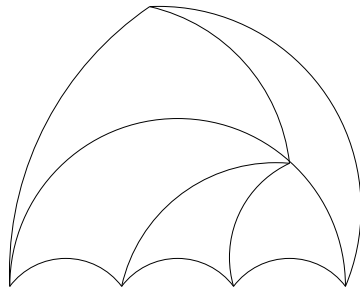


Figura 4.9: Decomposição de um pentágono hiperbólico em triângulos hiperbólicos

Suponha que cada triângulo  $T_k$  tem vértices  $x$ ,  $v_k$  e  $v_{k+1}$ , com  $1 \leq k \leq n$ , onde  $v_{n+1} = v_1$  e  $T_{n+1} = T_1$ . Seja  $\mu_k$  o ângulo interno de  $T_k$  em  $x$ . Logo,

$$\sum_{k=1}^n \mu_k = 2\pi.$$

Sejam  $\beta_k$  o ângulo interno de  $T_k$  em  $v_k$  e  $\delta_k$  o ângulo interno de  $T_k$  em  $v_{k+1}$ . Como  $T_k$  e  $T_{k+1}$  têm vértice em  $v_{k+1}$ , temos que

$$\alpha_{k+1} = \delta_k + \beta_{k+1}. \quad (4.3)$$

Aplicando o Teorema 18 a  $T_k$ , temos

$$A_{\mathbb{H}}(T_k) = \pi - (\mu_k + \beta_{k+1} + \delta_k).$$

Como  $P = T_1 \cup \dots \cup T_n$  e como os triângulos hiperbólicos  $T_1, \dots, T_n$  se interceptam somente em seus lados, obtemos

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{H}}(P) &= \sum_{k=1}^n A_{\mathbb{H}}(T_k) = \sum_{k=1}^n [\pi - (\mu_k + \beta_{k+1} + \delta_k)] \\ &= n\pi - \left[ \sum_{k=1}^n \mu_k + \sum_{k=1}^n \beta_{k+1} + \sum_{k=1}^n \delta_k \right]. \end{aligned}$$

Utilizando 4.3 na expressão anterior, temos então que

$$A_{\mathbb{H}}(P) = \sum_{k=1}^n A_{\mathbb{H}}(T_k) = (n-2)\pi - \sum_{k=1}^n \alpha_k.$$

□

# Bibliografia

- [1] J. W. Anderson, *Hyperbolic Geometry*, Springer-Verlag, London, 1999.
- [2] J. L. M. Barbosa, *Geometria Euclidiana Plana*. 9.ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2000.
- [3] J. L. M. Barbosa, *Geometria Hiperbólica*. 1.ed., UFG, Goiânia, 2002.
- [4] M. P. do Carmo, Geometrias Não-Euclidianas. *Matemática Universitária*, N. 6: 25-48, 1987.
- [5] S. I. R. Costa e S. A. Santos, Geometrias Não-Euclidianas. *Ciência Hoje*, Vol 11: 15-23, 1990.
- [6] T. Needham, *Visual Complex Analysis*, Oxford University Press Inc., New York, 1997.