Aspectos Combinatórios da Teoria Aditiva dos Números

José Plínio de O. Santos[1]
Instituto de Matemática, Estatística e Comp. Científica - IMECC
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Robson da Silva[2]
Instituto de Ciências Exatas - ICE
Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI

[1]josepli@ime.unicamp.br
[2]rsilva@unifei.edu.br

Conteúdo

Apresentação

Nosso objetivo ao redigirmos este texto é o de apresentarmos questões básicas da Teoria Aditiva de Números onde os aspectos combinatórios recebem especial destaque.

Introduzimos as funções geradoras, importante ferramenta nesta área, que é muito utilizada no estudo de partições. Damos especial atenção às chamadas provas "bijetivas" nas quais argumentos de natureza combinatória são essenciais. Relacionados com a representação gráfica de partições vários resultados são estudados com destaque para os Polinômios de Gauss. Apresentamos, também, uma prova combinatória para o Teorema dos Números Pentagonais de Euler dada por Franklin e um prova semelhante a esta para um resultado relacionado aos números triangulares dada em [8]. Novas representações matriciais para partições, recentemente introduzidas em [10], são discutidas.

Com relação aos pré-requisitos, vale mencionar que apenas conhecimentos básicos de Cálculo e Álgebra linear são suficientes.

Capítulo 1

Funções geradoras

1.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos uma das principais ferramentas para a solução de problemas de contagem. Essa técnica teve origem nos trabalhos de A. De Moivre (1667-1754) e, posteriormente, foi empregada por L. Euler (1707-1783) em problemas da Teoria Aditiva de Números, por S. Laplace (1749-1827) na Teoria de Probabilidade e por N. Bernoulli (1687-1759) no estudo de Parmutações caóticas.

Antes de formalizar o conceito de função geradora, vamos examinar o seguinte problema: *encontrar o número de soluções em inteiros não-negativos da equação* $x_1 + x_2 + x_3 = 11$*, sendo* $x_1 \in \{1, 2, 3\}$ *e* $x_2, x_3 \in \{4, 5\}$. Definimos três polinômios, um para cada variável, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^1 + x^2 + x^3; \\ p_2(x) &= x^4 + x^5; \\ p_3(x) &= x^4 + x^5. \end{aligned}$$

Note que os expoentes em $p_1(x)$ são os valores possíveis para a variável x_1 e os expoentes em $p_2(x)$ e $p_3(x)$ são os valores que podem assumir x_2 e x_3. Considere agora a expansão do produto desses três polinômios:

$$\begin{aligned} p(x) &= p_1(x)p_2(x)p_3(x) \\ &= (x^1+x^2+x^3)(x^4+x^5)(x^4+x^5) \\ &= x^9+3x^{10}+4x^{11}+3x^{12}+x^{13} \end{aligned}$$

Olhando para esta expansão, notamos que não há potências de x inferiores a 9. Isso quer dizer que não há termos, um em cada polinômio, tendo por soma dos respectivos expoentes um número inferior a 9 Também não há expoentes maiores do que 13. Observemos ainda que os coeficientes de $x^9, x^{10}, x^{11}, x^{12}$ e x^{13} são, respectivamente, os números de escolhas possíveis para os expoentes em $p_1(x), p_2(x)$ e $p_3(x)$ de modo que a soma dê $9, 10, 11, 12$ e 13. Portanto a resposta ao nosso problema é 4: $x^1x^5x^5$ ($x_1 = 1, x_2 = 5$ e $x_3 = 5$), $x^2x^4x^5$ ($x_1 = 2, x_2 = 4$ e $x_3 = 5$), $x^2x^5x^4$ ($x_1 = 2, x_2 = 5$ e $x_3 = 4$) e $x^3x^4x^4$ ($x_1 = 3, x_2 = 4$ e $x_3 = 4$).

Consideremos agora um outro problema onde, novamente, a introdução de certos polinômios revela-se útil. Suponhamos uma caixa contendo quatro bolas: duas amarelas, uma branca e uma cinza. Representando por a, b e c, respectivamente, as bolas de cor amarela, branca e cinza, podemos listar todas as possibilidades de tirarmos uma ou mais bolas desta caixa:

maneiras de tirar uma bola: a, b, c;
maneiras de tirar duas bolas: aa, ab, ac, bc;
maneiras de tirar três bolas: aab, aac, abc;
maneiras de tirar quatro bolas: $aabc$.

Associamos o polinômio $1 + ax + a^2x^2$ às bolas de cor amarela; às bolas de cor branca e cinza associamos, respectivamente, os polinômios $1 + bx$ e $1 + cx$.

Interpretamos o polinômio $1 + ax + a^2x^2$ da seguinte forma: o termo ax significa que uma bola de cor amarela foi escolhida, o termo a^2x^2 que duas amarelas foram escolhidas e o termo constante $1 (= x^0)$ que nenhuma bola amarela foi escolhida. De forma análoga, interpretamos os polinômios $1 + bx$ e $1 + cx$. Cada um destes polinômios controla, portanto, a presença de bolas de uma determinada cor. Olhamos, agora, para o produto destes três polinômios:
$(1 + ax + a^2x^2)(1 + bx)(1 + cx) =$
$1 + (a+b+c)x + (a^2+ab+ac+bc)x^2 + (a^2b+a^2c+abc)x^3 + (a^2bc)x^4.$

Como se pode observar, este produto nos fornece, diretamente, a lista de possibilidades obtida acima. O termo a^2, que aparece no coeficiente de x^2, surgiu ao tomarmos a^2x^2 no primeiro polinômio, o termo 1 (significa "não" pegar b) em $1 + bx$ e o termo 1 (significa "não" pegar c) em $1 + cx$, isto é, devemos tomar duas bolas amarelas, nenhuma bola branca e nenhuma bola cinza. O termo acx^2, que surgiu do produto $(ax)(1)(cx)$, significa a retirada de uma bola amarela, nenhuma branca e uma cinza. Observe que o expoente de x representa o número de bolas retiradas da caixa e o coeficiente, a lista destas possibilidades.

Caso estivéssemos interessados, não na listagem das diferentes escolhas possíveis, mas somente no número de tais diferentes escolhas, bastaria tomarmos, no produto dos três polinômios, $a = b = c = 1$, obtendo

$$(1 + ax + a^2x^2)(1 + bx)(1 + cx) = 1 + 3x + 4x^2 + 3x^3 + 1x^4,$$

o qual nos diz que existem 3 maneiras de retirarmos apenas uma bola, 4 de retirarmos duas bolas, 3 de retirarmos três bolas, 1 de retirarmos quatro bolas e $1(= 1x^0)$ de não retirarmos nenhuma bola.

Dizemos que o polinômio

$$1 + 3x + 4x^2 + 3x^3 + 1x^4$$

é a função geradora para o problema apresentado, uma vez que a seqüência formada pelos seus coeficientes, $1, 3, 4, 3, 1$, fornece-nos as respostas para este problema de contagem.

Agora que já temos uma noção do que seja uma função geradora, vamos definí-la formalmente a seguir.

1.2 Função geradora ordinária

Definição 1.1. *Uma série de potências é uma soma infinita da forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$, onde a_i, para $i = 1, 2, 3, ...$, são números reais e x é uma variável.*

Por esta definição, qualquer polinômio em x é uma série de potências. Por exemplo, o polinômio $2x + 3x^3 + x^4$ pode ser escrito como $0 + 2x + 0x^2 + 3x^3 + 1x^4 + 0x^5 + 0x^6 + \cdots$.

Definição 1.2. *Dada a seqüência* (a_r)*, a função geradora ordinária para esta seqüência é definida como a série de potências*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots .$$

Exemplo 1.1. *Encontrar a função geradora ordinária* $f(x)$ *na qual o coeficiente* a_r *de* x^r *é o número de soluções inteiras positivas de*

$$\begin{aligned}&x_1 + x_2 + x_3 = r, \ \textit{onde } r \in \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\},\\ &2 \le x_i \le 4, \ \textit{para } i = 1, 2,\\ &5 \le x_3 \le 7.\end{aligned}$$

Por analogia ao que vimos no início deste capítulo, a solução a_r para este problema é o coeficiente de x^r na espansão do produto

$$(x^2 + x^3 + x^4)^2(x^5 + x^6 + x^7),$$

sendo, portanto, esta série de potências, a função geradora ordinária procurada.

Exemplo 1.2. *Encontrar a função geradora ordinária* $f(x)$ *na qual o coeficiente* a_r *de* x^r *é o número de soluções inteiras não-negativas da equação* $2x + 3y + 7z = r$*.*

Escrevendo $x_1 = 2x, y_1 = 3y$ e $z_1 = 7z$, temos

$$x_1 + y_1 + z_1 = r,$$

com a restrição de que x_1 seja múltiplo de 2, y_1 múltiplo de 3 e z_1 múltiplo de 7. Desta forma, a série de potências cujos expoentes são os possíveis valores de x_1 é

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots .$$

Para y_1 e z_1, temos, respectivamente,

$$1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \cdots$$

e

$$1 + x^7 + x^{14} + x^{21} + x^{28} + \cdots .$$

Desta forma, a função geradora ordinária $f(x)$ é dada por:
$f(x) = (1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \cdots)$
$(1 + x^7 + x^{14} + x^{21} + x^{28} + \cdots)$.

Neste produto é fácil ver que o coeficiente de x^6 é igual a 2, isto é, x^6 só aparece ao tomarmos x^6 no primeiro fator e 1 nos dois outros, ou 1 no primeiro e no último e x^6 no segundo. Como x^6, no primeiro, significa atribuir o valor 6 para x_1 ($x_1 = 2x$), temos que uma solução para $2x + 3y + 7z = 6$ é $x = 3, y = 0, z = 0$. O outro caso, x^6 so segundo fator e 1 nos restantes, isto é, $y_1 = 6(y_1 = 3y)$, dá a solução $x = 0, y = 2, z = 0$ para $2x + 3y + 7z = 6$.

Vamos agora olhar algumas séries de potências com o objetivo de obter a seqüência gerada.

Pela definição de função geradora ordinária acima, é fácil ver que a função dada por

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots\ ,$$

é a função geradora para a seqüência $a_r = 1$, para $r = 0, 1, 2, 3, ...$

Sabemos que, para $|x| < 1$,

$$f(x) = \frac{1}{1 - x}, \tag{1.1}$$

uma vez que (1.1) não define uma função para valores de x com $|x| \geq 1$. Em Cálculo, quando consideramos expressões como (1.1), estamos interessados na função definida por ela e, portanto, no problema da convergência, isto é, nos valores de x para os quais $f(x)$ é finito. No contexto de funções geradoras, estaremos interessados somente no cálculo dos coeficientes destas funções e raramente precisaremos atribuir valores à variável x. Por este motivo, vamos manipular tais séries sem nenhuma preocupação com questões de convergência. Quando vistas desta maneira, estas séries são chamadas *séries de potências formais.*

Exemplo 1.3. *Encontrar a função geradora ordinária para a seqüência* $(a_r) = (0, 0, 1, 1, 1, 1, ...)$.

É claro que a série de potências procurada é igual a

$$f(x) = 0 + 0x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots\ ,$$

mas sempre que estivermos interessados em obter a função geradora, estaremos interessados numa expressão simples (chamada "forma fechada") para a resposta. Nestes caso, é fácil ver que

$$f(x) = x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots = x^2(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots) = x^2\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Exemplo 1.4. *Encontrar a seqüência cuja função geradora ordinária é:*

$$g(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Sabemos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots .$$

Logo, basta substituirmos x por x^2 nesta última expressão, obtendo

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots .$$

Portanto, $g(x)$ é a função geradora ordinária da seqüência

$$(a_r) = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...).$$

Exemplo 1.5. *Encontrar a função geradora ordinária para a seqüência*

$$(a_r) = \left(1, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, ...\right).$$

Sabemos que a expansão em série de potências da função exponencial é igual a:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots .$$

Logo, a função procurada é e^x.

Exemplo 1.6. *Encontrar a seqüência cuja função geradora ordinária é* $x^2 + x^3 + e^x$.

Como

$$\begin{aligned} x^2 + x^3 + e^x &= x^2 + x^3 + \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) \\ &= 1 + x + \left(1 + \frac{1}{2!}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{3!}\right)x^3 + \frac{x^4}{4!} + \cdots \end{aligned},$$

a seqüência gerada por esta função é:

$$(a_r) = \left(1, 1, 1 + \frac{1}{2!}, 1 + \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{5!}, ...\right).$$

Exemplo 1.7. *Encontrar a função geradora ordinária para a seqüência*

$$(a_r) = \left(\frac{2^r}{r!}\right).$$

Observando os coeficientes de x^r em

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots,$$

é fácil ver que a substituição de x por $2x$, isto é, calculando-se e^{2x}, teremos:

$$\begin{aligned} e^{2x} &= 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \cdots + \frac{(2x)^r}{r!} + \cdots \\ &= 1 + \left(\frac{2^1}{1!}\right)x + \left(\frac{2^2}{2!}\right)x^2 + \left(\frac{2^3}{3!}\right)x^3 + \cdots + \left(\frac{2^r}{r!}\right)x^r + \cdots. \end{aligned}$$

Apresentamos a seguir um teorema que fornece propriedades importantes das funções geradoras.

Teorema 1.1. *Sendo $f(x)$ e $g(x)$ as funções geradoras das seqüências (a_r) e (b_r), respectivamente, temos:*

1. *$Af(x) + Bg(x)$ é a função geradora para a seqüência $(Aa_r + Bb_r)$;*

2. $f(x)g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(a_k b_{n-k})\right)x^n$;

3. *A função geradora para* $(a_0 + a_1 + \cdots + a_r)$ *é igual a* $(1 + x + x^2 + \cdots)f(x)$;

4. *A função geradora para* (ra_r) *é igual a* $xf'(x)$, *onde* $f'(x)$ *é a derivada de* f *com respeito a* x;

5. $\displaystyle\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$.

Demonstração:

1. Como $f(x)$ e $g(x)$ são as funções geradoras de (a_r) e (b_r), respectivamente, temos

$$\begin{array}{l} f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \\ g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots \end{array}$$

e, portanto,

$$\begin{array}{ll} Af(x) + Bg(x) & = Aa_0 + Aa_1x + Aa_2x^2 + Aa_3x^3 + \cdots \\ & +Bb_0 + Bb_1x + Bb_2x^2 + Bb_3x^3 + \cdots \\ & = (Aa_0+Bb_0) + (Aa_1+Bb_1)x + (Aa_2+Bb_2)x^2 + \cdots, \end{array}$$

o que prova ser $Af(x) + Bg(x)$ a função geradora para a seqüência $(Aa_r + Bb_r)$.

2. Temos que

$$\begin{array}{lll} f(x)g(x) & = & (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \\ & & \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0)x^n + \cdots \\ & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(a_k b_{n-k})\right)x^n \end{array}$$

3. Basta tomar $b_r = 1$, ou seja, $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, em 2. para se obter a função geradora para $(a_0 + a_1 + \cdots + a_r)$.

Os demais itens desta prova são deixados como exercício. ■

De posse desse teorema, podemos encontrar funções geradoras para outras seqüências.

Exemplo 1.8. *Encontrar a função geradora ordinária para a seqüência* $a_r = r$.

Lembrando que a função geradora para a seqüência $(1, 1, 1, 1...)$ é

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^r + \cdots ,$$

aplicando o item 4. do teorema acima, a função geradora ordinária procurada é $xf'(x)$. De fato, como

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + rx^{r-1} + \cdots ,$$

logo

$$xf'(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots + rx^r + \cdots .$$

Exemplo 1.9. *Encontrar a função geradora ordinária para a seqüência* $a_r = r^2$.

No exemplo anterior vimos que

$$xf'(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots + rx^r + \cdots .$$

Para que o coeficiente de x^r seja r^2, basta tomarmos a derivada desta função e multiplicá-la por x, isto é:

$$\begin{aligned} x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' &= x(1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \cdots + r^2x^{r-1} + \cdots) \\ &= 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + \cdots + r^2x^r + \cdots . \end{aligned}$$

Assim,

$$x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

é a função geradora procurada.

Exemplo 1.10. *Encontrar a função geradora ordinária para a seqüência $a_k = 1/k$, para $k \geq 1$.*

Precisamos de uma série de potências em que o coeficiente de x^k seja $1/k$. Sabemos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^r + \cdots .$$

Se integrarmos, com relação a x, ambos os lados desta igualdade, teremos:

$$\int \frac{1}{1-x} dx = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots .$$

Como

$$\int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x),$$

a função procuara é $-\ln(1-x)$.

Como já mencionamos anteriormente, quando trabalhamos com funções geradoras, não atribuímos valores numéricos à variável x, por isto, não estamos nos preocupando com questões de convergência.

O teorema a seguir, conhecido como Teorema binomial, apresenta uma generalização do coeficiente binomial. Sua prova é baseada na expansão em Série de Taylor, em torno de 0, da função $f(x) = (1+x)^u$, onde u é um número real arbitrário.

Teorema 1.2. *Para $|x| < 1$ temos:*

$$(1+x)^u = 1 + ux + \frac{u(u-1)}{2}x^2 + \frac{u(u-1)\cdots(u-r+1)}{r!}x^r + \cdots .$$

Denotando por

$$\binom{u}{r} = \begin{cases} \dfrac{u(u-1)\cdots(u-r+1)}{r!}, & \textit{se } r > 0, \\ 1, & \textit{se } r = 0, \end{cases}$$

temos

$$(1+x)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^r. \tag{1.2}$$

O número $\binom{u}{r}$, definido acima, é chamado de *coeficiente binomial generalizado*. Caso u seja igual a um inteiro positivo n, então $\binom{u}{r}$ será o velho conhecido coeficinte binomial e, como $\binom{u}{r}$ é zero para $r > u$, a expansão acima se reduzirá à expansão binomial usual.

Teorema 1.3. *O coeficiente de x^p na expansão de*

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n$$

é igual a C^p_{n+p-1}.

Demonstração: Basta aplicarmos o teorema anterior, uma vez que

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n}.$$

Substituindo, em (1.2), x por $-x$ e u por $-n$ temos:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-x)^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-1)^r x^r.$$

Pela definição do coeficiente binomial generalizado temos que o coeficiente de x^p é igual a:

$$\begin{aligned}
\binom{-n}{p}(-1)^p &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-p+1)(-1)^p}{p!} \\
&= \frac{(-1)^p(n)(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)(-1)^p}{p!} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{p!} \\
&= \frac{(n+p-1)(n+p-2)\cdots(n+1)n(n-1)!}{p!(n-1)!} \\
&= \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} \\
&= \binom{n+p-1}{p},
\end{aligned}$$

o que termina a demonstração. ■

Exemplo 1.11. *Usar o Teorema binomial para encontrar o coeficiente de x^3 na expansão de $(1+4x)^{1/2}$.*

Substituindo x por $4x$ e u por $1/2$ em (3.2), temos:

$$\begin{aligned}(1+4x)^{1/2} &= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{r}(4x)^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} 4^r\frac{(1/2)(1/2-1)\cdots(1/2-r+1)}{r!}x^r.\end{aligned}$$

Logo, o coeficiente de x^3 é dado por:

$$4^3\frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-3+1)}{3!} = 4^3\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{3!} = \frac{4^3\cdot 3}{2^3\cdot 3\cdot 2} = 4.$$

Exemplo 1.12. *Sendo $(1+x)^{1/4}$ a função geradora ordinária para a seqüência (a_r), encontrar a_2.*

Basta tomarmos o coeficiente de x^2 na expansão de $(1+x)^{1/4}$:

$$(1+x)^{1/4} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{4}}{r}x^r = 1 + \frac{1}{4}x + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2!}x^2 + \cdots.$$

Logo,

$$a_2 = \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2} = -\frac{3}{32}.$$

Exemplo 1.13. *Encontrar uma expressão para o número de maneiras de se distribuir r objetos idênticos em n caixas distintas, com a restrição de que cada caixa contenha pelo menos q objetos e no máximo $q+z-1$ objetos.*

É fácil ver que a função geradora que "controla" o número de objetos numa caixa é

$$x^q + x^{q+1} + \cdots + x^{q+z-1}.$$

Como são n caixas, a resposta para o nosso problema será o coeficiente de x^r em

$$(x^q + x^{q+1} + \cdots + x^{q+z-1})^n = x^{qn}(1 + x + x^2 + \cdots + x^{z-1})^n.$$

Usando o fato de que

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{z-1} = \frac{1 - x^z}{1 - x},$$

segue que

$$(x^q + x^{q+1} + \cdots + x^{q+z-1})^n = x^{qn} \left(\frac{1 - x^z}{1 - x} \right)^n.$$

Portanto, o coeficiente de x^r nesta última expressão é igual ao coeficiente de x^{r-qn} em

$$\left(\frac{1 - x^z}{1 - x} \right)^n.$$

Exemplo 1.14. *Encontrar o número de maneiras nas quais* 4 *pessoas, cada uma jogando um único dado, podem obter um total de* 17*.*

Utilizando o problema anterior podemos olhar para as pessoas como sendo as "caixas distintas" ($n = 4$) e 17 como os r objetos idênticos. Como num dado os possíveis resultados variam de 1 a 6, tomamos $q = 1$ e $q + z - 1 = 6$, donde $z = 6$. De acordo com o problema anterior, precisamos do coeficiente de $x^{r-qn} = x^{17-1\cdot 4} = x^{13}$ na expansão de

$$\left(\frac{1 - x^6}{1 - x} \right)^4 = (1 - x^6)^4 (1 - x)^{-4}.$$

Como

$$(1 - x^6)^4 = 1 - 4x^6 + 6x^{12} - 4x^{18} + x^{24}$$

e, por (1.2),

$$\begin{aligned} (1 - x)^{-4} &= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-4}{r} (-x)^r \\ &= 1 + \frac{4}{1!}x + \frac{4 \cdot 5}{2!}x^2 + \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{3!}x^3 + \cdots, \end{aligned}$$

vemos que o coeficiente de x^{13} em

$$(1 - x^6)^4 (1 - x)^{-4}$$

é

$$\frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots 16}{13!} - 4 \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots 10}{7!} + 6 \frac{4}{1!} = 104.$$

Exemplo 1.15. *De quantas maneiras diferentes podemos escolher 12 latas de cerveja se existem 5 marcas diferentes?*

Como não há nenhuma restrição com relação ao número de latas de uma determinada marca, a função geradora ordinária que "controla" o número de latas de uma determinada marca é

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{12}.$$

Como são 5 as marcas, a presposta será o coeficiente de x^{12} na expansão de

$$\begin{aligned}(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{12})^5 &= \left(\frac{1 - x^{13}}{1 - x}\right)^5 \\ &= (1 - x^{13})^5(1 - x)^{-5}.\end{aligned}$$

Como

$$(1 - x^{13})^5 = 1 - 5x^{13} + 10x^{26} - 10x^{39} + 5x^{52} - x^{65},$$

vemos que o coeficiente de x^{12} no produto acima é o coeficiente de x^{12} em $(1 - x)^{-5}$. Como

$$(1 - x)^{-5} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-5}{r} (-x)^r,$$

o coeficiente de x^{12} é

$$\binom{-5}{12}(-1)^{12} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdots 16}{12!} = 1.820.$$

Observe que este exemplo é um caso particular do Exemplo 1.13, onde $q = 0, q + z - 1 = 12$ (logo $z = 13$) e $n = 5$.

1.2.1 Exercícios

1. Encontrar a função geradora ordinária para cada uma das seqüências abaixo:
   (a) $(1, 1, 1, 0, 0, 0, ...)$;
   (b) $(1, 0, 0, 2, 3, 0, 0, 0, ...)$;
   (c) $(1, 1, 1, 3, 1, 1, 1, ...)$;
   (d) $(0, 0, 1, 1, 1, ...)$;
   (e) $(1, -1, 1, -1, 1, -1, ...)$;
   (f) $(1, -1, \frac{1}{2!}, \frac{-1}{3!}, \frac{1}{4!}, \frac{-1}{5!}, ...)$;
   (g) $(a_k) = \left(\frac{2^k}{k!}\right)$.
   (h) $\left(1, 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, ...\right)$
   (i) $\left(\frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{5!}, ...\right)$
   (j) $\left(1, -1, \frac{1}{2!}, -\frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, -\frac{1}{5!}, ...\right)$
   (k) $\left(3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{3}, -\frac{3}{4}, ...\right)$

2. Encontrar a seqüência gerada pelas funções geradoras ordinárias dadas abaixo:
   (a) $(1 + x)^4$;
   (b) $x + e^x$;
   (c) $x^2(1 - 3x)^{-1}$;
   (d) $1 + (1 - x^2)^{-2}$;
   (e) xe^x;
   (f) $e^{2x} + x + x^2$;
   (g) $\frac{1}{1 + x^2}$;

(h) $x^3(1-4x)^{-1}$;

(i) e^{-2x};

(j) $\dfrac{x^5}{1-x}$;

(k) $\dfrac{1}{1+8x}$.

3. Encontrar o coeficiente de x^6 em $(1-x)^n$, quando $n = 6$ e quando $n = -6$.

4. Encontrar o coeficiente de x^{27} em $(x^3 + x^4 + x^5 + \cdots)^6$.

5. Em cada um dos itens abaixo encontrar a função geradora para o problema, sem calcular a resposta. Explicitar o que é necessário procurar para encontrar a resposta (por exemplo, o coeficiente de x^{10}).

   (a) De quantas maneiras 5 letras podem ser escolhidas do conjunto $\{a, b, c, d\}$ se b, c e d podem ser escolhidas no máximo uma vez e a, se for escolhida, deve ser escolhida 4 vezes?

   (b) De quantas maneiras podemos distribuir 15 bolas idênticas em 10 cestas distintas?

   (c) Repetir o item anterior considerando agora que nenhuma cesta pode ficar vazia.

6. Encontrar o número de maneiras de se obter um total de 15 pontos ao se jogar, simultaneamente, quatro dados diferentes.

7. Representantes de três institutos de pesquisa devem formar uma comissão de 9 pesquisadores. De quantos modos se pode formar esta comissão sendo que nenhum instituto deve ter maioria absoluta no grupo?

8. Encontrar a função geradora ordinária para se calcular o número de soluções em inteiros não-negativos da equação

$$2x + 3y + 4z + 5w = 40.$$

9. Encontrar o número de soluções em inteiros da equação $x + y + z + w = 25$, onde cada variável é no mínimo 3 e no máximo 8.

1.3 Função geradora exponencial

Vamos descrever esse tipo de função geradora por meio de um exemplo. Como vamos ver, existem vantagens em relação às funções geradoras ordinárias.

Suponha que dispomos de três tipos diferentes de livros, a, b e c, e que desejamos retirar quatro livros e colocá-los em ordem numa prateleira, sendo que o livro a pode ser retirado no máximo uma vez, o livro b no máximo três vezes e o livro c no máximo duas vezes. De quantas maneiras podemos retirar esses quatro livros?

Vamos considerar primeiramente apenas a função geradora ordinária que já conhecemos e que nos fornecerá as possíveis escolhas (com as restrições impostas) mas sem dar importância à ordem. Como sabemos, tal função é dada por:

$$\begin{aligned}
&(1+ax)(1+bx+b^2x^2+b^3x^3)(1+cx+c^2x^2) = \\
&= \quad 1+(a+b+c)x+(b^2+ab+bc+ac+c^2)x^2 \\
&\qquad +(b^3+ab^2+ac^2+b^2c+abc+bc^2)x^3 \\
&\qquad +(ab^3+b^3c+ab^2c+b^2c^2+abc^2)x^4 \\
&\qquad +(ab^3c+b^3c^2+ab^2c^2)x^5+ab^3c^2x^6.
\end{aligned}$$

Como se pode observar, o coeficiente de x é a lista de todas as possíveis escolhas de apenas um livro, o coeficiente de x^2 das escolhas de dois livros e assim por diante. Observando o coeficiente de x^4, notamos que existem cinco maneiras de se retirar quatro livros com as restrições impostas. Como pretendemos ordenas os 4 livros, quando retiramos ab^3, isto é, um livro a e três livros b, podemos ordená-los de $4!/(1!3!)$ maneiras diferentes. Isto é um caso de permutação com repetição. Os quatro livro ab^2c podem ser ordenados de $4!/(1!2!1!)$ maneiras distintas, b^2c^2 de $4!/(2!2!)$, e assim por diante. No termo ab^3x^4, que surgiu do produto $(ax)(b^3x^3)$, gostaríamos de ter obtido o fator $4!/(1!3!)$. Na realidade, considerando-se todas as possíveis retiradas distintas acima, gostaríamos de obter:

$$\left(\frac{4!}{1!3!}+\frac{4!}{3!1!}+\frac{4!}{1!2!1!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{1!1!2!}\right).$$

Para isto, vamos alterar os polinômios que “controlam” a presença de cada tipo de livro introduzindo no coeficiente de x^n o fator $1/n!$. Feito isto, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{a}{1!}x\right)\left(1+\frac{b}{1!}x+\frac{b^2}{2!}x^2+\frac{b^3}{3!}x^3\right)\left(1+\frac{c}{1!}x+\frac{c^2}{2!}x^2\right)=\\
&= \quad 1+\left(\frac{a}{1!}+\frac{b}{1!}+\frac{c}{1!}\right)x+\left(\frac{b^2}{2!}+\frac{ab}{1!1!}+\frac{bc}{1!1!}+\frac{ac}{1!1!}+\frac{c^2}{2!}\right)x^2\\
&\quad +\left(\frac{b^3}{3!}+\frac{ab^2}{1!2!}+\frac{ac^2}{1!2!}+\frac{b^2c}{2!1!}+\frac{abc}{1!1!1!}+\frac{bc^2}{1!2!}\right)x^3\\
&\quad +\left(\frac{ab^3}{1!3!}+\frac{b^3c}{3!1!}+\frac{ab^2c}{1!2!1!}+\frac{b^2c^2}{2!2!}+\frac{abc^2}{1!1!2!}\right)x^4\\
&\quad +\left(\frac{ab^3c}{1!3!1!}+\frac{b^3c^2}{3!2!}+\frac{ab^2c^2}{1!2!2!}\right)x^5+\frac{ab^3c^2}{1!3!2!}x^6.
\end{aligned}$$

Agora o coeficiente de x^4 é

$$\left(\frac{ab^3}{1!3!}+\frac{b^3c}{3!1!}+\frac{ab^2c}{1!2!1!}+\frac{b^2c^2}{2!2!}+\frac{abc^2}{1!1!2!}\right),$$

que ainda não é exatamente o que desejamos. Se multiplicarmos e dividirmos por 4! esta expressão, obtemos:

$$\left(\frac{4!}{1!3!}ab^3+\frac{4!}{3!1!}b^3c+\frac{4!}{1!2!1!}ab^2c+\frac{4!}{2!2!}b^2c^2+\frac{4!}{1!1!2!}abc^2\right)\frac{1}{4!}.$$

Logo, o número procurado, tomando-se $a=b=c=1$, será o coeficiente de $x^4/4!$ na expansão de

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{x}{1!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)=\\
&= \quad 1+3\frac{x}{1!}+\left(\frac{2!}{2!}+\frac{2!}{1!1!}+\frac{2!}{1!1!}+\frac{2!}{1!1!}+\frac{2!}{2!}\right)\frac{x^2}{2!}\\
&\quad +\left(\frac{3!}{3!}+\frac{3!}{1!2!}+\frac{3!}{1!2!}+\frac{3!}{2!1!}+\frac{3!}{1!1!1!}+\frac{3!}{1!2!}\right)\frac{x^3}{3!}\\
&\quad +\left(\frac{4!}{1!3!}+\frac{4!}{3!1!}+\frac{4!}{1!2!1!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{1!1!2!}\right)\frac{x^4}{4!}\\
&\quad +\left(\frac{5!}{1!3!1!}+\frac{5!}{3!2!}+\frac{5!}{1!2!2!}\right)\frac{x^5}{5!}=\frac{6!}{1!3!2!}\frac{x^6}{6!}.
\end{aligned}$$

Com as restrições impostas podemos retirar cinco livros de três maneiras diferentes, ab^3c, b^3c^2 e ab^2c^2. Sabemos que os cinco livros ab^3c podem ser ordenados de $5!/(1!3!1!)$ maneiras diferentes, b^3c^2 de $5!/(3!2!)$ e ab^2c^2 de $5!/(1!2!2!)$. A soma destes três números é dada diretamente pelo coeficiente de $x^5/5!$ no produto acima.

Definição 1.3. *A série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + a_4 \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

é a função geradora exponencial para a seqüência (a_r).

Utilizamos a função geradora exponencial quando a ordem dos objetos retirados deve ser considerada. Caso contrário, utilizamos, como vimos anteriormente, a função geradora ordinária.

Exemplo 1.16. *Determinar a função geradora exponencial para se encontrar o número de seqüências de k letras* $(k \leq 6)$ *formadas pelas letras* a, b *e* c*, onde a letra* a *ocorre no máximo um vez, a letra* b *no máximo duas vezes e a letra* c *no máximo três vezes.*

Devemos considerar o produto dos três polinômios abaixo onde cada um "controla" a presença das letras a, b e c, respectivamente:

$$\begin{aligned}(1+x)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right) &= \\ = \quad 1+3x+4x^2+\frac{19}{6}x^3+\frac{10}{3}x^4+\frac{1}{2}x^5+\frac{1}{6}x^6.\end{aligned}$$

Como estamos interessados na seqüência dos coeficientes de $x^r/r!$, devemos reescrever este polinômio na forma:

$$1 + 3\frac{x}{1!} + 8\frac{x^2}{2!} + 19\frac{x^3}{3!} + 80\frac{x^4}{4!} + 60\frac{x^5}{5!} + 120\frac{x^6}{6!}.$$

Como as possíveis maneiras de retirarmos duas letras são ab, ac, bc, cc e bb, e, como a ordem agora nos interessa, temos $ab, ba, ac, ca, bc, cb, cc$ e bb, isto é, oito maneiras diferentes de retirarmos duas letras e ordená-las. Como pode ser visto na função geradora exponencial, 8 é o coeficiente de $x^2/2!$.

Exemplo 1.17. *Encontrar a função geradora exponencial para as seqüências:*
(a) $(3, 3, 3, ...)$;
(b) $a_k = 2^k$;
(c) $(1, 1, 0, 1, 1, ...)$;

(a) Observando a expressão

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

concluímos que a função procurada é $3e^x$.

(b) Basta observar que

$$\begin{aligned} e^{2x} &= 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \cdots + \frac{(2x)^r}{r!} + \cdots \\ &= 1 + 2\frac{x}{1!} + 2^2\frac{x^2}{2!} + 2^3\frac{x^3}{3!} + \cdots + 2^r\frac{x^r}{r!} + \cdots. \end{aligned}$$

(c) Na função procurada o coeficiente de $x^2/2!$ deve ser zero e os restantes iguais a 1. Logo, a função procurada é

$$e^x - \frac{x^2}{2!} = 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots.$$

Exemplo 1.18. *Encontrar o número de r-seqüências quaternárias*[1] *que contêm um número par de zeros.*

A função geradora exponencial para o dígito 0 é

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2r}}{2r!} \cdots = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Para controlar os dígitos 1, 2 e 3 temos a função

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots.$$

Logo, a função geradora exponencial para este problema é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})e^{3x} &= \frac{1}{2}(e^{4x} + e^{2x}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(4x)^r}{r!} + \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2x)^r}{r!}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(\sum_{r=1}^{\infty}4^r\frac{(x)^r}{r!} + \sum_{r=1}^{\infty}2^r\frac{(x)^r}{r!}\right) \\ &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2}(4^r + 2^r)\frac{x^r}{r!}. \end{aligned}$$

[1] uma r-seqüência quaternária é uma r-upla formada somente com os dígitos $0, 1, 2$ e 3

Portanto, o número de r-seqüências quaternárias contendo um número par de zeros é igual a $(4^r + 2^r)/2$.

Exemplo 1.19. *De quantas maneiras podemos acomodar 9 pessoas em 4 quartos sem que nenhum quarto fique vazio?*

Como nenhum quarto pode ficar vazio, então nenhum deles pode receber mais do que 6 pessoas. Como os quartos são diferentes e a ordem das pessoas dentro de cada quarto não importa, devemos usar função geradora exponencial. A função geradora para o problema é, portanto,

$$f(x) = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^6}{6!} \right)^4$$

e, a resposta, o coeficiente de $x^9/9!$ nesta função. Note que este expoente é o mesmo em

$$\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^6}{6!} + \cdots \right)^4 = (e^x - 1)^4,$$

uma vez que as potências extras acrescentadas não contribuem para o coeficiente de $x^9/9!$. Como

$$(e^x - 1)^4 = e^{4x} - 4e^{3x} + 6e^{2x} - 4e^x + 1,$$

é fácil ver que o coeficiente procurado é

$$4^9 - 4 \cdot 3^9 + 6 \cdot 2^9 - 4.$$

1.3.1 Exercícios

1. De quantas maneiras podemos formar palavras de $3n$ letras (isto é, selecionar $3n$ letras e ordená-las) de um conjunto de $2n$ as, $2n$ bs e $2n$ cs?

Capítulo 2

Partições de um inteiro

2.1 Introdução

Neste capítulo vamos apresentar o conceito de *partições de um inteiro.* Vamos estudar aspectos geométricos associados à representação gráfica das partições e, por fim, veremos como podemos empregar a técnica de funções geradoras para enumerar partições.

Definição 2.1. *Uma partição de um inteiro positivo n é uma coleção, não ordenada, de inteiros positivos cuja soma é n. Os números que compõem uma partição são chamados partes desta partição.*

Exemplo 2.1. *As partições de 3, 4, 5 e 6 estão listadas abaixo:*

3	4	5	6
$2+1$	$3+1$	$4+1$	$5+1$
$1+1+1$	$2+2$	$3+2$	$4+2$
	$2+1+1$	$3+1+1$	$4+1+1$
	$1+1+1+1$	$2+2+1$	$3+3$
		$2+1+1+1$	$3+2+1$
		$1+1+1+1+1$	$3+1+1+1$
			$2+2+2$
			$2+2+1+1$
			$2+1+1+1+1$
			$1+1+1+1+1+1$

Tabela 2.1: Partições de 3, 4, 5 e 6.

Vamos denotar por $p(n)$ o número de partições de n. Da tabela acima temos que $p(3) = 3$, $p(4) = 5$, $p(5) = 7$ e $p(6) = 11$. Para ilustrar quão rápido é o crescimento de $p(n)$ listamos alguns valores: $p(20) = 627$, $p(100) = 190.569.292$ e $p(200) = 3.972.999.029.388$. Existe uma fórmula exata para o cálculo de $p(n)$, ver [2]. Esta fórmula resultou do trabalho dos matemáticos S. Ramanujan, G.H. Hardy e H. Rademacher. As principais idéias para a obtenção desta genial fórmula foram do matemático indiano S. Ramanujan.

É claro, pela definição, que, numa partição de n, nenhuma parte supera n e que a ordem das partes não está sendo considerada. Se denotarmos por $p_k(n)$ o número de partições de n tendo k como a maior parte, a tabela anterior nos diz que $p_2(3) = 1$, $p_3(5) = 2$, $p_4(5) = 1$, $p_5(6) = 1$ e $p_3(6) = 3$. Para um inteiro positivo n qualquer, temos: $p_n(n) = 1$ e $p_k(n) = 0$ se $k > n$.

Da Tabela (2.1) podemos observar que

k	1	2	3	4	5	6
$p_k(6)$	1	3	3	2	1	1

Tabela 2.2: Valores para $p_k(6)$

Assim,

$$\sum_{k=1}^{6} p_k(6) = p(6)$$

e, em geral,

$$\sum_{k=1}^{n} p_k(n) = p(n).$$

Podemos também classificar o número de partições de n segundo o número de partes. Vamos denotar por $q_k(n)$ o número de partições de n tendo exatamente k partes. Assim, pela Tabela (2.1), temos a tabela a seguir com os valores de $q_k(6)$

k	1	2	3	4	5	6
$q_k(6)$	1	3	3	2	1	1

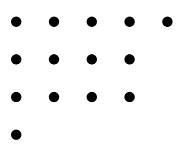
Tabela 2.3: Valores para $p_k(6)$

Podemos observar pelas Tabelas (2.2) e (2.3) que $p_k(6) = q_k(6)$, para $k = 1, 2, ..., 6$. Como veremos na próxima seção, essa igualdade vale em geral: $p_k(n) = q_k(n)$, para $k = 1, 2, ..., n$.

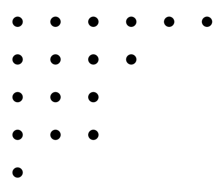
2.2 Representação gráfica de partições

Uma partição de um inteiro positivo n pode ser representada gráficamente por meio de um arranjo de n pontos no plano. Em cada linha deste arranjo colocamos, em ordem não-crescente, um número de pontos igual a cada uma de suas partes, conforme ilustrado no exemplo a seguir. Chamamos esta representação de *Gráfico de Ferrers* da partição.

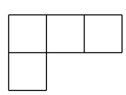
Exemplo 2.2. *Os Gráficos de Ferrers das partições* $5+4+4+1$ *e* $6+4+3+3+1$ *são, respectivamente,*



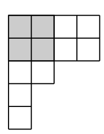
e



Muitas vezes é conveniente representar uma partição graficamente usando quadrados no lugar dos pontos acima. Por exemplo, abaixo temos o Gráfico de Ferrers da partição $3 + 1$ de 4.



Considere o gráfico de Ferrers da partição $4 + 4 + 2 + 1 + 1$:



Note que o quadrado em destaque é o maior possível que pode ser colocado “dentro” do gráfico de Ferrers da partição exigindo-se que seu canto superior esquerdo coincida com o canto superior esquerdo do gráfico de Ferrers. Este maior quadrado possível é chamado *Quadrado de Durfee* da partição. Dizemos, pois, que a partição $4+4+2+1+1$ tem Quadrado de Durfee de lado 2.

Se, no Gráfico de Ferrers de uma partição de n, trocarmos as linhas pelas colunas, obtemos o Gráfico de Ferrers de uma outra partição de n que chamamos de *Partição Conjugada* da partição considerada. Listamos a seguir algumas partições e suas respectivas partições conjugadas.

Exemplo 2.3. *Algumas partições e suas partições conjugadas:*

$5+4+2+1$	$4+3+2+2+1$
• • • • •	• • • •
• • • •	• • •
• •	• •
•	• •
	•

$4+4+2$	$3+3+2+2$
• • • •	• • •
• • • •	• • •
• •	• •
	• •

Como veremos nos resultados a seguir, a representação gráfica de uma partição revela-se de grande utilidade nas demonstrações.

Teorema 2.1. *O número $p_k(n)$ de partições de n tendo k como a maior parte é igual ao número $q_k(n)$ de partições de n com exatamente k partes, isto é, $p_k(n) = q_k(n)$.*

Demonstração: Pela operação "conjugação" definida no conjunto das partições[1] de n, vemos facilmente que toda partição tendo k como

[1]Vamos, a partir de agora, associar uma partição ao seu Gráfico de Ferrers de modo que, por exemplo, falaremos em conjugação de uma partição para nos referir a conjugação de seu Gráfico de Ferrers.

maior parte é transformada em uma partição que possui exatamente k partes e vice-versa. ■

Corolário 2.1. *Seja n um inteiro positivo. O número de partições de n com partes menores do que ou iguais a k é igual ao número de partiçõe de n com no máximo k partes.*

Demonstração: Basta usar, como na demonstração do teorema anterior, a operação "conjugação". ■

Teorema 2.2. *Seja n um inteiro positivo. Então, o número de partições de n em que cada parte aparece pelo menos duas vezes é igual ao número de partições de n em partes maiores do que 1 e tais que inteiros consecutivos não aparecem como partes.*

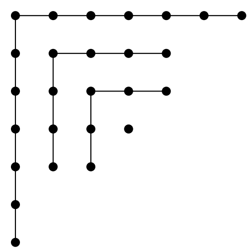
Demonstração: Uma vez mais, tomando-se a conjugada de uma partição em que cada parte aparece ao menos duas vezes, teremos exatamente uma partição em partes maiores do que 1 e com inteiros consecutivos não aparecendo como pares e vice-versa. Exemplo:

$$
\begin{array}{ccc}
5+5+3+3+3+1+1 & & 7+5+5+2+2 \\
\begin{array}{lllll}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & \\
\bullet & & & & \\
\bullet & & & &
\end{array}
& \longleftrightarrow &
\begin{array}{lllllll}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
\bullet & \bullet & & & & & \\
\bullet & \bullet & & & & &
\end{array}
\end{array}
$$

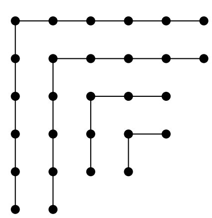
Note que o fato de cada parte aparecer pelo menos duas vezes implica que, na partição conjugada, a menor parte será pelo menos 2 e que inteiros consecutivos não poderão ocorrer como partes. ■

Dizemos que uma partição é *autoconjugada* se ela for igual a sua partição conjugada. Por exemplo, $3+2+1$ e $5+3+3+1+1$ são autoconjugadas, o que pode ser facilmente verificado através de seus respectivos Gráficos de Ferrers.

Muitas bijeções entre conjuntos de partições são obtidas simplesmente por alguma transformação nos Gráficos de Ferrers. Apresentamos uma a seguir cuja finalidade é mostrar que o número de partições de n que são autoconjugadas é igual ao número de partições de n em partes ímpares e distintas. Para ilustrar esta transformação, vamos considerar a partição $7+5+5+4+3+1+1$ de 26:



É claro que o número de pontos em cada uma das "linhas" em formato de L é ímpar e estes números são necessariamente distindos. Neste caso, lendo o número de pontos sobre cada "linha", temos a partição $13 + 7 + 5 + 1$ de 26. Reciprocamente, dados números ímpares distintos, podemos colocá-los numa disposição semelhante a que temos acima, obtendo, desta forma, o Gráfico de Ferrers de uma partição autoconjugada. Por exemplo, a partição $11 + 9 + 5 + 3$ de 28 pode ser representada por:



Esta partição é claramente autoconjugada. Temos, portanto, demonstrado o seguinte teorema.

Teorema 2.3. *Seja n um inteiro postitivo. Então, o número de partições autoconjugadas de n é igual ao número de partições de n em partes ímpares distintas.*

2.2.1 Exercícios

1. Encontrar as partições conjugadas de
   (a) $3+3+2+2+1+1$,
   (b) $7+1$,
   (c) $5+4+2+2+1$.

2. Usar a operação de conjugação para provar a seguinte identidade:
   $p(n|$ partes são distintas$) =$
   $p(n|$ todo inteiro entre 1 e a maior parte aparece como parte$)$.

3. Mostrar que $p(n)$ é ímpar se, e somente se, o número de partições de n cujas partes são ímpares e distintas é ímpar.

4. Provar que
   $p(n|$ lado do Quadrado de Durfee $= j)$
   $= \sum_m p(m|$ partes $\leq j)p(n-j^2-m|$ no máximo j partes$)$.

2.3 Funções geradoras para partições

Vamos empregar, nesta seção, funções geradoras para contar partições sujeitas a restrições ou não. Inicialmente, vamos obter a função geradora para as partições de n em partes ímpares e distintas.

Se tomarmos o produto

$$(1+x)(1+x^3)(1+x^5)(1+x^7)\cdots(1+x^{2k+1})\cdots,$$

é fácil ver que o coeficiente de x^6 é igual a 1, que é o total de maneiras de se escrever 6 como soma de ímpares distintos. A potência x^6 aparece como o produto de $x^5 \cdot x^1$. Como 11 só pode ser escrito como soma de ímpares distintos nas formas $11 = 11$ e $11 = 7+3+1$, o coeficiente de x^{11} nesta mesma expansão é igual a 2. O coeficiente de x^{14} é igual a 3. De fato, somente se obtém x^{14} quando se multiplica $x \cdot x^{13}, x^3 \cdot x^{11}$ e $x^5 \cdot x^9$. Interpretando-se este produto desta forma, vemos que

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{2k+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} d_i(n)x^n,$$

sendo $d_i(n)$ o número de partições de n em partes ímpares distintas, isto é,

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{2k+1})$$

é a função geradora para $d_i(n)$.

Se estivermos interessados somente nas partições de n em partes distintas devemos tomar o seguinte produto:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots(1+x^n)\cdots.$$

Como na partição de um número menor do que ou igual a 10 nunca poderemos ter partes superiores a 10, se tomarmos o produto

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^{10}),$$

e considerarmos apenas as potências de $x \leq 10$ teremos a função geradora para as partições de todos os números menores do que ou iguais a 10 em partes distintas. Como o produto acima é igual a

$$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+8x^9+10x^{10}+\cdots,$$

podemos observar, por exemplo, que, sendo o coeficiente de x^7 igual a 5, existem 5 partições de 7 em partes distintas, que são: $7, 6+1, 5+2, 4+3$ e $4+2+1$.

Das observações que acabamos de fazer, pode-se concluir que a função geradora para as partições de n em partes distintas é dada pelo produto infinito

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k).$$

Vale mencionar que, como os termos $(1+x^{n+1}), (1+x^{n+2}), ...$ não contribuem para as partições de n, para se encontrar o total de partições de n em partes distintas, basta considerarmos o produto finito $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n)$.

Utilizando-se do mesmo argumento anterior é fácil ver que a função geradora para as partições de n em partes pares e distintas é

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2k}),$$

e que a função geradora para as partições de n em partes que são quadrados distintos é

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{k^2}).$$

Como

$$(1+x)(1+x^4)(1+x^9)(1+x^{16})\cdots = 1+x+x^4+x^5+x^9+x^{10}+x^{13}+x^{14}+x^{16}+\cdots,$$

concluímos que, dentre os números de 1 a 16, somente oito possuem partições cujas partes são quadrados parfeitos.

Mostraremos, a seguir, que a função geradora para $p(n)$, o número de partições irrestritas[2] de n, é dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k},$$

sendo $p(0)=1$.

A demonstração que apresentamos para esta identidade, originalmente apresentada por Euler, basea-se em argumentos combinatórios.

É claro que, sendo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots \\
\frac{1}{1-x^2} &= 1+x^2+x^4+x^6+x^8+\cdots \\
&\vdots \\
\frac{1}{1-x^m} &= 1+x^m+x^{2m}+x^{3m}+x^{4m}+\cdots,
\end{aligned}$$

temos

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k} = (1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)\cdots,$$

donde concluímos que as contribuições para o coeficiente de x^n vêm de um termo x^{a_1} da primeira série, de x^{2a_2} da segunda série, de x^{3a_3}

[2] partições irrestritas são partições cujas partes não têm nenhuma propriedade especial, isto é, as partes podem ser quaisquer

da terceira, ..., de x^{ma_m} da m-ésima série, onde $a_i \geq 0$, para todo i. Sendo o produto destes termos igual a x^n, temos que

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + ma_m = n.$$

Cada a_i deve ser visto como o número de is que aparecem na partição de n, isto é, podemos expressar n como

$$n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{a_1} + \underbrace{2 + \cdots + 2}_{a_2} + \cdots + \underbrace{m + \cdots + m}_{a_m}.$$

Visto desta maneira, cada partição de n vai contribuir com uma unidade para o coeficiente de x^n nesta expansão.

Para exemplificar o que acabamos de descrever, suponhamos que, em cada uma das primeiras quatro séries, tenhamos tomado, respectivamente, as seguintes potências de x: x^4, x^6, x^6 e x^{12}. Interpretamos estas potências como

$$\begin{aligned} x^4 &= x^{1+1+1+1}, \\ x^6 &= x^{2+2+2}, \\ x^6 &= x^{3+3}, \\ x^{12} &= x^{4+4+4}, \end{aligned}$$

e, visto que $x^4 \cdot x^6 \cdot x^6 \cdot x^{12} = x^{28}$, temos a seguinte partição de 28:

$$4 + 4 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Observe que o termo x^6 representa três 2 na segunda série e dois 3 na terceira série. Assim, as séries acima estão sendo vistas como

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = \; & (1+x^1+x^{1+1}+x^{1+1+1}+\cdots)(1+x^2+x^{2+2}+x^{2+2+2}+\cdots) \\ & (1+x^3+x^{3+3}+x^{3+3+3}+\cdots)\cdots \end{aligned}$$

A função $1/(1-x)$ "controla", portanto, a presença dos 1s, $1/(1-x^2)$ a presença dos 2s, $1/(1-x^3)$ a presença dos 3s, ..., $1/(1-x^m)$ a preseça dos ms. Isto prova, portanto, que $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$ é a função geradora para partições irrestritas. Se estivermos interessados na função geradora para as partições de n em que nenhuma parte supera m, basta tomarmos:

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-x^k}.$$

A tabela a seguir traz algumas funções geradoras.

Função geradora	Partições de n em partes que são
$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2k-1})$	ímpares e distintas
$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k-1}}$	ímpares
$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k}}$	pares
$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2k})$	pares e distintas
$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{k^3})$	cubos e distintas
$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{k^3}}$	cubos

Tabela 2.4: Algumas funções geradoras para partições

Voltando à Tabela (2.1), observa-se que o número de partições de 5 em partes distintas é igual ao número de partições de 5 em partes ímpares:

$$\begin{array}{ll} 5, 4+1, 3+2 & \text{(partes distintas)} \\ 5, 3+1+1, 1+1+1+1+1 & \text{(partes ímpares).} \end{array}$$

Esse fato, observado para 5, em verdade vale em geral. Provamos isso no próximo teorema.

Teorema 2.4. *O número de partições de n em partes distintas é igual ao número de partições de n em partes ímpares.*

Demonstração: Sabemos que a função geradora para partições em partes distintas é dada por

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)$$

e que a função geradora para partições em partes ímpares é igual a

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k-1}}.$$

Basta, portanto, provarmos que estas duas expressões são idênticas. Mas isto segue, uma vez que

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k) &= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1+x^k)(1-x^k)}{1-x^k}\\
&= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1-x^{2k})}{1-x^k}\\
&= \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\cdots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\cdots}\\
&= \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\cdots}\\
&= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k-1}}.
\end{aligned}$$

■

Apresentamos, a seguir, mais alguns exemplos do uso de funções geradoras na Teoria de Partições.

Exemplo 2.4. *Todo inteiro positivo pode ser expresso de maneira única como soma de potências de 2.*

Pelos argumentos apresentados neste capítulo, é fácil ver que a função

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^k})\cdots \tag{2.1}$$

é a função geradora para as partições de n em partes que são potências distintas de 2. Logo, o coeficiente de x^n nesta expansão nos fornece o número de maneiras de se escrever n como soma de potências distintas de 2. Portanto, basta mostrarmos que o coeficiente de x^n em (2.1) é igual a 1, para todo n. Mas sendo

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots ,$$

será suficiente provarmos a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{1-x} = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^k})\cdots .$$

Mas isso ocorre, uma vez que

$$\begin{aligned}
(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots &= \\
&= (1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots \\
&= (1-x^4)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})\cdots \\
&= (1-x^8)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\cdots \\
&= (1-x^{16})(1+x^{16})(1+x^{32})(1+x^{64})\cdots \\
&= 1.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 2.5. *Mostrar que o número de partições de n em partes distintas, nenhuma sendo múltipla de 3, é igual ao número de partições de n em partes de forma $6j-1$ ou $6j-5$.*

É fácil ver que a função geradora para partições de n em partes distintas e não divisíveis por 3 é dada por

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1+x^{3j-2})(1+x^{3j-1}), \tag{2.2}$$

e que a função geradora para as partições de n em partes da forma $6j-1$ ou $6j-5$ é

$$\prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{6j-1})(1-x^{6j-5})}. \tag{2.3}$$

Portanto, devemos mostrar a igualdade entre (2.2) e (2.3). Mas isto segue, pois

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1+x^{3j-2})(1+x^{3j-1}) =$$
$$= \prod_{j=1}^{\infty}\frac{(1+x^{3j-2})(1+x^{3j-1})(1-x^{3j-2})(1-x^{3j-1})}{(1-x^{3j-2})(1-x^{3j-1})}$$
$$= \prod_{j=1}^{\infty}\frac{(1-x^{6j-4})(1-x^{6j-2})}{(1-x^{3j-2})(1-x^{3j-1})}$$
$$= \prod_{j=1}^{\infty}(1-x^{6j-4})(1-x^{6j-2})\prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{3j-2})(1-x^{3j-1})}$$
$$= \prod_{j=1}^{\infty}(1-x^{6j-4})(1-x^{6j-2})\prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{6j-4})(1-x^{6j-1})(1-x^{6j-5})(1-x^{6j-2})}$$
$$= \prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{6j-1})(1-x^{6j-5})}.$$

No que segue apresentamos o chamado *Operador Omega* introduzido por MacMahon em [5]. Consideremos para isto o seguinte problema: qual é a forma fechada para a função geradora $\sum_{n=0}^{\infty} p_m(n)q^n$, sendo $p_m(n)$ o número de partições de n em, no máximo, m partes?

Podemos reescrever esta função geradora como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_m(n)q^n = \sum_{n_1\geq n_2\geq\cdots\geq n_m\geq 0} q^{n_1+n_2+\cdots+n_m}.$$

A exigência $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_m \geq 0$ vem do fato de que a ordem das partes numa partição não é importante. Consideremos agora a seguinte soma:

$$\sum_{n_1,n_2,\cdots,n_m\geq 0} q^{n_1+n_2+\cdots+n_m}\lambda_1^{n_1-n_2}\lambda_2^{n_2-n_3}\cdots\lambda_{m-1}^{n_{m-1}-n_m},$$

sendo λ_i novas variáveis.

Se na soma acima selecionarmos apenas termos com expoentes não-negativos em λ, então o expoente correspondente de q será uma partição de n em no máximo m partes. Por exemplo, para $n = 4$ e

$m = 2$ os expoentes resultantes são $4+0, 3+1$ e $2+2$. Considere agora um operador linear $\Omega_{\geq}$ que age nas variáveis λ anulando os termos tendo expoentes negativos e substituindo os demais por 1. Logo,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} p_m(n) q^n = \\
&= \Omega_{\geq} \sum_{n_1, n_2, \cdots, n_m \geq 0} q^{n_1+n_2+\cdots+n_m} \lambda_1^{n_1-n_2} \lambda_2^{n_2-n_3} \cdots \lambda_{m-1}^{n_{m-1}-n_m} \\
&= \Omega_{\geq} \sum_{n_1 \geq 0} (q\lambda_1)^{n_1} \sum_{n_2 \geq 0} (q\lambda_2/\lambda_1)^{n_2} \cdots \sum_{n_m \geq 0} (q/\lambda_{m-1})^{n_m} \\
&= \Omega_{\geq} \frac{1}{(1-q\lambda_1)(1-q\lambda_2/\lambda_1)\cdots(1-q/\lambda_{m-1})}. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

O lema a seguir nos permite avaliar a expressão (2.4).

Lema 2.1.

$$\Omega_{\geq} \frac{1}{(1-\lambda x)(1-y/\lambda)} = \frac{1}{(1-x)(1-xy)}.$$

Demonstração: O lado esquerdo desta identidade é igual a

$$\Omega_{\geq} \sum_{n,m \geq 0} \lambda^{n-m} x^n y^m = \sum_{n \geq m \geq 0} x^n y^m.$$

Fazendo $k = n - m$, obtemos, a partir da última soma,

$$\sum_{k,m \geq 0} x^{m+k} y^m = \sum_{k \geq 0} x^k \sum_{m \geq 0} (xy)^m = \frac{1}{(1-x)(1-xy)}.$$

■

Por aplicações sucessivas do lema acima em (2.4) obtemos a forma fechada para a função geradora de $p_m(n)$:

Uma aplicação do lema acima resulta em

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_m(n) q^n = \Omega_{\geq} \frac{1}{(1-q)(1-q^2\lambda_2)(1-q\lambda_3/\lambda_2)\cdots(1-q/\lambda_{m-1})}.$$

Uma segunda aplicação do lema resulta em

$$\Omega_{\geq} \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3\lambda_3)\cdots(1-q/\lambda_{m-1})}.$$

Continuando, obtemos finalmente

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots(1-q^m)}.$$

Apresentamos a seguir um exemplo interessante para ilustrar o poder do método descrito acima. Para tanto será necessária uma versão extendida do lema anterior cuja demonstração é muito semelhante à do Lema 2.1.

Lema 2.2. *Se α é um inteiro não-negativo,*

$$\Omega_{\geq} \frac{\lambda^{-\alpha}}{(1-\lambda x)(1-y/\lambda)} = \frac{x^{\alpha}}{(1-x)(1-xy)}.$$

Para n um inteiro positivo, seja $\Delta(n)$ o número de triângulos não-congruentes de perímetro n e lados inteiros. Vamos procurar uma interpretação para $\sum_{n=0}^{\infty} \Delta(n) q^n$.

Suponha que n_1, n_2 e n_3 sejam os lados do triângulo em ordem não crescente. Devemos ter $n_2 + n_3 \geq n_1 + 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \Delta(n) q^n &= \Omega_{\geq} \sum_{n_1, n_2, n_3 \geq 0} q^{n_1+n_2+n_3} \lambda_1^{n_1-n_2} \lambda_2^{n_2-n_3} \lambda_3^{n_2+n_3-n_1-1} \\
&= \Omega_{\geq} \frac{\lambda_3^{-1}}{(1-q\lambda_1/\lambda_3)(1-q\lambda_2\lambda_3/\lambda_1)(1-q\lambda_3/\lambda_2)} \\
&= \Omega_{\geq} \frac{\lambda_3^{-1}}{(1-q/\lambda_3)(1-q^2\lambda_2)(1-q\lambda_3/\lambda_2)} \\
&= \Omega_{\geq} \frac{\lambda_3^{-1}}{(1-q/\lambda_3)(1-q^2)(1-q^3\lambda_3)} \\
&= \frac{q^3}{(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\Delta(n)$ é o número de partições de n em partes 2, 3 ou 4, com, ao menos, uma parte 3.

Apresentamos a seguir mais algumas aplicações do operador $\Omega_{\geq}$.

Teorema 2.5. *Seja $Q_m(n)$ o número de partições de n em exatamente m partes distintas. Então,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_m(n) q^n = \frac{q^{m(m+1)/2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)}.$$

Demonstração: Se $n_1+n_2+\cdots+n_m$ é uma partição de n em partes distintas, então $n_1 \geq n_2+1, n_2 \geq n_3+1, ..., n_m \geq 1$. Logo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_m(n)q^n$$
$$= \Omega_{\geq} \sum_{n_1,\ldots,n_m \geq 0} q^{n_1+n_2+\cdots+n_m} \lambda_1^{n_1-n_2-1} \lambda_2^{n_2-n_3-1} \cdots \lambda_{m-1}^{n_{m-1}-n_m-1} \lambda_m^{n_m-1}$$
$$= \Omega_{\geq} \frac{\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\cdots\lambda_m^{-1}}{(1-\lambda_1 q)(1-\lambda_2 q/\lambda_1)\cdots(1-\lambda_m q/\lambda_{m-1})}.$$

Agora, aplicando o lema anterior com $\alpha = 1$, obtemos:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} Q_m(n)q^n &= \Omega_{\geq} \frac{q\lambda_2^{-1}\cdots\lambda_m^{-1}}{(1-q)(1-\lambda_2 q^2)(1-\lambda_3 q/\lambda_2)\cdots(1-\lambda_m q/\lambda_{m-1})} \\ &= \Omega_{\geq} \frac{q\cdot q^2\lambda_3^{-1}\cdots\lambda_m^{-1}}{(1-q)(1-q^2)(1-\lambda_3 q/\lambda_2)\cdots(1-\lambda_m q/\lambda_{m-1})} \\ &= \frac{q\cdot q^2\cdots q^m}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)},\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

Da mesma forma podemos provar o teorema a seguir, onde $Q_m^{(k,l)}(n)$ é o número de partições de n tendo exatamente m partes, a diferença entre duas partes é $\geq k$ e a menor parte é $\geq l$.

Teorema 2.6.

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_m^{(k,l)}(n)q^n = \frac{q^{lm+km(m+1)/2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)}.$$

Demonstração: Como na demonstração anterior, podemos observar que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_m^{(k,l)}(n)q^n =$$
$$= \Omega_{\geq} \sum_{n_1,\ldots,n_m \geq 0} q^{n_1+n_2+\cdots+n_m} \lambda_1^{n_1-n_2-k} \cdots \lambda_{m-1}^{n_{m-1}-n_m-k} \lambda_m^{n_m-l}$$
$$= \Omega_{\geq} \frac{\lambda_1^{-k}\lambda_2^{-k}\cdots\lambda_{m-1}^{-k}\lambda_m^{-l}}{(1-\lambda_1 q)(1-\lambda_2 q/\lambda_1)\cdots(1-\lambda_m q/\lambda_{m-1})}$$
$$= \frac{q^{lm+km(m-1)/2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)}.$$

A única diferença em relação à demonstração anterior é que, nas primeiras $m-1$ aplicações de $\Omega_{\geq}$, $\alpha = k$ e, na última aplicação, $\alpha = l$ e ainda $y = 0$ no lema anterior. ■

No teorema a seguir, introduzimos parâmetros que tomarão conta de outras informações na partição.

Teorema 2.7. *Seja $P_m(j,n)$ (respectivamente, $Q_m(j,n)$) o número de partições de n em no máximo m partes (respectivamente, exatamente m partes distintas) com maior parte j. Então,*

$$\sum_{j,n\geq 0} P_m(j,n) z^j q^n = \frac{1}{(1-zq)(1-zq^2)\cdots(1-zq^m)}$$

e

$$\sum_{j,n\geq 0} Q_m(j,n) z^j q^n = \frac{z^m q^{m(m+1)/2}}{(1-zq)(1-zq^2)\cdots(1-zq^m)}.$$

Demonstração: Pela definição de $P_m(j,n)$, é claro que

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} P_m(j,n) z^j q^n = \\
&\quad = \Omega_{\geq} \sum_{n_1,\ldots,n_m\geq 0} z^{n_1} q^{n_1+n_2+\cdots+n_m} \lambda_1^{n_1-n_2} \lambda_2^{n_2-n_3} \cdots \lambda_{m-1}^{n_{m-1}-n_m} \\
&\quad = \Omega_{\geq} \frac{1}{(1-zq\lambda_1)(1-q\lambda_2/\lambda_1)\cdots(1-q/\lambda_{m-1})} \\
&\quad = \Omega_{\geq} \frac{1}{(1-zq)(1-zq^2\lambda_2)(1-q\lambda_2/\lambda_3)\cdots(1-q/\lambda_{m-1})} \\
&\quad = \Omega_{\geq} \frac{1}{(1-zq)(1-zq^2)(1-zq^3\lambda_3)\cdots(1-q/\lambda_{m-1})} \\
&\quad = \frac{1}{(1-zq)(1-zq^2)\cdots(1-zq^m)}.
\end{aligned}$$

A demonstração da outra identidade é semelhante:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} Q_m(j,n) z^j q^n &= \Omega_{\geq} \sum_{n_1,\ldots,n_m\geq 0} z^{n_1} q^{n_1+n_2+\cdots+n_m} \\
&\cdot \lambda_1^{n_1-n_2-1} \lambda_2^{n_2-n_3-1} \cdots \lambda_{m-1}^{n_{m-1}-n_m-1} \lambda_m^{n_m-1} \\
&= \frac{z^m q^{m(m+1)/2}}{(1-zq)(1-zq^2)\cdots(1-zq^m)}.
\end{aligned}$$

■

2.3.1 Exercícios

1. Mostrar que o número de partições de n cujas partes não são divisíveis por 3 é igual ao número de partições de n nas quais cada parte aparece, no máximo, duas vezes.

2. Verificar as igualdades:

   (a) $\Omega_{\geq} \dfrac{1}{(1-\lambda x)(1-y/\lambda^2)} = \dfrac{1}{(1-x)(1-x^2y)}$;

   (b) $\Omega_{\geq} \dfrac{1}{(1-\lambda^2 x)(1-y/\lambda)} = \dfrac{1}{(1-x)(1-xy^2)}$;

   (c) $\Omega_{\geq} \dfrac{1}{(1-\lambda x)(1-y/\lambda^s)} = \dfrac{1}{(1-x)(1-x^sy)}$.

3. Mostrar que o número de partições de n nas quais apenas as partes ímpares podem se repetir é igual ao número de partições de n nas quais nenhuma parte aparece mais do que 3 vezes.

4. Provar que o número de partições de n nas quais cada parte aparece 2, 3 ou 5 vezes é igual ao número de partições de n tendo partes congruentes a 2, 3, 5, 9 ou 10 módulo 12.

5. Mostrar que o número de partições autoconjugadas é igual aos número de partições em partes ímpares distintas.[3]

6. Seja $M_1(n)$ o número de partições de n em partes maiores do que 1 tais que inteiros consecutivos não aparecem como partes. seja $M_2(n)$ o número de partições de n tais que nenhuma parte aparece apenas uma vez. Mostrar que $M_1(n) = M_2(n)$.

7. Usar o fato de que $n^2 = 1 + 3 + \cdots + 2n - 1$ para mostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2}/(q;q)_n$ é a função geradora para partições nas quais a diferença entre duas partes consecutivas é, no mínimo, 2.

8. Usar o Quadrado de Durfee para provar a identidade:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^{n^2}}{(q;q)_n (zq;q)_n} = (zq;q)_\infty,$$

   onde $(a;q)_n = (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})$.

[3]O resultado deste exercício é devido a Sylvester

9. Mostrar que
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n y^n q^{n^2}}{(xq;q)_n(yq;q)_n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}y^n q^{2n^2}}{(xq;q)_n(yq;q)_{2n}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}y^{n+1}q^{n^2}}{(xq;q)_n(yq;q)_{2n+1}}.$$
Para o lado esquerdo use a idéia do exercício anterior para mostrar que o coeficiente de $x^r y^m q^r$ é o número de partições de n em m partes, tendo a maior parte igual a r. Faça o mesmo para o lado direito, onde, ao invés de um Quadrado de Durfee, considere os maiores retângulos tendo dimensões $n\times 2n$ ou
$(n+1)\times(2n+1)$. Note que os retângulos destas dimensões cobrem todas as possibilidades.

2.4 Função geradora em duas variáveis

Muitas vezes precisamos de uma função geradora que controle não apenas o número que está sendo particionado. É muito comum, por exemplo, estarmos interessados em saber o número de partes de cada partição gerada. Não é difícil ver que o expoente da variável z na função abaixo controla o número de partes de cada partição gerada:
$$\begin{aligned}(1+zq^{n_1})(1+zq^{n_2})(1+zq^{n_3}) &= 1+zq^{n_1}+zq^{n_2}+zq^{n_3}+z^2q^{n_1+n_2}\\ &+z^2q^{n_1+n_3}+z^2q^{n_2+n_3}+z^3q^{n_1+n_2+n_3}.\end{aligned}$$

Raciocinando como no exemplo acima, podemos deduzir outras funções geradoras em duas variáveis:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}p(n|\ m \text{ partes distintas, cada parte} \in S)z^m q^n=\prod_{k\in S}(1+zq^k);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}p(n|\ m \text{ partes, cada parte} \in S \text{ e aparece, no máximo, } d \text{ vezes})z^m q^n$$
$$=\prod_{k\in S}\frac{(1-z^{d+1}q^{(d+1)k})}{(1-zq^k)};$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}p(n|\ m \text{ partes, cada parte} \in S)z^m q^n=\prod_{k\in S}\frac{1}{(1-zq^k)};$$

Se S for um conjunto infinito, devemos ter $|q|<1$ para as três identidades acima e, para a última, a exigência adicional $|z|<\frac{1}{q}$.

2.4.1 Exercícios

1. Encontrar a função geradora para

$$p(n|\text{ tendo } m \text{ partes pares}).$$

2. Econtrar a função geradora para

$$p(n|\text{ tendo } m \text{ partes ímpares e as partes pares são distintas}).$$

3. A expressão abaixo é função geradora para qual conjunto de partições?

$$\prod_{k=0}^{\infty} \frac{(1 + zq^{3k})}{(1 - q^{3k+1})(1 - q^{3k+2})}$$

Capítulo 3

Provas bijetivas em partições

3.1 Provas bijetivas

Antes de formalizar o conceito de *provas bijetivas*, vamos introduzir mais alguma notação. Em uma identidade em partições, freqüêntemente, estamos interessados no número de partições de n satisfazendo certas condições. Vamos denotar este número por $p(n|[\text{condição}])$. Por exemplo, o Teorema 2.4 pode ser reescrito como

$$p(n|\text{ partes são ímpares}) = p(n|\text{ partes são distintas}), \text{ para } n \geq 1.$$

Vejamos agora como podemos provar esta identidade. Para pequenos valores de n poderíamos, sem dificuladade, listar as partições de cada tipo e verificar que estes conjuntos têm a mesma cardinalidade. No entanto, a identidade é válida para qualquer valor de n, donde precisamos de um argumento que se aplique no caso geral. Outra possibilidade seria encontrar um fórmula explicita para, digamos, $p(n|$ as partes são ímpares) e mostrar que a mesma expressão vale para $p(n|$ as partes são distintas). Mas, podemos encontrar tal fórmula? Considere a tabela abaixo:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n\|$ partes ímpares)	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10

Tabela 3.1: $p(n|$ as partes são ímpares)

Olhando para a tabela parece que os números não sugerem uma função simples para $p(n|$ as partes são ímpares). De modo que não parece razoável tentar provar a identidade por este caminho. O que vamos fazer, na verdade, é mostrar que cada partição de um tipo pode ser associada a uma única partição do outro tipo e vice-versa. Tal correspondencia entre dois conjuntos é chamada de *bijeção*. Teremos obtido, portanto, uma *prova bijetiva* para a identidade.

Uma partição nada mais é do que uma coleção de partes (inteiros positivos) cuja soma é n. Assim, uma bijeção entre partições deve ser descrita através de operações nas partes. Para provar a identidade acima, vamos descrever as bijeções em cada caso:

De partes ímpares para partes distintas: Se as partes são distintas, não há nada a fazer. Se duas partes são iguais, devemos somá-las para obter uma nova parte (par). Podemos repetir este procedimento até obter apenas partes distintas - como o número de partes decresce a cada operação, essa operação será repetida até, no máximo, restar apenas uma parte. Por exemplo:

$$\begin{aligned} 3+3+3+1+1+1+1 &\mapsto (3+3)+3+(1+1)+(1+1) \\ &\mapsto 6+3+2+2 \\ &\mapsto 6+3+(2+2) \\ &\mapsto 6+4+3. \end{aligned}$$

De partes distintas para partes ímpares: A operação inversa de somar duas partes iguais é a operação de dividir uma parte par em duas partes iguais. Repetindo essa operação ficaremos que uma coleção de partes ímpares - como o valor de cada parte decresce a cada operação, devemos fazer esta operação, no máximo, até obter apenas partes iguais a 1. Por exemplo:

$$\begin{aligned} 6+4+3 &\mapsto (3+3)+3+(2+2) \\ &\mapsto 3+3+3+(1+1)+(1+1) \\ &\mapsto 3+3+3+1+1+1+1 \end{aligned}$$

Para $n = 7$ a bijeção descrita acima é:

$$\begin{array}{lcl} 7 & \leftrightarrow & 7 \\ 5+1+1 & \leftrightarrow & 5+2 \\ 3+3+1 & \leftrightarrow & 6+1 \\ 3+1+1+1+1 & \leftrightarrow & 4+3 \end{array}$$

Esta mesma bijeção pode ser usada para provar a seguinte identidade:
$p(n|$ as partes são pares$) =$
$p(n|$ cada parte aparece um número par de vezes$),$ para $n \geq 1$.
Para $n = 6$, por exemplo, temos:

$$\begin{array}{lcl} 6 & \mapsto & 3+3 \\ 4+2 & \mapsto & 2+2+1+1 \\ 2+2+2 & \mapsto & 1+1+1+1+1+1 \end{array}$$

No Século 19 o matemático J. J. Sylvester apresentou o seguinte refinamento do teorema de Euler que acabamos de provar combinatorialmente.

Teorema 3.1. *O número de partições de n em partes ímpares (não necessariamente distintas) usando exatamente k partes diferentes é igual ao número de partições de n cujas partes formam k seqüências de inteiros consecutivos.*

Por exemplo, para $n = 15$ e $k = 3$ existem onze partições do primeiro tipo

$$\begin{array}{l} 11+3+1, 9+5+1, 9+3+1+1+1, 7+5+3, \\ 7+5+1+1+1, 7+3+1+1+1+1+1, 7+3+3+1+1, \\ 5+5+3+1+1, 5+3+3+3+1, 5+3+3+1+1+1+1, \\ 5+3+1+1+1+1+1+1+1, \end{array}$$

e onze do segundo tipo

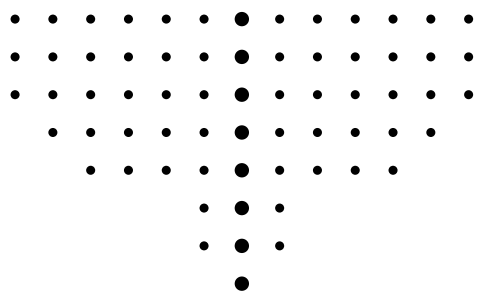
$$\begin{array}{l} 11+3+1, 10+4+1, 9+5+1, 9+4+2 \\ 8+6+1, 8+5+2, 8+4+2+1, 7+5+3, 7+5+2+1, \\ 7+4+3+1, 6+5+3+1. \end{array}$$

Vamos agora apresentar a demonstração deste teorema.

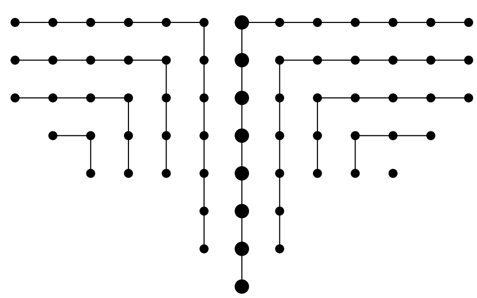
Demonstração:

Vamos apenas ilustrar a prova deste teorema. Para isto precisamos fazer uma variação no Gráfico de Ferrers para as partições em partes ímpares. Na representação gráfica de uma partição as linhas são alinhadas à esquerda. O que vamos fazer agora é alinhá-las centralmente, por exemplo, a parte 13 será representada por:

Assim, podemos representar a partição $13+13+13+11+9+3+3+1$ em partes ímpares por:



Agora, considerando este novo diagrama, associamos os pontos da seguinte maneira:

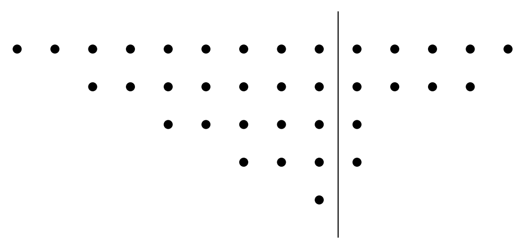


e a nova partição obtida é $14 + 12 + 11 + 8 + 7 + 6 + 4 + 3 + 1$. Observe que esta nova partição tem partes distintas e exatamente cinco seqüências separadas $14, 12 + 11, 8 + 7 + 6, 4 + 3$ e 1. ■

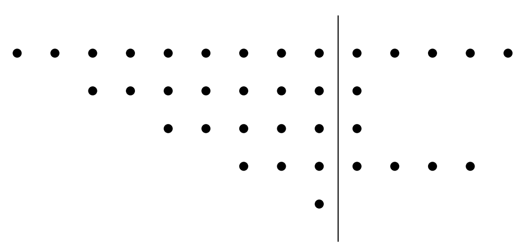
Apresentamos a seguir um resultado cuja prova bijetiva, devida a David Bressoud (1980), é bastante elegante.

Teorema 3.2. *O número de partições de n cuja diferença entre duas quaisquer partes é de pelo menos 2 é igual ao número de partições de n em partes distintas tais que cada parte par é maior do que duas vezes o número de partes ímpares, isto é,*
$p(n|$ *diferença entre quaisquer duas partes* $\geq 2) =$
$p(n|$ *partes distintas, cada parte par é* $> 2\cdot$ *(número de partes ímpares)*$)$.

Vamos descrever brevemente a demonstração deste teorema. Considere o Gáfico de Ferrers de uma partição contada por $p(n|$ diferença entre quaisquer duas partes $\geq 2)$. Ajustamos as linhas desse diagrama a partir da primeira da seguinte forma: desloca-se a segunda linha para a direita de modo que o primeiro ponto desta linha coincida com o terceiro da primeira linha; depois descolocamos a terceira linha para a direita até que seu primeiro ponto coincida com o terceiro da segunda linha deslocada e assim sucessivamente. Feito isso, traçamos uma linha vertical de modo que na última linha desse novo diagrama fique apenas um ponto à esquerda da linha. Por exemplo, para $14+11+6+4+1$, o diagrama modificado é:



À direita da linha no gráfico acima temos um gráfico de Ferrers de uma partição e agora vamos reordenar suas linhas começando colocando as partes ímpares em ordem não-crescente e, depois, as partes pares em ordem não-crescente:



Agora, ignoramos a linha no gráfico acima e consideramos cada linha como parte da nova partição $14 + 8 + 6 + 7 + 1$, que é uma partição em partes distintas tal que cada parte par é maior do que duas vezes o número de partes ímpares.

Apresentamos, na próxima seção, uma prova bijetiva para o Teorema dos Números Pentagonais de Euler.

3.1.1 Exercícios

1. Mostrar que se n é ímpar, não existe partição de n em partes pares e também não existem partições de n tais que cada parte aparece um número par de vezes.

2. Para um inteiro par $n > 2$ encontrar uma prova bijetiva para as identidades abaixo:

   (a) $p(n|$ partes são pares$) = p(n/2)$.

   (b) $p(n|$ partes aparecem um número par de vezes$)= p(n/2)$.

3.2 Teorema dos Números Pentagonais de Euler

L. Euler foi um dos mais produtivos matemáticos da história, por esta razão não surpreende que exista mais do que uma identidade na Teoria de Partições que leva o seu nome. Já vimos anteriormente a identidade de Euler entre o número de partições em partes distintas e em partes ímpares. Vamos, nesta seção, considerar uma outra identidade, esta relacionada aos Números Pentagonais.

Em sua forma analítica, o Teorema dos Números Pentagonais de Euler pode ser enunciado da seguinte maneira:

Teorema 3.3. *(Teorema dos Números Pentagonais de Euler)*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(3n-1)/2} = (q;q)_\infty$$

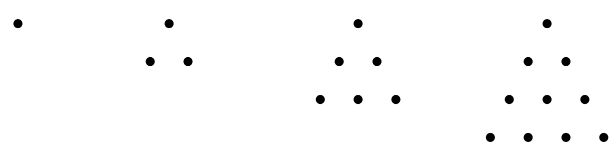
Este teorema tem uma bela interpretação combinatória em termos de partições devida a Legendre:

Teorema 3.4. *(Versão Combinatória do Teorema dos Números Pentagonaisde Euler)*
$p(n|$ número par de partes distintas$) =$
$p(n|$ número ímpar de partes distintas$) + e(n)$,
sendo

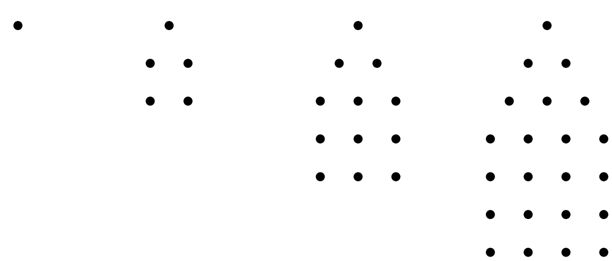
$$e(n) = \begin{cases} (-1)^j, & \textit{se } n = j(3j \pm 1)/2, \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Para esta versão do Teorema dos Números Pentagonais de Euler existe uma prova bijetiva obtida por F. Franklin em 1881. Antes de apresentar esta demonstração, vejamos o que são os Números Pentagonais.

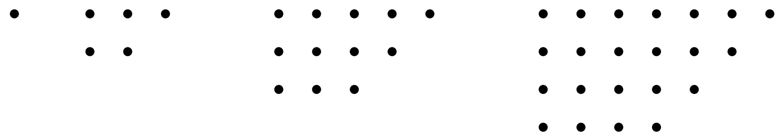
Os *Números Triangulares* são $1, 3, 6, 10, ...$, referentes ao número de pontos nos triângulos em ordem crescente:



O j-ésimo Número Triangular é $1 + 2 + 3 + \cdots + j = j(j + 1)/2$. De maneira similar, definimos os *Números Pentagonais* $1, 5, 12, 22, ...$ como sendo o número de pontos nos pentagonos abaixo:



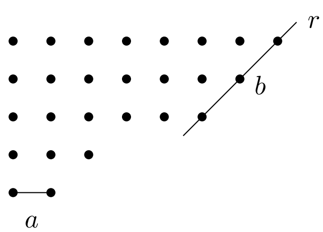
Claramente, o j-ésimo Número Pentagonal consiste de um triângulo equilátero de lado j sobre um retângulo de lados j e $j - 1$. Logo, o j-ésimo Número Pentagonal é $j(j + 1)/2 + j(j - 1) = j(3j - 1)/2$. A partir das representação para os Números Pentagonais $1, 5, 12$ e 22 acima podemos obter gráficos de Ferrers de partições rotacionando esses diagramas e ajustando suas linas à esquerda:



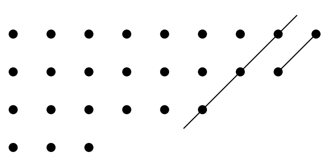
Vemos que os Gráficos de Ferrers obtidos são de partições em partes distintas: $1, 3+2, 5+4+3, 7+6+5+4$, etc.

Vamos agora apresentar a prova bijetiva encontrada por Franklin. A idéia é construir uma bijeção entre as partições de n em um número par de partes distintas e as partições de n em um número ímpar de partes distintas.

Considere um Gráfico de Ferrers de uma partição cujas partes são distintas. Vamos chamar de a a menor parte e de b, o número de pontos sobre a linha r mostrada na figura abaixo:

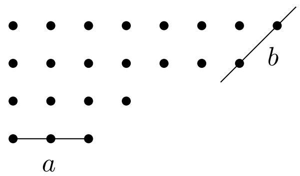


Caso $a \leq b$, como na figura acima, podemos remover os a pontos da menor parte e colocá-los ao lado dos primeiros a pontos da linha r, conforme ilustrado abaixo:

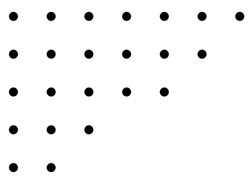


Com esta mudança temos agora uma nova partição de n (note que ainda temos diferentes partes e elas estão dispostas em ordem decrescente) com diferente paridade, isto é, se o total de partes era par, agora é ímpar e, se era ímpar, agora é par. Vale observar que mesmo que tivéssemos $a = b$ a mudança acima ainda teria sido possível.

Examinemos, agora, um caso em que $a > b$. Considere o Gráfico de Ferrers abaixo:



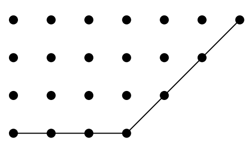
Neste caso podemos tomar os b pontos da linha r e colocá-los abaixo dos a pontos obtendo uma nova partição com diferente paridade. Nesta nova partição continuamos com pates distintas e colocadas em ordem decrescente:



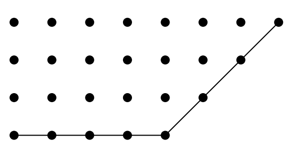
É claro que quando uma das transformações descritas acima puder ser executada, teremos uma bijeção entre as partições de n em um número par de partes distintas e as partições de n em um número ímpar de partes distintas.

No entanto, essas duas transformações não podem ser sempre executadas. Existem exatamente dois casos, ilustrados abaixo, em que a linha r passa através do último ponto da menor parte. Isso ocorre quando $a = b$ ou $a = b + 1$.

É fácil ver que nas figuras abaixo não podemos executar nenhuma das duas transformações descritas. Lembre-se que, executada uma dessas transformações, devemos ter partes distintas e dispostas em ordem decrescente.



$a = b$



$a = b + 1$

Nas figuras acima temos

$$n = a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (a + (b-1)) = \frac{b(2a+b-1)}{2}.$$

Logo, no caso $a = b + 1$ temos

$$n = \frac{b(3b+1)}{2}.$$

Neste caso, se b, o número de partes, for par, teremos

$$p(n|\text{ núm. par de partes dist.}) - p(n|\text{ núm. par de partes dist.}) = 1$$

e se b for ímpar, teremos

$$p(n|\text{ núm. par de partes dist.}) - p(n|\text{ núm. par de partes dist.}) = -1.$$

Isto é, teremos exatamente uma partição com um número par (ímpar) de partes excedendo aquelas com um número ímpar (par) de partes.

No caso $a = b$, teremos

$$n = \frac{b(3b-1)}{2}$$

e a mesma análise feita acima será válida, ou seja,
$p(n|$ núm. par de partes dist.$) - p(n|$ núm. ímpar de partes dist.$) = (-1)^b$, o que conclui a demosntração do Teorema dos Números Pentagonais de Euler.

Na próxima seção apresentamos uma outra prova bijetiva que relembra essa que acabamos de estudar.

3.3 Números Triangulares

Nesta seção, apresentamos uma prova bijetiva para uma identidade envolvendo a função geradora para os Números Triangulares descritos na seção anterior. Essa prova é semelhane àquela dada por F. Franklin para o Teorema dos Números Pentagonais de Euler.

Teorema 3.5. *Para* $|q| < 1$

$$1+q+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})}{(1-q^3)(1-q^5)\cdots(1-q^{2n+1})}q^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}q^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad (3.1)$$

Em [4] há uma demonstração diferente para esta identidade.

Sabemos que a soma no lado esquerdo de (3.1) gera partições cujas partes são maiores do que 1, as partes pares são distintas, a maior parte é ímpar e tendo um peso associado dado por $(-1)^m$, sendo m o número de partes pares. Também não é difícil de ver que os expoentes de q no lado direito de (3.1) são os números triangulares.

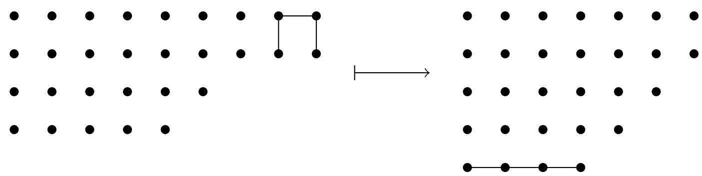
Uma simples manipulação algébrica nos parmite reescrever (3.1) como

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})}{(1-q^3)(1-q^5)\cdots(1-q^{2n+1})}q^{2n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}q^{\frac{n(n+1)}{2}}. \quad (3.2)$$

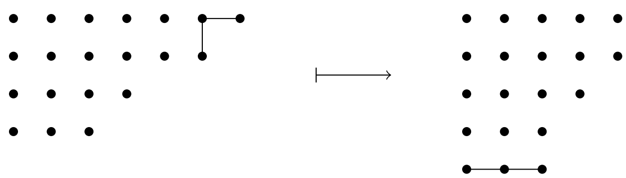
Para provarmos a identidade (3.2), devemos mostrar que o coeficiene de q^n no lado esquerdo é 1 se n é um número triangular e 0 caso contrário. Em outras palavras, se $p_e(n)$ ($p_o(n)$) denota o número de partições de n geradas pelo lado esquerdo de (3.2) tendo um número par (ímpar) de partes pares, então devemos mostrar que

$$p_e(n)-p_o(n)=\begin{cases}1, & \text{se } n \text{ é um número triangular}\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases} \quad (3.3)$$

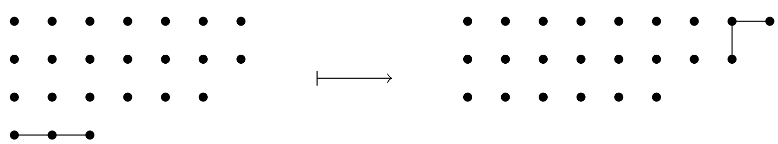
Demonstração do Teorema (3.5):
No conjunto $\mathcal{P}(n)$ da partições de n em partes maiores do que 1 tendo as partes pares distintas e a maior parte ímpar, definimos a seguinte transformação. Dada uma partição $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_s \in \mathcal{P}(n)$ consideremos seu Gráfico de Ferrers. A partir deste diagrama, removemos as duas últimas colunas para formarmos uma nova parte λ_{s+1}, ficando, pois, com uma partição $\lambda^{'} = \lambda_1^{'} + \cdots + \lambda_s^{'}$ de $n - \lambda_{s+1}$. Inserimos esta nova parte abaixo da menor parte de $\lambda^{'}$ quando $\lambda_{s+1} \leq \lambda_s^{'}$ e $\lambda_s^{'}$ é ímpar ou $\lambda_{s+1} < \lambda_s^{'}$ e $\lambda_s^{'}$ é par, resultando na partição $\lambda^{''} = \lambda_1^{'} + \cdots + \lambda_s^{'} + \lambda_{s+1} \in \mathcal{P}(n)$. Por exemplo:



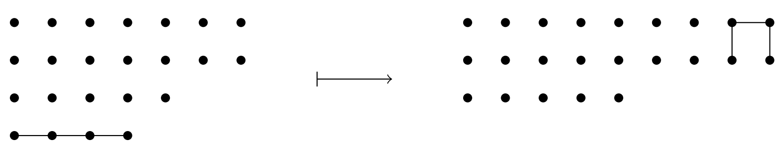
e



Mas, se $\lambda_{s+1} > \lambda_s^{'}$ ou $\lambda_{s+1} = \lambda_s^{'}$ e $\lambda_s^{'}$ é par, não podemos executar esta operação de modo a ainda obter uma partição em $\mathcal{P}(n)$. Neste caso, removemos a menor parte λ_s para formar duas novas colunas que são iguais (quando λ_s é par) ou diferem por 1 (quando λ_s é ímpar). Adicionamos essas colunas ao Gráfico de Ferrers da partição $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{s-1}$. É fácil verificar (Por quê?) que a partição assim obtida está em $\mathcal{P}(n)$. Por exemplo:



e

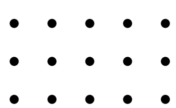


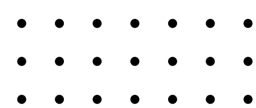
Note que, quando n é um número triangular, isto é, tem forma $n = \frac{k(k+1)}{2}$, nenhuma das duas operações que acabamos de definir pode ser aplicada àquela partição em $\mathcal{P}(n)$ tendo $\frac{k}{2}$ partes $k+1$, quando k é par ou $\frac{k+1}{2}$ partes k, se k é ímpar. De fato:

- se removermos as duas últimas colunas da partição que tem $\frac{k}{2}$ partes $k+1$, quando k é par, a nova parte terá tamanho $2\frac{k}{2} = k$ e, consequentemente, não podemos colocá-la abaixo da menor parte $k + 1 - 2 = k - 1$. Inversamente, removendo a menor parte cujo tamanho é $k+1$, não podemos colocar as duas novas colunas obtidas (uma tendo tamanho $\frac{k}{2} + 1$ e a outra $\frac{k}{2}$) em frente à última coluna (que tem tamanho $\frac{k}{2} - 1$) da partição com a menor parte removida.

- se removermos as duas últimas colunas da partição que tem $\frac{k+1}{2}$ partes k, quando k é ímpar, a nova parte teria tamanho $2\frac{k+1}{2} = k + 1$ e, por isso, não poderíamos colocá-la abaixo da menor parte $k - 2$. Por outro lado, removendo a menor parte cujo tamanho é k, não podemos colocar as duas novas colunas (a maior tendo tamanho $\frac{k+1}{2}$) em frente à última coluna (que tem tamanho $\frac{k-1}{2}$) da partição com a menor parte removida.

Por exemplo, não é possível aplicar nenhuma das duas operações nas partições de $15(k = 5)$ e $21(k = 6)$ abaixo:





Para finalizar a demonstração, devemos mostrar que as transformações descritas acima, quando aplicadas, mudam a paridade do número de partes pares. Fazendo isso teremos mostrado que (3.3) é válida.

Para aquelas partições em $\mathcal{P}(n)$ nas quais podemos remover as duas últimas colunas do Gráfico de Ferrers, temos duas possibilidades: se as colunas têm o mesmo tamanho, não modificamos o número de partes ímpares e a nova parte terá tamanho par, o que modifica a paridade do número de partes pares; se as colunas diferem por 1 perdemos uma parte par e obtemos uma parte ímpar como nova parte modificando a paridade do número de partes pares. Estes argumentos podem ser facilmente invertidos para mostrar que a outra transformação também modifica a paridade do número de partes pares..
■

3.4 Exercícios

1. Responder à pergunta deixada na demonstração do Teorema (3.5).

2. Sejam $p_k(n)$ o número de partições de n em exatamente k partes e $q_k(n)$ o número de partições de n formadas por exatamene k partes distintas (por exemplo $q_3(8) = 2$: $1+2+5$ e $1+3+4$). Mostrar que $q_k(n + \binom{k}{2}) = p_k(n)$.

3. Provar combinatorialmente as seguintes identidades:

   (a) $\displaystyle\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1-xq^i)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k x^k}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}.$

   (b) $\displaystyle\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1-xq^i)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k^2} x^k}{(1-q)\cdots(1-q^k)(1-xq)\cdots(1-xq^k)}.$

   (c) $\displaystyle\prod_{i=1}^{\infty} (1+xq^i) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\binom{k+1}{2}} x^k}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}.$

   (d) $\displaystyle\prod_{i=1}^{\infty} (1+xq^{2i-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k^2} x^k}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k})}.$

4. Se λ é uma partição de n, seja $f_k(\lambda)$ o número de vezes que k aparece como uma parte de λ e seja $g_k(\lambda)$ o número de partes distintas de λ que aparecem pelo menos k vezes (por exemplo, $f_2(3+2+2+2+1+1) = 3$ e $g_2(3+2+2+2+1+1) = 2$). Mostrar que
$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}(n)} f_k(\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(n)} g_k(\lambda),$$
sendo k um inteiro postivo fixo e $\mathcal{P}(n)$ o conjunto de todas as partições de n.

Capítulo 4

Coeficientes q-binomiais

Nossas considerações sobre partições e funções geradoras feitas nos capítulos anteriores nos permitem fazer generalizações interessantes dos Números binomiais e suas várias identidades. Descrevemos, neste capítulo, os chamados *Polinômios Gaussianos*, também chamados de *números q-binomiais* ou *coeficientes q-binomiais*.

4.1 Os números binomiais

Lembremos que os *números binomiais* $\binom{n}{j}$ são definidos combinatorialmente como o número de maneiras de se escolher j elementos de um conjunto de n elementos sem ordená-los. Esses números têm uma fórmula simples:

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}, \text{ para } n \geq j \geq 0.$$

Relacionados aos números binomiais temos o *Teorema binomial* enunciado abaixo.

Teorema 4.1. (Teorema binomial)

$$(1+z)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^j.$$

Para potências negativas temos a chamada *Série binomial*:

Teorema 4.2. (Série binomial)

$$(1-z)^{-n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+j-1}{j} z^j,$$

para $|z| < 1$.

Listamos a seguir algumas propriedades importantes satisfeitas pelos números binomiais. Suas demonstrações são deixadas a cargo do leitor.
Simetria:

$$\binom{n+j}{j} = \binom{n+j}{n};$$

Fórmula recursiva:

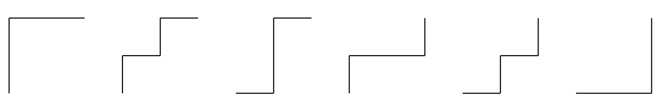
$$\binom{n}{j} = \binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1}, \text{ para } n > j > 0;$$

Duas fórmulas interessantes:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n;$$

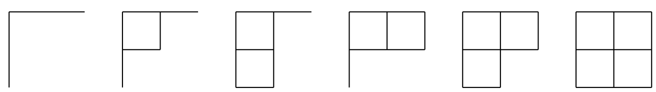
$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0, \text{ para } n \geq 1.$$

Vamos, agora, introduzir os números q-binomiais. Para isso, considere o seguinte problema. Quantos caminhos existem do ponto $(0,0)$ no plano até o ponto $(2,2)$ nos quais cada passo corresponde a uma unidade verticalmente para cima ou horizontalmente para a direita? A resposta e essa pergunta é 6, o que pode ser verificado escrevendo cada um desses caminhos:



A explicação para a resposta é $6 = \binom{2+2}{2}$, o número de maneiras de escolher dois passos horizontais de um total de quatro passos. Argumentando dessa maneira pode-se mostrar que o número de caminhos de $(0,0)$ até o ponto (N,m) é $\binom{N+m}{m}$.

Podemos olhar para esses $6 = \binom{2+2}{2}$ caminhos como as "fronteiras" dos possíveis Gráficos de Ferrers de partições que cabem dentro de um quadrado 2×2:



$\emptyset$ 1 $1+1$ 2 $2+1$ $2+2$

Analogamente à definição dos números binomiais, definimos um *número q-binomial* como sendo a função geradora na variável q para essas $\binom{2+2}{2}$ partições:

$$\begin{bmatrix} 2+2 \\ 2 \end{bmatrix} = q^0 + q^1 + q^{1+1} + q^2 + q^{2+1} + q^{2+2} = q^0 + q^1 + 2q^2 + q^3 + q^4.$$

De maneira mais geral, temos a seguinte definição para os números q-binomiais.

Definição 4.1. *Os números q-binomiais são definidos por:*

$$\begin{bmatrix} N+m \\ m \end{bmatrix} = \sum_{n \geq 0} p(n|\ \textit{no máximo } m \textit{ partes, cada parte} \leq N) q^n.$$

Esses números são chamados q-análogos dos números binomiais pelo fato deste polinômio no ponto $q = 1$ nos fornecer $\begin{pmatrix} N+m \\ m \end{pmatrix}$.

Muitas das propriedades dos números binomiais têm seus análogos para os números q-binomiais. Por exemplo, a propriedade de simetria

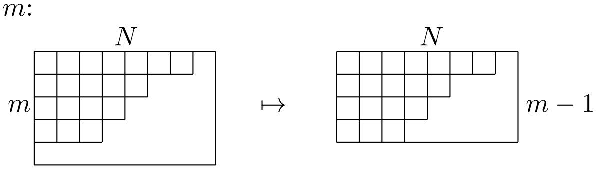
$$\begin{bmatrix} N+m \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N+m \\ N \end{bmatrix}, \tag{4.1}$$

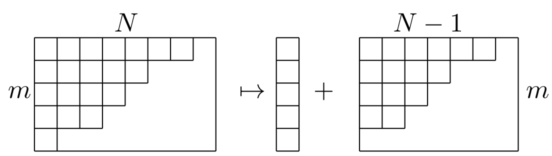
pode ser facilmente provada pela conjugação dos caminhos entre $(0,0)$ e (N,m).

Podemos escrever a relação de recorrência para os números binomiais como

$$\binom{N+m}{m} = \binom{N+m-1}{m-1} + \binom{N+m-1}{N-1}.$$

Em termos dos caminhos entre $(0,0)$ e (N,m), esta relação diz que o conjunto dos caminhos que cabem numa caixa $N \times m$ pode ser particionado em dois conjuntos disjuntos: aqueles que cabem numa caixa $N \times (m-1)$ e os que não cabem. Neste último caso, a primeira coluna das partições obtidas têm primeiras colunas com tamanho m, as quais, após removidas, resultam em partições que cabem na caixa $(N-1) \times m$:





Em termos de partições temos:
$p(n|$ no máximo $\leq m$ partes, cada parte $\leq N)q^n =$
$p(n|$ no máximo $\leq m-1$ partes, cada parte $\leq N)q^n$
$+\, p(n-m|$ no máximo $\leq m$ partes, cada parte $\leq N-1)q^{n-m}$.

Somando em n, obtemos a seguinte q-análoga relação de recorrência:

$$\begin{bmatrix} N+m \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N+m-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + q^m \begin{bmatrix} N+m-1 \\ N-1 \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

Note que, conjugando o argumento acima, obtemos uma outra relação de recorrência:

$$\begin{bmatrix} N+m \\ m \end{bmatrix} = q^N \begin{bmatrix} N+m-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N+m-1 \\ N-1 \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Os números binomiais têm uma fórmula bastante conhecida:

$$\binom{N}{m} = \frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-m+1)}{m(m-1)(m-2)\cdots 1}.$$

Vamos deduzir uma fórmula q-análoga para os números q-binomiais. Em (4.2) e (4.3) substituímos N por $N-m+1$ para obter:

$$\left[\begin{array}{c} N+1 \\ m \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} N \\ m-1 \end{array}\right] + q^m \left[\begin{array}{c} N \\ N-m \end{array}\right]. \tag{4.4}$$

$$\left[\begin{array}{c} N+1 \\ m \end{array}\right] = q^{N-m+1} \left[\begin{array}{c} N \\ m-1 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} N \\ N-m \end{array}\right]. \tag{4.5}$$

Agora, por (4.1), temos:

$$\left[\begin{array}{c} N \\ N-m \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} N \\ m \end{array}\right].$$

Assim, podemos reescrever (4.4) e (4.5) como:

$$\left[\begin{array}{c} N+1 \\ m \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} N \\ m-1 \end{array}\right] + q^m \left[\begin{array}{c} N \\ m \end{array}\right]. \tag{4.6}$$

$$\left[\begin{array}{c} N+1 \\ m \end{array}\right] = q^{N-m+1} \left[\begin{array}{c} N \\ m-1 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} N \\ m \end{array}\right]. \tag{4.7}$$

Subtraindo (4.6) de (4.7), obtemos:

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{c} N \\ m \end{array}\right] &= \frac{(1-q^{N-m+1})}{(1-q^m)} \left[\begin{array}{c} N \\ m-1 \end{array}\right] \\
&= \frac{(1-q^{N-m+1})(1-q^{N-m+2})}{(1-q^m)(1-q^{m-1})} \left[\begin{array}{c} N \\ m-2 \end{array}\right] \\
&\vdots \\
&= \frac{(1-q^N)(1-q^{N-1})\cdots(1-q^{N-m+1})}{(1-q^m)(1-q^{m-1})\cdots(1-q)} \left[\begin{array}{c} N \\ 0 \end{array}\right].
\end{aligned}$$

A fórmula q-análoga para os números q-binomiais é:

$$\left[\begin{array}{c} N \\ m \end{array}\right] = \frac{(1-q^N)(1-q^{N-1})\cdots(1-q^{N-m+1})}{(1-q^m)(1-q^{m-1})\cdots(1-q)},$$

já que $\left[\begin{array}{c} N \\ 0 \end{array}\right] = 1.$

4.1.1 Exercícios

1. Explicar combinatorialmente por que os números q-binomiais satisfazem a condição inicial $\begin{bmatrix} N \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ N \end{bmatrix}$.

4.2 O Teorema e a Série q-binomiais

Queremos agora encontrar q-análogos ao Teorema binomial e à Série binomial. Demonstraremos inicialmente o Teorema q-binomial.

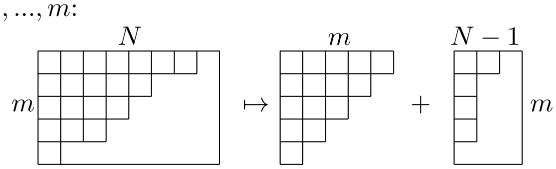
Teorema 4.3. (Teorema q-binomial)

$$\prod_{j=1}^{N}(1 + zq^j) = \sum_{m=0}^{\infty} q^{m(m+1)/2} \begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} z^m.$$

Demonstração: Consideremos a seguinte identidade:

$$\prod_{j=1}^{N}(1+zq^j)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} p(n|\ m \text{ partes distintas, cada parte } \leq N) z^m q^n. \tag{4.8}$$

É fácil observar que as partições enumeradas pelo lado direito de (4.8) têm m partes distintas cada uma sendo $\leq N$, enquanto que as partições contadas por $\begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix}$ têm no máximo m partes, não necessariamente distintas, cada uma sendo $\leq N - m$. No entanto, existe uma bijeção simples entre esses dois conjuntos de partições: do primeiro conjunto de partições, remova i da i-ésima menor parte para $i = 1, ..., m$:



Nesta bijeção, removemos $1 + 2 + 3 + \cdots + m = m(m + 1)/2$ quadrados. Assim, temos o Teorema q-binomial. ∎

Teorema 4.4. (Série q-binomial)

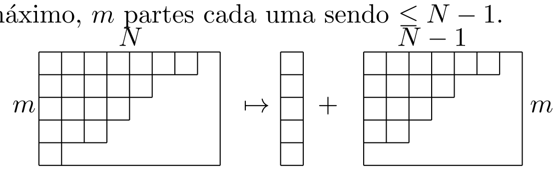
$$\prod_{j=1}^{N} \frac{1}{1-zq^j} = \sum_{m=0}^{\infty} q^m \begin{bmatrix} N+m-1 \\ m \end{bmatrix} z^m,$$

para $|z| < 1$ *e* $|q| < 1$.

Demonstração: Consideremos a identidade:

$$\prod_{j=1}^{N} \frac{1}{1-zq^j} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} p(n|\ m \text{ partes, cada parte} \leq N) z^m q^n. \tag{4.9}$$

Neste caso, temos um problema semelhante mas uma solução ainda mais simples. Devemos transformar partições com m partes em partições com, no máximo, m partes sendo cada parte $\leq N-1$. A solução é remover a primeira coluna (de tamanho m). Como a partição original tinha m partes, cada qual $\leq N$, a partição obtida terá, no máximo, m partes cada uma sendo $\leq N-1$.



Com esta bijeção concluímos a demonstração do teorema. ■

Vale mencionar, uma vez mais, que nestes dois teoremas quando substituímos a variável q por 1 obtemos, respectivamente, o Teorema binomial e a Série binomial. Por esta razão dizemos tratar-se de uma q-extensão.

4.3 Os Polinômios de Gauss

Os números q-binomiais também são chamados *Polinômios Gaussianos* ou *Polinômios de Gauss*. Estes são polinômios em q e pela fórmula apresentada acima,

$$\begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} = \frac{(1-q^N)(1-q^{N-1})\cdots(1-q^{N-m+1})}{(1-q^m)(1-q^{m-1})\cdots(1-q)},$$

é claro que seu grau é $mN - m(m-1)/2 - m(m+1)/2 = mN - m^2 = m(N-m)$.

A fórmula que apresentamos a seguir foi provada por Gauss.

Teorema 4.5. (Fórmula gaussiana)

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \begin{cases} 0 & \textit{se } n \textit{ é ímpar} \\ (1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots(1-q^{n-1}) & \textit{se } n \textit{ é par.} \end{cases}$$

Demonstração: Se n é ímpar, então

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j} \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} \\ &= (-1)^n \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \\ &= -\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde segue a primeira linha da Fórmula gaussiana.

Vamos denotar o lado esquerdo da fórmula gaussiana por $f(n)$. Substituindo $N+m$ por n e m por j na relação de recorrência (4.3) para os números q-binomiais, obtemos

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} + q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} + \sum_{j=0}^{n}(-1)^j q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} \\ &= f(n-1) + \sum_{j=0}^{n}(-1)^j q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} \\ &= f(n-1) + (-1)^n \sum_{j=0}^{n}(-1)^j q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ n-j \end{bmatrix} \\ &= f(n-1) + \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \quad \text{(fazendo } n-j=k\text{)} \\ &= f(n-1) + (-1)^n \sum_{j=0}^{n}(-1)^j q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

enquanto (4.2) produz

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \right) \\ &= -f(n-1) + \sum_{j=0}^{n} (-1)^j q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Agora, somando as duas expressões acima para $f(n)$, obtemos, para n,

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j (1-(1-q^j)) \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \\ &= -\sum_{j=0}^{n} (-1)^j (1-q^j) \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \text{ (pela Fórmula Gaussiana)} \\ &= -\sum_{j=0}^{n} (-1)^j (1-q^{n-1}) \begin{bmatrix} n-2 \\ j-1 \end{bmatrix} \\ &= -(1-q^{n-1}) \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \begin{bmatrix} n-2 \\ j-1 \end{bmatrix} \\ &= (1-q^{n-1}) f(n-2). \end{aligned}$$

Portanto, quando n é par,

$$\begin{aligned} f(n) &= (1-q^{n-1}) f(n-2) \\ &= (1-q^{n-1})(1-q^{n-3}) f(n-4) \\ &= (1-q^{n-1})(1-q^{n-3}) \cdots (1-q^3)(1-q) f(0) \\ &= (1-q^{n-1})(1-q^{n-3}) \cdots (1-q^3)(1-q). \end{aligned}$$

como queríamos provar. ∎

Vamos apresentar agora uma fórmula q-análoga à seguinte igualdade envolvendo os números binomiais:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Teorema 4.6.
$$\sum_{j=0}^{n} q^{j^2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

Demonstração: Pelo Teorema q-binomial,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2n} z^j q^{\frac{j(j+1)}{2}} \begin{bmatrix} 2n \\ j \end{bmatrix} &= \prod_{j=1}^{2n} (1 + zq^j) \\ &= \prod_{j=1}^{n} (1 + zq^j) \prod_{j=1}^{n} (1 + (zq^n)q^j) \\ &= \sum_{j=0}^{n} z^j q^{\frac{j(j+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \sum_{k=0}^{n} (zq^n)^k q^{\frac{k(k+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de z^n nos dois lados da igualdade acima, vemos que

$$\begin{aligned} q^{n(n+1)/2} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} &= \sum_{k=0}^{n} q^{(n-k)(n-k+1)/2} \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} q^{nk+k(k+1)/2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=0}^{n} q^{n(n+1)/2+k^2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^2. \end{aligned}$$

Cancelando $q^{n(n+1)/2}$, obtemos (4.10). ■

4.3.1 Exercícios

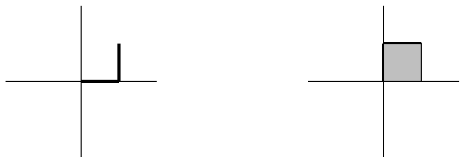
1. Provar que

$$\sum_{j=0}^{n} q^j \begin{bmatrix} m+j \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+m+1 \\ n \end{bmatrix}.$$

4.4 Polinômios Gaussianos, outras interpretações

Na primeira seção deste capítulo, definimos os números q-binomiais $\begin{bmatrix} N+m \\ m \end{bmatrix}$ como sendo a função geradora para partições em, no máximo, m partes sendo cada parte menor do que ou igual a N. Nesta seção, apresentamos duas outras interpretações para tais números.

Considere todos os caminhos no primeiro quadrante começando em $(0, 0)$ e terminando em $(n-k, k)$ composto de n passos, cada um sendo de uma unidade para cima ou para a direita. O caso $n = 2$ e $k = 1$ está ilustrado abaixo:



No primeiro caso, não há área abaixo do caminho; já no segundo, a área é 1. Vamos separar os $\binom{n}{k}$ caminhos de acordo com a área sob a curva. Podemos representar os possíveis movimentos usando a expressão

$$(x+y)^2 = xx + xy + yx + yy,$$

onde x representa um movimento para a direita e y para um movimento para cima. Podemos controlar a área reescrevendo cada termo colocando os xs primeiramente e adicionando uma unidade à área sempre que yx for trocado por xy. Vamos usar q para contar as unidades de área, de modo que

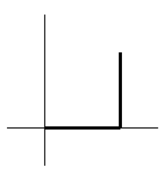
$$yx = qxy,$$

note que a área abaixo de xy é 0, já a área abaixo de yx é 1. Como vamos querer colocar os qs juntos, vamos assumir também que

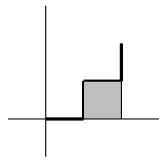
$$yq = qy \text{ e } xq = qx.$$

Para exemplificar o que estamos dizendo, observe que o coeficiente de x^2y^2 em $(x+y)^4$ é $1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4$. De fato:

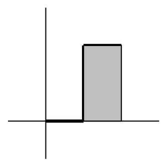
- $xxyy = x^2y^2$:



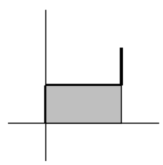
- $xyxy = xqxyy = qx^2y^2$:



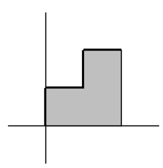
- $xyyx = xyqxy = xqyxy = qxqxyy = q^2x^2y^2$:



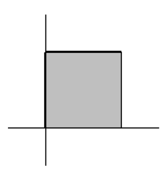
- $yxxy = qxyxy = qxqxyy = q^2x^2y^2$:



- $yxyx = qxyyx = qxyqxy = q^2xyxy = q^3x^2y^2$:



- $yyxx = yqxyx = qyxyx = qqxyqxy = q^4x^2y^2$:



De forma mais geral temos

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{n-k} y^k, \tag{4.11}$$

ou seja, os números q-binomiais $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ geram as áreas abaixo dos caminhos entre $(0,0)$ e (n,n) obtidos por movimentos unitários para a direita ou para cima.

Vamos, a partir de (4.11), obter de uma maneira diferente a fórmula para $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ que foi obtida ao final da Seção 4.1.

Lembremos que $yx = qxy, xq = qx$ e $yq = qy$. Assim, tomando a igualdade

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y),$$

obtemos usando (4.11):

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} x^{n+1-k} y^k &= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{n-k} y^k (x+y) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{n-k} y^k x + \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{n-k} y^{k+1}.\end{aligned}$$

Como

$$y^k x = q^k x y^k,$$

temos

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^k + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

Pelo mesmo argumento, considerando a igualdade

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n$$

obtemos

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{n+1-k} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}. \tag{4.13}$$

Agora, como foi feito na Seção 4.1, basta combinar (4.12) e (4.13) para obter

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(1-q^{n+1-k})}{(1-q^k)} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix},$$

cuja iteração resulta em

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(1-q^{n+1-k})\cdots(1-q^n)}{(1-q^k)\cdots(1-q)} \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, temos novamente a fórmula:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(1-q^{n+1-k})\cdots(1-q^n)}{(1-q^k)\cdots(1-q)}.$$

Apresentamos a seguir nossa última interpretação para os números q-binomiais. Vamos mostrar que esses números contam certos subespaços vetoriais.

Seja V um espaço vetorial n-dimensional sobre o corpo finito $GF(q)$[1]. O número de vetores em V é q^n (todas as possíveis n-uplas que podem ser formadas com q elementos). Note que o número de k-uplas linearmente independentes em V é

$$(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{k-1}),$$

o que pode ser verificado pelo fato de que um conjunto de vetores é linearmente independente se, e somente se, nenhum vetor pertence ao espaço vetorial gerado pelos demais vetores.

Agora, um subespaço k-dimensional de V é gerado por k vetores linearmente independentes. Mas um dado subespaço terá quantas bases diferentes? Exatamente o número de k-uplas lenearmene independentes em um espaço de dimensão k, o qual é dado pela mesma fórmula acima substituindo-se n por k. Portanto, o número de subespaços k-dimensionais é

$$\frac{(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{k-1})}{(q^k-1)(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1})}$$
$$= \frac{(q^n-1)q(q^{n-1}-1)\cdots q^{k-1}(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)q(q^{k-1}-1)\cdots q^{k-1}(q-1)}$$
$$= \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

[1] corpo finito de ordem q

4.5 Quadrado de Durfee

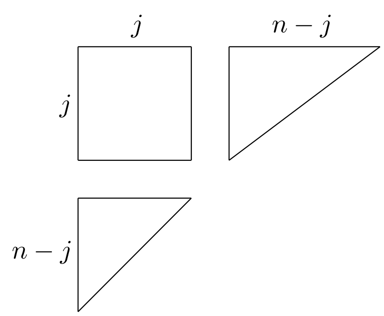
Nesta seção, vamos considerar os chamados *Quadrados de Durfee*, já vistos no Capítulo 2.

Uma interpretação para o Quadrado de Durfee é a seguinte: uma partição tem Quadrado de Durfee de lado m se a m-ésima parte (numerada da maior para a menor) é $\geq m$, mas a $(m+1)$-ésima parte é $\leq m$.

Já sabemos que o número q-binomial

$$\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}$$

é a função geradora para todas as partições com, no máximo, n partes sendo cada parte $\leq n$. Vamos encontrar agora, uma função geradora para as partições acima que têm Quadrado de Durfee de lado j. Para tanto, consideremos uma representação genérica de alguma destas partições:



O Quadrado de Durfee $j \times j$ é, obviamente, gerado por $q^{j \cdot j} = q^{j^2}$. Pela definição dos números q-binomiais, a parte superior direita do gráfico acima é gerada por

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix},$$

enquanto a parte inferior é gerada por

$$\begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix}.$$

Portanto, a função geradora para partições em, no máximo, n partes, cada parte $\leq n$ e com Quadrado de Durfee de lado j é:

$$q^{j^2}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} = q^{j^2}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}^2.$$

Como cada partição enumerada por $\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}$ tem um único Quadrado de Durfee de lado j, com $0 \leq j \leq n$, temos:

$$\sum_{j=0}^{n} q^{j^2}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix},$$

que é exatamente a equação (4.10).

4.5.1 Exercícios

1. Mostrar que a função geradora para partições auto-conjugadas com cada parte $\leq N$ é

$$\sum_{j=0}^{N} q^{j^2}\begin{bmatrix} N \\ j \end{bmatrix}_{q^2},$$

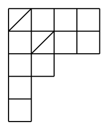
sendo $\begin{bmatrix} N \\ j \end{bmatrix}_{q^2}$ o polinômio gaussiano $\begin{bmatrix} N \\ j \end{bmatrix}$ com q substituído por q^2.

2. Construir uma prova bijetiva para a afirmação: o número de partições de n em partes ímpares e distintas, cada qual $\leq 2N-1$, é igual ao número de partições autoconjugadas de n cujas partes são $\leq N$.

4.6 O Produto Triplo de Jacobi

Apresentamos nesta seção uma identidade que tem sido largamente aplicada em demonstrações de outras indentidades. Antes, porém, introduzimos o chamado Símbolo de Frobenius.

Olhando o Gráfico de Ferrers, podemos contruir uma representação para a partição que revela o tamanho do Quadrado de Durfee e a partição conjugada. Esta representação é chamada de *Símbolo de Frobenius* da partição. Vejamos como podemos construir este símbolo por meio de um exemplo. Considere o Gráfico de Ferrers da partição $4+4+2+1+1$:



O símbolo consiste numa matriz de duas linhas com entradas inteiras não-negativas em ordem decrescente. O número s de elementos em cada linha é igual a dimensão do lado do Quadrado de Durfee. No nosso exemplo, $s=2$. A j-ésima entrada na primeira linha consiste do número de quadrados (ou pontos) na j-ésima linha do Gráfico de Ferrers à direita da diagonal (destacada no exemplo acima). A j-ésima entrada na segunda linha consiste do número de quadrados na j-ésima coluna do Gráfico de Ferrers abaixo da diagonal. Assim, o Símbolo de Frobenius para a partição $4+4+2+1+1$ é

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que, a partir deste símbolo, podemos reconstruir a partição.

Vamos examinar o coeficiente de z^0 no produto

$$[(1+(zq)q^0)(1+(zq)q^1)(1+(zq)q^2)(1+(zq)q^3)\cdots]$$
$$\times[(1+z^{-1}q^0)(1+z^{-1}q^1)(1+z^{-1}q^2)(1+z^{-1}q^3)\cdots]. \qquad (4.14)$$

Quando multiplicamos este produto, podemos ver que para obter z^0 precisamos do mesmo número, digamos s, de segundos termos de cada produto contido entre colchetes. Assim, um termo terá a forma

$$q^s q^{a_1+a_2+\cdots+a_s} q^{b_1+b_2+\cdots+b_s},$$

com $a_1 > a_2 > \cdots > a_s \geq 0$ e $b_1 > b_2 > \cdots > b_s \geq 0$, o que corresponde ao Símbolo de Frobenius

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_s \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{pmatrix},$$

relacionado à uma única partição de $s + \sum a_i + \sum b_i$.

Como existe uma bijeção entre os Símbolos de Frobenius e as partições de n, podemos concluir que o coeficiente de z^0 em (4.14) é

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}. \tag{4.15}$$

Apresentamos a seguir um famoso teorema de Jacobi.

Teorema 4.7. (Produto Triplo de Jacobi)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)(1+zq^n)(1+z^{-1}q^{n-1}), \tag{4.16}$$

para $|q| < 1$ *e* $z \neq 0$.

Demosntração:

Definimos

$$J(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1+zq^n)(1+z^{-1}q^{n-1}).$$

Expandinho $J(z)$ em uma Série de Laurent em torno de $z = 0$, obtemos

$$J(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(q)z^n. \tag{4.17}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} J(zq) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1+zq^{n+1})(1+z^{-1}q^{n-2}) \\ &= (1+z^{-1}q^{-1}) \prod_{n=2}^{\infty} (1+zq^n) \prod_{n=1}^{\infty} (1+z^{-1}q^{n-1}) \\ &= z^{-1}q^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} (1+zq^n) \prod_{n=1}^{\infty} (1+z^{-1}q^{n-1}) \\ &= z^{-1}q^{-1}J(z). \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de z^n em ambos os lados, podemos ver que

$$q^n A_n(q) = q^{-1}A_{n+1}(q).$$

Iterando esta relação de recorrência obtemos:

$$A_n(q) = q^{\frac{n(n+1)}{2}} A_0(q). \tag{4.18}$$

Agora, por (4.15) e pelos comentários após (4.14), segue que

$$A_0(q) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}. \tag{4.19}$$

Combinando (4.17), (4.18) e (4.19) obtemos

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^n)(1+z^{-1}q^{n-1}) &= J(z) \\
&= A_0(q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{\frac{n(n+1)}{2}},
\end{aligned}$$

o que é equivalente ao produto triplo de Jacobi. ■

4.6.1 Exercícios

1. Trocando q por q^3 e z por $-q^{-1}$, deduzir o Teorema dos Números Pentagonais de Euler a partir do Produto triplo de Jacobi.

2. Provar a indentidade:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)}{(1+q^n)}.$$

3. Provar a indentidade:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2n})}{(1+q^{2n-1})}.$$

Capítulo 5

Nova representação matricial para partições

5.1 Representando partições irrestritas

Neste capítulo apresentamos uma nova interpretação para partições que foi introduzida em [10]. Trata-se de representar partições como matrizes de duas linhas satisfazendo certas condições. Muitas conseqüências estão sendo obtidas, ver por exemplo [4].

Já vimos, no capítulo anterior, uma representação matricial para partições chamada de Símbolo de Frobenius. Vamos ilustrar esta nova representação apresentando três interpretações para partições irrestritas, isto é, partições cujas partes não têm propriedades específicas.

A primeira das interpretações tem uma propriedade muito interessante: descreve, de maneira completa, a partição conjugada.

Teorema 5.1. *O número de partições de n é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_s \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

sendo $c_s = 0, c_t = c_{t+1} + d_{t+1}$ e $\sum_{i=1}^{s} c_i + \sum_{i=1}^{s} d_i = n$.

Demonstração:

Seja $\lambda = \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_s$ uma partição de n. Vamos mostrar como podemos associar a esta partição uma matriz de duas linhas da forma (5.1). A idéia é dividir cada λ_i em duas partes de modo a formar a i-ésima coluna da matriz. Como devemos ter $c_s = 0$, vamos escolher $d_s = \lambda_s$. Como $c_{s-1} = c_s + d_s = \lambda_s$, escolhemos $d_{s-1} = \lambda_{s-1} - \lambda_s$. Sendo $c_{s-2} = c_{s-1}+d_{s-1} = \lambda_{s-1}$, vamos escolher $d_{s-2} = \lambda_{s-2}-\lambda_{s-1}$. Continuamos assim até obter $c_1 = \lambda_2$ e $d_1 = \lambda_1 - \lambda_2$.

Inversamente, dada uma matriz da forma (5.1), tudo o que temos a fazer é adicionar as entradas em cada coluna para obter novamente a partição inicial. ■

Exemplo 5.1. *Para $n = 6$ a tabela a seguir mostra quatro partições sendo representadas por matrizes dadas pelo teorema anterior.*

$p(6)$	*Representação Matricial*
6	$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$
$5+1$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
$4+2$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
$4+1+1$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vejamos agora que a segunda linha das matrizes da forma (5.1) nos fornece uma completa descrição da partição conjugada. Considere a partição $6+5+2$ e sua representação:

$$6+5+2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Note que a segunda linhas $(1\ \ 3\ \ 2)$ descreve a partição conjugada a $6+5+2$, pois nos diz o número de 1s, 2s e de 3s na partição conjugada: $3+3+2+2+2+1$. Inversamente, a segunda linha da representação matricial de $3+3+2+2+2+1$, que é $(0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1)$, descreve $6+5+2$, pois diz que não há nenhum 1, um 2, nenhum 3, nenhum 4, um 5 e um 6.

Apresentamos, a seguir, a segunda representação matricial para partições. A demonstração que apresentamos aqui pode ser vista em [4].

Teorema 5.2. *O número de partições de n é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_s \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

sendo $c_s > 0, c_t \geq 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e $\sum_{i=1}^{s} c_i + \sum_{i=1}^{s} d_i = n$.

Demosntração:

Vamos construir uma bijeção entre o conjunto das partições de n e o conjunto das matrizes de duas linhas da forma (5.2).

É suficiente, para cada $s \geq 1$ fixado, estabelecer uma bijeção entre o conjunto das partições de n com Quadrado de Durfee de lado s e o conjunto das matrizes da forma (5.2) com a exigência adicional de que tenham s colunas.

Por exemplo, a partição $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_r$ $(\lambda_t \geq \lambda_{t+1})$ com Quadrado de Durfee de lado 3 é completamente caracterizada uma vez que se saiba quantas vezes cada um dos números 1, 2 e 3 aparece como uma parte de λ e se também sabemos suas três maiores partes λ_1, λ_2 e λ_3 de λ. Devemos associar a λ uma matriz 2×3 que controle estes seis números. Seja

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

a matriz que estamos procurando. Por (5.2) podemos escrever

$$c_3 = 1 + j_3\,, \tag{5.4}$$

$$c_2 = 3 + j_2 + j_3 + d_3 \tag{5.5}$$

$$c_1 = 5 + j_1 + j_2 + j_3 + d_2 + d_3. \tag{5.6}$$

com $j_1, j_2, j_3 \geq 0$. Logo, a matriz (5.3) pode ser reescrita como

$$\begin{pmatrix} 5+j_1+j_2+j_3+d_2+d_2 & 3+j_2+j_3+d_3 & 1+j_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

ou ainda como a soma

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_2 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_3 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} j_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j_2 & j_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j_3 & j_3 & j_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (5.8)$$

Pelo que dissemos acima, segue que a partição λ pode ser caracterizada pelos números

$d_1 \longrightarrow$ o número de vezes que 1 aparece como parte de λ

$d_2 \longrightarrow$ o número de vezes que 2 aparece como parte de λ

$d_3 \longrightarrow$ o número de vezes que 3 aparece como parte de λ, sem contar aqui eventuais partes iguais a 3 contidas no Quadrado de Durfee

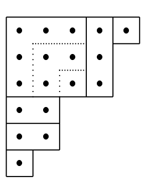
$j_1 \longrightarrow \lambda_1 - \lambda_2$, isto é, o número de vezes que 1 é uma parte da partição conjugada λ'

$j_2 \longrightarrow \lambda_2 - \lambda_3$, isto é, o número de vezes que 2 é uma parte de λ'

$j_3 \longrightarrow \lambda_3 - 3$, isto é, o número de unidades que λ_3 excede o lado do Quadrado de Durfee.

Note que as primeiras três partes são completamente determinadas: $\lambda_3 = 3 + j_3$, $\lambda_2 = 3 + j_2 + j_3$ e $\lambda_1 = 3 + j_1 + j_2 + j_3$.

Por exemplo, considere a partição $\lambda = 5 + 4 + 4 + 2 + 2 + 1$ de $n = 18$.



Decompomos o Gráfico de Ferrers de λ, como mostrado na figura ao lado, levando em consideração o tamanho do Quadrado de Durfee e o número de vezes que 1, 2 e 3 aparecem como partes de λ e da partição conjugada λ'. Neste exemplo, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 0$, $j_1 = 1$, $j_2 = 0$ e $j_3 = 1$. Esta decomposição sugere a seguinte soma de matrizes:

$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ do Quadrado de Durfee,

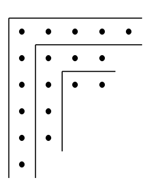
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ porque 1 aparece uma vez e 2 duas vezes como partes de λ e

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, pois 3 é duas vezes parte de λ', mas aparece apenas uma vez fora do Quadrado de Durfee e 1 é parte de λ' apenas uma vez.

Portanto, a matriz correspondente a partição λ é

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

O que acabamos de descrever pode ser facilmente invertido de modo que, dada uma matriz da forma (5.2), usando (5.8), podemos obter a partição. ∎



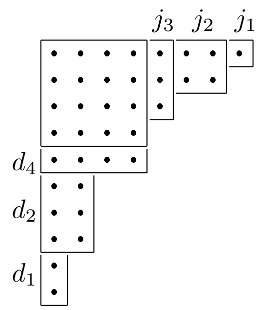
Existe uma maneira mais fácil de se obter a representação matricial da partição. Não precisamos escrever primeiramente a soma de matrizes (5.8). De fato, no exemplo contido na demonstração anterior, note que a soma das colunas 10, 6 e 2 são os comprimentos dos arcos de pontos mostrados na figura ao lado. Na segunda linha, as entradas 1 e 2 indicam que o salto vertical do arco correspondente com respeito ao anterior e 0 indica o salto vertical dos últimos arcos com respeito à base do Quadrado de Durfee.

A matriz $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ corresponde ao Quadrado de Durfee. Note que as entradas 5, 3 e 1 da primeira linha são precisamente o número de elementos que cada arco de pontos tem em comum com o Quadrado de Durfee.

Exemplo 5.2. *Determine a partição representada pela matriz*

$$\begin{pmatrix} 15 & 9 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O Quadrado de Durfee tem lado 4 e os comprimentos dos arcos são $15 + 2 = 17$, $9 + 3 = 12$, $5 + 0 = 5$ e $1 + 1 = 2$. Além disso, a segunda linha da matriz indica que o primeiro arco começa duas unidades abaixo do segundo, o qual, por sua vez, começa três unidades abaixo do terçeiro arco. Este terçeiro arco começa no mesmo nível do quarto e este último tem início uma unidade abaixo do Quadrado de Durfee. Isto é tudo o que precisamos saber para determinar o Gráfico de Ferrers da partição, mostrado na figura ao lado. Assim, a partição correspondente é $\lambda = 8+7+5+4+4+2+2+2+1+1$.



No teorema a seguir apresentamos uma terçeira representação matricial para partições. A demonstração que veremos para este resultado, da mesma forma que aquela do teorema anterior, pode ser vista em [4].

Teorema 5.3. *O número de partições de n é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_s \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

sendo $d_t > 0, c_t \geq 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e $\sum_{i=1}^{s} c_i + \sum_{i=1}^{s} d_i = n$.

Demosntração:

Vamos construir uma bijeção entre o conjunto das partições de n e o conjunto das matrizes da forma (5.9). Para isso, vamos reescrever a condição $c_t \geq 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$ como

$$c_t = 1 + j_t + c_{t+1} + d_{t+1} \quad \forall t < s\,, \tag{5.10}$$

$$c_s = j_s\,, \tag{5.11}$$

$$j_t \geq 0. \tag{5.12}$$

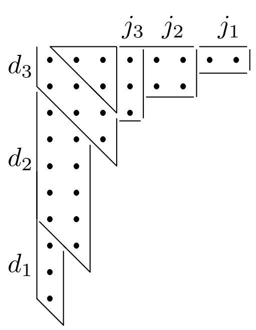
Vamos definir uma bijeção entre o conjunto das partições de n com Quadrado de Durfee de lado s e o conjunto das matrizes da forma (5.9) satisfazendo (5.10), (5.11) e (5.12), com s colunas.

Por exemplo, se $s = 3$, então

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+j_1+j_2+j_3+d_2+d_3 & 1+j_2+j_3+d_3 & j_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_2 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_3 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} j_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j_2 & j_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j_3 & j_3 & j_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Compare (5.13) com a figura ao lado. As entradas d_1, d_2 e d_3 na segunda linha da matriz são todas não-nulas e indicam os tamanhos dos subconjuntos no Gráfico de Ferrers na figura. Os elementos na primeira linhas da matriz, por sua vez, indicam o número de unidades ainda necessárias para completar os arcos de pontos. Os j_ts podem ser nulos, mas $d_t \neq 0$ para qualquer t.

Na figura ao lado, mostramos o exemplo da partição $\lambda = 8+6+4+3+2+2+2+2+1+1$ para a qual $d_1 = 3$, $d_2 = 5$, $d_3 = 2$, $j_1 = 2$, $j_2 = 2$ e $j_3 = 1$. A matriz associada a esta partição é, portanto,

$$\begin{pmatrix} 14 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

A correspondência descrita por (5.13) ou, alternativamente, de uma maneira ilustrativa, na figura acima, fornece a prova que estávamos procurando para o teorema. Como na representação obtida antes a partir de (5.7), o número de colunas na matriz é igual ao lado do Quadrado de Durfee da partição correspondente. ∎

5.2 Exercícios

1. Mostrar que o número de partições de n em partes ímpares, sendo cada parte maior do que 1, é igual ao número de matrizes da forma
$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_s \end{pmatrix},$$
sendo $c_s = 2$ ou 3, d_t par para qualquer t, $\sum_{i=1}^{s} c_i + \sum_{i=1}^{s} d_i = n$ e
   - se c_t e c_{t+1} são pares, então $c_t = c_{t+1} + d_{t+1}$;
   - se c_t é par e c_{t+1} é ímpar, então $c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$;
   - se c_t é ímpar e c_{t+1} é par, então $c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$;
   - se c_t e c_{t+1} são ímpares, então $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$.

2. Mostrar que o número de partições de n cujas partes diferem por pelo menos 2 é igual ao número de matrizes da forma
$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_s \end{pmatrix},$$
sendo $c_s = 1, c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e $\sum_{i=1}^{s} c_i + \sum_{i=1}^{s} d_i = n$.

3. Generalizar o exercício anterior, isto é, encontrar uma representação como matrizes de duas linhas para as partições de n cujas partes diferem por pelo menos k e as partes são maiores do que r.

Bibliografia

[1] Andrews, G.E., Erikson, K.; *Integer Partition*, Cambridge University Press. Cambridge, 2004.

[2] Andrews, G.E.; *The theory of partitions*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications (Rota Editor), Vol. 2, G.-C., Addison-Wesley, Reading, 1976.

[3] Andrews, G.E., Askey, R., Roy, R.; *Special Functions*, Vol. 71, Cambridge University Press, 1999.

[4] Brietzke, E.H.M., Santos, J.P.O., Silva, R., *Bijective proofs using two-line matrix representations for partitions*, Ramanujam Journal. Aceito.

[5] MacMahon, P. A.; *Combinatorial Analysis*, 2 v., Chelsea Publisinhg, 1960.

[6] Niven, I.; *Formal Power Series*, The American Mathematical Monthly, Vol. 76, No 8, p. 871-889, 1969.

[7] Santos, J.P.O.; *Introdução à Teoria dos Números*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2009.

[8] Santos, J.P.O., Silva, R., On a combinatorial proof for an identity involving the triangular numbers. Submetido.

[9] Santos, J.P.O., Mello, M.P., Murari, I.T.C.; *Introdução à Análise Combinatória*, Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2007.

[10] Santos, J.P.O., Mondek, P., Ribeiro, A.C.; *New two-line arrays representing partitions*, Annals of Combinatorics. Aceito.

[11] Slomson, A.; *An Introduction to Combinatorics*, Chapman and Hall, London, 1991.

[12] Stanley, R.P.; *Enumerative Combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge, Vol. 1, 1997.

[13] Stanley, R.P.; *Enumerative Combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge, Vol. 2, 1999.

Índice