Introdução à Análise Matemática na Reta

Claus I. Doering
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

1º Colóquio de Matemática da Região Sul
UFSM — Santa Maria
26 a 30 de abril de 2010

.

.

Para a Luisa e o Guilherme

Sumário

Prefácio

O 1º Colóquio de Matemática da Região Sul está sendo promovido pela Sociedade Brasileira de Matemática e será realizado na Universidade Federal de Santa Maria, de 26 a 30 de abril de 2010. Inspirados pelo que vem acontecendo há décadas nos Colóquios Brasileiros de Matemática, os organizadores solicitaram que houvesse um texto para cada minicurso oferecido nesse evento inédito, para que os ouvintes não precisassem tomar (muitas) notas durante as apresentações.

Nosso objetivo nas cinco aulas de cinquenta minutos do nosso minicurso de mesmo nome é partir da reta real na primeira aula e chegar ao Teorema Fundamental do Cálculo na quinta aula; na segunda aula trataremos de sequências, na terceira de continuidade e na quarta de derivada e integral. Em todas as aulas, discutiremos somente os conceitos e resultados que são necessários para enunciar e demonstrar aquele teorema.

O conteúdo deste texto está em concordância com o que será apresentado no minicurso. Entretanto, estimamos que somente a metade do texto oferecido poderá ser abordado em sala de aula.

Cada um dos cinco capítulos apresenta uma pequena lista de exercícios. O grau de dificuldade da resolução dos exercícios varia bastante, indo desde os de fixação de compreensão do conteúdo até alguns mais desafiadores, talvez mais indicados para os leitores que não estejam vendo este assunto pela primeira vez.

Um sexto capítulo, o Apêndice, apresenta vários tópicos que não serão abordados no minicurso, mas que entendemos serem de interesse num primeiro contato com a Análise Matemática. Na primeira seção apresentamos uma introdução à Lógica Matemática necessária para desenvolver o assunto e que pode ser considerada pré-requisito.

Na segunda seção do Apêndice tratamos da estrutura dos corpos ordenados e nas últimas duas seções apresentamos, primeiro, as várias equivalências do axioma do supremo e, depois, esboçamos as duas construções dos números reais, criadas por R. Dedekind e G. Cantor.

Todos os assuntos desenvolvidos neste texto são de conhecimento público e aparecem, há décadas, numa quantidade enorme de livros, escritos em todos os idiomas do planeta, bem como, especialmente neste milênio, na internet. Na bibliografia e nos epílogos ao final de cada capítulo apresentamos sugestões de estudo e leitura para depois do minicurso.

No entanto, não podemos deixar de ressaltar que, ao contrário dos outros textos, desenvolvemos todo nosso material sem, jamais, utilizar um único argumento do tipo $\varepsilon - \delta$ (em particular, tampouco aparecem limites de funções). Em vez disso, utilizamos somente limites de sequências, ou seja, só precisamos de ε. Isso até é comum para introduzir o conceito de continuidade, mas a versão de Weierstrass–Carathéodory que utilizamos para a derivada é muito menos conhecida. Entendemos que, num primeiro contato com a Análise Matemática na reta, essa abordagem é mais indicada.

Várias partes deste texto foram usadas como notas de aula nas disciplinas de Análise Real dos Cursos de Licenciatura em Matemática da UFRGS, e não poderíamos deixar de agradecer a todos os alunos que nos ajudaram a melhorar aquelas notas. Evidentemente, ficaríamos muito felizes se os leitores interessados mandassem sugestões, críticas e indicações de erros (de Matemática ou de impressão!) para nosso endereço eletrônico `cdoering@mat.ufrgs.br`.

Bom minicurso.

Porto Alegre, 20 de fevereiro de 2010

Claus I. Doering
UFRGS

Capítulo 1

Números

O que são derivadas e integrais? Limites. O que são limites? Números. E o que são números?

1.1 O Corpo Incompleto dos Racionais

O conjunto $\mathbb{Q}$ de todos os números racionais possui uma estrutura matemática conhecida como *corpo*, basicamente herdada das operações usuais dos números inteiros que, por sua vez, provêm das duas operações mais elementares, a soma e o produto de números naturais.

Para fixar a notação, denotamos o conjunto dos números naturais $1, 2, 3, \ldots$ por $\mathbb{N}$ e o dos inteiros $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ por $\mathbb{Z}$. Não veremos, aqui, a axiomatização de $\mathbb{N}$ (onde vale a *indução matemática*) nem a construção de $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$ e a de $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$; basta lembrar que, com as devidas identificações, temos as inclusões

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}.$$

O conjunto dos naturais é fechado em relação à soma e ao produto de naturais, mas não é fechado em relação à diferença de naturais. O conjunto dos inteiros é fechado em relação à soma, ao produto e à diferença de inteiros, sendo que 0 é o elemento neutro da soma e 1 o do produto, mas não é fechado em relação à divisão de inteiros.

No entanto, $\mathbb{Q}$ é fechado em relação à soma, ao produto e a ambas diferenças e divisão (por racional não nulo), sendo a soma e o produto associativos e comutativos, e o produto distributivo perante a soma. Por isso, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais, com a soma e seu neutro 0 e com o produto e sua unidade 1, possui a estrutura de um *corpo*.*

Entretanto, lembre que há uma infinidade de maneiras diferentes de escrever o *mesmo* racional, já que, para $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$, temos

$$\tfrac{m}{n} = \tfrac{p}{q} \iff mq = pn.$$

Observe, entretanto, que cada racional positivo pode ser escrito de maneira *única* como a/b, com $a, b \in \mathbb{N}$ primos entre si, isto é, tais que 1 é o único divisor comum de a e b. Se a e b são primos entre si, então de

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \tag{1.1}$$

sempre decorre que $m = p\,a$ e $n = p\,b$, para algum $p \in \mathbb{Z}$.

Em $\mathbb{Q}$ também temos uma ordem total, compatível com as operações de soma e produto, herdada da ordem natural dos inteiros, em que a diferença entre dois inteiros consecutivos

$$\cdots < -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \cdots$$

é sempre igual a 1 e cada racional fica "entre" dois inteiros consecutivos. De fato, em $\mathbb{Z}$ vale o *algoritmo da divisão* geral, qual seja, dados $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ quaisquer, sempre $m = qn + r$, para certos $q, r \in \mathbb{Z}$, com "resto" $0 \leqslant r < n$. Assim, $qn \leqslant m < (q+1)n$ e, portanto, dividindo por n, temos $q \leqslant x < q + 1$ para o racional $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

Essa interpretação geométrica dos racionais é muito útil. Numa reta infinita, marcamos dois pontos quaisquer e os identificamos com 0 e 1; é costume marcar 0 à esquerda de 1. A partir dessa escala, podemos marcar todos os inteiros ao longo dessa reta, espaçados por uma unidade, que é a "distância" entre 0 e 1, bem como os racionais. Por exemplo, $\frac{1}{2}$ fica na metade entre 0 e 1, sendo que os múltiplos $\frac{1}{2}\,m$ de $\frac{1}{2}$ ficam igualmente espaçados entre si, bem como os múltiplos de $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc.

*No Apêndice A2, pode ser encontrada a álgebra dos corpos.

A totalidade dos números racionais pode, portanto, ser interpretada como uma “reta” que se estende indefinidamente em ambos sentidos, sendo que $x < y$ se, e só se, x está à esquerda de y.

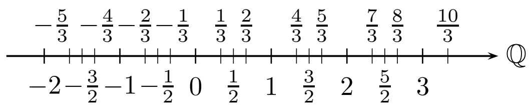

Figura 1.1 A reta racional

Observe que, se o racional x está à esquerda do racional y, então existe pelo menos o racional $z = \frac{1}{2}(x + y)$ entre os dois, que é o *ponto médio* entre x e y. Consequentemente, existe uma infinidade de racionais entre dois racionais quaisquer.

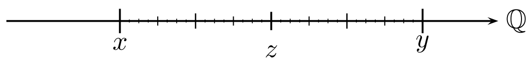

Figura 1.2 $\mathbb{Q}$ tem uma infinidade de elementos em toda parte

A ordem nos permite definir o *valor absoluto* $|x|$ de x, como sendo x, se $x \geqslant 0$, e $-x$, se $x \leqslant 0$, que interpretamos como a *distância* de x à origem. Assim, sempre $|x| \geqslant 0$, com $|x| = 0$ se, e só se, $x = 0$. Em particular, interpretamos $|x - y|$ como a distância entre x e y.

De posse da noção de distância podemos introduzir em $\mathbb{Q}$, como em qualquer *corpo ordenado*, todos os conceitos básicos da Análise Matemática, tais como sequências convergentes, funções contínuas, funções deriváveis e a integral. No entanto, em corpos ordenados muito gerais, podem não ocorrer algumas propriedades que estamos acostumados a usar, por exemplo, a convergência da sequência $\frac{1}{n}$ a 0. Essa propriedade, entretanto, pode praticamente ser vista na representação de $\mathbb{Q}$ como uma reta.

Teorema 1.1. *Dado qualquer $x \in \mathbb{Q}$ positivo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$0 < \tfrac{1}{n} < x.$$

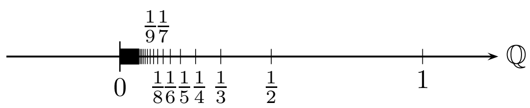

Figura 1.3 $\mathbb{Q}$ é um corpo arquimediano

Demonstração. A afirmação é evidente para x maior do que $\frac{1}{2}$. Se $0 < x < 1$, então x é uma fração $\frac{r}{m}$, com $r, m \in \mathbb{N}$ e $0 < r < m$. Assim, temos $1 < 2r$ e, portanto, $0 < \frac{1}{2m} < \frac{r}{m} = x$. □

Em virtude dessa propriedade, dizemos que $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado *arquimediano*.* Entretanto, mesmo sendo arquimediano e tendo uma infinidade de elementos em toda parte da reta, nada funciona direito em $\mathbb{Q}$.

Vejamos, por exemplo, o seguinte problema. A parábola de equação $y = x^2$ tem o aspecto familiar quando esboçada no produto cartesiano de $\mathbb{Q}$ por $\mathbb{Q}$, como segue.

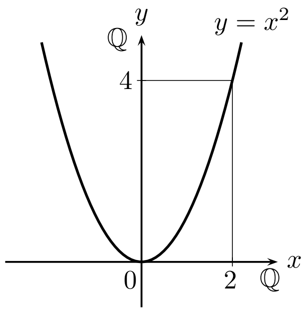

Figura 1.4 O gráfico da parábola $y = x^2$, com $x \in \mathbb{Q}$

Se olharmos com cuidado, veremos que a parábola tem, pelo menos, um furo. Há mais de dois mil anos, os gregos descobriram – para seu maior constrangimento, já que afirmavam que "tudo é número" – que não há número racional algum que represente o comprimento da diagonal do quadrado unitário.

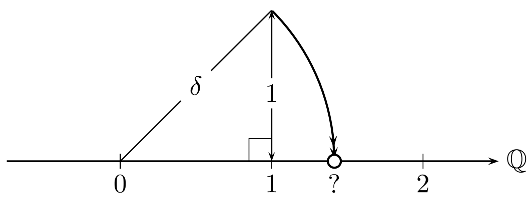

Figura 1.5 Falta alguém em $\mathbb{Q}$

*Ver Apêndice A2.

Segundo o Teorema de Pitágoras, o comprimento δ dessa diagonal satisfaz $\delta^2 = 1^2+1^2 = 2$, mas sabemos mostrar que não existe número racional algum cujo quadrado seja 2. Logo, falta, pelo menos, esse ponto δ no gráfico da parábola.

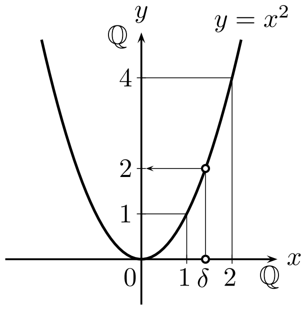

Figura 1.6 Falta um ponto no gráfico da parábola $y = x^2$

Há outros furos em $\mathbb{Q}$ e na parábola? Ora, sendo $\mathbb{Q}$ um corpo, $-\delta$, 2δ e $\frac{1}{2}\delta$ também não podem estar em $\mathbb{Q}$, já que o simétrico, a metade e o dobro de qualquer número racional são, também, números racionais.

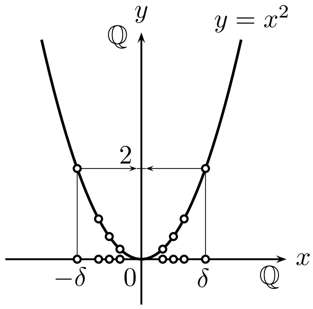

Figura 1.7 A parábola furada em $\pm\delta$, $\pm\frac{2}{3}\delta$, $\pm\frac{1}{2}\delta$ e $\pm\frac{1}{3}\delta$

Mais que isso: dado qualquer racional não nulo r, no ponto que marca uma distância $r\delta$ de 0 não pode estar um número racional, já que, nesse caso, $\delta = \frac{1}{r}r\delta$ também seria um racional. Assim, há toda uma "cópia" de $\mathbb{Q}$, obtida por $r \longleftrightarrow r\delta$, que falta em $\mathbb{Q}$. Como isso vale para cada racional, constatamos que esse um furo δ enseja uma infinidade de cópias idênticas a $\mathbb{Q}$ mas totalmente constituídas de buracos na reta racional.

A parábola e a reta $\mathbb{Q}$ ficam bastante furadas. E tem mais, pois, além de δ, faltam muitos outros pontos.

Teorema 1.2. *Todo racional positivo cujo quadrado é natural, também é um natural.*

Demonstração. Dados $a, b \in \mathbb{N}$, se $\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = n$, então $\frac{a}{b} = \frac{nb}{a}$. Tomando a e b primos entre si, (1.1) garante que $a = mb$ e, portanto, $\frac{a}{b} = \frac{mb}{b} = m$, para algum $m \in \mathbb{N}$. $\square$

Poderíamos argumentar que esses "furos" são somente algébricos, quando estamos preocupados com a reta racional na Análise Matemática. Mas observe que o que vimos mostra que a parábola $y = x^2$ cruza a reta $y = 2$ *sem haver um ponto de corte* e, mais, essa parábola também "passa" pelas retas $y = 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, \dots$ sem ponto de corte, portanto, essa *propriedade do valor intermediário*, geometricamente evidente, de que duas curvas que se cruzam têm um ponto de corte, não vale em $\mathbb{Q}$.

Não é possível desenhar a parábola $y = x^2$ em $\mathbb{Q}$ por $\mathbb{Q}$, mas, mesmo assim, podemos mostrar que a função definida por $f(x) = x^2$ é contínua e derivável em $\mathbb{Q}$, com derivada $f'(x) = 2x$.

Não só faltam raízes quadradas em $\mathbb{Q}$, como muitas potências fracionárias. Por exemplo, não existe racional cujo cubo seja 2, portanto a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x^3 > 2, \\ -1, & \text{se} \quad x^3 < 2, \end{cases}$$

é contínua e derivável em toda a reta racional $\mathbb{Q}$, com derivada $f'(x) = 0$. No entanto, f não é constante! Em particular, não valem os teoremas do valor intermediário nem o do valor médio em $\mathbb{Q}$, já que f pula de -1 para 1 sem passar por 0 e não é constante, mesmo tendo derivada nula em todos os pontos da reta $\mathbb{Q}$.

Em $\mathbb{Q}$ também temos sequências crescentes e limitadas que não convergem, como $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Em particular, temos conjuntos limitados sem supremo, sequências limitadas sem subsequências convergentes e sequências de Cauchy que não convergem. Também $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ é decrescente e limitada, com $0 < y_n - x_n$ convergente a zero, de modo que a sequência de intervalos encaixados dada por $I_n = [x_n, y_n]$ tem interseção vazia.

O caso mais gritante de que $\mathbb{Q}$ não serve para o Cálculo (que dirá a Análise) pode ser observado nos gráficos das funções exponencial e logaritmo em $\mathbb{Q}$ por $\mathbb{Q}$.

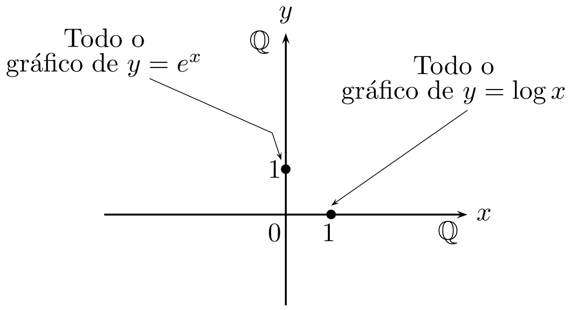

Figura 1.8 Os gráficos de $y = e^x$ e $y = \log x$ em $\mathbb{Q}$

De fato, dado $r \in \mathbb{Q}$, a exponencial $e^r = \lim \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$ de r só existe em $\mathbb{Q}$ se $r = 0$. Em particular, $\log r \in \mathbb{Q}$ só se $r = 1$.

Assim, tudo isso que conhecemos como sendo "óbvio" no Cálculo, não é válido em $\mathbb{Q}$. É um desastre. Precisamos de uma reta menos esburacada. Poderíamos simplesmente acrescentar a $\mathbb{Q}$ todos as raízes de todos os racionais ou, mais generosamente, todas as raízes de todos os polinômios de coeficientes racionais. Com isso até obteríamos um corpo ordenado *algebricamente* fechado, mas ainda não topologicamente fechado: a sequência crescente e limitada $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ continuaria sem limite.

Precisamos ser mais radicais: encontrar um corpo ordenado que contenha $\mathbb{Q}$ como "subcorpo" ordenado e que não tenha esses buracos todos. Uma saída bastante atraente é usar a representação dos racionais em alguma base, por exemplo, 10. Sabemos que cada racional tem uma representação decimal finita ou periódica, isto é, é dado por uma *dízima periódica*, ou, simplesmente, uma *dízima*. A dízima é finita, como $\frac{3}{40} = 0{,}075$ ou infinita, como $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$, dependendo de o denominador possuir somente divisores 2 e 5 (que dividem a base 10) ou não. Além disso, devemos cuidar com as dízimas que terminam em $999\ldots$, que identificamos com as dízimas "uma casa acima"; por exemplo, $1{,}431999\ldots = 1{,}432$. Reciprocamente, a cada representação decimal pode ser associado um ponto da reta.

Agora, para "completar" nossa reta, basta acrescentar todas as representações decimais com dígitos de 0 a 9 que não sejam periódicas. Dessa forma, não há mais pontos que faltem na reta. Por exemplo, agora, o ponto δ, que falta há milênios, e hoje é denotado por $\sqrt{2}$, pode ser representado por

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488\ldots$$

Essa extensão de $\mathbb{Q}$ como o espaço de todos os inteiros antes da vírgula e de todas as sequências infinitas de dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 (identificando as dízimas que terminam em $999\ldots$ com uma casa acima) certamente pode ser formalizada com uma estrutura de corpo ordenado, que evidentemente contém $\mathbb{Q}$, definindo as operações de soma e produto passo a passo em cada casa decimal, e a ordem natural dos números decimais.

Além de arquimediano, o corpo ordenado assim obtido também não tem furos pois, agora, todo ponto da reta completa pode ser determinado por uma expansão decimal. Também poderíamos mostrar que toda sequência de intervalos compactos encaixados desse corpo tem interseção não vazia, ou que toda sequência limitada desse corpo, que seja crescente ou decrescente, tem limite, bastando acompanhar as casas decimais. Por exemplo, a sequência definida indutivamente por $x_1 = 2$ e $x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + 2/x_n\big)$, para $n \in \mathbb{N}$, conhecida pelos babilônios de quatro mil anos atrás, é decrescente e tem $\sqrt{2}$ como limite exato. Olhando só para os racionais da sequência, isso pode muito bem ser deduzido já a partir de poucos termos (graças à convergência quadrática), como segue, em que utilizamos vinte casas decimais.

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2\\
x_2 &= 1{,}5\\
x_3 &= 1{,}41666666666666666666\ldots\\
x_4 &= 1{,}41421568627450980392\ldots\\
x_5 &= 1{,}41421356237468991062\ldots\\
x_6 &= 1{,}41421356237309504880\ldots\\
x_7 &= 1{,}41421356237309504880\ldots\\
&\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\
\sqrt{2} &= 1{,}41421356237309504880\ldots
\end{aligned}$$

Entretanto, a arbitrariedade da base escolhida e os três pontinhos ao final de todos números não racionais e de muitos racionais, não têm sido interpretados como suficientemente rigorosos. Dedekind, por exemplo, argumentava que não se conhece (e nunca se conhecerá) toda a expansão decimal de $\sqrt{2}$, nem a de $\sqrt{3}$ e nem a de $\sqrt{6}$, mas, mesmo assim, se afirma, sem piscar, que $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$.

Depois da criação do Cálculo por I. Newton e G. W. Leibniz na segunda metade do século XVII, passou-se mais de um século, durante o qual essa nova ferramenta mostrou-se inacreditavelmente poderosa para resolver inúmeros problemas que atormentaram gerações de cientistas e, somente aos poucos, foi sentida a necessidade de colocar todo esse desenvolvimento em bases mais rigorosas. Os primeiros que se destacaram nessa busca de fundamentação mais sólida para o Cálculo foram J. L. Lagrange e G. L. Dirichlet, sendo que, um pouco depois, B. Bolzano e L. A. Cauchy (independentemente) praticamente começaram a Análise Matemática.

Para exemplificar, um problema crucial era a *propriedade do valor intermediário* (duas curvas que se cruzam tem um ponto de corte em comum), que era admitido como evidente, até pelo próprio K. F. Gauss, em sua primeira demonstração do teorema fundamental da Álgebra, em 1799.

Durante a segunda metade do século XIX, vários matemáticos partiram para outras maneiras de "completar" a reta racional, instigados e liderados por K. Weierstrass, tentando apresentar uma estrutura aritmética logicamente coerente para a reta real, dentre os quais se destacaram M. Ohm, Ch. Méray, E. Heine e o próprio Weierstrass, mas as duas construções que obtiveram maior êxito foram as que R. Dedekind e G. Cantor publicaram, independentemente, em 1872.

Dedekind introduziu a noção de *corte* dos números racionais, segundo ele inspirada na teoria de proporções de Eudoxo, e provou que a coleção desses cortes tem uma estrutura de corpo ordenado que contém $\mathbb{Q}$ e que não tem furos (além do que, agora, nesse corpo, pode demonstrar que $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$). Utilizando uma abordagem totalmente distinta, Cantor introduziu uma identificação de sequências de Cauchy de números racionais e provou que a coleção desses classes de sequências de Cauchy tem uma estrutura de corpo ordenado que contém $\mathbb{Q}$ e que não tem furos.

A construção de Cantor tem aplicações mais gerais, por independer da ordem usual de $\mathbb{Q}$, ao contrário dos cortes de Dedekind, que dependem. Assim, com a técnica de completamento de Cantor, podemos até completar corpos ordenados não arquimedianos ou completar $\mathbb{Q}$ com outros tipos de valor absoluto (os corpos “p-ádicos”), e até, mais geralmente, espaços métricos quaisquer.

Não veremos nenhuma dessas construções aqui, por total falta de espaço; no entanto, as idéias básicas dessas duas construções podem ser encontradas no Apêndice A4. O nosso objetivo é desenvolver os resultados básicos da Análise Matemática e, para isso, não interessa a personalidade individual de cada número real, mas tão somente sua atuação em conjunto, de modo que, na próxima seção, já partimos dos números reais como um corpo ordenado axiomaticamente livre de furos. Em todo caso, prova-se (ver Teorema A.10, no Apêndice A3) que todos os corpos obtidos nessas e quaisquer outras construções são iguais, pelo menos do ponto de vista algébrico, via isomorfismo, de modo que existe, formalmente, apenas um corpo como a reta real.

Resta a opção final de como definir furos, ou a ausência deles, num corpo ordenado. Qualquer uma das propriedades seguintes é equivalente, em corpos ordenados arquimedianos, a todas as demais.* Nenhuma delas, como vimos, vale em $\mathbb{Q}$, mas qualquer uma delas significa a inexistência de furos e pode, portanto, servir como axioma fundamental dos números reais.

1. Todo conjunto não vazio e limitado superiormente tem supremo.
2. Todo corte de Dedekind tem elemento separador.
3. Toda sequência monótona e limitada converge.
4. Toda função contínua tem a propriedade do valor intermediário.
5. Toda sequência de intervalos encaixados fechados e limitados tem interseção não vazia.
6. Toda sequência limitada tem subsequência convergente.
7. Toda sequência de Cauchy converge.

*Ver uma demonstração no Teorema A.8, no Apêndice A3.

As cinco primeiras afirmações só fazem sentido em corpos ordenados, mas as duas últimas afirmações (e uma reformulação da quinta) fazem sentido em espaços muito mais gerais. Para nosso corpo ordenado sem furos, escolhemos a primeira afirmação como axioma, que é a maneira mais popular desde o século passado, por ser, talvez, a que menos conceitos envolve e, portanto, a mais pedagógica. Todas as demais afirmações, então, não poderão ser consideradas axiomas e deverão (se as quisermos usar) ser demonstradas.

1.2 O Corpo Completo dos Reais

O conjunto $\mathbb{R}$ de todos os números reais possui uma estrutura de *corpo ordenado*, como o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Assim, $\mathbb{R}$ é fechado em relação à soma, ao produto e a ambos diferenças e divisão (por real não nulo), sendo a soma, com seu neutro 0, e o produto, com sua unidade 1, associativos e comutativos, e o produto distributivo perante a soma.

Em $\mathbb{R}$ também temos uma ordem total, compatível com as operações de soma e produto, com o que podemos identificar, dentro de $\mathbb{R}$, os naturais $1 < 2 < 3 \ldots$, os inteiros e os racionais, ou seja, já partimos do fato de que as inclusões

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

são válidas. Além disso, o corpo ordenado $\mathbb{R}$ é *completo*, pois vale, em $\mathbb{R}$, a propriedade do supremo, como segue.

Axioma Fundamental da Análise Matemática: cada subconjunto de $\mathbb{R}$ que é não vazio e limitado superiormente tem supremo.

Todos os resultados que apresentamos neste texto dependem da propriedade do supremo – o que não depende dele, não é Análise Matemática na reta. Para entender esse axioma, precisamos entender sua terminologia. Dados um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ e um ponto $\sigma \in \mathbb{R}$ quaisquer, dizemos que σ é uma *cota superior* de X se nenhum elemento de X for maior do que σ.

A menor dentre todas as cotas superiores de um conjunto é denominada *supremo* do conjunto. Se $X \subseteq \mathbb{R}$, denotamos por $\sup X$ o supremo de X. Por definição, temos $\sigma = \sup X$ se, e somente se, (S1) $x \leqslant \sigma$, para cada $x \in X$ e

(S2) se $y \in \mathbb{R}$ é tal que $y < \sigma$, então existe $x \in X$ tal que $y < x$.

A afirmação S1 significa que σ é cota superior de X e a afirmação S2 que todo real menor do que σ não é cota superior de X; observe que a forma contrapositiva de S2 afirma que, se $y \in \mathbb{R}$ é uma cota superior de X, então $y \geqslant \sigma$.

Assim, no corpo ordenado completo $\mathbb{R}$, existe o supremo de qualquer conjunto não vazio e limitado superiormente. Uma primeira consequência fundamental desse axioma é que, assim como $\mathbb{Q}$, o corpo dos reais também é *arquimediano*. De fato, o conjunto $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ de todos naturais não é vazio, de modo que existe $\sigma = \sup \mathbb{N}$, a menos que $\mathbb{N}$ não seja limitado superiormente. Mas se $\sigma = \sup \mathbb{N}$, então $\sigma - 1$ não seria cota superior de $\mathbb{N}$ e, portanto, por S2, existiria $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma - 1 < n$, o que acarretaria $\sigma < n + 1$, ou seja, $\sigma = \sup \mathbb{N}$ não seria cota superior de $\mathbb{N}$. Desse modo estabelecemos o fato seguinte, que equivale a $\mathbb{R}$ ser arquimediano.*

Proposição 1.3. *$\mathbb{N}$ não é limitado superiormente em $\mathbb{R}$.* □

Evidentemente, nossa primeira preocupação é ver se $\mathbb{R}$ não continua tendo os furos históricos de $\mathbb{Q}$. Vejamos a existência de $\sqrt{2}$.

Exemplo 1.4. Consideremos o conjunto

$$X = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \quad \text{e} \quad x^2 < 2\}.$$

Temos $1 \in X$ e de $x \geqslant 2$ decorre $x^2 \geqslant 4$, portanto cada $x \geqslant 2$ é uma cota superior de X. Pelo axioma fundamental, existe $\sigma = \sup X$ e sabemos que $\sigma \geqslant 1$. Dado $x \in X$, observe que

$$\left(x + \tfrac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} < x^2 + \frac{1}{n}\big(2x + 1\big) < 2,$$

bastando que $n \in \mathbb{N}$ satisfaça

$$n > \frac{2x + 1}{2 - x^2}\,.$$

*Ver as Proposições A.5, no Apêndice A2, e A.6, no Apêndice A3.

Pela Proposição 1.3, a expressão à direita não pode ser cota superior de $\mathbb{N}$, de modo que existe um tal $n \in \mathbb{N}$. Assim, nenhum $x \in X$ pode ser cota superior de X, já que sempre podemos encontrar um elemento $x + \frac{1}{n}$ de X maior do que x. Em particular, $\sigma \notin X$.

Por outro lado, observe que, se $0 < y$ e $2 < y^2$, então y é uma cota superior de X, já que de $0 < y < x$ decorre que $2 < y^2 < x^2 < 2$, uma impossibilidade. Digamos que $\sigma^2 > 2$. Para $n > \dfrac{2\sigma}{\sigma^2 - 2}$, temos

$$\left(\sigma - \tfrac{1}{n}\right)^2 = \sigma^2 - \frac{2\sigma}{n} + \frac{1}{n^2} > \sigma^2 - \frac{2\sigma}{n} > 2,$$

portanto, pela propriedade arquimediana, decorre que $\sigma - \frac{1}{n}$ é cota superior de X, o que contradiz que $\sigma = \sup X$ é a menor cota superior de X. Assim, $\sigma^2 \leqslant 2$ e, como $\sigma \notin X$, concluímos que $\sigma^2 = 2$. ⊚

Pelo exemplo, existe um número real positivo cujo quadrado é igual a 2. Evidentemente, denotamos esse número por $\sqrt{2}$. De maneira totalmente análoga, podemos mostrar que cada natural tem raiz quadrada (única) em $\mathbb{R}$ e, mais (ver Exercício 1.13), que para qualquer real x não negativo existe um único real não negativo y tal que $y^2 = x$, que é a *raiz quadrada* de x, denotada por $\sqrt{x}$. Observe, em particular, que, por exemplo, $\sqrt{9} = \pm 3$ é uma afirmação falsa, já que $\sqrt{9} \geqslant 0$, sempre. O máximo que podemos afirmar é que $\sqrt{9} = 3$ e que $-\sqrt{9} = -3$.

Exemplo 1.5. Observe que $x \leqslant \sqrt{x^2}$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, e que, dados $x, y \geqslant 0$, temos

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}.$$

De fato, se $x \geqslant 0$, então, por definição, $x = \sqrt{x^2}$ e, se $x < 0$, claramente $x < \sqrt{x^2}$. Aliás, como $(-x)^2 = x^2$, nesse caso $x < 0$ vale $\sqrt{x^2} = -x > 0$. Se $\sqrt{x} \geqslant 0$ e $\sqrt{y} \geqslant 0$, temos $\sqrt{x}\sqrt{y} \geqslant 0$ e, como $(\sqrt{x}\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x})^2(\sqrt{y})^2 = xy$, obtemos a segunda afirmação. Em particular, provamos a observação $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$ de Dedekind, à página 9. ⊚

Além das raízes quadradas, cada real não negativo possui uma única raiz enésima não negativa (ver Exercício 1.14 ou, adiante, a

Proposição 3.10.) Dado qualquer $x \geqslant 0$ em $\mathbb{R}$, denotamos por $\sqrt[n]{x}$ a (única) raiz enésima de x. Esses elementos de $\mathbb{R}$ que, sabidamente, não são racionais, são denominados *irracionais*, no sentido de não serem uma *razão* de dois números naturais.

Além das raízes enésimas de reais positivos, existirão mais irracionais em $\mathbb{R}$? Usando a argumentação arquimediana, vemos que, dado qualquer $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{x}\sqrt{2} < n$, ou seja, tal que

$$0 < \tfrac{1}{n}\sqrt{2} < x.$$

Mas $\sqrt{2}/n$ não pode ser racional, portanto existe uma infinidade de irracionais arbitrariamente próximos de 0; somando-os com os inteiros, vemos que os irracionais, assim como os racionais, estão espalhados por todo o corpo $\mathbb{R}$. Não é difícil mostrar que *entre* dois reais quaisquer, sempre existem, pelo menos, um racional e um irracional, do que podemos concluir que existe uma infinidade de racionais e outra de irracionais entre dois reais quaisquer. Diz-se que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais e o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos irracionais são *densos* em $\mathbb{R}$.

Agora que o corpo ordenado completo dos reais está devidamente apresentado, vejamos a terminologia e as propriedades usuais em $\mathbb{R}$. Antes de mais nada, continuamos interpretando $\mathbb{R}$ como a *reta real*, na qual $x < y$ é visto como x estar à esquerda de y. Pelo visto, essa reta está repleta de racionais e irracionais, mas agora, sem furos.

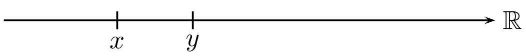

Figura 1.9 $x < y$ na reta real

Em primeiro lugar, observamos que a assimetria do axioma fundamental é apenas aparente. Podemos definir, de maneira perfeitamente análoga, *cota inferior*, conjunto *limitado inferiormente* e *ínfimo* de um conjunto e verificar que, dualmente, todo conjunto não vazio e limitado inferiormente possui ínfimo em $\mathbb{R}$, de modo que nosso axioma fundamental equivale à existência de supremo e ínfimo de conjuntos não vazios e limitados superior e inferiormente. (Ver Exercício 1.8.)

Da mesma forma, os conceitos de conjunto *ilimitado inferiormente* e *ilimitado superiormente* não precisam de maiores explicações. Finalmente, dizemos que um conjunto limitado inferior e superiormente é *limitado*, ao passo que um conjunto é *ilimitado* se não for limitado.

Para fixar esses conceitos, apresentamos um resultado que será útil no Capítulo 5.

Lema 1.6. *Sejam* $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ *conjuntos não-vazios e suponha que* $x \leqslant y$, *para quaisquer* $x \in X$ *e* $y \in Y$. *Então existem* $\sup X$ *e* $\inf Y$ *e vale* $\sup X \leqslant \inf Y$. *Além disso,* $\sup X = \inf Y$ *se, e só se, dado qualquer* $z \in \mathbb{R}$ *positivo, existem* $x \in X$ *e* $y \in Y$ *tais que* $y - x < z$.

Demonstração. Cada $x \in X$ é cota inferior de Y e cada $y \in Y$ é cota superior de X, portanto, pelo axioma fundamental, existem ambos $\sup X$ e $\inf Y$ e vale $\sup X \leqslant \inf Y$. Suponhamos que $\sup X < \inf Y$ e seja $z = \inf Y - \sup X$. Então $z > 0$ é tal que, dados quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$, vale $x \leqslant \sup X < \inf Y \leqslant y$, ou seja, $y - x \geqslant z$. Dessa forma, mostramos, por contraposição, que se para qualquer $z \in \mathbb{R}$ positivo dado, existirem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $y - x < z$, então $\sup X \geqslant \inf Y$, ou seja, $\sup X = \inf Y$.

Suponhamos, agora, que $\sup X = \inf Y = \sigma$ e seja z um real positivo qualquer. Então $\frac{1}{2}z > 0$ e, como $\sigma - \frac{1}{2}z < \sigma < \sigma + \frac{1}{2}z$, temos que $\sigma - \frac{1}{2}z$ não é cota superior de X e $\sigma + \frac{1}{2}z$ não é cota inferior de Y, de modo que, por definição, existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que

$$\sigma - \tfrac{1}{2}z < x \leqslant \sigma \leqslant y < \sigma + \tfrac{1}{2}z,$$

ou seja, $y - x < z$. O lema está demonstrado. □

Vejamos a terminologia associada ao valor absoluto e intervalos. Dados elementos x e y de $\mathbb{R}$, denotamos por $\max\{x, y\}$ o maior desses dois elementos. Portanto, $x \leqslant \max\{x, y\}$, $y \leqslant \max\{x, y\}$ e $x = \max\{x, y\}$ se, e só se, $y \leqslant x$.

Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos $|x| = \max\{x, -x\}$ e dizemos que $|x|$ é o *valor absoluto* de x. Assim, sempre $|x| \geqslant 0$, com

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geqslant 0, \\ -x, & \text{se} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

Em particular, $|x| = 0$ se, e só se, $x = 0$. Também é imediato verificar que $|x| = \sqrt{x^2}$, $|-x| = |x|$ e que $|xy| = |x|\,|y|$, para $x, y \in \mathbb{R}$. Além disso, é muito útil observar que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x| \leqslant y \qquad \text{se, e só se,} \qquad -y \leqslant x \leqslant y.$$

A propriedade geométrica básica do valor absoluto é a *desigualdade triangular*, válida para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|, \tag{1.2}$$

ou sua versão mais geral*

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y| \leqslant |x| + |y|.$$

Interpretamos o valor absoluto $|x|$ de x como a *distância* de x à origem. Em particular, interpretamos $|x - y|$ como a distância entre x e y.

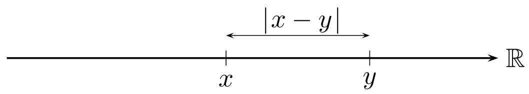

Figura 1.10 A distância $|x - y|$ entre x e y

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, definimos os *intervalos* de *extremidades* a e b por

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \qquad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\},$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} \quad \text{e} \quad [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Esses quatro tipos de intervalos são limitados e temos, por exemplo,

$$\begin{aligned} x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) &\iff a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \iff -\varepsilon < x - a < \varepsilon \\ &\iff -\varepsilon < a - x < \varepsilon \iff |a - x| < \varepsilon, \end{aligned}$$

para quaisquer $a, x, \varepsilon \in \mathbb{R}$, com $\varepsilon > 0$.

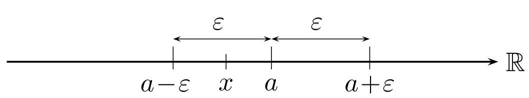

Figura 1.11 $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \iff |a - x| < \varepsilon$.

*Para uma demonstração, ver a Proposição A.3 do Apêndice A2.

Além desses, também consideramos os intervalos ilimitados

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}, \qquad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\},$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\} \quad \text{e} \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}.$$

O corpo $\mathbb{R}$ todo também pode ser interpretado como o intervalo ilimitado $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, mas o caso $\{a\} = [a, b]$ em que $a = b$, não será considerado um intervalo. Já o caso especial $[a, b]$ é destacado com terminologia especial: dizemos que esses intervalos limitados que contém ambas extremidades são intervalos *compactos*.

Exemplo 1.7. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, temos

$$a = \inf[a, b] = \inf(a, b] = \inf(a, \infty) = \inf[a, \infty)$$

e

$$b = \sup[a, b] = \sup[a, b) = \sup(-\infty, b) = \sup(-\infty, b].$$

Mostremos que $a = \inf(a, b]$. Por definição, a é cota inferior de $(a, b]$ e, se $y \geqslant b$, então y não é cota inferior. Agora, dado qualquer $y \in (a, b)$, o ponto médio $x = \frac{1}{2}(a + y) \in \mathbb{R}$ entre y e a satisfaz $a < x < y < b$, de modo que y não pode ser cota inferior de $(a, b]$. Logo, $a = \inf(a, b]$. Deixamos os demais casos como exercício. ⊚

No que segue, utilizamos a seguinte caracterização de intervalo.

Proposição 1.8. *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto com, pelo menos, dois elementos. X é um intervalo se, e só se, $[x, y] \subseteq X$, para quaisquer $x, y \in X$ tais que $x < y$.*

Demonstração. É fácil verificar que $\mathbb{R}$ e qualquer um dos oito outros tipos de intervalos tem a propriedade dada no enunciado. Reciprocamente, seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não vazio que satisfaz essa propriedade e mostremos que X é um intervalo. Fixemos $x_0 \in X$. Se X for ilimitado inferiormente, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $y \in X$ tal que $y < -n$, de modo que $[-n, x_0] \subseteq X$, pela propriedade de X. Como isso vale para cada $n \in \mathbb{N}$, resulta que $(-\infty, x_0] \subseteq X$. Analogamente, se X for ilimitado superiormente, necessariamente $[x_0, \infty) \subseteq X$.

Se X for limitado superiormente, considere $b = \sup X$. Então $X \subseteq (-\infty, b]$ e, dado $y \in X$, de $x_0 < y < b$ decorre $[x_0, y] \subseteq X$, pela propriedade de X. Como isso vale para cada $x_0 < y < b$, resulta que $[x_0, b) \subseteq X$. Analogamente, se X for limitado inferiormente, consideramos $a = \inf X$ e mostramos que $(a, x_0] \subseteq X \subseteq [a, \infty)$.

Agora podemos concluir que X é um intervalo. De fato, se X for limitado inferiormente e ilimitado superiormente, então $X = [a, \infty)$, ou $X = (a, \infty)$, dependendo somente de $a = \inf X$ pertencer, ou não, a X. Se X for ilimitado inferiormente e limitado superiormente, então $X = (-\infty, b)$, ou $X = (-\infty, b]$ e se X for ilimitado inferior e superiormente, então $X = \mathbb{R}$. Finalmente, no último caso, em que X é limitado, obtemos as quatro opções de intervalos limitados. $\square$

Uma outra consequência do axioma fundamental é a *propriedade dos intervalos encaixados*.

Proposição 1.9 (Intervalos Encaixados)**.** *Se $\mathbb{R} \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$ é uma sequência decrescente de intervalos compactos, então existe pelo menos um número real c tal que*

$$c \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = I_1 \cap I_2 \cap \cdots .$$

Demonstração. Denotemos $I_n = [x_n, y_n]$. Como a sequência de intervalos é decrescente, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant y_n \leqslant \cdots \leqslant y_2 \leqslant y_1.$$

Então o conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ das extremidades esquerdas é não-vazio e limitado superiormente por cada y_n. Seja $c = \sup X$. Por definição, $x_n \leqslant c \leqslant y_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. $\square$

O supremo e o ínfimo de um conjunto podem pertencer, ou não, ao conjunto. Se $\sup X \in X$, então dizemos que $\sup X$ é o *maior elemento* de X, ou o *elemento máximo* de X ou, simplesmente, *máximo* de X e escrevemos

$$\sigma = \max X.$$

Utilizamos o artigo definido pois, como o supremo, o maior elemento de um conjunto é sempre único (a menos que não exista). Observe que $\sigma = \max X$ se, e só se, $\sigma \in X \subseteq (-\infty, \sigma]$. Assim, o máximo de X é uma cota superior de X que pertence a X.

Exemplo 1.10. Cada conjunto não vazio de inteiros tem elemento mínimo. Isso é o *princípio da boa ordem* dos inteiros, que é equivalente ao princípio da indução matemática dos naturais. Assim, cada conjunto não vazio de inteiros que seja limitado superiormente tem máximo. De fato, o conjunto de suas cotas superiores é limitado inferiormente e, portanto, tem elemento mínimo. $\triangle$

Se $X \subseteq \mathbb{R}$ for um conjunto finito, o máximo de X sempre existe e é, simplesmente, o maior de seus elementos. Isso já foi observado para conjuntos de dois elementos. O caso geral pode ser mostrado por indução, usando a segunda das três propriedades arroladas a seguir, cuja demonstração é deixada como exercício (Exercício 1.6).

Proposição 1.11. *Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ dois subconjuntos de $\mathbb{R}$.*

(i) *Se X e Y são limitados (superior ou inferiormente), então a união $X \cup Y$ de X e Y é limitada (superior ou inferiormente).*

(ii) *Se $\sigma = \max X$ e $\eta = \max Y$, então $\max(X \cup Y) = \max\{\sigma, \eta\}$.*

(iii) *Se Y é finito e $X - Y$ possui máximo, então X possui máximo.*

Na demonstração do Teorema 2.17 de Bolzano-Weierstrass utilizamos a forma contrapositiva da terceira afirmação dessa proposição, a saber, que se X não possui máximo e Y é finito, então $X - Y$ também não possui máximo.

No entanto, conjuntos infinitos, mesmo limitados superiormente, podem possuir, ou não, elemento máximo. Por exemplo, os intervalos $[a, b]$, $(a, b]$ e $(-\infty, b]$ de $\mathbb{R}$ possuem o máximo b, mas os intervalos $[a, b)$, (a, b) e $(-\infty, b)$ não possuem elemento máximo em $\mathbb{R}$. De fato, se $x \in \mathbb{R}$ pertence a um desses intervalos, basta tomar o *ponto médio* $y = \frac{1}{2}(b + x) \in \mathbb{K}$ entre x e b para obter $x < y < b$.

Dualmente, definimos o conceito de *menor elemento*, *elemento mínimo* ou, simplesmente, *mínimo* de um conjunto X, denotado por $\min X$. Como ocorre com o máximo, temos $\sigma = \min X$ se, e só se, $\sigma \in X \subseteq [\sigma, \infty)$.

Vejamos as potências de números reais. Já utilizamos as potências naturais $b^1 = b$ e $b^2 = b \cdot b$; mais geralmente,

$$b^{n+1} = b \cdot b^n,$$

para cada real $b \in \mathbb{R}$ e cada natural n. Dizemos que b^n é a *potência* enésima de *base* b, ou b elevado à enésima potência.

Duas igualdades úteis envolvendo potências inteiras são

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n) = 1-x^{n+1} \tag{1.3}$$

para $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, e a expansão

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= x^n + nx^{n-1}y + \tfrac{n(n-1)}{2}\,x^{n-2}y^2 + \cdots + nxy^{n-1} + y^n \\ &= x^n + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{n!}{m!(n-m)!}\,x^{n-m}y^m + y^n \\ &= \sum_{m=0}^{n} \tbinom{n}{m}\,x^{n-m}y^m \qquad (1.4)\end{aligned}$$

para $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, conhecida como *binômio de Newton*, em que $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$ indica o *fatorial* de $k \in \mathbb{N}$ e $\binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ indica o número das combinações de n elementos tomados m a m. (Ver Exercício 1.21.)

Ordenando os números combinatórios $\binom{n}{m}$ em linhas por n e colunas por m, obtemos o triângulo de Pascal, assim denominado em homenagem a B. Pascal, publicado no Ocidente pela primeira vez em 1527, um século antes do nascimento de Pascal, e que já aparece (até a oitava linha) num manuscrito chinês de 1303.

Duas desigualdades úteis envolvendo potências inteiras são

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx, \tag{1.5}$$

para todo real $x \geqslant -1$ e natural $n \in \mathbb{N}$, denominada *desigualdade de Bernoulli* e

$$(1+x)^n \geqslant \tfrac{1}{2}n(n-1)x^2, \tag{1.6}$$

para todo real $x \geqslant 0$ e natural $n \in \mathbb{N}$, ambas decorrentes da expressão (1.4) do binômio de Newton (Exercício 1.22).

Se $b \neq 0$, já escrevemos $1/b$ para o recíproco de b; em geral, definimos as potências de expoentes negativos por

$$b^{-n} = \big(b^n\big)^{-1} = \big(b^{-1}\big)^n = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n},$$

para $n \in \mathbb{N}$. Assim, a potência b^n está definida para quaisquer base $b \neq 0$ e expoente $n \in \mathbb{Z}$. Valem as regras fundamentais de exponenciação. Temos

$$b^n \cdot b^m = b^{n+m}, \qquad \big(b^n\big)^m = b^{n\cdot m} \quad \text{e} \quad b^n \cdot c^n = (b\cdot c)^n,$$

para quaisquer $n, m \in \mathbb{Z}$ e $b, c \in \mathbb{R}$, desde que a base seja não-nula no caso de expoente negativo. Todas essas regras podem ser deduzidas por indução. Por exemplo, a segunda decorre da primeira por indução: de fato, $\big(b^n\big)^1 = b^n = b^{n\cdot 1}$ e, supondo que $\big(b^n\big)^m = b^{n\cdot m}$, obtemos $\big(b^n\big)^{m+1} = \big(b^n\big)^m \cdot \big(b^n\big)^1 = b^{n\cdot m}\cdot b^{n\cdot 1} = b^{n\cdot m + n\cdot 1} = b^{n\cdot(m+1)}$.

Por indução também decorre que, para $b > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, valem

$$b^{n+1} < b^n < b \quad \text{se} \quad 0 < b < 1 \quad \text{e} \quad b^{n+1} > b^n > b, \quad \text{se} \quad b > 1,$$

bem como, para cada $n \in \mathbb{N}$, vale $b^n < c^n$ se $0 < b < c$. Observe que potências negativas invertem a ordem, isto é,

$$a < b < 0 < c < d \iff \tfrac{1}{b} < \tfrac{1}{a} < 0 < \tfrac{1}{d} < \tfrac{1}{c}.$$

Com a existência de raízes enésimas (Exercício 1.14) em $\mathbb{R}$, também podemos definir potências racionais de números reais. É claro que definimos $\sqrt[p]{0} = 0$. Se $0 < b < c$, vale $\sqrt[p]{b} < \sqrt[p]{c}$ e, para cada $p \in \mathbb{N}$,

$$b < \sqrt[p]{b} < \sqrt[p+1]{b} < 1 \quad \text{se} \quad 0 < b < 1$$

e

$$b > \sqrt[p]{b} > \sqrt[p+1]{b} > 1 \quad \text{se} \quad b > 1.$$

Dados $p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ e $b > 0$, definimos a potência de *base* b e expoente racional $r = m/p$ por

$$b^r = b^{\frac{m}{p}} = \big(\sqrt[p]{b}\big)^m.$$

Em particular, escrevemos $\sqrt[p]{b} = b^{\frac{1}{p}}$ e definimos $0^r = 0$. Novamente, mostra-se (por indução) que valem as regras fundamentais de exponenciação: $b^r \cdot b^s = b^{r+s}$, $b^r \cdot c^r = (b\cdot c)^r$ e $\big(b^r\big)^s = b^{r\cdot s}$, para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$ e $b, c \in (0, +\infty)$. Também temos, para $b > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$, se $b > 1$, então $b^r > 1 \iff r > 0$ e, se $0 < b < 1$, então $b^r < 1 \iff r > 0$. Também mostra-se que $b^r < c^r$ se $0 < b < c$

e $r > 0$. Mais que isso, mostra-se que, dado $b > 0$, se o racional r estiver entre os racionais s, t então também b^r está entre b^s e b^t.

Dados números reais a e b, dizemos que $A = A(a,b) = \dfrac{a+b}{2}$ é sua *média aritmética*; se ambos forem não-negativos, dizemos que $G = G(a,b) = \sqrt{ab}$ é sua *média geométrica*; finalmente, se ambos forem positivos, dizemos que

$$H = H(a,b) = \frac{2ab}{a+b} = \Big(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\Big)^{-1}$$

é sua *média harmônica*. Observe que

$$\big[A(a^{-1},b^{-1})\big]^{-1} = H(a,b) = \frac{G(a,b)^2}{A(a,b)}\,.$$

Pelo Exercício 1.24, sabemos que $H \leqslant G \leqslant A$ sempre que $a, b > 0$; mais que isso, se $0 < a < b$, vale

$$a < H < G < A < b.$$

Podemos estender esses conceitos e resultados para um número finito qualquer de parcelas.

Proposição 1.12. *A* média aritmética *de n números não-negativos nunca é menor do que sua* média geométrica*, isto é,*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}\,,$$

sempre que $a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant 0$. A igualdade vale se, e só se, todos os números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ forem iguais.

Demonstração. Procedemos por indução. O caso $n = 1$ é imediato e $n = 2$ é o conteúdo do Exercício 1.24. A afirmação também é imediata se algum valor a_k for nulo. Assim, vamos supor que a afirmação seja válida para $n \in \mathbb{N}$ números positivos e provar que também é válida para $n + 1$ números positivos. Por indução, isso termina a prova da proposição.

Fixados $n \in \mathbb{N}$ e $n + 1$ números reais $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, podemos supor, sem perda de generalidade (reordenando os números, se necessário), que $0 < a_1 = \min\{a_k\}$ e $a_{n+1} = \max\{a_k\}$. Se todos a_k forem iguais, nada há para provar, portanto podemos supor que, pelo menos, duas parcelas sejam distintas, com o que $a_1 < a_{n+1}$. Pela nossa hipótese de indução, temos

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A.$$

Pelo Exercício 1.25, a hipótese $a_1 < a_{n+1}$ garante que $A < a_{n+1}$ e, como

$$A_1 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1} = \frac{n \cdot A + a_{n+1}}{n+1} = A + \frac{a_{n+1} - A}{n+1},$$

podemos concluir, pela desigualdade do binômio (1.4), que

$$\begin{aligned} A_1^{n+1} &= \Big(A + \frac{a_{n+1} - A}{n+1}\Big)^{n+1} > A^{n+1} + (n+1)\, A^n \, \frac{a_{n+1} - A}{n+1} \\ &= A^n \cdot a_{n+1} \geqslant G^n \cdot a_{n+1} = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \cdot a_{n+1}, \end{aligned}$$

ou seja, extraindo a raiz $(n+1)$-ésima, que a média aritmética é maior do que a geométrica. □

Epílogo

As propriedades básicas de números reais que acabamos de ver são suficientes para estudar as sequências reais no próximo capítulo. No entanto, apenas tocamos o assunto de números reais.

Sabemos que a expansão decimal de $\sqrt{2}$ não é periódica. Em vista disso, pode parecer surpreendente que também possamos escrever

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$

ou seja, que $\sqrt{2}$ possa ter uma expansão em *fração contínua* periódica $\sqrt{2} = [1,\overline{2}\,]$.

Outra pergunta: quem é melhor aproximado por racionais, um número racional ou um número irracional? Há toda uma galáxia nesse universo, que inclui a expansão de números reais em frações contínuas e a teoria de aproximações diofantinas. A referência para esses assuntos são os livros de Teoria de Números, considerada, por muitos, o mais nobre ramo da Matemática.

Outros tópicos, bem mais simples, são a construção de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ a partir de axiomas dos naturais, ou da Teoria de Conjuntos. No Apêndice A1 iniciamos esse assunto. Mais complexa é a efetiva construção de $\mathbb{R}$ via cortes de Dedekind ou sequências de Cauchy, que apenas indicamos no Apêndice A4. É claro que a incompletude de $\mathbb{Q}$ leva ao estudo de completamentos algébricos de $\mathbb{Q}$ e, finalmente, ao completamento final do corpo $\mathbb{C}$ dos complexos. Esses assuntos não costumam ser tratados em livros de Análise, mas são encontráveis em livros de Álgebra, por exemplo, o livro [10] de Lang.

Muito interessante é a leitura da história da "aritmetização" da reta real que, cronologicamente, foi o último assunto a ser formalizado, de todos os abordados neste texto. Essa história fascinante pode ser encontrada nos clássicos livros [14] de C. H. Edwards, Jr. e [13] de C. B. Boyer e, também, em [12].

1.3 Exercícios

1.1. Seja $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Mostre que $\inf X = 0$.

1.2. Seja $X = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$. Mostre que $X \subseteq (-1, 1)$; em particular, -1 e 1 não podem ser os elementos mínimo e máximo de X. Prove que, no entanto, $\inf X = -1$ e $\sup X = 1$.

1.3. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Mostre que:

1. X é limitado se, e somente se, existe um intervalo limitado I tal que $X \subseteq I$;
2. X é limitado se, e somente se, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $X \subseteq [-c, c]$;
3. X é limitado superiormente se, e somente se, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $X \subseteq (-\infty, c]$.

1.4. Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos não-vazios e limitados de números reais. Mostre que $\sup X + \sup Y = \sup Z$, se os conjuntos limitados X, Y e Z satisfizerem as condições seguintes.

1. Dados $x \in X$ e $y \in Y$, existe $z \in Z$ tal que $x + y \leqslant z$.
2. Dado $z \in Z$, existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $z \leqslant x + y$.

1.5. Mostre que, para cada $x \in \mathbb{R}$, vale

$$x = \sup\{r \in \mathbb{Q} : r < x\} = \sup\{z \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : z < x\} = \sup(-\infty, x).$$

1.6. Demonstre a Proposição 1.11, à página 19.

1.7. Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos não-vazios e limitados de números reais e $c \in \mathbb{R}$ dados. Denote $X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$, $cX = \{cx : x \in X\}$ e $-X = (-1)X$.

1. Mostre que $X + Y$, cX e $-X$ são não-vazios e limitados.
2. Prove que $\sup(X+Y) = \sup X + \sup Y$ e $\inf(X+Y) = \inf X + \inf Y$.
3. Suponha que $c \geqslant 0$. Prove que
$$\sup(cX) = c \sup X \quad \text{e} \quad \inf(cX) = c \inf X.$$
4. Mostre que $\inf X = -\sup(-X)$ e $\sup X = -\inf(-X)$.
5. Suponha que $c < 0$. Prove que $\sup(cX) = c \inf X$ e $\inf(cX) = c \sup X$.

1.8. Use o exercício precedente e o Axioma Fundamental da Análise para provar que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ que é não vazio e limitado inferiormente tem ínfimo.

1.9. Sejam $\sigma, \eta \in \mathbb{R}$ dados.

1. Mostre que $\sigma \geqslant 0$ se, e só se, $\sigma > x$, para cada $x < 0$.
2. Mostre que $\sigma \leqslant \eta$ se, e só se, $\sigma < x$, para cada $x > \eta$.
3. Mostre que $\sigma \leqslant \eta \iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R})[\varepsilon > 0 \Rightarrow \sigma < \eta + \varepsilon]$.

1.10. Em $\mathbb{Q}$, não vale a caracterização de intervalo da Proposição 1.8. Considere o subconjunto $X = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ de $\mathbb{Q}$.

1. Mostre que X tem, pelo menos, dois elementos.
2. Mostre que $[x, y] \subseteq X$, para quaisquer $x, y \in X$, com $x < y$.
3. Mostre que X não é um intervalo com extremidades em $\mathbb{Q}$.

1.11. Mostre que $\{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \text{ ou } x^2 < 2\}$ é não vazio, limitado superiormente e sem elemento máximo.

1.12. Mostre que $\{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 2\}$ é não vazio, limitado superiormente e sem elemento máximo.

1.13. Mostre que, dado $n \in \mathbb{N}$, existe, e é única, a raiz quadrada de n em $\mathbb{R}$. Mais geralmente, mostre que dado $x \in \mathbb{R}$ positivo existe um único $y \in \mathbb{R}$ positivo tal que $y^2 = x$, que definimos como a raiz quadrada $y = \sqrt{x}$ de x.

1.14. Mostre que, dados $b \in \mathbb{R}$ positivo e $n \in \mathbb{N}$, existe um único $c \in \mathbb{R}$ positivo tal que $c^n = b$, que definimos como a raiz enésima $c = \sqrt[n]{b}$ de b. (*Sugestão*: considere fixados $b \in \mathbb{R}$, com $b > 0$ e $b \neq 1$, e $n \in \mathbb{N}$. Prove que o conjunto

$$X_b = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ e } x^n < b\}$$

possui supremo $c = \sup X_b$ e que $c^n = b$.)

1.15. Mostre que, se $b > 1$, então $1 = \inf\{\sqrt[n]{b} : n \in \mathbb{N}\}$ e que, se $0 < b < 1$, então $1 = \sup\{\sqrt[n]{b} : n \in \mathbb{N}\}$. (*Sugestão*: escreva $b = (1 + x)^n$ e use a desigualdade de Bernoulli (1.5).)

1.16. Mostre que $1 = \inf\{\sqrt[n]{n} : n \geqslant 2\}$. (*Sugestão*: escreva $n = (1 + x)^n$ e use a desigualdade (1.6).)

1.17. Fixado $0 < a < 1$, mostre que $\inf\{n \cdot a^n : n \in \mathbb{N}\} = 0$.

1.18. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, mostre que

$$\min\{a, b\} = \tfrac{1}{2}\big[a + b - |a - b|\big] \quad \text{e} \quad \max\{a, b\} = \tfrac{1}{2}\big[a + b + |a - b|\big]\,.$$

1.19. Dado $a \in \mathbb{R}$, defina a *parte positiva* a^+ de a e a *parte negativa* a^- de a por

$$a^+ = \tfrac{1}{2}\big[|a| + a\big] \quad \text{e} \quad a^- = \tfrac{1}{2}\big[|a| - a\big]\,.$$

Mostre que $a^+ = \max\{a, 0\} \geqslant 0$ e $a^- = \max\{-a, 0\} \geqslant 0$, bem como

$$a = a^+ - a^- \quad \text{e} \quad |a| = a^+ + a^-.$$

1.20. Mostre (por indução) que, para quaisquer $n, p \in \mathbb{N}$, vale

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{(-1)^p}{n+p} < \frac{1}{n}\,.$$

1.21. Para cada $k \in \mathbb{N}$, denotamos por $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$ o *fatorial* de k. Por conveniência, definimos $0! = 1$ e os símbolos $\binom{n}{0} = 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, dados quaisquer naturais $m \leqslant n$, escrevemos

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}\,.$$

1. Mostre que, para quaisquer naturais $m \leqslant n$, vale a relação

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}.$$

2. Mostre, por indução, que $\binom{n}{m} \in \mathbb{N}$, para quaisquer naturais $m \leqslant n$.

1.22. Demonstre (por indução) a expressão (1.4) do binômio de Newton e deduza as desigualdades (1.5) e (1.6).

1.23. Demonstre as desigualdades seguintes.

1. $(1+x)^n > 1 + nx$, para todo real $0 \neq x \geqslant -1$ e natural $n \geqslant 2$;
2. $(1+x)^{2n} > 1 + 2nx$, para todo real $x \neq 0$ e natural n;
3. $0 < \sqrt{y} \leqslant \frac{1}{2}\big(x + \frac{y}{x}\big)$, para quaisquer reais positivos x, y.

1.24. Sejam a e b dois números reais positivos quaisquer. Mostre que

$$\min\{a,b\} \leqslant \frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \max\{a,b\}.$$

Mostre que alguma dessas desigualdades é uma igualdade se, e só se, todas desigualdades são igualdades, o que ocorre se, e só se, $a = b$.

1.25. Dados n números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$, defina $m = \min\{a_1, \ldots, a_n\}$ e $M = \max\{a_1, \ldots, a_n\}$. Mostre que $n \cdot m \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqslant n \cdot M$. Considerando a soma $(a_1 - m) + (a_2 - m) + \cdots + (a_n - m)$ e a soma $(M - a_1) + (M - a_2) + \cdots + (M - a_n)$, mostre que $n \cdot m = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ se, e só se, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n \cdot M$. Mostre que

$$n \cdot m < a_1 + a_2 + \cdots + a_n < n \cdot M$$

se, e só se, pelo menos duas parcelas a_i, a_j forem distintas.

Capítulo 2

Sequências

O limite é o conceito fundamental da Análise Matemática.

2.1 Sequências

Uma *sequência* de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Costumamos escrever x_n para o valor $x(n)$ de x em n e dizemos que x_n é o *enésimo termo* da sequência x, ou então, seu *termo geral*, sendo n o *índice* desse termo. O primeiro termo x_1 é o *termo inicial* de x. Muitas vezes, é mais conveniente começar os índices em 0 ou, então, em algum outro inteiro m.

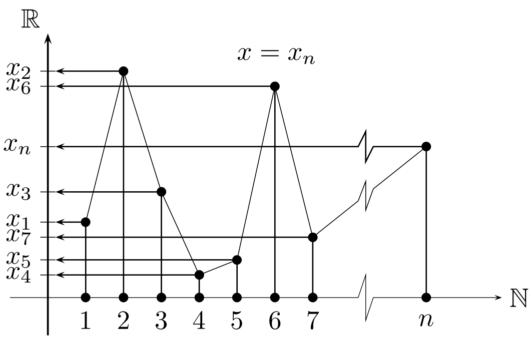

Figura 2.1 Uma sequência é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Em vez de $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, também é costume escrever

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ou} \quad (x_1, x_2, x_3, \dots),$$

ou simplesmente (x_n), quando o índice do termo inicial estiver subentendido, mas nunca utilizamos chaves. Essas são reservadas para conjuntos, no caso, o conjunto

$$X = x(\mathbb{N}) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

de todos os termos da sequência x, ou seja, sua *imagem*, não podendo ser usadas para denotar a sequência.

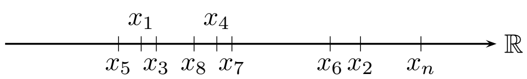

Figura 2.2 Parte da imagem em $\mathbb{R}$ de uma sequência

O motivo único para essa distinção é que toda sequência é *infinita*, no sentido de que para cada índice n temos o enésimo termo, mas esses valores podem não ser todos distintos e, até, constituir um conjunto finito. Isso deverá ficar esclarecido com alguns exemplos.

Exemplo 2.1. Considerando $x_n = \dfrac{n}{n+1}$, para $n \in \mathbb{N}$, obtemos a sequência

$$x = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \dots\right) \quad \text{com domínio } \mathbb{N} \text{ e imagem } X = \left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \dots\right\}.$$

Exemplo 2.2. Considerando $x_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n+1})$, para $n \in \mathbb{N}$, obtemos a sequência

$$x = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots) \quad \text{com domínio } \mathbb{N} \text{ e imagem } X = \{0, 1\}.$$

Assim, quando a sequência for *injetora*, como $\left(\frac{n}{n+1}\right)$, podemos até confundir a sequência com sua imagem, sendo a sequência nada mais do que uma enumeração explícita dessa imagem. Já no caso em que a sequência não for injetora, como ocorre com $\left(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\right)$, existe uma diferença enorme entre a imagem da sequência e a própria sequência.

Exemplo 2.3. Um objeto em *movimento retilíneo* permanece confinado a uma reta durante sua trajetória. Ao longo de séculos tentou-se entender a relação entre o tempo t decorrido e o deslocamento s em várias situações.

Num movimento uniforme, o objeto percorre distâncias iguais em tempos iguais, digamos, λ unidades de distância a cada unidade de tempo: no primeiro intervalo de tempo, o objeto percorre λ, no segundo, λ, no terceiro, λ, e assim por diante. Denotando por s_n o deslocamento total desde uma distância inicial s_0, a partir da qual inicia a medição, até a enésima unidade de tempo n, obtemos $s_1 = s_0 + \lambda$, $s_2 = s_1 + \lambda = s_0 + 2\lambda$, $s_3 = s_2 + \lambda = s_0 + 3\lambda$ e, em geral, $s_n = s_{n-1} + \lambda = s_0 + n\lambda$, que é uma simples relação *afim* entre o deslocamento total e o tempo decorrido.

Dessa forma, obtemos uma sequência (s_n) *aritmética*, cujos termos formam uma PA de primeiro termo s_0 e razão λ.

Bem mais complicado foi entender um movimento não uniforme, por exemplo, o de um objeto em queda livre. No século XIV, R. Suiseth e N. Oresme conseguiram avançar os estudos de Arquimedes e estabeleceram que, para um objeto em movimento uniformemente acelerado, a distância percorrida no segundo intervalo de tempo é o triplo da distância percorrida no primeiro intervalo de tempo.

No início do século XVII, no alto de sua carreira científica, Galileu estendeu aquela descoberta, mostrando que para um objeto em movimento uniformemente acelerado, as distâncias percorridas no terceiro e quarto intervalos de tempo são o quíntuplo e o séptuplo da distância percorrida no primeiro intervalo de tempo, e assim por diante.

Denotando por s_n o deslocamento total num movimento uniformemente acelerado desde uma origem, a partir da qual inicia a medição, até a enésima unidade de tempo n, obtemos $s_2 = s_1 + 3s_1 = 4s_1$, $s_3 = s_2 + 5s_1 = 9s_1$, $s_4 = s_3 + 7s_1 = 16s_1$ e, em geral, $s_n = n^2 s_1$, que é, agora, uma relação *quadrática* entre os deslocamentos e o tempo decorrido. No caso de um objeto em queda livre, obtemos uma sequência (s_n) *quadrática* que, passado mais um século, pode ser escrita como $s_n = -\frac{1}{2}gn^2$, em que g é a constante que denota a aceleração da gravidade. ⊚

Uma das famílias mais importantes de sequências é a das *geométricas*, como segue.

Exemplo 2.4. Fixado $a \in \mathbb{R}$, a sequência *geométrica* de razão $r = a$ é definida por $x_n = a^n$, para $n \geqslant 0$, com o que obtemos a sequência $(1, a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots)$. Por exemplo,

$$(x_n) = (1, -2, 4, -8, \dots, (-1)^n 2^n, \dots)$$

é a sequência geométrica de razão $r = -2$ e

$$(x_n) = \left(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \dots, \tfrac{1}{2^n}, \dots\right)$$

é a sequência geométrica de razão $r = \frac{1}{2}$. Observe que essa família inclui duas sequências constantes, $(1, 1, 1, \dots)$ e $(0, 0, 0, \dots)$, de razões 1 e 0, respectivamente, sendo que, na segunda, tomamos $n \in \mathbb{N}$. ◎

Exemplo 2.5. Muitos exemplos de sequências são obtidos definindo $x_n = f(n)$ a partir de um função real f, desde que o domínio de f contenha o intervalo ilimitado $[1, \infty)$. As sequências dos exemplos precedentes são, todas, desse tipo.

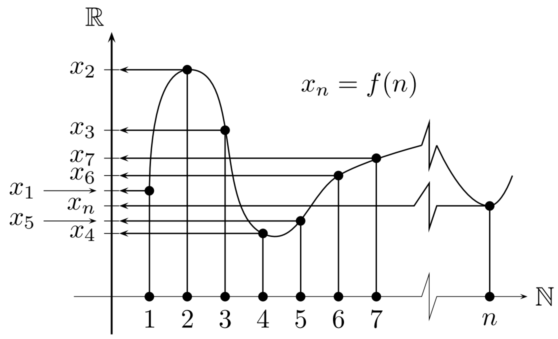

Figura 2.3 A sequência dada por uma função $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$

De fato, as sequências dos Exemplos 2.1 e 2.3 podem ser definidas pela função racional $f(x) = x/(x+1)$, pela função afim $f(x) = b + ax$ e pela função quadrática $f(x) = -\frac{1}{2}gx^2$, respectivamente, e a sequência geométrica de razão $r = a > 0$ pode ser definida pela função exponencial $f(x) = a^x$. Observando que $\cos \pi x = (-1)^x$, para $x \in \mathbb{N}$, também a sequência geométrica de razão $r = a < 0$ pode ser definida por uma função, a saber, a função $f(x) = a^x = (-1)^x |a|^x = |a|^x \cos \pi x$. ◎

Nunca devemos dar uma sequência especificando apenas alguns de seus valores e acrescentando "e assim por diante". O correto é sempre deixar claro qual é o enésimo termo.

Exemplo 2.6. Considere a *sequência* "$2, 4, 8$ e assim por diante". Qual será seu próximo termo, depois de 8? Ora, poderia ser qualquer número real: nada impede que seja π, por exemplo. Se imaginarmos que os próximos quatro termos sejam 16, 32, 64, 128, etc., é porque estamos pensando na sequência geométrica de razão $r = 2$. No entanto, por que não poderiam os próximos quatro termos ser 8, -2, -28, -76? Isso ocorre se (e por que não?) estivermos pensando na sequência definida por $x_n = 8 - 12n + 7n^2 - n^3$, com $n \in \mathbb{N}$. ⊚

Não obstante, podemos especificar uma sequência dando alguns termos e uma regra de formação. Por exemplo, a "sequência geométrica 1, 3, 9, etc." e a "sequência $(1, 3, \dots)$ dos naturais ímpares" não carecem de definição explícita do enésimo termo, nem a "sequência 2, 3, 5, etc. dos números primos", inclusive porque essa nem possui fórmula explícita.

Muitas vezes, é mais conveniente utilizar alguma outra letra para a sequência ou seu índice, por exemplo, s, t, u e k, l, m, respectivamente, com o que obtemos sequências (s_k), $(t_l), (u_m)$, etc.

Dizemos que uma sequência x é uma sequência *do conjunto* X ou, simplesmente, *de* X se cada termo de x for um elemento de X. Em particular, dizemos que x é uma sequência *de naturais* (ou *de inteiros*, ou *de racionais*, ou de *reais positivos*) se x_n for natural (ou inteiro, ou racional ou real positivo), para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, a sequência $(2n)$ dos pares, a sequência $(2n-1)$ dos ímpares, ou mesmo a sequência (p_n) dos primos, são sequências de naturais. Dependendo do que desejarmos enfatizar, dizemos que $\left(\frac{n}{n+1}\right)$, por exemplo, é uma sequência do intervalo $[0, 1]$ ou, então, de racionais ou, ainda, de reais positivos.

Para simplificar a escrita, abreviamos "para todo n a partir de algum índice", ou "para todo n suficientemente grande", por

$$n \gg 0.$$

Assim, dizemos que uma propriedade $P(n)$ vale para $n \gg 0$ se existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $P(n)$ seja válida para todo e qualquer $n \geqslant N$.

Certos tipos especiais de sequências merecem terminologia própria compatível com a de funções de uma variável real.

Se a imagem $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de uma sequência (x_n) for um conjunto limitado inferiormente em $\mathbb{R}$, dizemos que a sequência (x_n) é *limitada inferiormente* e, se for um conjunto limitado superiormente, dizemos que a sequência é *limitada superiormente*. Se uma sequência for limitada inferior e superiormente, dizemos que a sequência é *limitada*.

As sequências dos Exemplos 2.1 e 2.2 são limitadas, pois todos seus termos pertencem a $[-1, 1]$. Observe que (x_n) é uma sequência limitada se existir c tal que $|x_n| \leqslant c$, para $n \gg 0$. Já a sequência geométrica de razão -2 não é limitada nem superior nem inferiormente. De fato, basta observar que $x_n = 2^n > n$, com n par, e $x_n = -2^n < -n$, com n ímpar.

Sequências que não são limitadas (inferior ou superiormente) são ditas *ilimitadas* (*inferior* ou *superiormente*).

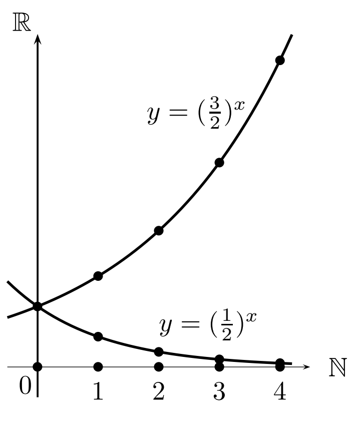

Figura 2.4 As sequências $x_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$ e $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

De acordo com seu crescimento, uma sequência (x_n) é dita

- *crescente* se $x_n < x_{n+1}$, para $n \gg 0$;
- *não decrescente* se $x_n \leqslant x_{n+1}$, para $n \gg 0$;
- *não crescente* se $x_n \geqslant x_{n+1}$, para $n \gg 0$;
- *decrescente* se $x_n > x_{n+1}$, para $n \gg 0$.

Frizamos que esse determinado comportamento deve ocorrer para *todos* os termos, a partir de algum índice, pois, dois termos consecutivos de qualquer sequência, para cada $n \in \mathbb{N}$, sempre satisfazem $x_n \leqslant x_{n+1}$, ou $x_n \geqslant x_{n+1}$.

Observe que toda sequência crescente é não decrescente e toda decrescente é não crescente. Em geral, dizemos que uma sequência é *monótona* se for não crescente ou não decrescente.

As sequências geométricas de razão $a > 0$ são todas monótonas. De fato, de $0 < a < 1$ decorre $a^{n+1} < a^n$, portanto (a^n) é decrescente, e de $1 < a$ decorre $a^n < a^{n+1}$, portanto, (a^n) é crescente (ver Figura 2.4, na página precedente).

2.2 Sequências Convergentes

Voltemos aos nossos dois primeiros exemplos de sequências. É geometricamente evidente que os termos $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{99}{100}, \ldots$ do primeiro exemplo estão arbitrariamente próximos de 1 para índices n suficientemente grandes. De fato,

$$1 - x_n = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-n}{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, ou seja, a distância de x_n a 1 é igual a $1/(n+1)$. Para garantir, por exemplo, que a distância de x_n a 1 seja menor do que $1/100$, basta tomar $n \geqslant 100$. Para garantir que a distância de x_n a 1 seja menor do que $1/5000$, basta tomar $n \geqslant 5000$, e assim por diante. Faz sentido, portanto, dizer que 1 é o *limite* dessa sequência.

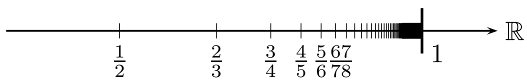

Figura 2.5 O limite de $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ é 1.

A sequência do segundo exemplo, $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$, entretanto, tem um comportamento distinto, pois x_n oscila entre 0 e 1 sem parar em nenhum desses dois números. Tudo que podemos dizer é que, nos termos de índice $n = 2k$ par, temos $x_{2k} = 0$, e nos termos de índice $n = 2k+1$ ímpar, temos $x_{2k+1} = 1$. Desse modo, embora faça sentido dizer que o limite dos termos pares seja 0 e o dos ímpares seja 1, não existe número algum que seja o limite de *todos* os termos dessa sequência.

Sejam (x_n) uma sequência e $\sigma \in \mathbb{R}$ um número dados. Dizemos que σ é o *limite* de (x_n) se, uma vez fornecido um número real positivo $\varepsilon > 0$ qualquer, por menor que seja, sempre for possível encontrar algum número natural $N = N(\varepsilon)$ tal que a desigualdade

$$|x_n - \sigma| < \varepsilon \tag{2.1}$$

seja satisfeita para cada natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant N$. Nesse caso, escrevemos

$$\sigma = \lim x_n \qquad \text{ou} \qquad x_n \longrightarrow \sigma.$$

Assim, a afirmação $\sigma = \lim x_n$ significa que, para todo e qualquer $\varepsilon > 0$, a desigualdade $|x_n - \sigma| < \varepsilon$, ou seja, $\sigma - \varepsilon < x_n < \sigma + \varepsilon$, é válida a partir de algum índice, ou seja, para $n \gg 0$.

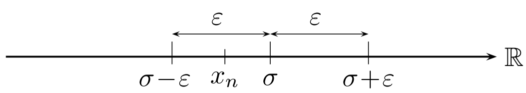

Figura 2.6 $|x_n - \sigma| < \varepsilon$ equivale a $\sigma - \varepsilon < x_n < \sigma + \varepsilon$

Dizemos que uma sequência (x_n) é *convergente*, ou que *converge*, se existir algum número real $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que $\lim x_n = \sigma$.

Voltando, mais uma vez, à sequência $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots,\right)$, podemos afirmar que essa sequência converge, com limite 1, ou seja,

$$\lim \frac{n}{n+1} = 1.$$

O primeiro dos dois resultados mais importantes sobre sequências convergentes é o seguinte.

Teorema 2.7. *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Mais precisamente, mostramos que se (x_n) é não decrescente e limitada, então $\lim x_n = \sup\{x_n\}$ e, se (x_n) é não crescente e limitada, então $\lim x_n = \inf\{x_n\}$.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência não decrescente e limitada. Sua imagem é um conjunto não vazio e limitado superiormente, portanto, podemos tomar $\sigma = \sup\{x_n\}$. Por definição, temos $x_n \leqslant \sigma$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

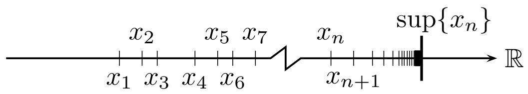

Figura 2.7 Se (x_n) é crescente, então $\lim x_n = \sup\{x_n\}$

Dado $\varepsilon > 0$, sabemos que $\sigma - \varepsilon$ não é cota superior de $\{x_n\}$, portanto podemos encontrar algum x_N tal que $\sigma - \varepsilon < x_N$. Por ser não decrescente, temos $x_N \leqslant x_n$, para cada $n \geqslant N$. Assim,

$$\sigma - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant \sigma,$$

para cada $n \geqslant N$. Como ε foi tomado arbitrariamente, isso mostra que $\lim x_n = \sigma$. A demonstração para sequências não crescentes e limitadas é análoga. □

Vejamos mais propriedades de sequências convergentes.

Lema 2.8 (Permanência do Sinal)**.** *Seja* (x_n) *uma sequência convergente tal que* $\lim x_n > \lambda$. *Então* $x_n > \lambda$, *para* $n \gg 0$. *Resultado análogo vale se* $\lim x_n < \lambda$.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente e denotemos $\lim x_n = \sigma$. Dado $\lambda < \sigma$, temos $\varepsilon = \sigma - \lambda > 0$ e, portanto, podemos tomar algum $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - \sigma| < \varepsilon$, para cada $n \geqslant N$. Assim, $\lambda = \sigma - \varepsilon < x_n < \sigma + \varepsilon$ e, em particular, $\lambda < x_n$, para cada $n \geqslant N$. A demonstração para o caso $\lambda > \sigma$ é análoga. □

Esse resultado também é muito usado em sua forma contrapositiva. Por exemplo, se $x_n \geqslant \lambda$, para $n \gg 0$, e $x_n \longrightarrow \sigma$, então $\sigma \geqslant \lambda$. No caso $\lambda = 0$, isso justifica a terminologia usada: uma sequência convergente de números não negativos, por exemplo, não pode ter limite negativo. Entretanto, observe que $\frac{1}{n} > 0$, para cada n, mas $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$. Assim, essa forma contrapositiva não é válida com sinal estrito, bem como a proposição, que não permanece válida com desigualdade não estrita.

Exemplo 2.9. Se (x_n) é uma sequência convergente do intervalo $[a, b]$, então $\lim x_n \in [a, b]$. De fato, se $a \leqslant x_n \leqslant b$, para cada $n \in \mathbb{N}$, e $x_n \longrightarrow \sigma$, então $a \leqslant \sigma \leqslant b$, pela permanência do sinal. Nesse sentido, os intervalos fechados são "fechados" para limites de sequências convergentes de seus pontos. ⊚

Proposição 2.10. *Seja (x_n) uma sequência convergente. Então*

(i) *(x_n) é limitada e também a sequência dos valores absolutos*

(ii) *$(|x_n|)$ é convergente, com* $\lim |x_n| = |\lim x_n|$.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente, digamos, com limite $\lim x_n = \sigma$. Dado $\varepsilon > 0$, a convergência garante que podemos escolher $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - \sigma| < \varepsilon$, para cada $n \geqslant N$. Em particular, para cada $n \geqslant N$, pela desigualdade triangular, obtemos

$$\big||x_n| - |\sigma|\big| \leqslant |x_n - \sigma| < \varepsilon,$$

de modo que $\lim |x_n| = |\sigma|$. Tomando, agora, $\varepsilon = 1$, podemos escolher $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - \sigma| < 1$, para cada $n \geqslant N$, ou seja, $x_n \in (\sigma - 1, \sigma + 1)$, para cada $n \geqslant N$. Como o conjunto dos primeiros termos $\{x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}\}$ é limitado (por ser finito), a imagem da sequência está contida na união de dois conjuntos limitados, que é limitada (ver Proposição 1.11). Assim, (x_n) é limitada. □

No cálculo de limites, convém dispor das regras algébricas dos limites.

Proposição 2.11 (Propriedades Operacionais de Limites)**.** *Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências convergentes quaisquer com limites σ e η, respectivamente, e seja $\lambda \in \mathbb{R}$ fixado. As sequências definidas termo a termo pela combinação linear $(x_n + \lambda \cdot y_n)$ e pelo produto $(x_n \cdot y_n)$ dessas sequências são convergentes; no caso $\eta \neq 0$, também é convergente o quociente (x_n/y_n) termo a termo. Além disso,*

(i) $\lim(x_n + \lambda \cdot y_n) = \lim x_n + \lambda \cdot \lim y_n = \sigma + \lambda \cdot \eta$,

(ii) $\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n = \sigma \cdot \eta$ *e*

(iii) $\lim(x_n/y_n) = \lim x_n / \lim y_n = \sigma/\eta$, *se* $\eta \neq 0$.

Demonstração. Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências e $\lambda \in \mathbb{R}$ fixado. Vamos supor que $\lim x_n = \sigma$ e que $\lim y_n = \eta$ e mostrar que vale a primeira afirmação. Essa afirmação é óbvia se $\lambda = 0$, portanto, supomos $\lambda \neq 0$. Começamos com a estimativa

$$\begin{aligned}\big|(x_n + \lambda \cdot y_n) - (\sigma + \lambda \cdot \eta)\big| &= |(x_n - \sigma) + \lambda \cdot (y_n - \eta)| \\ &\leqslant |x_n - \sigma| + |\lambda| \cdot |y_n - \eta| < \varepsilon_1 + |\lambda| \cdot \varepsilon_2 = \varepsilon,\end{aligned}$$

em que utilizamos a desigualdade triangular. Para fazer sentido, essa estimativa deve ser lida de trás para frente, sendo que o final dessa estimativa é só vontade, pois ainda não sabemos se vale. Entretanto, de posse dessa conta, podemos começar tudo pelo começo, como segue. Seja $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente. Então $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon > 0$ e podemos tomar $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - \sigma| < \varepsilon_1$, para cada $n \geqslant N_1$. Também vale $\varepsilon_2 = \varepsilon/2|\lambda| > 0$ e podemos tomar $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n - \eta| < \varepsilon_2$, para cada $n \geqslant N_2$. Agora definimos $N = \max\{N_1, N_2\}$ e tomamos $n \geqslant N$. Em particular, $n \geqslant N_1$ e $n \geqslant N_2$, portanto, da estimativa feita no início, agora decorre que $\big|(x_n + \lambda \cdot y_n) - (\sigma + \lambda \cdot \eta)\big| < \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, vale (i).

Para mostrar que vale a segunda afirmação, começamos com a estimativa

$$\begin{aligned}\big|(x_n \cdot y_n) - (\sigma \cdot \eta)\big| &= |x_n \cdot y_n - \sigma \cdot y_n + \sigma \cdot y_n - \sigma \cdot \eta| \\ &\leqslant |x_n - \sigma| \cdot |y_n| + |\sigma| \cdot |y_n - \eta| < \varepsilon_1 \cdot M + C \cdot \varepsilon_2 = \varepsilon.\end{aligned}$$

A sequência convergente (y_n) é limitada, pela Proposição 2.10, portanto, tomamos $M > 0$ tal que $|y_n| \leqslant M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para não dividir nos dois casos $|\sigma| = 0$ e $|\sigma| > 0$, denotamos $C = |\sigma| + 1$ e temos $C > 0$. Seja $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente. Procedendo como na demonstração da primeira afirmação, $\varepsilon_1 = \varepsilon/2M > 0$ e $\varepsilon_2 = \varepsilon/2C > 0$ fornecem N_1 e N_2 para as convergências de (x_n) e (y_n) e $N = \max\{N_1, N_2\}$ é tal que $\big|(x_n \cdot y_n) - (\sigma \cdot \eta)\big| < \varepsilon$ é válido para cada $n \geqslant N$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, vale (ii).

A terceira afirmação decorre da segunda, pois o quociente (x_n/y_n) é igual ao produto $x_n \cdot (1/y_n)$, desde que provemos a convergência da sequência de recíprocos $(1/y_n)$, com $\lim(1/y_n) = 1/\eta$, quando $\eta \neq 0$. Supomos, então, que $\eta \neq 0$. Para mostrar que vale essa afirmação, começamos com a estimativa

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{\eta}\right| = \left|\frac{\eta - y_n}{\eta \cdot y_n}\right| \leqslant \frac{|\eta - y_n|}{|\eta|\frac{1}{2}|\eta|} < \frac{2\varepsilon_2}{|\eta|^2} = \varepsilon.$$

O Lema 2.8 garante que $\lim |y_n| = |\eta| > \frac{1}{2}|\eta| > 0$ e a permanência de sinal garante que, para algum $N_1 \in \mathbb{N}$ e para cada $n \geqslant N_1$, vale $|y_n| > \frac{1}{2}|\eta|$. Seja $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente. Então $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}|\eta|^2\varepsilon > 0$ fornece N_2 para a convergência de (y_n) e, novamente, $N = \max\{N_1, N_2\}$ é tal que $|1/y_n - 1/\eta| < \varepsilon$ vale para cada $n \geqslant N$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, provamos que $\lim(1/y_n) = 1/\eta$. □

Proposição 2.12 (Critério do Confronto)**.** *Sejam (x_n), (y_n) e (z_n) sequências quaisquer tais que*

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n, \qquad n \gg 0.$$

Se (y_n) e (z_n) forem convergentes e tiverem o mesmo limite, então (x_n) também é convergente, com o mesmo limite.

Demonstração. Sejam (y_n) e (z_n) duas sequências convergentes com mesmo limite, que denotamos por σ, tais que $y_n \leqslant z_n$, para $n \gg 0$. Dado $\varepsilon > 0$, sabemos que ambos $|y_n - \sigma|$ e $|t_n - \sigma|$ são menores do que ε, para $n \gg 0$. Assim, em particular, temos $\sigma - \varepsilon < y_n \leqslant z_n < \sigma + \varepsilon$, para $n \gg 0$. Se $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$, para $n \gg 0$, segue que

$$\sigma - \varepsilon < y_n \leqslant x_n \leqslant z_n < \sigma + \varepsilon$$

e, portanto, $|x_n - \sigma|$ é menor do que ε, para $n \gg 0$. Assim, mostramos que $\lim x_n = \sigma$. □

Um caso particular muito usado é quando uma das duas sequências, y_n ou z_n, é constante.

Exemplo 2.13. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente, com $\sigma = \sup X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, como $\sigma - \frac{1}{n}$ não é cota superior de X, podemos escolher $x_n \in X$ tal que $\sigma - \frac{1}{n} < x_n \leqslant \sigma$. Assim, obtemos uma sequência (x_n) de X que converge a σ, pelo confronto. No entanto, essa sequência pode não ser crescente. De fato, se $\sigma \in X$, nada impede que tenhamos escolhido, sempre, $x_n = \sigma$. Inclusive, se σ for o elemento máximo isolado de X, essa é a única sequência que poderemos obter.

No entanto, se $\sigma \notin X$, então sempre existe uma sequência de X convergente a σ que seja crescente. De fato, $\sigma - 1$ não é cota superior de X, portanto, podemos escolher $x_1 \in X$ tal que $\sigma - 1 < x_1$ e, como $\sigma \notin X$, necessariamente $x_1 < \sigma$. Então x_1 não é cota superior de X, portanto, podemos escolher $x_2 \in X$ tal que $x_1 < x_2$ e $\sigma - \frac{1}{2} < x_2 < \sigma$. Dessa forma, construímos uma sequência crescente tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, vale $\sigma - \frac{1}{n} < x_n < \sigma$. Pelo confronto, $x_n \longrightarrow \sigma$. ⊚

Exemplo 2.14. Consideremos a sequência (x_n) definida por

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n},$$

ou então, na notação concisa de somatório, por

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{1}{k}, \quad \text{com } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, $x_1 = 1$, $x_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, $x_4 = \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$, $x_5 = \frac{7}{12} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$ e assim por diante. Certamente sempre podemos calcular o termo seguinte, mas alguém consegue vislumbrar algum padrão nessa sequência

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{6}, \tfrac{7}{12}, \tfrac{47}{60}, \ldots$$

ou seja, uma fórmula "fechada" para x_n, que calcule x_n sem precisar calcular, antes, os termos que o precedem? Se conseguir, ganha um bombom.

Sequer monótona essa sequência é, pois $x_1 > x_2$, $x_2 < x_3$, $x_3 > x_4$, $x_4 < x_5$, e essa alternância continua, de modo que não podemos utilizar o Teorema 2.7 para estabelecer a convergência dessa sequência. No entanto, temos uma alternância controlada dos termos, pois

$$0 < x_2 < x_4 < \cdots < x_5 < x_3 < x_1 < 1.$$

Geometricamente, os termos estão se cercando e "entrando" para o limite. Numa circunstância dessas, até poderia ocorrer que os termos cercassem mais e mais, não só um ponto, que seria o limite da sequência, mas todo um intervalo, e não teríamos um limite. Entretanto, isso não ocorre aqui, pois a diferença entre termos consecutivos só diminui, já que, para cada n,

$$|x_{n+1} - x_n| = \tfrac{1}{n+1}\,,$$

como não é difícil verificar.

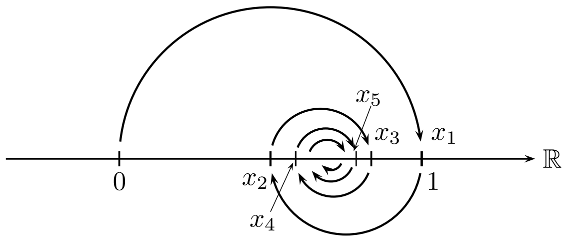

Figura 2.8 O padrão alternado da sequência (x_n)

Então, essa sequência (x_n) tem todo o jeitão de uma sequência convergente, mas, como provar que é convergente se, para isso, precisamos ter, antes, o "candidato" a limite? Lembre que (x_n) converge se existir $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que $\lim x_n = \sigma$. Sem σ, não há convergência. Foi para esse tipo de situação, em que uma sequência parece convergir mas, por outro lado, não há uma opção razoável para o limite, que B. Bolzano e A. L. Cauchy conceberam a idéia de garantir a convergência de uma sequência *sem precisar* determinar, antes, seu limite.

Segundo Bolzano e Cauchy, uma sequência (x_n) converge se mostrarmos que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, por menor que seja, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$, para quaisquer $n, p \in \mathbb{N}$ com $n \geqslant N$. Mas, pelo Exercício 1.20, sabemos que $|x_n - x_{n+p}| < \frac{1}{n+1}$, portanto, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $N \geqslant \varepsilon^{-1}$ para ter $|x_n - x_{n+p}| < \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{N} \leqslant \varepsilon$, para quaisquer $n, p \in \mathbb{N}$ com $n \geqslant N$.

Assim, a menos do Teorema 2.16, enunciado a seguir, podemos concluir que essa sequência converge, mesmo que não tenhamos candidato a limite algum. ⊚

Uma outra maneira de provar a convergência da sequência (x_n) desse exemplo, é utilizar a propriedade dos intervalos encaixados, vista na Proposição 1.9. De fato, basta tomar $I_k = [x_{2k}, x_{2k+1}]$ e mostrar que o ponto limite dessa sequência de intervalos é único e é o limite da sequência (x_n) (ver Exercício 2.20). No Exemplo 2.20 apresentamos uma terceira maneira de estabelecer a convergência dessa sequência.

Dizemos que uma sequência (x_n) é *de Cauchy* se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$, para quaisquer $n, p \in \mathbb{N}$ com $n \geqslant N$ (ou, equivalentemente, tal que $|x_m - x_q| < \varepsilon$, para quaisquer $m, q \geqslant N$.) Em mais palavras, uma sequência (x_n) é de Cauchy se seus termos se tornarem e permanecerem arbitrariamente próximos uns dos outros, desde que tomemos índices suficientemente grandes.

Observe que não há menção de limite algum na definição de sequência de Cauchy.

Proposição 2.15. *Toda sequência convergente é de Cauchy e toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente. Digamos que $\lim x_n = \sigma$. Dado $\varepsilon > 0$, temos $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$ e, portanto, podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - \sigma| < \frac{1}{2}\varepsilon$, para cada $n \geqslant N$. Logo, usando a desigualdade triangular, para quaisquer $n, p \in \mathbb{N}$ com $n \leqslant N$, obtemos

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n+p}| &= |x_n - \sigma + \sigma - x_{n+p}| \\ &\leqslant |x_n - \sigma| + |x_{n+p} - \sigma| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como ε é arbitrário, resulta que (x_n) é de Cauchy.

Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Tomando $\varepsilon = 1$, obtemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_{n+p}| < 1$, para quaisquer $n, p \in \mathbb{N}$ com $n \geqslant N$, portanto, $|x_N - x_n| < 1$, para qualquer $n > N$. Isso mostra que $\{x_n : n > N\} \subseteq (x_N - 1, x_N + 1)$, de modo que $\{x_n : n > N\}$ é limitado. Como $\{x_n : n \leqslant N\}$ é finito, decorre que a sequência (x_n) é limitada (ver Proposição 1.11). $\square$

Teorema 2.16 (Critério de Cauchy)**.** *Uma sequência é convergente se, e somente se, é de Cauchy.*

Já provamos que toda sequência convergente é de Cauchy. A demonstração da recíproca pode ser encontrada à página 46; antes disso, convém estudar as subsequências de uma sequência.

2.3 Subsequências

Dadas duas sequências (x_n) e (y_n), dizemos que (y_n) é uma *subsequência* de (x_n) se existir uma sequência *crescente* de naturais (k_n) tal que $y_n = x_{k_n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Em particular, sempre temos $k_n \geqslant n$, para cada índice $n \in \mathbb{N}$. Duas subsequências fáceis de uma sequência (x_n) dada são a *dos pares* (x_{2n}) e a *dos ímpares* (x_{2n+1}), em que $k_n = 2n$ e $k_n = 2n+1$, respectivamente.

Vejamos o segundo dos dois resultados mais importantes sobre sequências convergentes.

Teorema 2.17 (Teorema de Bolzano-Weierstrass – TBW)**.** *Toda sequência limitada tem alguma subsequência convergente.*

Uma maneira prática de provar o TBW pode ser encaminhada como segue. Considere uma sequência limitada, digamos, tal que $a \leqslant x_n \leqslant b$, para $n \in \mathbb{N}$. Utilizamos o ponto médio $c = \frac{1}{2}(a+b)$ do intervalo $[a,b]$ para escolher $[a,c]$ ou $[c,b]$ dependendo de qual dos conjuntos de índices, $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in [a,c]\}$ ou $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in [c,b]\}$ for infinito. Denotamos por $[a_1,b_1]$ o intervalo escolhido (se ambos conjuntos forem infinitos, escolhemos um deles, digamos, o subintervalo à esquerda) e escolhemos $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{k_1} \in [a_1,b_1]$. Retomamos o processo de dividir ao meio o subintervalo $[a_1,b_1]$, escolhendo, agora, $k_2 > k_1$ no conjunto infinito de índices n tais que x_n pertença ao subintervalo escolhido de $[a_2,b_2]$. O processo continua indefinidamente e, pela propriedade dos intervalos encaixados (ver Proposição 1.9), obtemos um ponto pertencente a todos subintervalos escolhidos e para o qual, por construção, tende a subsequência (x_{k_n}).

A prova do TBW que apresentamos a seguir, substitui o processo de infinitas escolhas de subintervalos e a propriedade dos intervalos encaixados pelo axioma fundamental.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência limitada. Pelo lema a seguir, existe um subsequência de (x_n) que é monótona e, certamente, limitada. Pelo Teorema 2.7, essa subsequência é convergente. $\square$

Lema 2.18. *Toda sequência possui alguma subsequência monótona.*

Demonstração. Dada uma sequência (x_n) qualquer, escrevemos

$$X_k = \{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots\},$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Por exemplo, X_1 é a própria imagem da sequência.

Pode ocorrer (como ocorre com sequências decrescentes) que, para cada $k \in \mathbb{N}$, o conjunto X_k possua maior elemento. Nesse caso, escolhemos o maior elemento x_m da sequência toda e definimos $k_1 = m$. Em seguida, escolhemos o maior elemento x_m de X_{k_1+1}; definindo $k_2 = m$, temos $k_2 > k_1$ e $x_{k_2} \leqslant x_{k_1}$, já que $X_{k_1+1} \subseteq X_1$. Continuando, nesse caso obtemos uma sequência crescente (k_n) de naturais tal que $\left(x_{k_n}\right)$ é uma subsequência não crescente de (x_n).

Caso contrário, existe algum $k \in \mathbb{N}$ tal que X_k não tem maior elemento (como ocorre com sequências crescentes). Daí decorre que, para cada $m \geqslant k$, também X_m não tem maior elemento, já que a diferença $\{x_k, x_{k+1}, \dots, x_{m-1}\}$, como todo conjunto finito, sempre tem maior elemento (ver Proposição 1.11). Então definimos $k_1 = k$ e, como X_k não tem maior elemento, podemos escolher $m > k_1$ tal que $x_m > x_{k_1}$. Definindo $k_2 = m$, temos $k_2 > k_1$ e, como X_{k_2} não tem maior elemento, novamente podemos escolher $m > k_2$ tal que $x_m > x_{k_2}$. Continuando, nesse caso obtemos uma sequência crescente (k_n) de naturais tal que $\left(x_{k_n}\right)$ é uma subsequência crescente de (x_n).

Como não há mais casos, concluímos que (x_n) possui alguma subsequência monótona. □

Vejamos algumas propriedades que relacionam a convergência de sequências e de subsequências.

Proposição 2.19. *Toda subsequência de uma sequência convergente é convergente, com mesmo limite. Se as subsequências dos pares e dos ímpares de uma sequência convergirem para um mesmo limite, então a própria sequência será convergente (com o mesmo limite).*

Demonstração. Seja (x_{k_n}) uma subsequência da sequência convergente (x_n) de limite σ. Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geqslant N$, temos $|x_n - \sigma| < \varepsilon$. Como (k_n) é crescente em $\mathbb{N}$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geqslant N_1$, vale $k_n \geqslant N$, de modo que, para cada $n \geqslant N_1$, temos $|x_{k_n} - \sigma| < \varepsilon$. Como ε é arbitrário, resulta que $x_{k_n} \longrightarrow \sigma$.

Supondo, agora, que $\lim x_{2n} = \sigma = \lim x_{2n+1}$, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário e tomemos $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{2n} - \sigma| < \varepsilon$, para cada $n \geqslant N_1$ e $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{2n+1} - \sigma| < \varepsilon$, para cada $n \geqslant N_2$. Tomando $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$ e definindo $N = 2N_3 + 1$, obtemos $|x_m - \sigma| < \varepsilon$, para cada $m \geqslant N$. De fato, dado $m \geqslant N$, se $m = 2n$ for par, então $n \geqslant N_1$ e, se $m = 2n+1$ for ímpar, então $n \geqslant N_2$. Como ε é arbitrário, resulta que $\lim x_n = \sigma$. □

Exemplo 2.20. Voltemos à sequência $1, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{47}{60}, \ldots$ definida por

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \quad \text{com } n \in \mathbb{N},$$

do Exemplo 2.14. Vimos que $0 < x_2 < x_4 < \cdots < x_5 < x_3 < x_1 < 1$ e, no Exercício 2.20, pede-se para mostrar que, em geral, $x_{2n} < x_{2n+2} < x_{2n+3} < x_{2n+1}$, para $n \in \mathbb{N}$. Assim, a subsequência (x_{2n}) dos pares é crescente e limitada, ao passo que a subsequência (x_{2n+1}) dos ímpares é decrescente e limitada. Pelo Teorema 2.7, ambas são convergentes. Digamos que $\sigma = \lim x_{2n}$ e $\eta = \lim x_{2n+1}$.

Como $x_{2n} < x_{2n+1}$, para cada n, a permanência do sinal garante $\sigma \leqslant x_{2n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, portanto, pelo mesmo motivo, decorre $\sigma \leqslant \eta$. Mas $x_{2n} < \sigma \leqslant \eta < x_{2n+1}$, portanto, $|\sigma - \eta| \leqslant |x_{2n+1} - x_{2n}| = \frac{1}{2n+1}$, para cada n. Logo, pelo confronto, $0 \leqslant |\sigma - \eta| = 0$, ou seja, $\sigma = \eta$. Pela Proposição 2.19, a sequência original (x_n) converge, mas do valor do limite só sabemos que $\lim x_n \in (0, 1)$; com a teoria deste texto, não há nem como adivinhar o valor exato desse limite.* ◎

Possuir alguma subsequência convergente não é suficiente para que uma sequência arbitrária convirja. Basta lembrar, por exemplo, da sequência $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ do Exemplo 2.2. No entanto, isso é suficiente para as categorias especiais das sequências monótonas (ver Exercício 2.16) e das sequências de Cauchy.

Proposição 2.21. *Se uma sequência de Cauchy possuir alguma subsequência convergente, então a própria sequência converge.*

Demonstração. Sejam (x_n) uma sequência de Cauchy com uma subsequência (x_{k_n}) convergente, digamos, $\lim x_{k_n} = \sigma$. Dado $\varepsilon > 0$,

*Para acabar o suspense: prova-se (ver [2], p. 166) que $\lim x_n = \log 2 \approx 0{,}7$.

temos $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$ e, portanto, podemos encontrar $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{k_n} - \sigma| < \frac{1}{2}\varepsilon$, para cada $n \geqslant N_1$. Como (x_n) é de Cauchy, podemos encontrar $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_m - x_q| < \frac{1}{2}\varepsilon$, para quaisquer $m, q \geqslant N_2$. Como de hábito, denotemos $N = \max\{N_1, N_2\}$. Como (k_n) é crescente em $\mathbb{N}$, temos $k_N \geqslant N$. Então, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, com $n \geqslant N$, obtemos

$$\begin{aligned} |x_n - \sigma| &= |x_n - x_{k_N} + x_{k_N} - \sigma| \\ &\leqslant |x_n - x_{k_N}| + |x_{k_N} - \sigma| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como ε é arbitrário, resulta que $\lim x_n = \sigma$. □

Agora estamos em condições de provar a recíproca do critério de convergência de Cauchy.

Demonstração do Teorema 2.16. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Pela Proposição 2.15, (x_n) é limitada e, portanto, pelo Teorema 2.17 de Bolzano-Weierstrass, (x_n) possui alguma subsequência convergente. Pela Proposição 2.21, a sequência (x_n) converge. □

Terminamos esse capítulo examinando o que ocorre com uma sequência que não converge. Se uma sequência (x_n) não converge, dizemos que (x_n) *diverge*, ou é *divergente*.

Exemplo 2.22. Seja (x_n) uma sequência de $\mathbb{R} - \{0\}$. Se $x_n \longrightarrow 0$, então a sequência $(1/x_n)$ dos recíprocos diverge, por ser ilimitada. De fato, para cada $M > 0$, obtemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_N| < 1/M$, de modo que $M < |1/x_N|$. ◎

Uma sequência diverge se não existir um limite em $\mathbb{R}$, como ocorre, por exemplo, com sequências ilimitadas, ou se a sequência é limitada mas oscila entre dois ou mais candidatos a limite, como ocorre, por exemplo, com a sequência $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$, que é divergente, pois não é possível encontrar um número real que seja seu limite. Ocorre que pode ser bem incômodo mostrar que $\lim x_n \neq \sigma$, para *todo e qualquer número real* σ. Mais conveniente é ter critérios explícitos.

Corolário 2.23. *Uma sequência diverge se possuir duas subsequências convergentes de limites distintos.*

Demonstração. A afirmação é simplesmente uma forma contrapositiva da primeira afirmação da Proposição 2.19. □

Exemplo 2.24. A sequência $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ não pode convergir porque a subsequência dos pares é constante igual a 0 (portanto, convergente a 0) e a dos ímpares é constante igual a 1 (portanto convergente a 1). ⊚

Epílogo

As propriedades básicas de sequências reais que acabamos de ver são suficientes para estudar a continuidade de funções reais no próximo capítulo. No entanto, apenas tocamos o assunto de sequências.

O leitor deve aprimorar sua educação com um estudo da topologia da reta, do mesmo nível de dificuldade (ou facilidade) deste capítulo. Assim, poderá conhecer os conceitos de pontos de aderência, de acumulação, de fronteira, interiores e isolados, bem como conjuntos abertos, fechados, compactos e perfeitos, todos caracterizáveis via sequências. Isso pode ser encontrado nas referências básicas [1] e [2].

Em seguida, recomendamos o estudo de um tipo muito especial de sequências, as séries numéricas, que sequer apresentamos, exceto a do Exemplo 2.14, que é a *série harmônica alternada*. Este é um capítulo historicamente relevante, tendo sido nesse contexto de séries que Bolzano e Cauchy formularam suas versões de sequências "de Cauchy". Além do que, é uma porta de entrada para o universo de séries de funções, como as séries de potências e as de Fourier.

Continuando, o leitor deveria estudar todos esses assuntos com sequências de *pares* (x_n, y_n), ou seja, sequências de pontos do plano $\mathbb{R}^2$ ou, então, de números complexos, e, mais geralmente, nos espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$. Nestes, continuam valendo quase todas as propriedades que estudamos (ver [8]), exceto, é claro, as relacionadas à ordem, ausente nesses espaços. No entanto, em todos esses espaços e, mais geralmente, em espaços vetoriais normados, há a *norma*, que substitui o valor absoluto da reta e faz o papel da distância, permitindo o desenvolvimento dos conceitos da Análise.

O contexto ideal para o estudo das propriedades de sequências é o de *espaços métricos*, para o que recomendamos o já clássico livro [15] de Elon Lima. O salto quântico no estudo de sequências é dado com o estudo de sequências de funções (ver [1] e [2]), em que cada função pode ser interpretada como um ponto de um espaço (métrico) de funções. Nesse contexto, por exemplo, resolvemos equações diferenciais ordinárias, interpretando cada solução como um ponto fixo de uma aplicação definida num espaço conveniente de funções.

2.4 Exercícios

2.1. Sejam $b \in \mathbb{R}$ e $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência tais que

$$b = \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} = \cdots = \frac{x_{n+1}}{x_n},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Mostre (por indução) que $x_{n+1} = x_1 b^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, de modo que x é a sequência geométrica $(x_1, x_1 b, x_1 b^2, \dots) = x_1(1, b, b^2, \dots)$ de razão $r = b$, em que cada termo é multiplicado por x_1.

2.2. Defina as sequências parte positiva x^+ e parte negativa x^- de uma sequência $x = (x_n)$ pondo, (ver Exercício 1.19) para cada $n \in \mathbb{N}$

$$x_n^+ = \tfrac{1}{2}\big[|x_n| + x_n\big] = \max\{x_n, 0\} \quad \text{e} \quad x_n^- = \tfrac{1}{2}\big[|x_n| - x_n\big] = \max\{-x_n, 0\}.$$

Mostre que $x = x^+ - x^-$ e que $|x| = x^+ + x^-$. Mostre que x é uma sequência em $(0, +\infty)$ se, e só se, x^- é identicamente nula.

2.3. Escolha $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ e, para $n \geqslant 2$, defina o enésimo termo da sequência x pela relação de recorrência $x_n = \frac{1}{2}\big(x_{n-1} + x_{n-2}\big)$, ou seja, cada termo x_n é a média aritmética dos dois termos precedentes. Escreva os cinco primeiros termos dessa sequência. Mostre que (x_n) é limitada. Obtenha uma fórmula para x_n que independa dos termos x_k, com $k \leqslant n$, no caso em que $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$. Generalize essa fórmula para o caso geral.

2.4. Seja (x_n) uma sequência tal que exista uma cota inferior positiva para o módulo de seus termos, ou seja, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $0 < c \leqslant |x_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que é limitada a sequência (t_n) dos recíprocos, definida, para todo n, por $t_n = 1/x_n$.

2.5. Fixado $r \in \mathbb{Q}$, mostre que a sequência (n^r) é monótona. Mostre que (n^r) é crescente se, e só se, $r > 0$ e é decrescente se, e só se, $r < 0$.

2.6. Fixado $0 < a < 1$, mostre que a sequência $(n \cdot a^n)$ é decrescente.

2.7. Seja (x_n) uma sequência convergente tal que cada x_n é uma cota superior de um certo conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$. Mostre que $\lim x_n$ é uma cota superior de X. Enuncie e demonstre um resultado análogo para cotas inferiores.

2.8. Fixado $b \geqslant 0$, mostre que a sequência x definida por $x_n = b^{1/n} = \sqrt[n]{b}$ é monótona. Mostre que x é decrescente se, e só se, $b > 1$ e é crescente se, e só se, $0 < b < 1$. Fixado um número real $b > 0$ positivo, mostre que

$$\lim \sqrt[n]{b} = 1.$$

(*Sugestão*: se $b = 1$, a sequência é constante. Se $b \neq 1$, lembre do Exercício 1.15 e use o Teorema 2.7.)

2.9. Seja (x_n) uma sequência convergente com $\lim x_n = \sigma$. Mostre que

1. dados $a, b \in \mathbb{R}$ quaisquer, se $a < \sigma < b$, então $a < x_n < b$, para $n \gg 0$;
2. se $\sigma \neq 0$, então $|\sigma| < 2 \cdot |x_n|$, para $n \gg 0$.
3. se $\sigma \neq 0$, então a sequência $\big(1/x_n\big)$ é limitada. (Ver Exercício 2.4.)

2.10. Sejam (x_n) uma sequência limitada e (y_n) uma sequência convergente com $\lim y_n = 0$. Mostre que a sequência produto termo a termo $(x_n \cdot y_n)$ é convergente, com $\lim(x_n \cdot y_n) = 0$.

2.11. Seja (x_n) uma sequência em $(0, +\infty)$ e defina a sequência (t_n) por

$$t_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}, \quad \text{com } n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que se existir algum real $0 < c < 1$ tal que $0 < t_n \leqslant c$, para $n \gg 0$, então $\lim x_n = 0$. Mostre que, fixado $b > 0$, $\lim \dfrac{b^n}{n!} = 0$. Mostre que se (t_n) for convergente, com $\lim t_n < 1$, então $\lim x_n = 0$. Mostre que, fixados $b > 1$ e $a > 0$, $\lim \dfrac{n^a}{b^n} = 0$.

2.12. Sejam $(x_n), (y_n), (x'_n)$ e (y'_n) quatro sequências limitadas. Mostre que, se $x_n - y_n \longrightarrow 0$ e $x'_n - y'_n \longrightarrow 0$, então também

$$x_n \cdot y_n - x'_n \cdot y'_n \longrightarrow 0.$$

2.13. Considere duas sequências (u_n) e (t_n) quaisquer e duas sequências (u_n) e (v_n) de termos não-negativos tais que $u_n + v_n = 1$, para $n \gg 0$. Mostre que, se $\lim u_n = 0 = \lim t_n$, então $\lim(t_n - x_n) = 0$ e, também, $\lim\,(u_n \cdot s_n + v_n \cdot t_n) = 0$.

2.14. Fixado $c > 0$, defina $x_n = \sqrt{n+c} - \sqrt{n}$, com $n \in \mathbb{N}$. Mostre que (x_n) converge, com $\lim x_n = 0$. (*Sugestão*: multiplique e divida o termo geral x_n pelo seu conjugado $\sqrt{n+c} + \sqrt{n}$.)

2.15. Escolha $x_0 \in \mathbb{R}$ e, para $n \in \mathbb{N}$, defina o enésimo termo da sequência (x_n) pela relação de recorrência

$$x_n = \tfrac{1}{4}\big(1 + x_{n-1}\big).$$

Escreva os cinco primeiros termos dessa sequência. Use indução para mostrar que x é crescente e limitada superiormente se a escolha for $x_0 = 0$ e é decrescente e limitada inferiormente se a escolha for $x_0 = 1$. Mostre que, em ambos casos de x_0, a sequência (x_n) é convergente. Mostre que $\lim x_n = \frac{1}{3}$. (*Sugestão*: observe que $\lim x_{n-1} = \lim x_n$ e tome o limite das duas sequências dos dois lados da equação dada, obtendo $\sigma = \frac{1}{4}\big(1 + \sigma\big)$.)

2.16. Mostre que se uma sequência (x_n) for monótona e tiver uma subsequência convergente, então (x_n) é convergente e tem o mesmo limite da subsequência.

2.17. Sejam (x_{k_n}) e (x_{p_n}) duas subsequências de uma sequência $x = (s_n)$ qualquer tais que cada termo x_n de x aparece exatamente em uma dessas duas subsequências. Se ambas subsequências forem convergentes e tiverem o mesmo limite, então x também é convergente e tem o mesmo limite das duas subsequências.

2.18. Seja (x_n) a sequência definida, para cada $n \in \mathbb{N}$, por

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}\,.$$

Mostre que (x_n) é crescente e limitada em $(0, 1]$, portanto, convergente, com $\lim x_n \in \big(\frac{1}{2}, 1\big]$.

2.19. Considere uma sequência de intervalos compactos $I_n = [x_n, y_n]$ encaixados, ou seja, tal que $I_n \supseteq I_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Use o Teorema 2.7 para mostrar que existe pelo menos um ponto, denominado *ponto limite* da sequência (I_n), que pertence a cada intervalo. Em outras palavras, mostre que a interseção de todos os intervalos I_n não é vazia. (Assim, temos uma prova alternativa da propriedade dos intervalos encaixados, já demonstrada na Proposição 1.9.) Se, além disso, $y_n - x_n \longrightarrow 0$, mostre que existe um único ponto limite da sequência (I_n).

2.20. Considere a sequência (x_n) do Exemplo 2.20. Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, vale $x_{2n} < x_{2n+2} < x_{2n+3} < x_{2n+1}$. Sejam $s_n = x_{2n}$ e $t_n = x_{2n+1}$, de modo que $|t_n - s_n| = |x_{2n+1} - x_{2n}| = \frac{1}{2n+1}$, para cada n. Defina $I_n = [s_n, t_n]$ e estabeleça que existe um único ponto limite σ dessa sequência (I_n) de intervalos encaixados. Conclua que $\lim x_n = \sigma$.

2.21. Considere a sequência (x_n) definida por $x_0 = 1$ e, para $n \in \mathbb{N}$, por $x_n = x_{n-1} + (-1)^n \frac{1}{n!}$. Escreva os quatro primeiros termos de (x_n) e mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, sempre $x_{2n} - x_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}$ e

$$0 = x_1 < x_3 < \cdots < x_{2n+1} < \cdots < x_{2n} < \cdots < x_4 < s_2 < x_0 = 1.$$

Mostre que (x_n) é convergente, com $\lim x_n \in (0,1)$.

2.22. Dada uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, defina uma nova sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pelas médias aritméticas

$$t_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

para $n \in \mathbb{N}$. Escreva os quatro primeiros termos da sequência t. Mostre que (t_n) é limitada sempre que (x_n) for limitada. Mostre que se $x_{n+1} \geqslant x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $t_{n+1} \geqslant t_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (e, analogamente, trocando $\geqslant$ por $\leqslant$). Mostre que, se $x_n \longrightarrow 0$, então $t_n \longrightarrow 0$. Mostre que se (s_n) for convergente, com $\sigma = \lim x_n$, então (t_n) é convergente, com $\sigma = \lim t_n$. Supondo que (x_n) seja uma sequência em $(0, +\infty)$, com $\lim x_n = \sigma > 0$, use logaritmo para mostrar que também as médias harmônicas

$$u_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}\,, \quad \text{com } n \in \mathbb{N},$$

convergem, com $\lim u_n = \sigma$.

2.23. Fixado $\sigma \in \mathbb{R}$, mostre que uma sequência (x_n) é convergente com $\lim x_n = \sigma$ se, e somente se, qualquer subsequência de (x_n) tiver, por sua vez, uma subsequência convergente de limite σ.

2.24. Suponha que (x_n) não convirja a 0 em $\mathbb{R}$. Mostre que podemos escolher $\varepsilon > 0$ e alguma subsequência (x_{k_n}) de (x_n) tal que $x_{k_n} > \varepsilon$, para cada $n \in \mathbb{N}$, ou então alguma subsequência (x_{l_n}) de (x_n) tal que $x_{l_n} < -\varepsilon$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

2.25. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy de $\mathbb{R}$. Mostre que vale exatamente uma das alternativas seguintes.

1. $\lim x_n = 0$.
2. Existem $\varepsilon > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que $x_n > \varepsilon$, para cada $n \geqslant N$,
3. Existem $\varepsilon > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que $x_n < -\varepsilon$, para cada $n \geqslant N$,

2.26. Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências de Cauchy de $\mathbb{R}$. Mostre que a soma e o produto termo a termo $(x_n + y_n)$ e $(x_n \cdot y_n)$ dessas sequências também são sequências de Cauchy.

Capítulo 3

Continuidade

As funções contínuas se distinguem por preservar limites.

3.1 Continuidade num Ponto

Neste capítulo, X e Y denotam intervalos ou uma uniões finitas de intervalos de $\mathbb{R}$. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real qualquer e $\sigma \in X$ um ponto qualquer do domínio de f. Dizemos que a função f é *contínua em* σ se $f(x_n) \longrightarrow f(\sigma)$, para cada sequência (x_n) de X tal que $x_n \longrightarrow \sigma$. Em menos palavras, f é contínua em σ se

$$f\big(\lim x_n\big) = \lim f(x_n),$$

sempre que $\lim x_n = \sigma$.

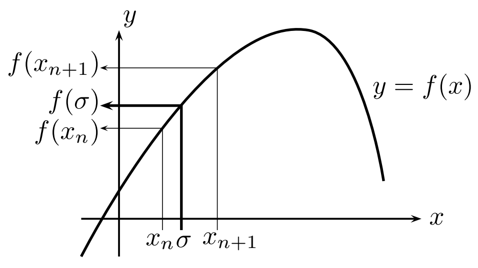

Figura 3.1 A continuidade de f em σ

Para estabelecer a continuidade de uma função num ponto σ de seu domínio X, a definição exige que verifiquemos se $f(x_n) \longrightarrow f(\sigma)$ para *toda e qualquer* sequência (x_n) de X tal que $x_n \longrightarrow \sigma$. Será isso, de fato, necessário? Na verdade, não é preciso verificar isso para todas as sequências que tendem a σ, bastando considerar as sequências monótonas que tendem a σ. Mais que isso, como a sequência constante $x_n = \sigma$ sempre leva à sequência constante $f(x_n) = f(\sigma)$, basta considerar as sequências de $X - \{\sigma\}$ que tendem a σ e, dessas, apenas as crescentes e as decrescentes. (Exercício 3.13).

Se uma função não for contínua num ponto de seu domínio, diremos que ela é *descontínua* nesse ponto. Para estabelecer que f é descontínua num ponto σ de seu domínio X, basta encontrar uma única sequência (x_n) do domínio X que seja convergente a σ mas tal que a sequência $\big(f(x_n)\big)$ da imagem não convirja a $f(\sigma)$. Isso ocorre se a sequência $\big(f(x_n)\big)$ divergir ou, então, se convergir a algum valor distinto de $f(\sigma)$.

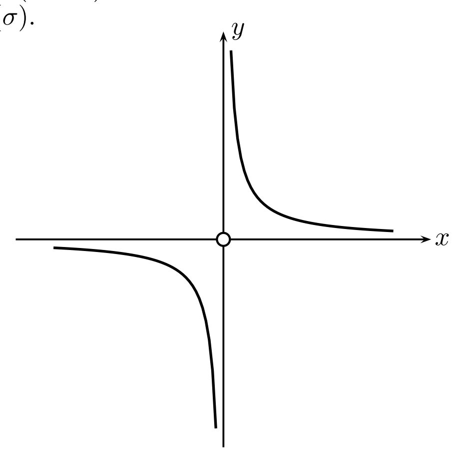

Figura 3.2 O gráfico da função contínua $f(x) = 1/x$

Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *contínua em* $Y \subseteq X$ se f é contínua em cada ponto de Y. Dizemos, simplesmente, que uma função é *contínua* se for contínua em cada ponto de seu domínio.

Pelas propriedades operacionais dos limites de sequências (Proposição 2.11), decorre que combinações lineares e produtos de funções contínuas (num ponto) são contínuas (nesse ponto). Também é, automaticamente, contínua a função composta de duas funções contínuas:

se f é contínua em σ e g é contínua em $f(\sigma)$, então $g \circ f$ é contínua em σ, sempre que essa composta exista, ou seja, se $f(X) \subseteq Y$, onde $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$.

Exemplo 3.1. Pela Proposição 2.10, é contínua a função *valor absoluto*, definida por

$$f(x) = |x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geqslant 0, \\ -x, & \text{se} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

As funções constantes e a identidade $f(x) = x$ são, claramente, contínuas. Segue daí que são contínuas todas as funções polinomiais de uma variável real. Também já vimos que $1/x_n \longrightarrow 1/\sigma$, sempre que $x_n \longrightarrow \sigma \neq 0$; agora, isso significa que é contínua (em seu domínio) a função racional definida por $f(x) = 1/x$ (Figura 3.2). ⊚

Exemplo 3.2. Fixado $a \in \mathbb{R}$, seja $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função real definida por

$$f_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x > 0, \\ a, & \text{se} \quad x = 0, \\ -1, & \text{se} \quad x < 0, \end{cases}$$

cujo gráfico pula do gráfico constante de $g(x) = -1$ em $(-\infty, 0)$ para o de $h(x) = 1$ em $(0, \infty)$. Essa função é contínua em $\mathbb{R} - \{0\}$, mas é descontínua em 0.

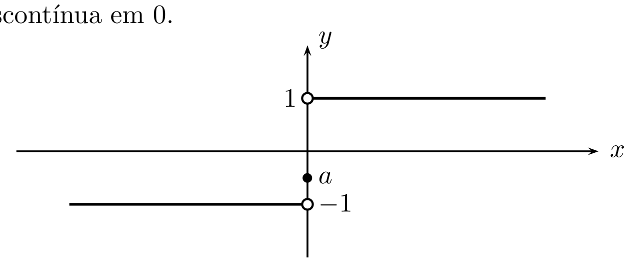

Figura 3.3 O gráfico da função f_a descontínua em 0

De fato, f é contínua em cada ponto de $\mathbb{R} - \{0\}$, por ser constante. No entanto, f_a é descontínua em 0, pois as duas sequências definidas por $x_n^{\pm} = \pm 1/n$ convergem a 0, mas $f(x_n^+) \longrightarrow 1$ e $f(x_n^-) \longrightarrow -1$, de modo que pelo menos uma dessas duas sequências não converge a $f(0) = a$, independentemente do valor a escolhido para $f(0)$. ⊚

Da mesma forma que não foi possível definir a função f_a do exemplo precedente de modo a torná-la contínua em 0, não existe maneira de estender o domínio da função racional contínua do Exemplo 3.1, definida por $f(x) = 1/x$, de $\mathbb{R} - \{0\}$ para $\mathbb{R}$ de maneira contínua. De fato, dada qualquer sequência (x_n) convergente a 0, sabemos (Exemplo 2.22) que $f(x_n) = 1/x_n$ diverge.

Em geral, se soubermos que $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua num ponto $\sigma \in I$ de um intervalo I, então existe uma única opção para o valor de f em σ, a saber,

$$f(\sigma) = \lim f(x_n),$$

para alguma (ou qualquer) sequência (x_n) de I convergente a σ.

Por outro lado, se tivermos uma função definida num intervalo I, exceto num ponto $\sigma \in I$, e se $\lim f(x_n) = \lambda$, para cada sequência (x_n) de $I - \{\sigma\}$ convergente a σ, então f é uma função contínua em σ se, e só se, definirmos $f(\sigma) = \lambda$.

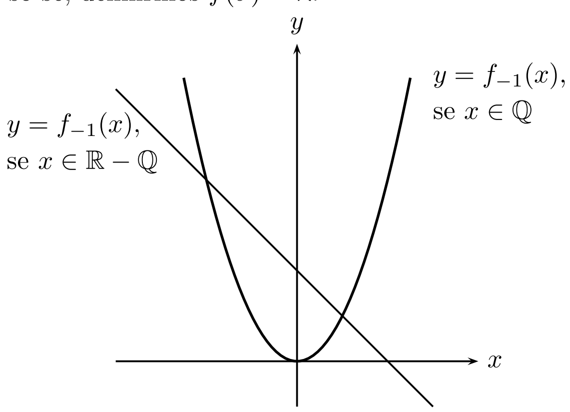

Figura 3.4 O gráfico da função descontínua f_{-1}

Exemplo 3.3. Fixado $a \in \mathbb{R}$, seja $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função real definida por

$$f_a(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ a(x-1)+1, & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \end{cases}$$

cujo gráfico pula entre os gráficos da parábola $g(x) = x^2$ e da reta por $(1, 1)$, de inclinação a. Essa função só é contínua nos pontos σ de $\mathbb{R}$ tais que ponto (σ, σ^2) da parábola pertença à reta $y = a(x-1)+1$.

De fato, se (x_n) é uma sequência qualquer que converge a σ, então $x_n^2 \longrightarrow \sigma^2$ por valores racionais de x_n e $a(x_n-1)+1 \longrightarrow a(\sigma-1)+1$ por valores irracionais de x_n. Mas $\sigma^2 = a(\sigma - 1) + 1$ se, e só se, $\sigma^2 - a\sigma + (a-1) = 0$, ou seja, se e só se $\sigma = \frac{1}{2}(a \pm |a-2|)$. Com $a \neq 2$, obtemos dois pontos σ de continuidade de f_a, ao passo que f_2 tem o único ponto de continuidade $\sigma = 1$, em que a parábola $y = x^2$ é *tangente* à reta $y = 2(x-1)+1 = 2x-1$.

Observe que, fixando $a \in \mathbb{Q}$, a parte $y = a(x-1)+1$ de f_a é uma bijeção de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, mas f_a é só injetora de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$, sem ser sobrejetora. Por exemplo, os únicos $y \in \mathbb{N}$ da imagem de f_a (nesse caso $a \in \mathbb{Q}$) são os inteiros que são quadrados perfeitos. ⊚

Lema 3.4 (Permanência do sinal)**.** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua num ponto $\sigma \in X$. Se $f(\sigma) > \lambda$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, então existe $r > 0$ tal que $f(x) > \lambda$, para cada $x \in X \cap (\sigma - r, \sigma + r)$. Resultado análogo vale se $f(\sigma) < \lambda$.*

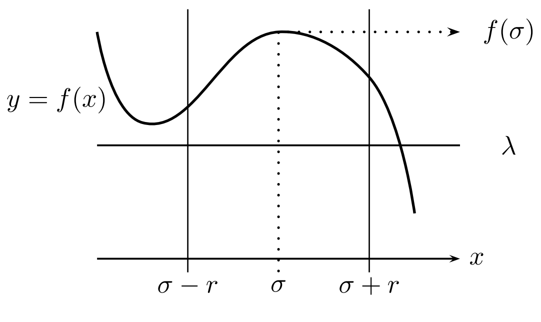

Figura 3.5 A permanência do sinal de f em σ

Demonstração. Usamos contraposição. Digamos que $\lambda \in \mathbb{R}$ seja tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, exista $x_n \in X$ tal que $|\sigma - x_n| < \frac{1}{n}$ e $f(x_n) \leqslant \lambda$. Então $x_n \longrightarrow \sigma$ e, portanto, $f(x_n) \longrightarrow f(\sigma)$, por continuidade de f em σ. Como $f(x_n) \leqslant \lambda$, para cada n, a permanência do sinal de sequências (Lema 2.8) garante que, também, $f(\sigma) \leqslant \lambda$. □

Exemplo 3.5. O quociente de funções contínuas (num ponto) é contínuo (nesse ponto), desde que o denominador seja não-nulo no(s) ponto(s) em consideração. De fato, sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas num ponto $\sigma \in X$. Se $g(\sigma) \neq 0$, então a permanência do sinal de funções contínuas garante que existe $r > 0$ tal que $g(x) \neq 0$, para cada $x \in (\sigma - r, \sigma + r) \cap X$. Desse modo, o quociente f/g das duas funções está bem definido em $(\sigma - r, \sigma + r) \cap X$ e é contínuo em σ, pela Proposição 2.11 (ver, também, o Exercício 3.7.)

Em particular, toda função racional é contínua em cada ponto em que o polinómio do denominador não se anula. ⊚

3.2 Continuidade num Intervalo

Vejamos os resultados fundamentais relativos a funções contínuas em intervalos.

A função f_a do Exemplo 3.2 tem por imagem o conjunto discreto $\{-1, a, 1\}$, que não é um intervalo. Como o domínio dessa função é um intervalo (a saber, $\mathbb{R}$), isso por si só já garante que f_a não pode, realmente, ser contínua. De fato, veremos a seguir que toda função contínua leva intervalos em intervalos.

Exemplo 3.6. Consideremos um objeto em movimento retilíneo. Se o objeto for lançado verticalmente para cima, a altura alcançada pelo objeto aumenta até chegar no alto e depois começa a diminuir. Nesse mesmo trajeto, observa-se que sua velocidade começa positiva, diminuindo até "parar" no alto, depois aumenta até que, de volta ao ponto de partida, é a mesma velocidade, mas de sinal oposto. É impossível imaginar que o objeto "dê a volta" no alto de sua trajetória sem que sua velocidade se anule nesse instante.

Assim, para passar de velocidade positiva (subindo) para velocidade negativa (descendo), o objeto precisa passar, necessariamente, por um instante de velocidade nula (no alto), exemplificando a propriedade do valor intermediário da função velocidade. ⊚

Teorema 3.7 (Teorema do Valor Intermediário – TVI)**.** *A imagem direta por uma função contínua de qualquer intervalo contido no domínio da função é um intervalo.*

Usando a caracterização de intervalo da Proposição 1.8, o TVI afirma, em mais palavras, que se $f : X \to \mathbb{R}$ for contínua, se $[a,b] \subseteq X$, e se, para algum $d \in \mathbb{R}$ tivermos $f(a) < d < f(b)$, então necessariamente existe pelo menos um ponto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$. O mesmo ocorre se $f(b) < d < f(a)$. Essa é a *propriedade do valor intermediário*, que, portanto, é válida para funções reais contínuas.

Demonstração. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que $a < b$ e $d \in \mathbb{R}$ sejam tais que $[a,b] \subseteq X$ e $f(a) < d < f(b)$. Mostremos que existe algum $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$. Para isso, consideramos o conjunto $C = \{x \in [a,b] : f(x) < d\}$. Por hipótese, $a \in C$ e $C \subseteq [a,b)$, de modo que existe $c = \sup C \in [a,b]$. Mostremos que $f(c) = d$.

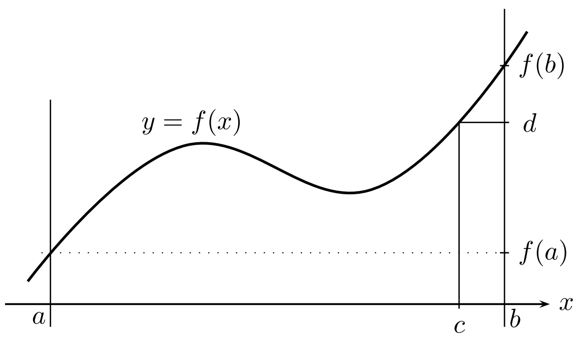

Figura 3.6 A propriedade do valor intermediário

Ora, dado qualquer $x \in C$, vale $x < b$ e $f(x) < d$, portanto o Lema 3.4 garante que existe $\sigma \in (x,b)$ tal que $f(\sigma) < d$, ou seja, x não é cota superior de C. Em particular, $c = \sup C \notin C$. Então $f(c) \geqslant d$ e (ver Exemplo 2.13) existe uma sequência (x_n) crescente de C tal que $x_n \longrightarrow c$. Pela continuidade de f, segue que $f(x_n) \longrightarrow f(c)$ e, como $f(x_n) < d$, a permanência do sinal de sequências (Lema 2.8) garante que, também $f(c) \leqslant d$. Assim, $f(c) = d$. $\square$

Exemplo 3.8. Existe alguma raiz real de $x^5 + 4x^3 - 2x^2 + x - 3$ entre 0 e 1, pois $f(x) = x^5 + 4x^3 - 2x^2 + x - 3$ é contínua em $\mathbb{R}$ e $f(0) = -3 < 0 < 1 = 1 + 4 - 2 + 1 - 3 = f(1)$. ⊚

Exemplo 3.9. A cúbica dada por $f(x) = x(x+1)(x-1) = x^3 - x$ satisfaz $f(-2) = -6 < 0 < 6 = f(2)$ e existem três pontos c tais que $f(c) = 0$, a saber, $c = -1$, 0 e 1. ⊚

O TVI garante que existe pelo menos um ponto c tal que $f(c) = d$. No exemplo precedente, obtivemos três. É claro que se a função contínua for injetora no intervalo, existe exatamente um único ponto c tal que $f(c) = d$. Assim obtemos uma maneira alternativa de mostrar a existência de todas as raízes de todos os números reais positivos.

Proposição 3.10. *Dados $x \in \mathbb{R}$ positivo e $n \in \mathbb{N}$, existe, e é única, a raiz enésima $\sqrt[n]{x}$ de x.*

Demonstração. Fixado $n \in \mathbb{N}$, sabemos que é contínua em $\mathbb{R}$ a função potência definida por $f(x) = x^n$, com $x \in \mathbb{R}$ (Exemplo 3.1). Dado $x > 0$, mostremos que existe um único $y > 0$ tal que $x = f(y) = y^n$.

Pela propriedade arquimediana, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x < m$, e é claro que $m < m^n$. Logo, $f(0) = 0 < x < m^n = f(m)$ e o TVI garante que existe $y > 0$ tal que $y^n = f(y) = x$. Como a função f é injetora (Exercício A.15), a raiz enésima de x é única. □

A recíproca do TVI não é válida, pois existem exemplos de funções descontínuas com a propriedade do valor intermediário. No entanto, a recíproca é válida na categoria especial das funções monótonas crescentes ou decrescentes.

De acordo com seu crescimento, dizemos que uma função real $f : X \to \mathbb{R}$ é

- *crescente em* X se $f(x_1) < f(x_2)$ com $x_1, x_2 \in X$ e $x_1 < x_2$;
- *não decrescente em* X se $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ com $x_1 < x_2 \in X$;
- *não crescente em* X se $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ com $x_1, x_2 \in X$ e $x_1 < x_2$;
- *decrescente em* X se $f(x_1) > f(x_2)$ com $x_1, x_2 \in X$ e $x_1 < x_2$;

Observe que toda função crescente é não decrescente e toda decrescente é não crescente. Em geral, dizemos que uma função é *monótona* em X se for não crescente ou não decrescente em X.

Teorema 3.11. *Se uma função é crescente ou decrescente num intervalo e sua imagem é um intervalo, então a função é contínua.*

Demonstração. Seja f uma função descontínua e decrescente num intervalo I qualquer. Digamos que f seja descontínua num ponto

$\sigma \in I$. Pelo Exercício 3.16, existe alguma sequência (x_n) de $I - \{\sigma\}$ que é crescente ou decrescente e convergente a σ, mas tal que $(f(x_n))$ não converge a $f(\sigma)$. Vamos supor que (x_n) seja crescente.

Como f é decrescente e $x_n < x_{n+1} < \sigma$, para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$f(x_n) > f(x_{n+1}) > f(\sigma),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, portanto, a sequência $(f(x_n))$ é decrescente e limitada inferiormente por $f(\sigma)$. Pelo Teorema 2.7, $(f(x_n))$ converge a $\eta = \inf\{(f(x_n)\}$ e, como $(f(x_n))$ não converge a $f(\sigma)$, resulta $\eta > f(\sigma)$. Resta mostrar que nenhum ponto entre $f(\sigma)$ e η pertence à imagem de f, com o que a imagem de f não é um intervalo.

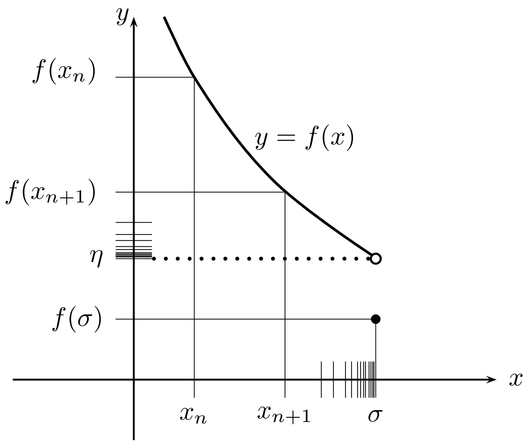

Figura 3.7 A imagem de uma função decrescente e descontínua não pode ser um intervalo

Se $y \in \big(f(\sigma), \eta\big)$ fosse um ponto da imagem de f, então existiria $x \in I$ tal que $f(x) = y$ e, de

$$f(\sigma) < f(x) < \eta \leqslant f(x_n)$$

decorreria que $x_n < x < \sigma$, para cada $n \in \mathbb{N}$, ou seja, pelo confronto, obteríamos $x = \sigma$, o que é impossível, pois $f(x) = y \neq f(\sigma)$. $\square$

Corolário 3.12. *Seja f uma função crescente ou decrescente num intervalo. Então f é contínua se, e só se, f tem a propriedade do valor intermediário.* □

Teorema 3.13. *Toda função contínua e injetora f num intervalo I é crescente (ou decrescente) em I e sua função inversa também é contínua e crescente (ou decrescente) no intervalo $f(I)$.*

Demonstração. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua e injetora no intervalo I. Pelo TVI, a imagem $J = f(I)$ de f é um intervalo e, por ser f injetora, existe a função inversa $g : J \to \mathbb{R}$ de f. Pelo Exercício 3.20, f é crescente (ou decrescente) em I, com inversa crescente (ou decrescente). Como a imagem de g é o intervalo I, o Teorema 3.11 garante que a inversa g é contínua. □

Exemplo 3.14. A função racional contínua definida por $f(x) = 1/x$, do Exemplo 3.1, leva o intervalo limitado não fechado $(0, 1]$ no intervalo ilimitado $[1, \infty)$ e leva o intervalo fechado não limitado $[1, \infty)$ no intervalo não fechado $(0, 1]$.

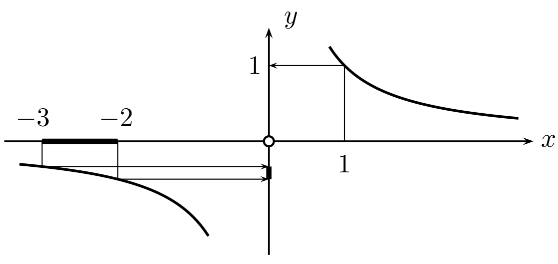

Figura 3.8 A função contínua $f(x) = 1/x$ leva intervalos compactos do domínio em intervalos compactos

No entanto, essa f leva qualquer intervalo limitado e fechado (ou seja, compacto) do domínio num intervalo limitado e fechado; por exemplo, leva $[-3, -2]$ em $\left[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right]$. ⊚

Em geral, nenhuma função contínua pode levar um intervalo compacto do domínio num intervalo ilimitado.

Proposição 3.15. *A imagem direta por uma função contínua de qualquer intervalo compacto contido no domínio da função é um intervalo limitado.*

Demonstração. De fato, suponha que $f : X \to \mathbb{R}$ seja uma função contínua, que $[a,b] \subseteq X$ seja um intervalo compacto e que a imagem $f([a,b])$ seja ilimitada. Escolhendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, algum $y_n \in f([a,b])$ tal que $n < |y_n|$, obtemos uma sequência (x_n) de $[a,b]$ tal que $n < |y_n| = |f(x_n)|$, com $n \in \mathbb{N}$.

Pelo Teorema 2.17 de Bolzano-Weierstrass, essa sequência possui alguma subsequência convergente. Se (x_{k_n}) denotar uma tal subsequência e se $x_{k_n} \longrightarrow c$, então $k_n \geqslant n$ e $c \in [a,b]$, já que $[a,b]$ é um intervalo compacto. Mas, por continuidade, $f(x_{k_n}) \longrightarrow f(c)$, de modo que $n \leqslant k_n < |f(x_{k_n})| \longrightarrow |f(c)|$, o que é uma contradição. Desse modo, provamos que $f([a,b])$ é um conjunto limitado. □

Tampouco pode função contínua alguma levar um subintervalo compacto do domínio num intervalo não fechado.

Teorema 3.16 (Teorema de Weierstrass – TW). *A imagem direta por uma função contínua de qualquer intervalo compacto contido no domínio da função é um intervalo compacto.*

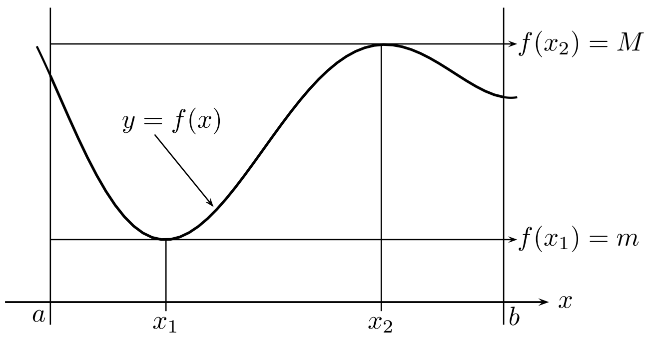

Figura 3.9 O Teorema de Weierstrass

Em mais palavras, o TW afirma que se $f : X \to \mathbb{R}$ for contínua e se $[a,b] \subseteq X$, então existem os valores mínimo m e máximo M de

f em $[a,b]$, ou seja, temos $f([a,b]) = [m,M]$; em particular, existem $x_1, x_2 \in [a,b]$ tais que

$$m = f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2) = M,$$

para cada $x \in [a,b]$. Assim, toda função contínua atinge algum valor mínimo e algum valor máximo em cada intervalo fechado e limitado.

Demonstração. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $[a,b] \subseteq X$. Pelo TVI e pela proposição precedente, já estabelecemos que $f([a,b])$ é um intervalo limitado. Sejam $m = \inf f([a,b])$ e $M = \sup f([a,b])$.

Mostremos que $M \in f([a,b])$. Pela propriedade do supremo, existe uma sequência (y_n) de $f([a,b])$ tal que $y_n \longrightarrow M$. Assim, obtemos uma sequência (x_n) de $[a,b]$ tal que $f(x_n) \longrightarrow M$. Pelo Teorema 2.17 de Bolzano-Weierstrass, podemos supor que (uma subsequência de) (x_n) seja convergente; digamos que $x_n \to c \in [a,b]$. Então $f(x_n) \longrightarrow M$ e, por continuidade, $f(x_n) \to f(c)$, acarretando $M = f(c) \in f([a,b])$. De maneira totalmente análoga, podemos mostrar que $m \in f([a,b])$. Isso mostra que $f([a,b]) = [m,M]$. $\square$

Para terminar este capítulo, investigamos as oscilações de funções contínuas em intervalos. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, $[c,d] \subseteq X$ é um intervalo compacto e $f([c,d]) = [m,M]$, dizemos que

$$M - m = \omega\big(f, [c,d]\big)$$

é a *oscilação* de f em $[c,d]$.

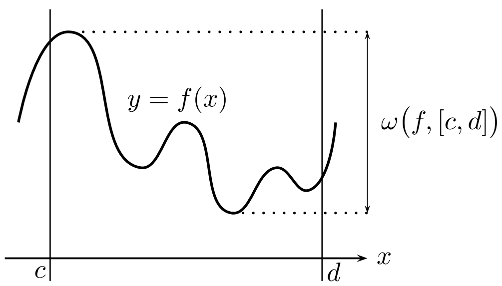

Figura 3.10 A oscilação de f em $[c,d]$

Exemplo 3.17. A função racional do Exemplo 3.1, definida por $f(x) = 1/x$, é contínua em seu domínio, mas possui oscilações arbitrariamente grandes. De fato, é imediato verificar que

$$\omega\Big(f, \big[\tfrac{1}{2n}, \tfrac{1}{n}\big]\Big) = n,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. No entanto, as oscilações de f são controladas em subintervalos fechados de intervalos compactos do domínio dessa função, que necessariamente se mantém afastados da origem. ⊚

Em geral, funções contínuas em intervalos compactos tem as oscilações em subintervalos uniformemente controladas.

Proposição 3.18. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função que é contínua num intervalo $[a, b] \subseteq X$. Dado qualquer $\varepsilon > 0$, podemos escolher algum $r > 0$ tal que*

$$0 \leqslant \omega\big(f, [c, d]\big) \leqslant \varepsilon,$$

para cada subintervalo $[c, d]$ de $[a, b]$ com $d - c \leqslant r$.

Demonstração. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função que é contínua num intervalo $[a, b] \subseteq X$. Pelo Exercício 3.11, basta mostrar que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, podemos escolher $r > 0$ de tal forma que $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$, para quaisquer $x, y \in [a, b]$, com $|x - y| \leqslant r$.

Digamos que esta afirmação seja falsa, ou seja, digamos que $\varepsilon_0 > 0$ seja tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existam $x_n, y_n \in [a, b]$ tais que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0$. Pelo Teorema 2.17 de Bolzano-Weierstrass, podemos supor que (uma subsequência de) (y_n) seja convergente; digamos que $y_n \longrightarrow c \in [a, b]$. Então também $x_n = (x_n - y_n) + y_n \longrightarrow 0 + c = c$ e, por continuidade, ambas $(f(x_n))$ e $(f(y_n))$ convergem a $f(c)$, acarretando

$$0 = |f(c) - f(c)| = \lim |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0 > 0,$$

o que é uma impossibilidade. □

Epílogo

As propriedades básicas de funções contínuas que acabamos de ver são suficientes para estudar a derivada e a integral nos próximos capítulos. No entanto, há muito mais o que aprender sobre continuidade.

Em primeiro lugar, o leitor deve estudar o formalismo de Cauchy e de Weierstrass dos $\varepsilon - \delta$. Essa caracterização da continuidade, mesmo não sendo tão geral quanto a apresentada no texto, é a que o leitor encontrará em todos livros de Análise, de modo que convém familiarizar-se com essa notação. (Ver Exercício 3.10.)

Esse formalismo dos $\varepsilon - \delta$ fica restrito a espaços métricos (ver [15]), quando o conceito de continuidade fica realmente à vontade em espaços mais gerais, os *espaços topológicos*. A continuidade é a propriedade mais característica das aplicações entre tais espaços.

No entanto, o estudo da Topologia, como é denominado esse ramo da Matemática, tem sido excluído do currículo dos cursos de Matemática. O leitor pode encontrar tudo isso no livro *Elementos de Topologia Geral*, de Elon Lima, reimpresso em janeiro deste ano pela SBM, na coleção *Textos Universitários*, depois de esgotado há décadas.

No nosso estudo, não fosse por razões de espaço, certamente poderíamos ter incluído um tratamento de limites "no infinito" de funções definidas em conjuntos ilimitados e o da assintoticidade. O leitor pode encontrar isso em quase todos livros de Análise. Um outro assunto com pouca dificuldade adicional é o estudo de continuidade uniforme (ver Exercício 3.22) e o da extensão de funções contínuas a conjuntos maiores do que seu domínio (ver [5]).

3.3 Exercícios

3.1. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções reais contínuas num ponto σ. Mostre que valem as afirmações seguintes.

1. Se $f(\sigma) < g(\sigma)$, existe $r > 0$ tal que $f(x) < g(x)$, para cada $x \in X \cap (\sigma - r, \sigma + r)$.
2. Se existir $r > 0$ tal que $f(x) \leqslant g(x)$, para cada $x \in X$ tal que $0 < |x - \sigma| < r$, então $f(\sigma) \leqslant g(\sigma)$.
3. (Critério do Confronto) Se $f(\sigma) = g(\sigma)$ e se $h : X \to \mathbb{R}$ for uma função qualquer tal que $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$, para cada $x \in X$, então h é contínua em σ e $f(\sigma) = h(\sigma) = g(\sigma)$.

3.2. Dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$, defina a função $|f| : X \to \mathbb{R}$ valor absoluto de f por $|f|(x) = |f(x)|$, para $x \in X$. Seja $\sigma \in X$ um ponto do domínio de f. Mostre que

1. se f é contínua (em $\sigma \in X$), então $|f|$ é contínua (em $\sigma \in X$);
2. se f é contínua em σ e $|f(\sigma)| > 0$, então existem $c > 0$ e $r > 0$ tais que $|f(x)| > c$, para cada $x \in [\sigma - r, \sigma + r] \cap X$.

Dê um exemplo de uma função que não é contínua em ponto algum de $\mathbb{R}$, mas tal que sua função valor absoluto seja contínua em $\mathbb{R}$.

3.3. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto limitado qualquer e considere a função $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ é cota superior de } X, \\ 0, & \text{se } x \text{ não é cota inferior nem superior de } X, \\ -1, & \text{se } x \text{ é cota inferior de } X, \end{cases}$$

Mostre que ψ só é descontínua em $\sigma_1 = \inf X$ e $\sigma_2 = \sup X$.

3.4. Dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$ qualquer, defina as funções *parte positiva* $f^+ : X \to \mathbb{R}$ de f e a *parte negativa* $f^- : X \to \mathbb{R}$ de f por

$$f^+(x) = \tfrac{1}{2}\big[|f(x)| + f(x)\big], \qquad f^-(x) = \tfrac{1}{2}\big[|f(x)| - f(x)\big],$$

para $x \in X$. Mostre que $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ e $f^- = \max\{-f(x), 0\}$, para cada $x \in X$ e conclua que $f^+(x) \geqslant 0$, $f^-(x) \geqslant 0$, $f^+(x) - f^-(x) = f(x)$ e $f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|$, para cada $x \in X$. Forneça exemplos gráficos de funções f, f^+ e f^-. Mostre que as funções parte positiva f^+ e negativa f^- de f, são contínuas (em $\sigma \in X$) se, e só se, f é contínua (em $\sigma \in X$).

3.5. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto simétrico em relação à origem, ou seja, tal que $x \in X$ se, e só se, $-x \in X$. Dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$ qualquer, defina a *parte par* $f^p : X \to \mathbb{R}$ e a *parte ímpar* $f^i : X \to \mathbb{R}$ de f por

$$f^p(x) = \tfrac{1}{2}\big[f(x) + f(-x)\big], \qquad f^i(x) = \tfrac{1}{2}\big[f(x) - f(-x)\big],$$

para $x \in X$. Mostre que f^p é uma função par, f^i uma função ímpar e que $f = f^p + f^i$. Conclua que toda função pode ser decomposta numa soma de uma função par com uma ímpar. Forneça exemplos gráficos de funções f, f^p e f^i. Mostre que a função f é contínua (em $\sigma \in X$) se, e só se, as funções parte par e parte ímpar f^p e f^i de f são contínuas (em $\sigma \in X$).

3.6. Dadas duas funções $f, g : X \to \mathbb{R}$, considere as funções $m, M : X \to \mathbb{R}$ definidas, para cada $x \in X$, por

$$m(x) = \tfrac{1}{2}\big[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\big]$$

e

$$M(x) = \tfrac{1}{2}\big[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\big],$$

Mostre que $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ e $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ para cada $x \in X$ e conclua que $m(x) \leqslant f(x), g(x) \leqslant M(x)$, para cada $x \in X$. (Lembre do Exercício 1.18.) Forneça exemplos gráficos de funções f, g, m e M. Mostre que se as duas funções f e g forem contínuas (em $\sigma \in X$), então as funções máximo e mínimo m e M de f e g também são contínuas (em $\sigma \in X$). Dê um exemplo de funções descontínuas em algum ponto tais que o mínimo e o máximo sejam contínuos.

3.7. Dados uma função $f : X \to \mathbb{R}$ e $Y \subseteq X$, dizemos que a função $g : Y \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x)$, com $x \in Y$, é a função *restrição de* f a Y. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $\sigma \in X$ um ponto do domínio de f. Mostre que f é contínua em σ se, e só se, existe algum $r > 0$ tal que é contínua em σ a função restrição de f a $(\sigma - r, \sigma + r) \cap X$.

3.8. Mostre que se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for contínua e tal que $f(x) = 0$, para cada $x \in \mathbb{Q}$, então $f(x) = 0$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Dê um exemplo de uma função $f : X \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(x) = 0$, para cada $x \in \mathbb{Q} \cap X$, mas tal que não vale $f(x) = 0$, para cada $x \in X$.

3.9. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $\sigma \in X$ um ponto do domínio de f. Mostre que são equivalentes as afirmações:

1. f não é contínua em σ;
2. existe alguma sequência (x_n) de X tal que $x_n \longrightarrow \sigma$ e também $\lim f(x_n) \neq f(\sigma)$;
3. existem algum $\varepsilon_0 > 0$ e alguma sequência (x_n) de $X - \{\sigma\}$ tais que $x_n \longrightarrow \sigma$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, vale $|f(x_n) - f(\sigma)| > \varepsilon_0$.

3.10. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $\sigma \in X$ um ponto do domínio de f. Mostre que f é contínua em σ se, e só se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, por menor que seja, sempre for possível encontrar algum $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(\sigma)| < \varepsilon,$$

para qualquer $x \in X$ tal que $|x - \sigma| < \delta$. (*Sugestão*: use contraposição para mostrar que a continuidade implica a condição dos ε – δ.)

3.11. Sejam f uma função contínua num intervalo $[a, b]$ e $m, M \in \mathbb{R}$ tais que $f([a, b]) = [m, M]$. Mostre que

$$M - m = \sup \big\{ |f(x) - f(y)|; x, y \in [a, b] \big\} .$$

3.12. Mostre que se uma função f for contínua num intervalo $[a, b]$, então

$$\sup\{f(x); a \leqslant x \leqslant b\} = \sup\{f(x); a < x < b\} .$$

Mostre que um resultado análogo vale para o ínfimo da função. Mostre que esses resultados são falsos a) para funções descontínuas e b) se trocarmos os dois supremos ou ínfimos por máximos ou mínimos.

3.13. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $\sigma \in X$ um ponto do domínio de f. Mostre que são equivalentes as afirmações:

1. f é contínua em σ;
2. se (x_n) é uma sequência de X tal que $x_n \longrightarrow \sigma$, então a sequência $\big(f(x_n)\big)$ é convergente;
3. se (x_n) é uma sequência de X tal que $x_n \longrightarrow \sigma$, então a sequência $\big(f(x_n)\big)$ tem alguma subsequência que converge a $f(\sigma)$.

3.14. São equivalentes as afirmações seguintes, na quais usamos a frase

$$\text{se } x_n \longrightarrow \sigma, \text{ então } f(x_n) \longrightarrow f(\sigma). \tag{3.1}$$

1. Dada qualquer sequência (x_n) monótona de I, vale (3.1).
2. Dada qualquer sequência (x_n) monótona de $I - \{\sigma\}$, vale (3.1).
3. Dada qualquer sequência (x_n) de I, vale (3.1).
4. Dada qualquer sequência (x_n) de $I - \{\sigma\}$, vale (3.1).

3.15. Mostre que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua se, e só se, é convergente a sequência $\big(f(x_n)\big)$ definida pela imagem de qualquer sequência convergente (x_n) de X com limite em X.

3.16. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $\sigma \in X$ um ponto do domínio de f. Mostre que f é contínua em σ se, e só se, dada qualquer sequência (x_n) crescente ou decrescente de $X - \{\sigma\}$, se $x_n \longrightarrow \sigma$, então $f(x_n) \longrightarrow f(\sigma)$.

3.17. Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ uma função contínua. Mostre que f possui algum *ponto fixo*, ou seja, algum ponto $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$. (*Sugestão*: considere $g(x) = x - f(x)$.) Mostre que existe algum $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = 1 - c$. (*Sugestão*: considere $g(x) = 1 - x - f(x)$.)

3.18. Considere as funções contínuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tais que $f(0) = f(1)$.

1. Dê um exemplo de uma tal função que satisfaça $f(x) \neq f(x + \frac{1}{2})$, para cada $x \in (0, \frac{1}{2})$.
2. Supondo que $f(\frac{1}{2}) \neq f(0)$, mostre que existe algum ponto $c \in (0, \frac{1}{2})$ tal que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$. (*Sugestão*: considere a função definida por $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{2})$.)
3. Generalize os dois itens precedentes de $\frac{1}{2}$ para $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, etc.

3.19. Supondo que a temperatura seja uma função contínua, estabeleça que, a cada instante, existem dois pontos diametralmente opostos (ou seja, *antípodas*) do Equador terrestre nos quais se registra a mesmíssima temperatura.

3.20. Mostre que toda função crescente (ou decrescente) num intervalo é injetora e sua função inversa também é crescente (ou decrescente). Mostre que toda função contínua e injetora num intervalo é crescente ou decrescente. (*Sugestão*: use o TVI.)

3.21. Por meio de exemplos, mostre que a imagem direta por uma função contínua de um intervalo fechado pode não ser fechado e de um intervalo limitado pode não ser limitado. Forneça um exemplo de função contínua tal que a imagem direta de algum intervalo ilimitado não-fechado seja fechado e limitado.

3.22. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Dizemos que f é *uniformemente* contínua se, dadas quaisquer sequências (x_n) e (y_n) de X tais que $|x_n - y_n| \longrightarrow 0$, então também $|f(x_n) - f(y_n)| \longrightarrow 0$. Dizemos que f é *lipschitziana* se existir alguma constante $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|$, para quaisquer $x_1, x_2 \in X$.

Mostre que toda função lipschitziana é uniformemente contínua e que toda função uniformemente contínua é, em particular, contínua.

Capítulo 4

Derivada

As funções deriváveis têm as secantes por um ponto de seu gráfico variando continuamente.

4.1 Derivada num Ponto

Neste capítulo, X e Y denotam intervalos ou uniões finitas de intervalos de $\mathbb{R}$. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real qualquer e $\sigma \in X$ um ponto qualquer do domínio de f. Dizemos que f é *derivável em* σ se existir uma função $\varphi_\sigma : X \to \mathbb{R}$ que é contínua em σ e tal que, para cada $x \in X$, valha

$$f(x) - f(\sigma) = \varphi_\sigma(x)(x - \sigma). \tag{4.1}$$

Nesse caso, dizemos que $\varphi_\sigma(\sigma)$ é a *derivada de* f *em* σ, que denotamos por $f'(\sigma)$.

Exemplo 4.1. Se f é uma função constante, então $\varphi_\sigma(x) = 0$, para quaisquer $x, \sigma \in \mathbb{R}$ e, consequentemente, $f'(\sigma) = 0$, para cada σ. Se $g(x) = x$, então $\varphi_\sigma(x) = 1$, para quaisquer $x, \sigma \in \mathbb{R}$ e, consequentemente, $g'(\sigma) = 1$, para cada σ. Se $h(x) = b + ax$, então $\varphi_\sigma(x) = a$ para quaisquer $x, \sigma \in \mathbb{R}$ e, consequentemente, $h'(\sigma) = a$, para cada σ. Assim, a derivada da função linear afim $h(x) = b + ax$, em cada ponto, é a constante a, que é a *inclinação*, ou o *coeficiente angular*, da reta $y = b + ax$ que constitui o gráfico de h. ⊚

Em geral, se valer (4.1) para cada $x \in X$, então

$$\varphi_\sigma(x) = \frac{f(x) - f(\sigma)}{x - \sigma} \tag{4.2}$$

vale para cada $x \neq \sigma$, de modo que, se f for derivável, existe apenas uma função φ_σ que satisfaça (4.1). Logo, por ser φ_σ contínua em σ, só existe uma única opção para o valor de φ_σ em σ e, portanto, a derivada de f em σ tem esse valor de φ_σ como única opção.

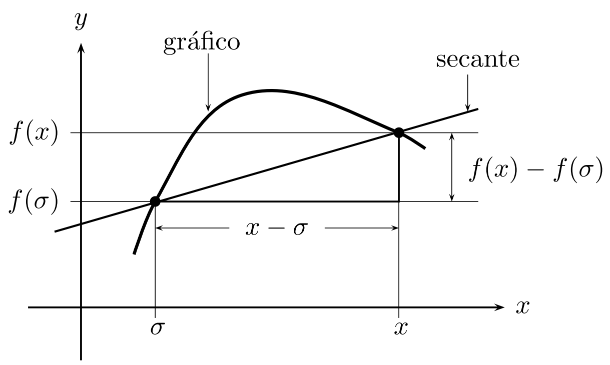

Figura 4.1 A secante pelos pontos $(\sigma, f(\sigma))$ e $(x, f(x))$ do gráfico

Observe que (4.2) significa que cada $\varphi_\sigma(x)$ é a inclinação da reta secante que passa pelos pontos $(\sigma, f(\sigma))$ e $(x, f(x))$ do gráfico de f. Quando f for derivável em σ, a continuidade de φ_σ em σ garante que essas inclinações $\varphi_\sigma(x)$ das retas secantes variam *continuamente* até a inclinação $\varphi_\sigma(\sigma)$ de uma reta *tangente* ao gráfico de f no ponto $(\sigma, f(\sigma))$. Essa inclinação é a derivada $f'(\sigma)$ de f em σ.

Assim, em particular, se uma função f é derivável em σ, dizemos que a reta de equação

$$y = f(\sigma) + f'(\sigma)(x - \sigma)$$

é *tangente* ao gráfico de f no ponto $(\sigma, f(\sigma))$. Nesse caso, a função f e a função linear afim h dada por

$$h(x) = f(\sigma) + f'(\sigma)(x - \sigma)$$

têm o mesmo valor — $f(\sigma)$ — e a mesma derivada — $f'(\sigma)$ — em σ.

Exemplo 4.2. Consideremos um objeto em movimento retilíneo. Denotando por t o tempo e por s sua posição ao longo do eixo, obtemos uma função $s(t)$ do tempo t. (Ver Exemplos 2.3 e 3.6.)

Se o movimento for uniforme, o objeto percorre distâncias iguais em tempos iguais e o gráfico de $s = s(t)$ é uma reta. Se num intervalo de tempo Δt o deslocamento for Δs, dizemos que o quociente $\Delta s/\Delta t$ é a *velocidade* constante do objeto:

$$\text{velocidade constante} \times \text{tempo decorrido} = \text{deslocamento}.$$

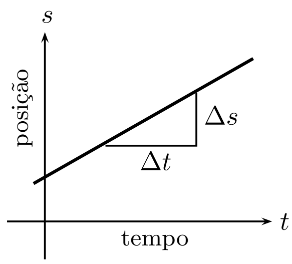

Figura 4.2 Movimento uniforme

Assim, a velocidade de um objeto em movimento uniforme é a derivada $v = s'(t)$ da função posição $s = s(t)$, ou seja, é a inclinação da reta determinada pelo movimento. ⊚

Todas as derivadas e as respectivas funções φ_σ nos Exemplos 4.1 e 4.2 foram constantes. É importante observar que, em geral, a função φ_σ da (4.1) depende do particular ponto σ sob consideração.

Exemplo 4.3. Se $f(x) = x^2$, então

$$x^2 - \sigma^2 = (x+\sigma)(x-\sigma) = \varphi_\sigma(x)(x-\sigma),$$

para quaisquer $x, \sigma \in \mathbb{R}$. Assim, f é derivável em cada ponto σ de $\mathbb{R}$, com derivada $f'(\sigma) = \varphi_\sigma(\sigma) = \sigma + \sigma = 2\sigma$, pois $\varphi_\sigma(x) = x + \sigma$ é contínua em σ. Observe que essas funções φ_σ dependem de σ.

Fixando, por exemplo, $\sigma = 1$, temos $\varphi_1(x) = x + 1$ e podemos ver geometricamente a variação contínua da inclinação $x + 1$ da reta secante da parábola $y = x^2$ pelos pontos (x, x^2) e $(1, 1)$, passando pela inclinação 2 da reta tangente $y = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1$ à parábola em $(1, 1)$.

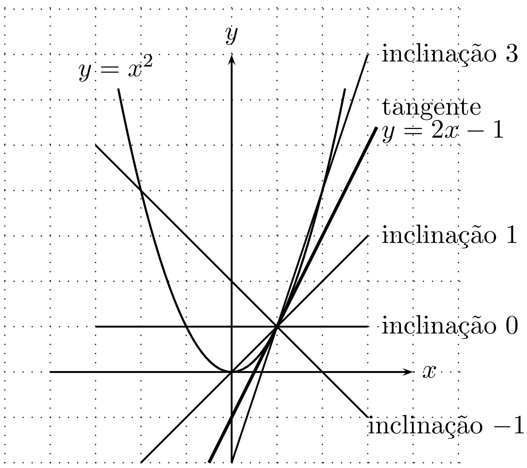

Figura 4.3 A variação contínua das secantes por $(1, 1)$

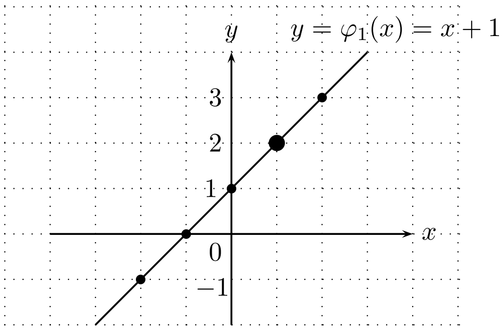

Figura 4.4 As inclinações das secantes

Para obter a derivada de potências maiores de x, podemos proceder analogamente (ver Exercício 4.6) ou, então (ver Exemplo 4.9), utilizar indução na potência inteira e a regra operacional da derivada do produto, apresentada na Proposição 4.7. Ver, também, os Exemplos 4.10, 4.13 e 4.15, para potências mais gerais. ⊚

Da relação $f(x)-f(\sigma) = \varphi_\sigma(x)(x-\sigma)$ e da continuidade de φ_σ em σ decorre que também f é contínua em σ. Destacamos esse resultado.

Proposição 4.4. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em $\sigma \in X$, então f é contínua em σ.* □

A afirmação recíproca dessa proposição não é válida.

Exemplo 4.5. A função valor absoluto $f(x) = |x|$ é contínua em $\mathbb{R}$ mas não é derivável em $\sigma = 0$. De fato, $f(x) = x$ com $x > 0$, o que força $\varphi_0(x) = 1$ em (4.2) e $f(x) = -x$ com $x < 0$, o que força $\varphi_0(x) = -1$. No entanto, sabemos que não existe função alguma que seja contínua em 0, constante e igual a -1 em $(-\infty, 0)$ e constante e igual a 1 em $(0, \infty)$. (Ver Exemplo 3.2.) ⊚

No exemplo precedente, a função valor absoluto é derivável em todos os pontos de $\mathbb{R} - \{0\}$. No entanto, uma função pode perfeitamente ser derivável somente em um único ponto, da mesma forma como pode ser contínua somente em um único ponto.

Exemplo 4.6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 2x - 1, & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Essa função só é contínua em 1, onde também é derivável. De fato, usando as contas do Exemplo 4.3, obtemos $\varphi_1(x) = x + 1$ para cada $x \in \mathbb{R}$, de modo que f é derivável em 1, com $f'(1) = \varphi_1(1) = 2$. Observe que essa derivada é a derivada comum das duas partes de f, cujo gráfico *pula* entre a parábola $y = x^2$ e sua reta tangente em $(1, 1)$, dada por $y = 2x - 1$. (Ver Exemplo 3.3.) ⊚

Vejamos as propriedades algébricas da derivada. A soma ou a diferença de duas funções deriváveis num ponto são deriváveis e as derivadas são dadas pela soma ou diferença das derivadas dessas funções nesse ponto. Também é derivável qualquer múltiplo de uma função derivável, ou seja, combinações lineares de funções deriváveis são deriváveis. No Exemplo 4.1 isso já pode ser observado, pois a derivada da combinação linear $h(x) = b + ax$ é a combinação linear das derivadas das funções $f(x) = b$ e $g(x) = x$.

Já no Exemplo 4.3, a derivabilidade e a derivada $f'(x) = 2x$ de $f(x) = x^2$ poderiam ter sido obtidas pela regra operacional seguinte, como a derivada do produto da função $g(x) = x$ por si mesmo, só que o produto da derivada $g'(x) = 1$ de g por si mesmo não resulta ser a derivada do produto da função g por si mesmo. Em geral, o produto de duas funções deriváveis num ponto é derivável nesse ponto, mas a derivada do produto *não* é dada pelo produto das derivadas.

Proposição 4.7 (Regras Operacionais da Derivação)**.** *Se as duas funções $f, g : X \to \mathbb{R}$ são deriváveis em algum ponto $\sigma \in X$, então qualquer combinação linear dessas funções e o produto dessas funções também são deriváveis nesse ponto e valem as relações seguintes.*

(i) $(f + \lambda \cdot g)'(\sigma) = f'(\sigma) + \lambda \cdot g'(\sigma)$, *com qualquer* $\lambda \in \mathbb{R}$ *fixado e*

(ii) $(f \cdot g)'(\sigma) = f'(\sigma) \cdot g(\sigma) + f(\sigma) \cdot g'(\sigma)$.

Demonstração. Sejam φ_σ e ψ_σ duas funções contínuas em σ tais que

$$f(x) = f(\sigma) + \varphi_\sigma(x)(x - \sigma)$$

$$g(x) = g(\sigma) + \psi_\sigma(x)(x - \sigma)$$

para cada x do intervalo de definição de f e g. Fixado $\lambda \in \mathbb{R}$ qualquer, somamos as expressões para $f(x)$ e $g(x)$ e obtemos

$$f(x) + \lambda \cdot g(x) = f(\sigma) + \lambda \cdot g(\sigma) + \big(\varphi_\sigma(x) + \lambda \cdot \psi_\sigma(x)\big)(x - \sigma)$$

para cada x do intervalo de definição de f e g. Logo,

$$(f + \lambda \cdot g)(x) = (f + \lambda \cdot g)(\sigma) + \eta_\sigma(x)(x - \sigma),$$

onde

$$\eta_\sigma(x) = \varphi_\sigma(x) + \lambda \cdot \psi_\sigma(x)$$

é contínua em σ. Assim, $f + \lambda \cdot g$ é derivável em σ, com

$$(f + \lambda \cdot g)'(\sigma) = \eta_\sigma(\sigma) = f'(\sigma) + \lambda \cdot g'(\sigma).$$

Para provar a derivabilidade do produto, multiplicamos as expressões para $f(x)$ e $g(x)$ explicitadas no início da demonstração e obtemos

$$f(x) \cdot g(x) = f(\sigma) \cdot g(\sigma) + \eta_\sigma(x)(x - \sigma),$$

para cada x do intervalo de definição de f e g. Logo,

$$(f \cdot g)(x) = (f \cdot g)(\sigma) + \eta_\sigma(x)(x - \sigma),$$

com

$$\eta_\sigma(x) = \varphi_\sigma(x) \cdot g(x) + f(\sigma) \cdot \psi_\sigma(x) + \varphi_\sigma(x) \cdot \psi_\sigma(x) \cdot (x - \sigma),$$

para cada x do intervalo de definição de f e g. Por ser derivável, g é contínua em σ, de modo que η_σ define uma função contínua em σ e, portanto, $f \cdot g$ é derivável em σ, com derivada dada por $\eta_\sigma(\sigma)$. Resta lembrar que $\varphi_\sigma(\sigma) = f'(\sigma)$ e $\psi_\sigma(\sigma) = g'(\sigma)$ para obter a relação do enunciado. □

Exemplo 4.8. Suponha que um objeto em movimento retilíneo uniformemente acelerado, digamos, lançado verticalmente para cima a partir do chão com uma velocidade inicial $v_0 > 0$, esteja a uma altura $s(t)$ do eixo s no instante de tempo t. (Ver Exemplos 2.3, 3.6 e 4.2.)

Há mais de quatrocentos anos, Galileu descobriu que a altura s em que se encontra esse objeto é obtida subtraindo do deslocamento vertical (produzido pelo lançamento vertical para cima) o deslocamento provocado pela queda livre (de sinal oposto) que, hoje em dia, escrevemos como $s(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$.

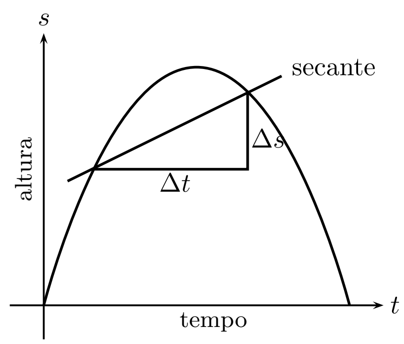

Figura 4.5 Movimento retilíneo uniformemente acelerado

A *velocidade média* desse objeto ao longo de um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ é definida pela razão entre a variação da altura $\Delta s =$

$s(t_2)-s(t_1)$ e o tempo decorrido $\Delta t = t_2-t_1 \neq 0$. Assim, a velocidade média desse objeto em queda livre é dada por

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{\big(v_0t_2-\frac{1}{2}gt_2^2\big)-\big(v_0t_1-\frac{1}{2}gt_1^2\big)}{t_2-t_1} \\ &= \frac{v_0\big(t_2-t_1\big)-\frac{1}{2}g\left(t_2^2-t_1^2\right)}{t_2-t_1} = v_0-\tfrac{1}{2}g\big(t_2+t_1\big). \end{aligned}$$

Fixando t_1 e variando t_2, vemos que as velocidades médias variam continuamente e que, no próprio instante t_1 temos uma "velocidade média" igual a $v_0-\frac{1}{2}g(t_1+t_1) = v_0-gt_1$. Como isso não pode ser uma velocidade média, essa abstração física recebe o nome de *velocidade instantânea*.

Desse modo, a velocidade instantânea $v(t) = v_0-gt$ do objeto em queda livre não é nada mais do que a derivada $s'(t)$ da função altura $s(t) = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$ (ver proposição precedente). Da mesma forma, a velocidade instantânea de um objeto em movimento uniforme, que percorre linearmente a distância $s(t) = b + \lambda t$, é dada pela derivada $v(t) = s'(t) = \lambda$ da função posição, ou seja, sua velocidade constante.

Isso é generalizado para qualquer movimento retilíneo, uniforme, uniformemente acelerado ou não. Se $s(t)$ denota a posição ocupada por um objeto em movimento retilíneo, então a derivada $v(t) = s'(t)$ é denominada velocidade do objeto. ⊚

Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em $Y \subseteq X$ se f for derivável em cada ponto de Y Nesse caso, obtemos uma nova função, a *função derivada* $f' : Y \to \mathbb{R}$ de f em Y, definida, em cada $x \in Y$, pela derivada $f'(x)$ de f em x.

Dizemos, simplesmente, que uma função é *derivável* se for derivável em cada ponto de seu domínio. Do ponto de vista da função derivada, a função f é uma *primitiva*, ou *antiderivada* de f'.

Exemplo 4.9. As funções lineares afins $f(x) = b + ax$ e a função quadrática $f(x) = x^2$ são deriváveis (em $\mathbb{R}$). Mais que isso, com as regras operacionais das derivadas, podemos ver que qualquer função polinomial é derivável (em $\mathbb{R}$). De fato, já vimos no Exemplo 4.1 que se $f(x) = x$, então $f'(x) = 1$, portanto, pela regra do produto, decorre que se $f(x) = x^2 = x \cdot x$, então $f'(x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Por indução, decorre que se $f(x) = x^{n-1}$ é derivável com derivada $f'(x) = (n-1)x^{n-2}$, então $f(x) = x^n = x^{n-1} \cdot x$ é derivável com derivada $f'(x) = (n-1)x^{n-2} \cdot x + x^{n-1} \cdot 1 = nx^{n-1}$, para cada $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. ⊚

Vejamos a derivada de funções racionais.

Exemplo 4.10. Seja $f(x) = x^{-1} = 1/x$, para $x \neq 0$. Então

$$f(x) - f(\sigma) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sigma} = \frac{\sigma - x}{x\sigma} = \varphi_\sigma(x)(x - \sigma),$$

para quaisquer $x, \sigma \neq 0$, onde $\varphi_\sigma(x) = -1/(x\sigma)$ é contínua em σ. Logo, f é derivável em σ e $f'(\sigma) = \varphi_\sigma(\sigma) = -1/\sigma^2$. Assim, f é derivável, com

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2},$$

para cada $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Em particular, a fórmula da derivada $f'(x) = nx^{n-1}$ da função $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$ fixado, do Exemplo 4.9, também é válida com $n = -1$. ⊚

Podemos imitar o raciocínio do exemplo precedente para calcular a derivada da recíproca $1/g$ de qualquer função e, assim, chegar na derivabilidade de qualquer função racional. (Ver Exercício 4.7.) Em vez disso, utilizamos o Exemplo 4.10 e a regra da cadeia que é, talvez, o resultado mais importante sobre derivadas.

Teorema 4.11 (Regra da Cadeia – RC)**.** *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função derivável no ponto $\sigma \in X$, $g : Y \to \mathbb{R}$ uma função derivável no ponto $\xi \in Y$ e suponha que $f(X) \subseteq Y$, com $f(\sigma) = \xi$. Então a função composta $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em σ e*

$$(g \circ f)'(\sigma) = g'(\xi) \cdot f'(\sigma) = g'\big(f(\sigma)\big) \cdot f'(\sigma).$$

Demonstração. Sejam φ_σ uma função contínua em σ e ψ_σ uma função contínua em ξ tais que

$$f(x) - f(\sigma) = \varphi_\sigma(x)(x - \sigma), \qquad \text{para cada } x \in I \quad \text{e}$$
$$g(x) - g(\xi) = \psi_\xi(x)(x - \xi), \qquad \text{para cada } x \in J.$$

Então

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)-(g\circ f)(\sigma)&=g(f(x))-g(f(\sigma))\\&=\psi_\xi(f(x))(f(x)-f(\sigma))\\&=\psi_\xi(f(x))\cdot\varphi_\sigma(x)(x-\sigma)=\eta_\sigma(x)(x-\sigma),\end{aligned}$$

com

$$\eta_\sigma(x)=\psi_\xi(f(x))\cdot\varphi_\sigma(x),$$

para cada $x\in X$. Por ser derivável, f é contínua em σ, de modo que a composta $\psi_\xi\circ f$ é contínua em σ e, portanto, o produto η_σ é uma função contínua em σ. Assim, a composta $g\circ f$ é derivável em σ, com derivada dada pelo produto $\eta_\sigma(\sigma)=\psi_\xi(\xi)\cdot\varphi_\sigma(\sigma)=g'(\xi)\cdot f'(\sigma)$. $\square$

Corolário 4.12. *Considere duas funções $f,g: X\to\mathbb{R}$ deriváveis em algum ponto $\sigma\in X$ e suponha que $g(\sigma)\neq 0$. Então existe $r>0$ tal que o quociente f/g está definido na interseção $(\sigma-r,\sigma-r)\cap X$ e é derivável em σ, com*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\sigma)=\frac{1}{[g(\sigma)]^2}\big(f'(\sigma)\cdot g(\sigma)-f(\sigma)\cdot g'(\sigma)\big)\,.$$

Demonstração. Seja g uma função derivável em σ, com $g(\sigma)\neq 0$. Por continuidade de g em σ (Proposição 4.4), a permanência de sinal (Lema 3.4) garante a existência de $r>0$ tal que $g(x)\neq 0$, para cada $x\in(\sigma-r,\sigma+r)\cap X$. Seja $h(x)=1/x$, para cada $x\neq 0$. Pela RC e o Exemplo 4.10, a composta $h\circ g:(\sigma-r,\sigma+r)\cap X\to\mathbb{R}$, dada por $h(g(x))=1/g(x)$, é derivável em σ, com derivada

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(\sigma)=(h\circ g)'(\sigma)=h'(g(\sigma))\cdot g'(\sigma)=-\frac{1}{[g(\sigma)]^2}\cdot g'(\sigma)\,.$$

Sejam f e g duas funções deriváveis em σ, com $g(\sigma)\neq 0$. A relação entre as derivadas de f e g e do quociente de f por g, a saber,

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(\sigma)=\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(\sigma)&=f'(\sigma)\cdot\frac{1}{g(\sigma)}+f(\sigma)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(\sigma)\\&=\frac{1}{[g(\sigma)]^2}\big(f'(\sigma)\cdot g(\sigma)-f(\sigma)\cdot g'(\sigma)\big)\,,\end{aligned}$$

decorre, agora, da regra da derivada do produto. $\square$

Exemplo 4.13. Como o quociente de funções deriváveis é derivável e toda função polinomial é derivável (ver Exemplo 4.9), decorre que qualquer função racional é derivável. Em particular, a derivada

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

da função $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$ fixado, do Exemplo 4.9, também é válida com potências n inteiras negativas, desde que lembremos que, nesse caso, o domínio da função deixa de contar com a origem. $\circledcirc$

Para obter a derivada de potências fracionárias $f(x) = x^{1/n}$, é conveniente interpretá-las como funções inversas de potências inteiras $g(x) = x^n$.

Proposição 4.14 (Derivada da Inversa). *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e injetora no intervalo I. Se f é derivável em algum ponto σ de I e se $f'(\sigma) \neq 0$, então a função inversa f^{-1} de f é derivável em $\xi = f(\sigma)$ e vale*

$$(f^{-1})'(\xi) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\xi))} = \frac{1}{f'(\sigma)}\,.$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.13, a função inversa $g = f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ de f é contínua e injetora no intervalo $J = f(I)$, com $g(J) = I$. Seja $\varphi_\sigma : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua em σ tal que $f(x) - f(\sigma) = \varphi_\sigma(x)(x - \sigma)$, para cada $x \in I$. Substituindo, nessa expressão, $f(x)$, $f(\sigma)$, x e σ por y, ξ, $g(y)$ e $g(\xi)$, respectivamente, obtemos

$$y - \xi = \varphi_\sigma(g(y))(g(y)) - g(\xi),$$

para cada $y \in J$. Por hipótese, $(\varphi_\sigma \circ g)(\xi) = \varphi_\sigma(\sigma) = f'(\sigma) \neq 0$. Como g é contínua em J e φ_σ é contínua em σ, decorre que $\varphi_\sigma \circ g : J \to \mathbb{R}$ é contínua em ξ, com $(\varphi_\sigma \circ g)(\xi) \neq 0$. Pela permanência de sinal (Lema 3.4), existe $r > 0$ tal que $(\varphi_\sigma \circ g)(y) \neq 0$, para cada $y \in (\xi - r, \xi + r) \cap J$. Segue que a recíproca $\eta_\xi = 1/(\varphi_\sigma \circ g) : (\xi - r, \xi + r) \cap J \to \mathbb{R}$ de $\varphi_\sigma \circ g$ é contínua em ξ (Exemplo 3.5) e satisfaz

$$\eta_\xi(y)(y - \xi) = g(y) - g(\xi),$$

para cada $y \in (\xi - r, \xi + r) \cap J$. Isso mostra que a inversa g de f é derivável em ξ, com derivada $\eta_\xi(\xi) = 1/f'(\sigma)$. (Ver, também, o Exercício 4.12.) $\square$

Exemplo 4.15. Como $g(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ é a função inversa em $(0, +\infty)$ da função derivável $f(x) = x^n$, com $f'(x) = nx^{n-1} > 0$ para $x > 0$, resulta que g é derivável em $(0, +\infty)$, com

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{n\big(x^{\frac{1}{n}}\big)^{n-1}} = \tfrac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1},$$

para $x > 0$. Como $h(x) = x^{\frac{m}{n}} = \big(x^{\frac{1}{n}}\big)^m$ é a composta de $f(x) = x^m$ com $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ em $(0, +\infty)$, a RC garante que $h = f \circ g$ é derivável em $(0, +\infty)$, com

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = m\big(x^{\frac{1}{n}}\big)^{m-1} \cdot \tfrac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1} = \tfrac{m}{n}\, x^{\frac{m}{n}-1},$$

para $x > 0$. Assim, provamos que a função potência $f(x) = x^r$, com expoente $r \in \mathbb{Q}$ fixado, é derivável, com derivada dada por $f'(x) = rx^{r-1}$, para qualquer $x > 0$. ⊚

4.2 Derivada num Intervalo

A derivabilidade de uma função num ponto, como a continuidade, é uma propriedade eminentemente local, decidindo o comportamento da função nesse ponto (por exemplo, sua continuidade nesse ponto), mas não pode controlar o comportamento da função em todo seu domínio. Para alcançar isso, precisamos que a função seja derivável em todo um intervalo.

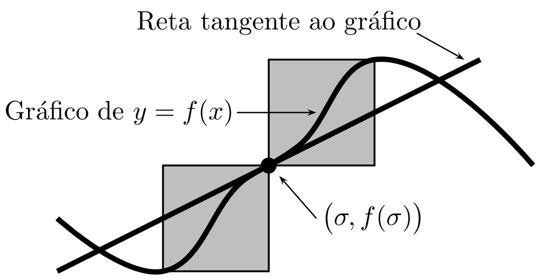

Figura 4.6 Uma derivada $f'(\sigma) > 0$
não controla o gráfico longe do ponto σ

Lema 4.16. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $\sigma \in X$. Se $f'(\sigma) \neq 0$, então existe $r > 0$ tal que $f(x) \neq f(\sigma)$, para qualquer $x \in X$ tal que $0 < |x - \sigma| < r$. Mais precisamente,*

(i) *se $f'(\sigma) > 0$, então existe $r > 0$ tal que $f(x_1) < f(\sigma) < f(x_2)$, para quaisquer $x_1, x_2 \in X$ tais que*

$$\sigma - r < x_1 < \sigma < x_2 < \sigma + < r\,;$$

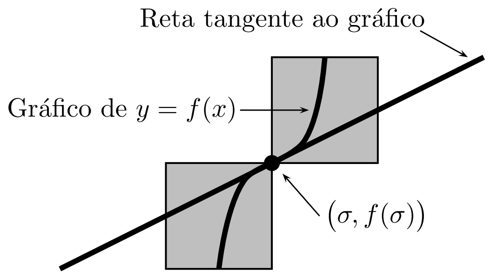

Figura 4.7 A derivada $f'(\sigma) > 0$ força o gráfico a permanecer, pelo menos localmente, nos quadrantes destacados

(ii) *se $f'(\sigma) < 0$, então existe $r > 0$ tal que $f(x_1) > f(\sigma) > f(x_2)$, para quaisquer $x_1, x_2 \in X$ tais que*

$$\sigma - r < x_1 < \sigma < x_2 < \sigma + < r.$$

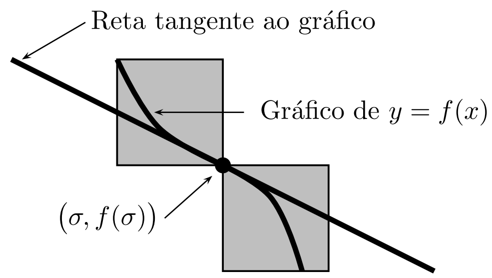

Figura 4.8 A derivada $f'(\sigma) < 0$ força o gráfico a permanecer, pelo menos localmente, nos quadrantes destacados

Demonstração. Seja $\varphi_\sigma : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua em σ tal que

$$f(x) - f(\sigma) = \varphi_\sigma(x)(x - \sigma),$$

para cada $x \in X$.

Vejamos o caso em que $\varphi_\sigma(\sigma) = f'(\sigma) > 0$. Por continuidade de φ_σ em σ, a permanência do sinal (Lema 3.4) garante a existência de $r > 0$ tal que $\varphi_\sigma(x) > 0$, para cada $x \in X$ satisfazendo $\sigma - r < x < \sigma + r$. Dados quaisquer $x_1, x_2 \in X$ tais que $\sigma - r < x_1 < \sigma < x_2 < \sigma + r$, temos $x_1 - \sigma < 0 < x_2 - \sigma$, de modo que, para manter o sinal positivo de $\varphi_\sigma(x)$ em (4.2), devemos ter $f(x_1) - f(\sigma) < 0 < f(x_2) - f(\sigma)$. Isso demonstra o caso $f'(\sigma) > 0$; o outro caso é inteiramente análogo. $\square$

É importante ressaltar que o resultado precedente não afirma coisa alguma sobre o crescimento ou decrescimento da função. É possível dar exemplos de funções que tem derivada positiva num certo ponto σ de seu domínio mas que *não são crescentes* em intervalo algum que contenha σ. Tudo que o lema afirma é que, *localmente*, o gráfico da função passa de um lado da reta horizontal $y = f(\sigma)$ para o outro lado dessa reta em $(\sigma, f(\sigma))$.

Assim, a derivada é um conceito fundamentalmente local e informação sobre a derivada de uma função num ponto somente esclarece alguma coisa sobre o comportamento dessa função numa vizinhança do ponto. Bem diferente disso é a integral de uma função que, como veremos no próximo capítulo, é um conceito global, definido somente em intervalos, nos quais fornece uma espécie de *média* da função toda num intervalo.

Seja $\sigma \in X$ um ponto qualquer do domínio de uma função real $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que σ é um *ponto crítico* de f se f não for derivável em σ ou se f for derivável em σ, mas $f'(\sigma) = 0$. Frizamos que todo ponto crítico de uma função pertence ao domínio da função.

Exemplo 4.17. As funções valor absoluto, definida por $f_1(x) = |x|$, e a cúbica, definida por $f_2(x) = x^3$ têm um único ponto crítico, a origem. De fato, f_1 não é derivável em 0 (Exemplo 4.5) e a cúbica é derivável, com derivada $f_2'(x) = 3x^2$, que só se anula em $x = 0$. A função racional $f_3(x) = 1/x$ não tem ponto crítico, pois é derivável, com derivada $f_3'(x) = -x^{-2} \neq 0$, em cada x do domínio. ⊚

Dizemos que σ é um *ponto de máximo local* de f se existir algum $r > 0$ tal que $f(x) \leqslant f(\sigma)$, para cada $x \in X \cap (\sigma - r, \sigma + r)$. Nesse caso, dizemos que f atinge um máximo local em σ e que $f(\sigma)$ é um *valor máximo local* de f. Analogamente, dizemos que σ é um *ponto de mínimo local* de f, que f atinge um mínimo local em σ e que $f(\sigma)$ é um *valor mínimo local* de f, se existir algum $r > 0$ tal que $f(x) \geqslant f(\sigma)$, para cada $x \in X \cap (\sigma - r, \sigma + r)$. Finalmente, dizemos que σ é um *ponto de extremo local* de f, que f atinge um extremo local em σ e que $f(\sigma)$ é um *valor extremo local* de f, se σ for um ponto de máximo ou mínimo local de f.

Por outro lado, se $f(x) \leqslant f(\sigma)$, para cada $x \in X$, dizemos que σ é um *ponto de máximo global* de f, que f atinge um máximo global em σ e que $f(\sigma)$ é um *valor máximo global* de f. Analogamente, definimos ponto de mínimo global, valor mínimo global, ponto de extremo global e valor extremo global.

Lembre que, neste capítulo, X denota um intervalo ou uma união finita de intervalos de $\mathbb{R}$. Para simplificar a escrita, dizemos que $\sigma \in X$ é um *ponto interior de* X se σ não for alguma extremidade de algum dos intervalos que compõe X.

Teorema 4.18 (Teorema de Fermat)**.** *Se uma função atinge um extremo local num ponto interior, então esse ponto é crítico.*

Demonstração. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função qualquer e $\sigma \in X$ um ponto interior de X tal que f é derivável em σ e $f'(\sigma) \neq 0$. Basta mostrar que f não atinge um valor extremo em σ.

Ora, pelo Lema 4.16, se $f'(\sigma) > 0$, podemos escolher $r > 0$ tal que $f(x_1) < f(\sigma) < f(x_2)$, para quaisquer $x_1, x_2 \in X$ satisfazendo $\sigma - r < x_1 < \sigma < x_2 < \sigma + r$. Como σ é um ponto interior de X, efetivamente existem pontos $x_1 < \sigma < x_2$ de X nos quais $f(x_1) < f(\sigma) < f(x_2)$, de modo que $f(\sigma)$ não é um valor extremo local de f. Analogamente, estabelecemos que $f(\sigma)$ não é um valor extremo local de f no caso em que $f'(\sigma) < 0$. $\square$

Teorema 4.19 (Teorema de Rolle)**.** *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função qualquer e $a, b \in X$ tais que $a < b$, $[a, b] \subseteq X$ e $f(a) = f(b)$. Se f for derivável em (a, b) e contínua em $[a, b]$, então existe algum ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Pelo Teorema 3.16 de Weierstrass, f tem algum ponto de mínimo e algum ponto de máximo globais em $[a, b]$. Se ambos forem extremidades de $[a, b]$, então a hipótese $f(a) = f(b)$ garante que f é constante em $[a, b]$, portanto derivável, com $f'(c) = 0$ em cada $c \in [a, b]$. Caso contrário, f atinge um valor extremo em algum ponto $c \in (a, b)$ que, pelo Teorema de Fermat, é crítico. Se f for derivável em (a, b), resulta $f'(c) = 0$. □

Teorema 4.20 (Teorema do Valor Médio, de Lagrange – TVM). *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função qualquer e $a, b \in X$ tais que $a < b$ e $[a, b] \subseteq X$. Se f for derivável em (a, b) e contínua em $[a, b]$, então existe algum ponto $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

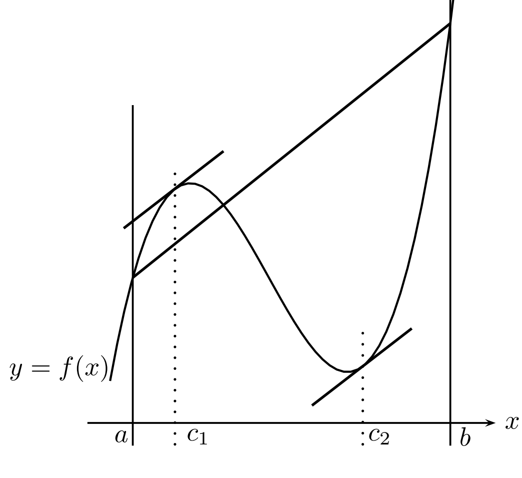

Figura 4.9 O Teorema do Valor Médio

Demonstração. A afirmação do TVM é um Teorema de Rolle “inclinado”, bastando aplicar aquele teorema à função definida pela diferença entre f e uma função linear convenientemente escolhida, digamos, $g(x) = f(x) - \alpha \cdot x$. Dada uma função f contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), essa função $g(x)$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), com $g'(x) = f'(x) - \alpha$, para cada $x \in [a, b]$, restando escolher $\alpha = [f(b) - f(a)]/(b - a)$ e encontrar $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$.

Mas isso é um serviço para o Teorema de Rolle, bastando observar que $g(a) = g(b)$, já que $f(a) - \alpha \cdot a = f(b) - \alpha \cdot b$ se, e só se, $\alpha \cdot (b - a) = f(b) - f(a)$. □

Corolário 4.21. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função qualquer e $a, b \in X$ tais que $a < b$ e $[a, b] \subseteq X$. Se f for contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e*

(i) *se $f'(x) > 0$, com $a < x < b$, então f é crescente em $[a, b]$;*

(ii) *se $f'(x) < 0$, com $a < x < b$, então f é decrescente em $[a, b]$.*

Demonstração. Dados dois pontos $x_1 < x_2$ quaisquer de $[a, b]$, f é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em (x_1, x_2), portanto, pelo TVM, $f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$, para algum ponto $c \in (x_1, x_2)$. Todas as afirmações do corolário podem ser lidas a partir disso. De fato, como $x_1 - x_2 < 0$, o sinal de $f(x_1) - f(x_2)$ pode ser lido a partir do sinal de $f'(c)$. Por exemplo, se $f'(c) > 0$, então $f(x_1) - f(x_2) < 0$, ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$. □

Corolário 4.22. *Seja f uma função derivável num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.*

(i) *f é não decrescente em I se, e só se, $f'(x) \geqslant 0$, para cada $x \in I$.*

(ii) *f é constante em I se, e só se, $f'(x) = 0$, para cada $x \in I$.*

(ii) *f é não crescente em I se, e só se, $f'(x) \leqslant 0$, para cada $x \in I$.*

Demonstração. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável e, fixado $\sigma \in I$, tomemos a (única) função $\varphi_\sigma : I \to \mathbb{R}$ que é contínua em σ e satisfaz

$$\varphi_\sigma(x) = \frac{f(x) - f(\sigma)}{x - \sigma},$$

para cada $x \neq \sigma$ de I (ver (4.2)). Supondo que f seja não decrescente, temos $f(x) \leqslant f(\sigma)$, para $x < \sigma$, de modo que $x - \sigma < 0$ e, também, $f(x) - f(\sigma) \leqslant 0$; analogamente, temos $f(\sigma) \leqslant f(x)$, para $\sigma < x$, de modo que $x - \sigma > 0$ e $f(x) - f(\sigma) \geqslant 0$. Assim, $\varphi_\sigma(x) \geqslant 0$, para cada $x \neq \sigma$ de I e, portanto, $f'(\sigma) = \varphi_\sigma(\sigma) \geqslant 0$, pela permanência de sinal.

Reciprocamente, se $f'(x) \geqslant 0$, para cada $x \in I$, podemos usar o TVM exatamente como na demonstração do corolário precedente para estabelecer que f é não decrescente. A demonstração das terceira afirmação é análoga e a segunda decorre, imediatamente, das outras duas. □

4.3 Primitivas

Dizemos que uma função $g : X \to \mathbb{R}$ é uma *primitiva*, ou uma *antiderivada* de f em X se g for derivável em X e $g'(x) = f(x)$, para cada $x \in X$. Do ponto de vista da função g, a função f é somente a função derivada de g em X.

Exemplo 4.23. Vimos no Exemplo 4.8 que se $s(t)$ denota a posição ocupada por um objeto em movimento retilíneo, então a derivada $v(t) = s'(t)$ é a velocidade (instantânea) do objeto. Assim, a velocidade é uma primitiva da posição. ◎

Dadas duas primitivas g_1 e g_2 de f num *intervalo* I, temos que a diferença $g_1 - g_2$ tem derivada nula em I e, portanto, pelo Corolário 4.22, é constante. Assim, duas primitivas quaisquer de uma função num intervalo sempre diferem apenas por uma constante. A pergunta, agora, é se toda função possui alguma primitiva ou, equivalentemente, se toda equação diferencial $y' = f(x)$ tem alguma solução.

Em qualquer teoria de integral, como, por exemplo, a de Riemann, vemos que toda função contínua possui primitiva. No entanto, existem funções deriváveis em $\mathbb{R}$ cujas funções derivadas não são contínuas em $\mathbb{R}$. Assim, funções derivadas podem não ser contínuas ou, equivalentemente, funções descontínuas também podem possuir primitiva.

No entanto, não é verdade que qualquer função possa ter alguma primitiva pois, como veremos a seguir, as funções derivadas têm uma propriedade comum às funções contínuas, a saber, a propriedade do valor intermediário: a imagem direta $f'(J)$ de qualquer intervalo $J \subseteq X$ pela função derivada $f' : X \to \mathbb{R}$ de uma função derivável f é um intervalo.

Teorema 4.24 (Teorema de Darboux)**.** *Se uma função tiver alguma primitiva num intervalo, então essa função tem a propriedade do valor intermediário nesse intervalo.*

Demonstração. Seja f uma função derivável num intervalo I. Usando a caracterização de intervalo vista na Proposição 1.8 basta mostrar que, dados $x_1, x_2 \in I$ e $d \in \mathbb{R}$ entre $f'(x_1)$ e $f'(x_2)$, sempre existe algum x entre x_1 e x_2 tal que $f'(x) = d$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $x_1 < x_2$ e $f'(x_1) > d > f'(x_2)$ e consideremos a mesma função $g : I \to \mathbb{R}$ da prova do Teorema 4.20 do valor médio, dada por $g(x) = f(x) - d \cdot x$, que é contínua e derivável em $[x_1, x_2]$, com $g'(x_1) = f'(x_1) - d > 0$ e $g'(x_2) = f'(x_2) - d < 0$. Se f' fosse contínua, então g' seria contínua e, portanto, pelo Teorema 3.7 do valor intermediário, aplicado a g', existiria $c \in (x_1, x_2)$ tal que $g'(c) = 0$, ou seja, $f'(c) = d$.

No entanto, não sabemos se f' é, ou não é, contínua. Ocorre que isso nem é necessário, pois o Lema 4.16 garante que $g(x_1) < g(x)$, para $x > x_1$ suficientemente próximo de x_1, já que $g'(x_1) > 0$, e $g'(x_2) < 0$ garante que $g(x) > g(x_2)$, para $x < x_2$ suficientemente próximo de x_2. Desse modo, nenhuma das extremidades pode ser um ponto de mínimo local de g em $[x_1, x_2]$. No entanto, como g é contínua, o Teorema 3.16 garante que existe algum ponto de mínimo local de g nesse intervalo. Assim, obtemos algum ponto de mínimo $x \in (x_1, x_2)$ de g em que, pelo Teorema de Fermat, $g'(x) = 0$, ou seja, $f'(x) = d$. □

Usando os exemplos vistos de derivadas, podemos obter exemplos de primitivas. Assim, fixados quaisquer racional $r \neq -1$ e real α, a função $g(x) = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + \alpha$ define uma primitiva de $f(x) = x^r$ em $\mathbb{R}$ se $r \geqslant 0$, ou em $(0, +\infty)$, se $r < 0$. É tradicional denotar as primitivas de uma função f com o símbolo da *integral indefinida* $\int f(x)dx$. Assim,

$$\int x^r \, dx = \tfrac{1}{r+1} \, x^{r+1} + \alpha$$

denota todas as primitivas de $f(x) = x^r$ no caso $r \neq -1$.

Das regras operacionais das derivadas decorrem, imediatamente, as regras clássicas de primitivação, como segue.

Corolário 4.25 (Regras Operacionais da Primitivação)**.** *Sejam f e g duas funções quaisquer definidas num mesmo intervalo I.*

(i) *Linearidade: se f e g têm primitivas em I, então, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ fixado, $f + \lambda g$ tem primitiva em I, dada por*

$$\int (f + \lambda g)(x)dx = \int f(x)dx + \lambda \int g(x)dx.$$

(ii) *Integração por partes: se f e g são deriváveis em I e se o produto $f' \cdot g$ tem primitiva em I, então o produto $f \cdot g'$ tem primitiva em I, dada por*

$$\int (f \cdot g')(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int (f' \cdot g)(x)dx.$$

Da regra da cadeia (Teorema 4.11) decorre, imediatamente, a regra da substituição de variáveis em primitivas.

Corolário 4.26 (Substituição)**.** *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável no intervalo I, $g : J \to \mathbb{R}$ tem uma primitiva $h(x) = \int g(x)dx$ em J e se $f(I) \subseteq J$, então $(g \circ f) \cdot f'$ tem primitiva em I, dada por*

$$\int [(g \circ f) \cdot f'](x)dx = h(f(x)).$$

Enfatizamos, mais uma vez, que não estamos *integrando* coisa alguma. As afirmações dos corolários acima são, simplesmente, reformulações clássicas das regras operacionais da derivada da soma, do produto e da composta.

Exemplo 4.27. Fixemos $r \in \mathbb{Q}$ com $r > 0$. Para calcular uma primitiva em $\mathbb{R}$ de $\xi(x) = (1 - x)^r$, usamos a substituição $f(x) = 1 - x$, com $f'(x) = -1$, e a primitiva $h(x) = \frac{1}{r+1}\, x^{r+1}$ de $g(x) = x^r$. Pelo Corolário 4.26,

$$\begin{aligned}\int (1-x)^r\, dx &= -\int (1-x)^r\, (-1)dx = -\int (g(f(x)) \cdot f'(x)dx \\ &= h(f(x)) = -\tfrac{1}{r+1}\, (1-x)^{r+1}.\end{aligned}$$ ⊚

Exemplo 4.28. Fixemos $r \in \mathbb{Q}$ com $r > 0$. Para calcular uma primitiva em $\mathbb{R}$ de $\eta(x) = r^2 x\,(1-x)^r$, usamos as partes $f(x) = r^2 x$, com $f'(x) = r^2$, e a primitiva $g(x) = -\frac{1}{r+1}\,(1-x)^{r+1}$ de $g'(x) = (1-x)^r$ do exemplo precedente. Usando integração por partes,

$$\begin{aligned}\int r^2 x\,(1-x)^r\,dx &= \int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)dx \\ &= -\frac{r^2 x(1-x)^{r+1}}{r+1} + \int \frac{r^2\,(1-x)^{r+1}}{r+1}\,dx.\end{aligned}$$

Agora, pela integral calculada no exemplo precedente (com $r+1$ no lugar de r),

$$\int \frac{r^2\,(1-x)^{r+1}}{r+1}\,dx = \frac{r^2}{r+1}\int (1-x)^{r+1}\,dx = -\frac{r^2\,(1-x)^{r+2}}{(r+1)(r+2)}\,,$$

de modo que estabelecemos

$$\int r^2 x\,(1-x)^r\,dx = -\frac{r^2 x(1-x)^{r+1}}{r+1} - \frac{r^2\,(1-x)^{r+2}}{(r+1)(r+2)}\,.$$

Essa conta pode até ser considerada difícil, mas é sempre muito fácil conferir o trabalho feito: basta derivar a (candidata a) primitiva encontrada e verificar se o resultado é igual ao integrando. ⊚

Epílogo

As propriedades básicas de funções deriváveis que acabamos de ver são suficientes para estudar o Teorema Fundamental do Cálculo no próximo capítulo. No entanto, há muito mais o que aprender sobre derivadas.

Um assunto com o mesmo grau de dificuldade do material apresentado é o de derivadas de ordens superiores e o desenvolvimento em séries de Taylor das funções com derivadas de todas as ordens. Isso pode ser encontrado nas referências básicas [1] e [2]. Mais adiante, podemos atacar o importantíssimo desenvolvimento de funções em séries de Fourier. Nosso estudo de funções deriváveis também leva naturalmente ao mundo das equações diferenciais, um assunto sobre o qual o leitor não terá dificuldades de encontrar excelentes textos.

Se o leitor quiser acompanhar de perto o material desenvolvido neste capítulo em outros livros, convém estudar, antes, o conceito de limite de funções em pontos de acumulação de seu domínio e a consequente definição de derivada como limite da razão incremental. Isso não é importante se o leitor for estudar derivação de funções definidas nos espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$. Nestes, a definição via razão incremental começa a ficar inútil, pois a ênfase não é mais na inclinação, mas sim na aproximação linear, ou seja, em dimensões maiores, trocamos a inclinação a pela função afim cujo gráfico é dado por $y = b + ax$.

Da mesma forma que o lugar natural para estudar continuidade é em espaços topológicos, o contexto natural para estudar a derivada é o espaço vetorial normado. Nestes, as definições de derivada, tanto a de Gateaux quanto a de Fréchet, estão muito mais próximas da definição de Carathéodory que utilizamos no texto.

4.4 Exercícios

4.1. Mostre que $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em $\sigma \in X$ se, e só se, a sequência definida por $[f(x_n) - f(\sigma)]/(x_n - \sigma)$ é convergente, qualquer que seja a sequência (x_n) de $X - \{\sigma\}$ tal que $x_n \longrightarrow \sigma$. Obtenha um exemplo de $f : X \to \mathbb{R}$ e de uma sequência (x_n) de X, tal que $x_n \longrightarrow \sigma \in X$, $[f(x_n) - f(\sigma)]/(x_n - \sigma)$ defina uma sequência convergente e f não seja derivável em σ.

4.2. Considere um intervalo $I = (a, b)$ e uma função $f : I \to \mathbb{R}$ e $\sigma \in I$ um ponto qualquer. Mostre que se (x_n) e (y_n) forem sequências de I satisfazendo $x_n < \sigma < y_n$, para $n \gg 0$, e tais que $x_n \longrightarrow \sigma$, $y_n \longrightarrow \sigma$ e se f for derivável em σ, então a sequência definida por

$$z_n = \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \tag{4.3}$$

é convergente, com limite igual a $f'(\sigma)$. Obtenha um exemplo de uma função $f : I \to \mathbb{R}$ que não seja sequer contínua num ponto $\sigma \in I$ e de sequências (x_n) e (y_n) de I satisfazendo $x_n < \sigma < y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e tais que $x_n \longrightarrow \sigma$, $y_n \longrightarrow \sigma$ e exista o limite da sequência (4.3). Obtenha um exemplo de uma função $f : I \to \mathbb{R}$ que seja derivável num ponto $\sigma \in I$ e de sequências (x_n) e (y_n) de I satisfazendo $\sigma < x_n < y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tais que $x_n \longrightarrow \sigma$, $y_n \longrightarrow \sigma$, mas não exista o limite da sequência (4.3).

4.3. Considere uma função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ qualquer que seja derivável em 0. Mostre que, dada qualquer sequência (x_n) de $(-1, 1) - \{0\}$ convergente a 0, a sequência definida por

$$z_n = \frac{f(x_n) - f(-x_n)}{2x_n} \tag{4.4}$$

é convergente, com limite igual a $f'(0)$. Obtenha um exemplo de uma função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ que não é derivável em 0, mas tal que exista o limite da sequência definida por (4.4), para qualquer sequência (x_n) de $(-1, 1) - \{0\}$ convergente a 0.

4.4. Considere uma função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ qualquer que seja derivável em 0. Mostre que, dada qualquer sequência (x_n) de $(-1, 1) - \{0\}$ convergente a 0, a sequência definida por

$$z_n = \frac{f(2x_n) - f(x_n)}{x_n} \tag{4.5}$$

é convergente, com limite igual a $f'(0)$. Obtenha um exemplo de uma função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ que não é derivável em 0, mas tal que exista o limite da sequência definida por (4.5), para qualquer sequência (x_n) de $(-1, 1) - \{0\}$ convergente a 0. (*Sugestão*: somar e subtrair $f(x_n)$ do denominador e obter, no limite, $2f'(x) - f'(x) = f'(x)$.)

4.5. Considere uma função derivável $f : X \to \mathbb{R}$ e sua função derivada $f' : X \to \mathbb{R}$. Mostre que

1. se a função derivada f' for limitada, então f é uma função lipschitziana; em particular, f é uniformemente contínua (ver Exercício 3.22);
2. se a função derivada f' for contínua num ponto $\sigma \in I$, então

   $$f'(\sigma) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n},$$

   para quaisquer sequências $(x_n), (y_n)$ de I satisfazendo $x_n \neq y_n$, para $n \gg 0$, e tais que $x_n \longrightarrow \sigma$ e $y_n \longrightarrow \sigma$. (*Sugestão*: use o TVM.)

4.6. Mostre que, para quaisquer $x, \sigma \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, vale

$$x^n - \sigma^n = \big(x^{n-1} + x^{n-2}\sigma + \cdots + x\sigma^{n-2} + \sigma^{n-1}\big)(x - \sigma).$$

Use essa relação para provar diretamente a partir da definição dada em (4.1) que a função $f(x) = x^n$ é derivável, com $f'(x) = nx^{n-1}$, como no Exemplo 4.9.

4.7. Inspire-se no que foi visto no Exemplo 4.10 para provar diretamente a partir da definição dada em (4.1) a afirmação do Corolário 4.12.

4.8. Mostre que se $f : X \to \mathbb{R}$ for derivável em $\sigma \in X$, existem $M \in \mathbb{R}$ e $r > 0$ tais que $|f(x) - f(\sigma)| \leqslant M|x - \sigma|$, para cada $x \in X$ tal que $|x - \sigma| < r$.

4.9. Sejam $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ derivável e $M \in \mathbb{R}$ não negativo tais que $f'(x) \leqslant M$, para cada $|x| < 1$. Mostre que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, se $-1 < a < b < 1$, então

$$f(b) - f(a) \leqslant M \cdot (b - a).$$

4.10. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função qualquer definida num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e $c > 0$ e $\alpha > 1$ constantes dadas. Mostre que se $|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant c\,|x_1-x_2|^\alpha$, para quaisquer $x_1, x_2 \in I$, então f é uma função constante.

4.11. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas e $a, b \in X$ tais que $a < b$ e $[a, b] \subseteq X$. Mostre que se f e g forem deriváveis em (a, b) e se $g'(x) \neq 0$, para cada $x \in (\ b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

Essa fórmula é atribuída a Cauchy. Observe que o TVM de Lagrange é o caso particular em que $g(x) = x$. (*Sugestão*: use o Teorema de Rolle com a função $h(x) = f(x) - \alpha \cdot g(x)$, para algum α conveniente.)

4.12. Dados uma função $f : X \to \mathbb{R}$ e $Y \subseteq X$, dizemos que a função $g : Y \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x)$, com $x \in Y$, é a função *restrição de* f a Y. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $\sigma \in X$ um ponto do domínio de f. Mostre que f é derivável em σ se, e só se, existe algum $r > 0$ tal que é derivável em σ a função restrição de f a $(\sigma - r, \sigma + r) \cap X$.

4.13. Sejam dados $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}.$$

Encontre o ponto em que f atinge seu valor mínimo absoluto. Conclua que *o mínimo da soma dos quadrados das distâncias de x a cada um de n pontos da reta é minima se, e só se, x é igual à média aritmética desses pontos.*

Capítulo 5

Integral

Um dos problemas mais antigos da Matemática é a medição de comprimentos, áreas e volumes.

5.1 Integral

Neste capítulo, X denota um intervalo ou uma união finita de intervalos de $\mathbb{R}$. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real qualquer. Queremos definir a *integral* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ de f em qualquer intervalo $[a,b] \subseteq X$, com $a < b$. Isso pode ser feito de muitas maneiras, sendo a de Riemann tradicional nas disciplinas de Cálculo, mas todas têm as duas propriedades básicas seguintes, válidas para quaisquer funções *contínuas*.

(I1) A integral é *monótona*: se $m \leqslant f(t) \leqslant M$ para $a \leqslant t \leqslant b$, com $[a,b] \subseteq X$, vale

$$m \cdot (b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant M \cdot (b-a).$$

(I2) A integral é *aditiva*: se $a < c < b$ e $[a,b] \subseteq X$, vale

$$\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Da primeira propriedade I1 decorre que a integral de uma função constante positiva em $[a, b]$ coincide com a *área* do retângulo determinado pela base $[a, b]$ e o gráfico horizontal da função. Esse é o ponto de partida de todas as teorias de integração: se $f(t) = \lambda$, com $a \leqslant t \leqslant b$, então $m = \lambda = M$ em I1 e

$$\int_a^b \lambda \, dt = \lambda \cdot (b - a).$$

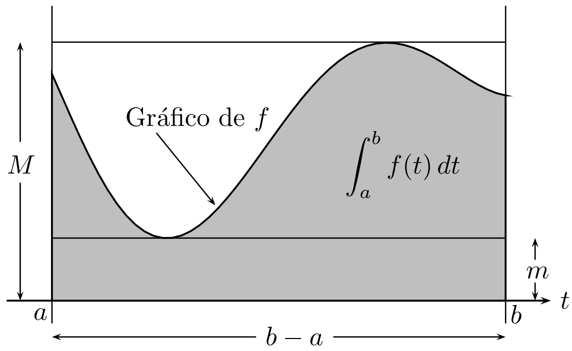

Figura 5.1 A propriedade I1 com $0 \leqslant m \leqslant f(t) \leqslant M$

Exemplo 5.1. Se a velocidade de um objeto for constante no intervalo de tempo $[0, T]$, digamos, $v(t) = v$, então a integral da velocidade em $[0, T]$ é igual a $v \cdot (T - 0) = v \cdot T$, que é o deslocamento total nesse intervalo: um carro a 70 km/h constantes durante meia hora percorre $70 \times \frac{1}{2} = 35$ km. Isso nos indica que, em geral, a integral de uma velocidade (variável) é um deslocamento e, como a taxa de variação da posição é a velocidade (ver Exemplo 2.3), já temos uma primeira insinuação do teorema fundamental do Cálculo. ⊚

Podemos construir um conceito de integral — a partir do qual definimos a área de regiões planas — ou, então, podemos construir um conceito de área para regiões arbitrárias do plano — a partir do qual definimos a integral de funções. Neste texto, usamos a abordagem clássica, construindo a integral com as propriedades I1 e I2 para funções contínuas; a *área* de regiões determinadas pelo gráfico de uma função contínua será definida como uma integral.

Daqui em diante, seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua qualquer. Para simplificar, nesta seção utilizamos t como a variável independente de f. Fixemos, de uma vez por todas, um intervalo $[a, b] \subseteq X$, com $a < b$, e os valores mínimo m e máximo M de f em $[a, b]$, cortesia do Teorema 3.16 de Weierstrass: $m \leqslant f(t) \leqslant M$, com $t \in [a, b]$.

Tomando um ponto $c \in (a, b)$ arbitrário, obtemos dois subintervalos e o mesmo Teorema de Weierstrass fornece dois valores mínimos m_1 e m_2 e dois valores máximos M_1 e M_2 de f nos subintervalos $[a, c]$ e $[c, b]$, respectivamente. Os dois valores mínimos não são menores do que m e os dois valores máximos não são maiores do que M, de modo que

$$\begin{aligned} m \cdot (b-a) &= m \cdot (c-a) + m \cdot (b-c) \\ &\leqslant m_1 \cdot (c-a) + m_2 \cdot (b-c) \\ &\leqslant M_1 \cdot (c-a) + M_2 \cdot (b-c) \leqslant M \cdot (b-a). \end{aligned}$$

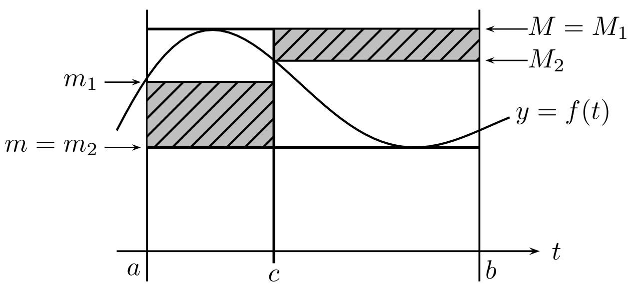

Figura 5.2 Um ponto adicional não pode diminuir os mínimos nem aumentar os máximos

Generalizando de um para mais pontos intermediários, convém dizer que uma coleção finita $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ de $n+1$ pontos é uma *partição* do intervalo $[a, b]$ se

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Tomando, para cada $1 \leqslant k \leqslant n$, o valor mínimo m_k e o valor máximo M_k de f no subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$, obtemos, para $t_{k-1} < t < t_k$,

$$m \leqslant m_k \leqslant f(t) \leqslant M_k \leqslant M.$$

A *soma inferior* e a *soma superior* de f em relação à partição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ são denotadas e definidas, respectivamente, por

$$I(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (t_k - t_{k-1})$$

e

$$S(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot (t_k - t_{k-1}).$$

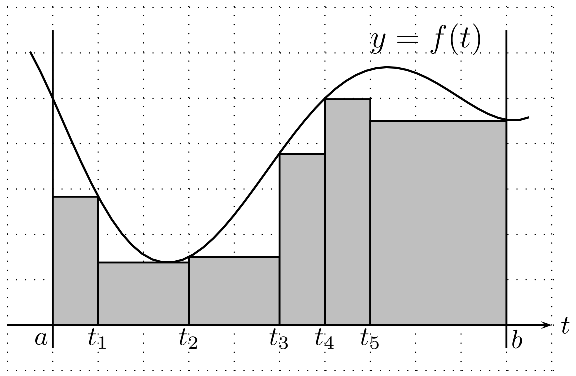

Figura 5.3 Uma soma inferior $I(f,\mathcal{P})$

Exemplo 5.2. Se $v = v(t)$ indica a velocidade de um objeto ao longo de um intervalo de tempo $[0,T]$, então cada parcela $v_{\min} \cdot (t_k - t_{k-1})$ e $v_{\max} \cdot (t_k - t_{k-1})$ das somas inferior e superior tem a interpretação de deslocamento, já que essas velocidades são constantes e

$$\text{velocidade constante} \times \text{tempo decorrido} = \text{deslocamento}.$$

Assim, tanto as somas inferiores da velocidade v de um objeto quanto as superiores representam deslocamentos do objeto. ⊚

Tomando a partição $\mathcal{P}_0 = \{a,b\}$ de dois pontos, temos $I(f,\mathcal{P}_0) = m \cdot (b-a) \leqslant M \cdot (b-a) = S(f,\mathcal{P}_0)$ e, tomando a partição $\mathcal{P}_1 = \{a,c,b\}$ de três pontos, vimos anteriormente o que pode ser traduzido por

$$m \cdot (b-a) \leqslant I(f,\mathcal{P}_1) \leqslant S(f,\mathcal{P}_1) \leqslant M \cdot (b-a).$$

Repetindo aquele argumento — em que havia um ponto c adicional no intervalo $[a, b]$ — para cada ponto adicional em cada subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$ e observando que

$$\sum (t_k - t_{k-1}) = t_n - t_0 = b - a,$$

podemos verificar (Exercício 5.1) que, sempre,

$$m \cdot (b-a) \leqslant I(f, \mathcal{P}) \leqslant S(f, \mathcal{P}) \leqslant M \cdot (b-a). \tag{5.1}$$

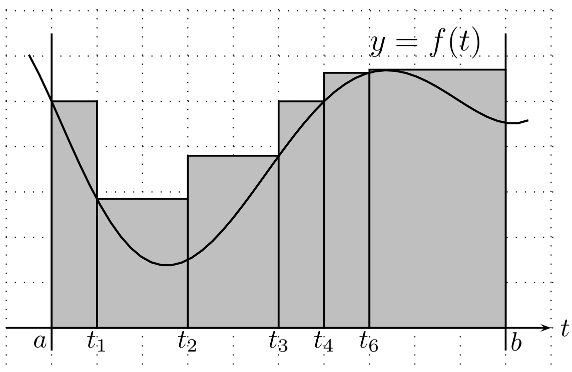

Figura 5.4 Uma soma superior $S(f, \mathcal{P})$

A diferença entre as somas superior e inferior de f em relação a uma partição $\mathcal{P}$ é dada por

$$0 \leqslant S(f, \mathcal{P}) - I(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \cdot (t_k - t_{k-1}).$$

Lema 5.3. *Dado qualquer $\varepsilon > 0$, podemos escolher uma partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ tal que*

$$0 \leqslant S(f, \mathcal{P}) - I(f, \mathcal{P}) \leqslant \varepsilon.$$

Demonstração. Pela Proposição 3.18, as oscilações $M_k - m_k$ de f nos intervalos $[t_{k-1}, t_k]$ podem ser controladas: dado qualquer $\varepsilon > 0$, podemos escolher $r > 0$ de tal modo que

$$0 \leqslant M_k - m_k = \omega\big(f, [t_{k-1}, t_k]\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a},$$

para cada subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$ de $[a, b]$ tal que $t_k - t_{k-1} \leqslant r$.

Fixado, pois, $\varepsilon > 0$, basta tomar $r > 0$ fornecido pela Proposição 3.18 e escolher uma partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ tal que $t_k - t_{k-1} \leqslant r$, para cada $1 \leqslant k \leqslant n$, com a qual obtemos

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \cdot (t_k - t_{k-1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = \varepsilon.$$

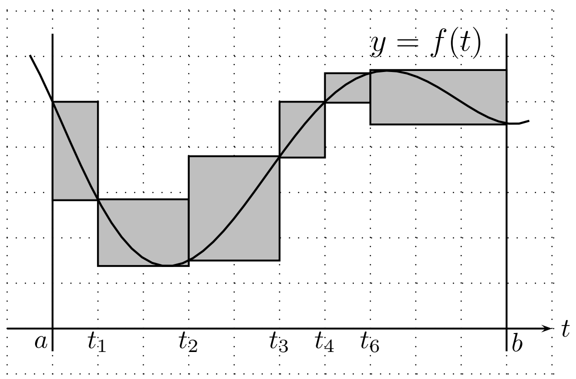

Figura 5.5 A diferença $S(f, \mathcal{P}) - I(f, \mathcal{P})$

Uma tal partição pode ser obtida tomando, por exemplo,

$$a = t_0 < a + r = t_1 < \cdots < a + (n-1)r = t_{n-1} < t_n = b,$$

onde $n \in \mathbb{N}$ é o único natural que satisfaz $a + (n-1)r < b \leqslant a + nr$, pela propriedade arquimediana. $\square$

Não só as somas inferiores aumentam e as superiores diminuem sempre que passarmos de uma dada partição para uma outra que a contenha, mas até

$$m \cdot (b-a) \leqslant I(f, \mathcal{Q}) \leqslant S(f, \mathcal{R}) \leqslant M \cdot (b-a), \tag{5.2}$$

para quaisquer duas partições $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$ de $[a, b]$, já que sempre podemos comparar as somas relativas às partições $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$ com as somas relativas à partição $\mathcal{Q} \cup \mathcal{R}$, que contém ambas, e observando que

$$I(f, \mathcal{Q}) \leqslant I(f, \mathcal{Q} \cup \mathcal{R}) \leqslant S(f, \mathcal{Q} \cup \mathcal{R}) \leqslant S(f, \mathcal{R}).$$

Assim, não só são limitados o conjunto de todas somas inferiores e o de todas somas superiores de f em $[a,b]$, mas nenhuma soma inferior é maior do que qualquer soma superior. A *integral inferior* e a *integral superior* de f em $[a,b]$ são denotadas e definidas por

$$I(f,[a,b]) = \sup\big\{I(f,\mathcal{Q}) : \mathcal{Q} \text{ é uma partição de } [a,b]\big\}$$

e

$$S(f,[a,b]) = \inf\big\{S(f,\mathcal{R}) : \mathcal{R} \text{ é uma partição de } [a,b]\big\},$$

respectivamente. Por (5.2), sempre temos $I(f,[a,b]) \leqslant S(f,[a,b])$ e, por virtude do Lema 5.3, obtemos $I(f,[a,b]) = S(f,[a,b])$ (ver Lema 1.6). Destacamos esse resultado.

Teorema 5.4. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Dado qualquer intervalo $[a,b] \subseteq X$, temos*

$$I(f,[a,b]) = S(f,[a,b]).$$

Dizemos que esse valor comum das integrais inferior e superior é a *integral de f em $[a,b]$*, denotada por

$$\int_a^b f(t)\,dt.$$

Proposição 5.5. *A integral de uma função contínua tem as propriedades de monotonicidade* I1 e aditividade I2.

Demonstração. Por (5.1), vale a propriedade I1. Para conferir a propriedade I2, observamos que a adição de uma soma inferior de f em $[a,c]$ com uma soma inferior de f em $[c,b]$ é igual a uma soma inferior de f em $[a,b]$ e, reciprocamente, dada qualquer soma inferior de f em $[a,b]$, sempre podemos acrescentar o ponto c à partição e verificar que a soma inferior f em $[a,b]$ não é maior do que a adição da soma inferior de f em $[a,c]$ com a soma inferior de f em $[c,b]$ induzidas pelas restrições da partição a esses subintervalos. Isso nos permite concluir que $I(f,[a,c]) + I(f,[c,b]) = I(f,[a,b])$ (ver Exercício 1.4), de modo que vale I2. $\square$

Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua *positiva* em $[a, b] \subseteq X$, então interpretamos a integral

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

como a *área* da região delimitada pelas retas $y = 0$, $t = a$ e $t = b$ e pelo gráfico de f.

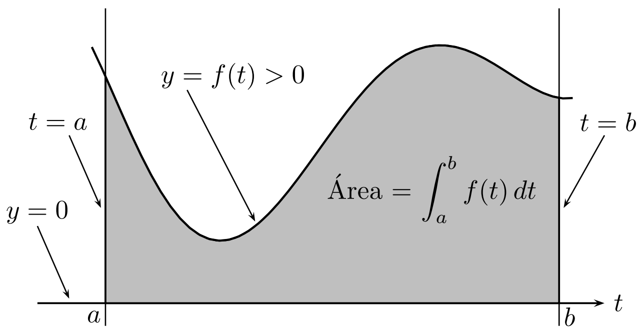

Figura 5.6 A área da região destacada é a integral de f em $[a, b]$

Exemplo 5.6. Vimos, no Exemplo 4.23 que a velocidade é uma primitiva da posição. Mais precisamente, se $s(t)$ denota a posição de um objeto num eixo, então definimos $v(t) = s'(t)$ como a velocidade *instantânea* do objeto no instante t. Se essa velocidade for positiva no intervalo $[0, T]$, então a integral da velocidade no intervalo mede a "área" da velocidade, o que quer que seja. No entanto, como as integrais inferiores e superiores da velocidade representam deslocamentos (Exemplo 4.2) e a integral é um supremo e ínfimo de somas inferiores e superiores, também essa "área" deve ser algum deslocamento do objeto: qual? Nossa experiência do cotidiano dá a resposta plausível

$$\int_0^T v(t)\,dt = v_m \cdot T,$$

ou seja, que o deslocamento a uma velocidade variável v ao longo de um intervalo de tempo $[0, T]$ é igual ao deslocamento a uma certa velocidade constante v_m *média* nesse mesmo intervalo: se percorremos

150 km em duas horas de viagem, poderíamos ter feito esse mesmo trajeto (teoricamente) a uma velocidade constante de 75 km/h. Observe que a velocidade (instantânea) do carro necessariamente foi igual a essa velocidade média de 75 km/h em, pelo menos, um instante de tempo *durante* o percurso.

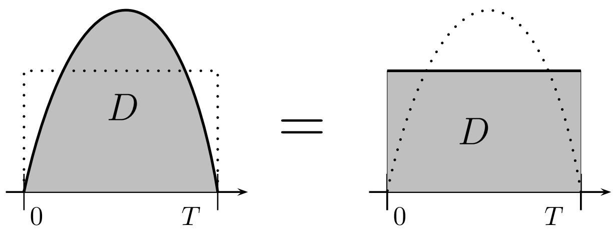

Figura 5.7 Velocidades variável ou média dão o mesmo deslocamento

Assim, a “área” da velocidade é um deslocamento D (um caso particular do teorema fundamental do Cálculo, na próxima seção) e esse deslocamento D sempre pode ser dada por um valor médio que ocorre durante o percurso (um caso particular do teorema do valor médio da integral, a seguir). É nesse sentido que a integral de uma função é uma *média* da função. ⊚

Observe que a nossa integral integra funções “da esquerda para a direita”. É conveniente ter uma versão mais geral da integral, que inclua a opção de integrar “da direita para a esquerda”. Para isso, dados $a, b \in X$ tais que $[a, b] \subseteq X$, definimos

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt.$$

Em particular, sempre $\int_a^a f(t)\,dt = 0$. Não é difícil verificar que, com essa convenção, as duas propriedades I1 e I2 das integrais são válidas para quaisquer $a, b, c \in I$, em qualquer ordem. De fato, para verificar I1, basta observar que

$$\frac{1}{a-b}\int_b^a f(t)\,dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt,$$

para quaisquer dois pontos distintos a, b de I.

Terminamos esta seção com o teorema do valor médio da integral.

Teorema 5.7 (Teorema do Valor Médio da Integral)**.** *Considere uma função $f : X \to \mathbb{R}$ que seja contínua no intervalo $I \subseteq X$. Dados quaisquer $a, b \in I$, existe algum ponto c entre a e b tal que*

$$\int_a^b f(t)\,dt = f(c) \cdot (b - a).$$

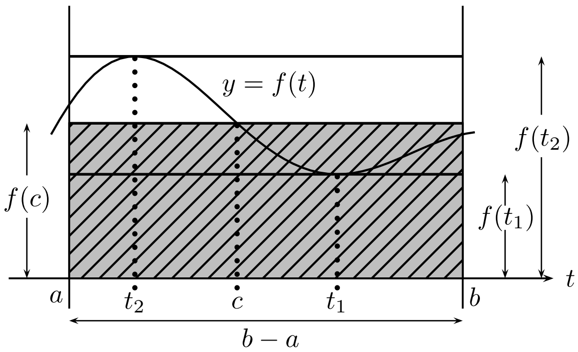

Figura 5.8 O teorema do valor médio da integral

Demonstração. Se $a = b$, então $c = a = b$ e o resultado é imediato. Sejam, pois, $a, b \in I$ dois pontos distintos. Pelo Teorema 3.16 de Weierstrass, existem t_1, t_2 entre a e b, que podem coincidir, ou não, com a e b, tais que

$$f(t_1) \leqslant f(t) \leqslant f(t_2),$$

para cada t entre a e b. Pela propriedade I1 da integral, decorre que

$$f(t_1) \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt \leqslant f(t_2).$$

Pelo Teorema 3.7 do valor intermediário, em virtude da continuidade de f, existe algum c entre t_1 e t_2 — portanto, entre a e b — tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt,$$

demonstrando o teorema. $\square$

Como no caso da velocidade (intuitivamente contínua) do Exemplo 5.6, dizemos que o valor $f(c)$ encontrado na demonstração desse teorema é o *valor médio* da função f no intervalo $[a,b]$.

5.2 O Teorema Fundamental do Cálculo

Nesta seção final apresentamos e demonstramos as duas versões do teorema fundamental do Cálculo.

Teorema 5.8 (Teorema Fundamental I do Cálculo — TFCI)**.** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $I \subseteq X$. Fixados $a \in I$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, defina a função $F : I \to \mathbb{R}$, em cada $x \in I$, por*

$$F(x) = \alpha + \int_a^x f(t)\,dt.$$

Então $F(a) = \alpha$ e F é uma função derivável em I, com $F'(x) = f(x)$, para cada $x \in I$, ou seja, F é uma primitiva de f em I.

Demonstração. Que F é uma função decorre da existência da integral de funções contínuas e é claro que $F(a) = \alpha$. Fixemos $\sigma \in I$ e mostremos que F é derivável em σ, com $F'(\sigma) = f(\sigma)$.

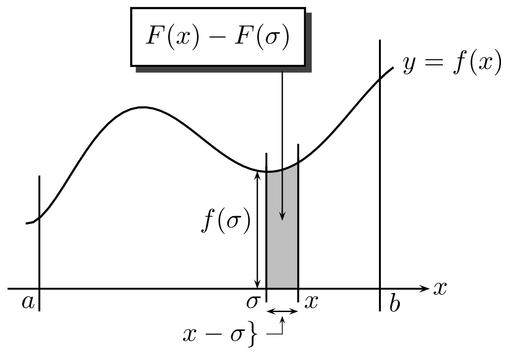

Figura 5.9 A variação na integral

Para qualquer $x \in I$, temos

$$\begin{aligned} F(x) - F(\sigma) &= \alpha + \int_a^x f(t)\,dt - \alpha - \int_a^\sigma f(t)\,dt \\ &= \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^\sigma f(t)\,dt \qquad \text{(usando I2)} \\ &= \int_\sigma^x f(t)\,dt = \varphi_\sigma(x)(x-\sigma), \end{aligned}$$

onde

$$\varphi_\sigma(x) = \frac{1}{x-\sigma}\int_\sigma^x f(t)\,dt,$$

para cada $x \in I - \{\sigma\}$.

Dado qualquer $x \in I$ distinto de σ, o teorema do valor médio da integral garante que existe algum c entre x e σ tal que $\varphi_\sigma(x) = f(c)$.

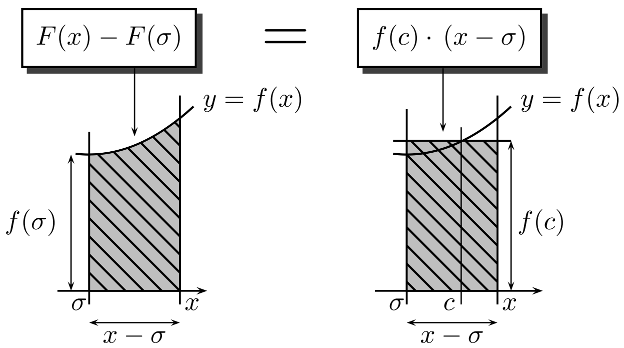

Figura 5.10 O teorema do valor médio da integral

Portanto, dada qualquer sequência (x_n) em $I - \{\sigma\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe algum c_n entre x_n e σ tal que $\varphi_\sigma(x_n) = f(c_n)$. Assim, se $x_n \longrightarrow \sigma$, o critério do confronto garante que $c_n \longrightarrow \sigma$ e a continuidade de f garante que $f(c_n) \longrightarrow f(\sigma)$, ou seja, $\varphi_\sigma(x_n) \longrightarrow f(\sigma)$. Pelo que observamos à página 56, resta definir $\varphi_\sigma(\sigma) = f(\sigma)$ para estabelecer a continuidade de φ_σ em σ e concluir que F é derivável em σ, com $F'(\sigma) = \varphi_\sigma(\sigma) = f(\sigma)$. Como o ponto σ foi dado arbitrariamente, temos que F é uma primitiva de f em I. □

Em particular, decorre do TFCI que existe, no máximo, uma única maneira de definir uma integral de funções contínuas que satisfaça as propriedades I1 de monotonicidade e I2 de aditividade, como segue.

Corolário 5.9. *Se g é uma primitiva de f em I, então, para quaisquer $a, b \in I$,*

$$\int_a^b f(t)\,dt = g(x)\Big|_a^b = g(b) - g(a).$$

Demonstração. Fixado $a \in I$, como $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ e g têm a mesma derivada, a saber, f, decorre que $F(x) - g(x)$ é constante. Resta observar que essa constante é $g(a)$, pois $F(a) = 0$. □

Esse fato é o que estabelece uma justificativa para a notação tradicional de *integral indefinida* para as primitivas g de f, já que

$$\int f(t)\,dt\,\Big|_a^b = g(x)\Big|_a^b = g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Observamos que, por serem as primitivas impropriamente denominadas "integrais indefinidas", muitas vezes as integrais são denominadas "integrais *definidas*". Isso é costume em disciplinas de Cálculo, mas neste texto, utilizamos apenas os termos *primitiva* e *integral*.

O corolário permite que calculemos o valor de muitas integrais, pelo menos de funções cujas primitivas sejam conhecidas.

Exemplo 5.10. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\int_a^b x^n\,dx = \tfrac{1}{n+1} x^{n+1}\Big|_a^b = \tfrac{1}{n+1}\big(b^{n+1} - a^{n+1}\big).$$

De fato, basta lembrar que a função $f(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ tem derivada $f'(x) = x^n$, conforme Exemplo 4.27. Também estabelecemos, para $r \in \mathbb{Q}$ positivo, por exemplo, que

$$\begin{aligned}\int_0^1 r^2 x(1-x)^r\,dx &= -\frac{r^2 x(1-x)^{r+1}}{r+1} - \frac{r^2\,(1-x)^{r+2}}{(r+1)(r+2)}\,\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{r^2}{(r+1)(r+2)}\,,\end{aligned}$$

bastando usar a primitiva calculada no Exemplo 4.28. ◎

Vejamos algumas propriedades adicionais das integrais. Inicialmente, a segunda versão do teorema fundamental do Cálculo, no presente contexto (de funções contínuas), é equivalente à primeira.

Teorema 5.11 (Teorema Fundamental II do Cálculo — TFCII)**.** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável com função derivada $f' : I \to \mathbb{R}$ contínua no intervalo I. Dados $x, \sigma \in I$ quaisquer, temos*

$$f(x) = f(\sigma) + \int_\sigma^x f'(t)\,dt\,.$$

Demonstração. Como f é uma primitiva de f',

$$\int_\sigma^x f'(t)\,dt = f\Big|_\sigma^x = f(x) - f(\sigma)$$

segue pelo corolário do TFCI. □

Proposição 5.12. *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções contínuas no intervalo $I \subseteq X$, $a, b \in I$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(i) *Linearidade:* $\displaystyle\int_a^b (f + \lambda \cdot g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \lambda \cdot \int_a^b g(t)\,dt.$

(ii) *Monotonicidade: se $a < b$ e $f(x) \leqslant g(x)$, para cada $x \in [a, b]$, então*
$$\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt.$$

(iii) *Integração por partes: se f, g são deriváveis com derivadas f', g' contínuas no intervalo I, então*
$$\int_a^b (f g')(t)\,dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b (f' g)(t)\,dt.$$

Demonstração. Por virtude do corolário do TFCI, a linearidade da integral decorre da linearidade da primitivação, vista no Corolário 4.25. Já a monotonicidade decorre da linearidade e da observação seguinte: como $m = 0 \leqslant (g - f)(x)$ para $x \in [a, b]$, a propriedade I1 da integral garante que, também, $0 \leqslant \displaystyle\int_a^b (g - f)(x)\,dx$.

Observando que

$$f(x)g(x)\Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

a fórmula da integração por partes decorre da fórmula correspondente para primitivas, dada no Corolário 4.25. □

Corolário 5.13. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $I \subseteq X$ e $a, b \in I$ tais que $a < b$. Seja $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leqslant M$, para cada $x \in [a, b]$. Então*

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leqslant \int_a^b \big|f(t)\big|\, dt \leqslant M \cdot (b - a).$$

Demonstração. Basta observar que $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$ e usar a proposição. □

A fórmula da substituição de variáveis para integrais é a seguinte, em que convém denotar as variáveis dos dois intervalos I e J envolvidos por letras distintas.

Proposição 5.14 (Mudança de variáveis)**.** *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável com derivada f' contínua num intervalo $I \subseteq X$, se $g : Y \to \mathbb{R}$ é contínua num intervalo $J \subseteq Y$ e se $f(I) \subseteq J$, então*

$$\int_a^b g(f(t)) \cdot f'(t)\, dt = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)\, du,$$

para quaisquer $a, b \in I$.

Demonstração. Se $G : J \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de g em J, então a RC dá $(G \circ f)'(t) = g(f(t)) \cdot f'(t)$ e, portanto, pelo corolário do TFCI,

$$\int_a^b g(f(t)) \cdot f'(t)\, dt = G(f(x))\Big|_a^b = G(u)\Big|_{f(a)}^{f(b)} = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)\, du$$

para quaisquer $a, b \in I$. □

Concluímos este capítulo com uma propriedade de permanência de sinal da integral, que afirma que funções contínuas não negativas só podem ter área nula entre seu gráfico e o eixo x se forem identicamente nulas: qualquer valor positivo enseja área positiva, pela permanência de sinal das funções contínuas.

Teorema 5.15. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $I \subseteq X$ e $a, b \in I$ tais que $a < b$ e $f(x) \geqslant 0$ para cada $x \in [a, b]$. Então $f(x) = 0$, para cada $x \in [a, b]$, se, e só se,*

$$\int_a^b f(t)\,dt = 0.$$

Demonstração. É claro que é nula a integral da função nula. Assim, basta mostrar que $\int_a^b f(t)\,dt > 0$ sempre que f for positiva em algum ponto de $[a, b]$.

Suponhamos, pois, que $f(\sigma) > 0$ para algum $\sigma \in [a, b]$ e tomemos $c > 0$ tal que $f(\sigma) > c$. Pela permanência do sinal da função contínua f (ver Lema 3.4) decorre que $m = c < f(x)$, para cada $x \in [a, b]$ suficientemente próximo de σ. Supondo que $\sigma \in (a, b]$, tomamos $r > 0$ tal que $m = c < f(x)$ para cada $x \in [\sigma - r, \sigma] \subseteq [a, b]$. Pela monotonicidade da integral, $\int_a^{\sigma - r} f(t)\,dt \geqslant 0$ e $\int_\sigma^b f(t)\,dt \geqslant 0$, já que f é não negativa em $[a, b]$, por hipótese. Pelas propriedades I1 e I2 da integral, decorre que

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt &= \int_a^{\sigma-r} f(t)\,dt + \int_{\sigma-r}^{\sigma} f(t)\,dt + \int_\sigma^b f(t)\,dt \\ &\geqslant \int_{\sigma-r}^{\sigma} f(t)\,dt \geqslant c \cdot r > 0.\end{aligned}$$

No caso em que $\sigma \in [a, b)$, tomamos $r > 0$ tal que $m = c < f(x)$ para cada $x \in [\sigma, \sigma + r] \subseteq [a, b]$ e procedemos analogamente. □

Epílogo

Convém refletir um momento para constatar que todas as propriedades da integral de funções contínuas — linearidade, monotonicidade generalizada, integração por partes e mudança de variáveis, até o teorema fundamental do Cálculo — decorrem com uma relativa facilidade das duas únicas propriedades de monotonicidade básica I1 e aditividade I2, apresentadas à página 95. Bastou, portanto, construir a integral de funções contínuas com essas duas propriedades para obter toda a teoria da integral.

No entanto, para construir uma teoria de integração com funções não necessariamente contínuas, essa abordagem não funciona, sendo preciso desenvolver somas inferiores e superiores mais gerais para obter uma integral de funções limitadas com descontinuidades. Isso pode ser encontrado nas referências básicas [1] e [2].

O TFC é só uma porta para um mundo maravilhoso. Podemos querer estendê-lo a mais de uma variável, onde (passando pelos Teoremas de Green, Gauss e Stokes do Cálculo) chegamos ao Teorema de Stokes em variedades, ou então, resolver sua evidente assimetria, para o que podemos passar ao estudo de integrais mais gerais, especialmente a centenária integral de Lebesgue e a mais recente de Henstock-Kurtzweil. Esta última integral (que inclui as de Riemann e de Lebesgue, ver [18]) realmente é a inversa da derivada, pois com ela, se f é derivável, então a função derivada f' é sempre integrável e sua primitiva é a própria f, o que não ocorre com as integrais de Riemann e Lebesgue, em que a função derivada f' precisa de propriedades adicionais para ser integrável.

5.3 Exercícios

5.1. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere uma partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ de n $n+1$ pontos. Mostre (por indução) que

$$m \cdot (b-a) \leqslant I(f, \mathcal{P}) \leqslant S(f, \mathcal{P}) \leqslant M \cdot (b-a).$$

Os casos $n = 2$ e $n = 3$ foram demonstrados no texto (ver página 97).

5.2. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $I \subseteq X$ e $a, b \in I$ tais que $a < b$. Dizemos que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$$

é o *valor médio* ou a *média* de f em $[a, b]$. O Teorema 5.7 do valor médio da integral afirma que toda função contínua atinge seu valor médio. Na Física, definimos a *velocidade média* de uma partícula em movimento retilíneo de posição $s(t)$ ao longo do intervalo de tempo $[a, b]$ por

$$v_m = \text{ inclinação da secante do deslocamento em } [a,b] = \frac{s(b)-s(a)}{b-a}\,.$$

Lembrando que a velocidade $v(t)$ é uma primitiva da posição $s(t)$ da partícula, mostre que a velocidade média da Física coincide com o valor médio da função velocidade.

5.3. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas no intervalo $I \subseteq X$ e $a, b \in I$ tais que $g(x) \geqslant 0$, para cada x entre a e b. Mostre que existe c entre a e b tal que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\cdot\int_a^b g(t)\,dt.$$

(*Sugestão*: como $g(x)$ é não negativo, $m \leqslant f(x \leqslant M$ implica $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$.) No caso em que $g(x) > 0$, para algum $x \in [a, b]$, podemos interpretar

$$f(c) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt \Bigg/ \int_a^b g(t)\,dt$$

como a *média ponderada* de f com peso g em $[a, b]$. Esse resultado costuma ser denominado *Primeiro* Teorema do Valor Médio da Integral. Mostre que a afirmação da Proposição 5.7 é um caso particular desse teorema, com $g(x) =$ constante.

5.4. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $I \subseteq X$ e $g : X \to \mathbb{R}$ uma função monótona derivável com derivada contínua em I. Dados $a, b \in I$, mostre que existe c entre a e b tal que

$$\int_a^b g(t)\cdot f(t)\,dt = g(a)\cdot\int_a^c f(t)\,dt + g(b)\cdot\int_c^b f(t)\,dt.$$

Essa afirmação é conhecida como o *Segundo* Teorema do Valor Médio da Integral, ou Teorema de Bonnet. Observe que, no caso $g(x) =$ constante, essa afirmação é válida para cada c e é a propriedade (2) da aditividade da integral. (*Sugestão*: use integração por partes e depois, na integral resultante, o exercício anterior.)

5.5. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas no intervalo $I \subseteq X$ e $a, b \in I$ tais que $a < b$. Demonstre a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\left[\int_a^b f(t)g(t)dt\right]^2 \leqslant \left[\int_a^b \left[f(t)\right]^2 dt\right] \cdot \left[\int_a^b \left[g(t)\right]^2 dt\right].$$

(*Sugestão*: considere o polinômio de segundo grau não negativo dado por $p(x) = \displaystyle\int_a^b \left[x \cdot f(t) + g(t)\right]^2 dt$.)

5.6. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $I \subseteq X$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ uma função derivável no intervalo $J \subseteq X$, tais que $g(J) \subseteq I$. Fixado $a \in I$, mostre que é derivável a função $h : J \to \mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt,$$

com $h'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$, para cada $x \in J$.

5.7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que, se f for *ímpar*, então

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0, \quad \text{para cada } a \in \mathbb{R}$$

e, se f for *par*, então

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt, \quad \text{para cada } a \in \mathbb{R}.$$

5.8. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $a, b \in X$ tais que $a < b$ e $[a, b] \subseteq X$. Mostre que a primitiva $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ de f, definida por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, é lipschitziana. (Ver Exercícios 3.22 e 4.5.)

5.9. Seja $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e não crescente. Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, vale

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant f(n).$$

Use indução para mostrar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, vale

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leqslant \int_1^{n+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

5.10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função *periódica* de período T, ou seja, $T > 0$ é tal que $f(x+T) = f(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

1. Mostre que se f for contínua, para cada $a \in \mathbb{R}$ vale
$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt\,.$$
2. Mostre que se f for contínua, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ vale
$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt\,.$$
3. Mostre que se f for derivável, para cada $t > 0$ existe algum $c \in \mathbb{R}$ tal que
$$f(c+t) - f(c) = t \cdot f'(c),$$
ou seja, a reta tangente ao gráfico de f pelo ponto $(c, f(c))$ volta a tocar o gráfico de f no ponto $(c+t, f(c+t))$.

Apêndices

A1 Lógica e Teoria de Conjuntos

O estudo da Análise Matemática necessariamente depende de um mínimo da linguagem formal da Lógica Matemática e da terminologia introduzida em Teoria de Conjuntos.

Lógica Matemática

Uma *proposição matemática* ou, simplesmente, uma *proposição*, é uma declaração que é verdadeira ou falsa, não por uma questão de opinião, mas como um fato. Na linguagem do dia a dia, as declarações que emitimos ficam em algum lugar entre a verdade e a falsidade absolutas, podendo ocupar todos os tons de mais ou menos verdadeiro ou falso. Uma declaração como “o suco é doce” não é uma proposição, mas “π é racional” é uma proposição, pois esta é verdadeira ou falsa.

Na linguagem do dia a dia, a maneira pela qual enunciamos uma declaração pode influir na sua aceitação como verdadeira ou falsa. Por exemplo, quando dizemos “o suco é doce, estou convencido!” com o tom certo, muitos são levados a acreditar na veracidade disso. Na linguagem matemática, isso não faz sentido. Todas as proposições verdadeiras são deduzidas logicamente a partir de outras proposições verdadeiras anteriormente estabelecidas como verdadeiras. Assim, costumamos estabelecer um ponto de partida para nossas verdades estabelecidas, como definições, hipóteses, axiomas ou postulados, que não necessariamente são evidentes mas que, geralmente, resumem o que é realmente essencial para desenvolver a teoria.

Neste texto, partimos da existência do corpo ordenado completo $\mathbb{R}$, apresentado axiomaticamente. Poderíamos ter construído esse corpo (conforme indicamos no Apêndice A4) a partir do corpo ordenado $\mathbb{Q}$ que, por sua vez, poderia ter sido construído a partir de $\mathbb{N}$. Já o conjunto dos naturais poderia ter sido apresentado por axiomas ou, então, construído na Teoria de Conjuntos. É claro que essa teoria criada por G. Cantor também tem seus axiomas. Assim, cada declaração de um texto matemático deve ser justificada.

Nossas demonstrações, todas, consistem numa sequência de proposições de, pelo menos, três categorias: definições, hipóteses e proposições que são inferidas de outras proposições, geralmente precedidas de palavras como "portanto", "logo", "de modo que", etc. Que a proposição "π é racional" é falsa, por exemplo, não é nada imediato, dependendo de uma sequência bem grande de deduções de fatos matemáticos. No entanto, como todas as proposições matemáticas mais básicas, ela pode ser enunciada no formato "$\pi \in \mathbb{Q}$", que é lido "π pertence ao conjunto $\mathbb{Q}$", mas é claro que podemos continuar dizendo, simplesmente, "π é racional".

Praticamente todas as proposições deste texto podem ser dadas por "$x \in X$" ou "$X \subseteq Y$", em que utilizamos os dois símbolos $\in$ e $\subseteq$ consagrados da Teoria de Conjuntos, que indicam, respectivamente, elemento e subconjunto de um conjunto dado. Por exemplo, a Proposição 4.4 declara que "toda função derivável é contínua", que poderia ter sido enunciada "(dada qualquer função f) $\big[$se f é derivável então f é contínua$\big]$" ou, ainda, simplesmente, "$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$", onde $\mathcal{D}$ indica o conjunto de todas as funções deriváveis e $\mathcal{C}$ o de todas as funções contínuas. Fica claro que também deveríamos indicar de qual tipo são essas funções, se reais, complexas, etc., mas isso, em geral (deveria) estar estabelecido pelo famoso contexto.

No entanto, este texto seria (muito mais) incompreensível se estivesse reduzido a uma sequência lógica de declarações simbólicas abstratas. Geralmente, a complexidade do conteúdo matemático é dissimulada com uma linguagem técnica. Por exemplo, "f é contínua em σ" significa (ver página 53) que "(dada qualquer sequência (x_n) do domínio de f) $\big[$se $x_n \longrightarrow \sigma$ então $f(x_n) \longrightarrow f(\sigma)\big]$", onde "$x_n \longrightarrow \sigma$", por sua vez (ver página 35), significa "(dado qualquer $\varepsilon > 0$)(existe algum $N \in \mathbb{N}$ tal que) (para qualquer $n \in \mathbb{N}$) $\big[$se $n \geqslant N$ então

$|x_n - \sigma| < \varepsilon\big]$” e analogamente para “$f(x_n) \longrightarrow f(\sigma)$”. E isso não é tudo, pois estão incluídos aí as definições de $\mathbb{N}$ e o significado de “$<$”, “$>$”, “$\geqslant$”, “$-$” e “$|\ |$”, todos redutíveis a conceitos mais fundamentais.

A notação e terminologia técnica (“f é contínua”) são necessárias para que entendamos a Matemática, pois elas nos auxiliam nos nossos processos mentais, não só por abreviar uma sequência possivelmente longa de conceitos, mas também por, muitas vezes, possuir algum sentido intuitivo imediato, como, no caso, “contínua”. Na Matemática, cada palavra técnica e cada notação são introduzidos por meio de outras palavras técnicas e notações, a partir de um sistema inicial. É conveniente distinguir entre a notação e terminologia técnica permanentes, como “$\mathbb{R}$” e “f é contínua”, geralmente apresentadas formalmente por meio de definições, e as provisórias, como, por exemplo, “o conjunto X”, definido por “todos os racionais cujo quadrado é menor do que 2”, considerado no Exercício 1.10.

Na Lógica Matemática utilizamos os quantificadores “para cada” ($\forall$) e “existe” ($\exists$), os conectivos binários “e” ($\wedge$), “ou” ($\vee$) e o famoso “se ... então ...” ($\Rightarrow$), bem como a negação “não” ($\sim$) para escrever as proposições, que geralmente são abreviadas por letras, como “P”. Por exemplo, a proposição “$x_n \longrightarrow \sigma$”, já comentada, é dada por

$$\text{“}(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\big[n \geqslant N \Longrightarrow |x_n - \sigma| < \varepsilon\big]\text{”}.$$

Neste texto, essa escrita sintética não é utilizada, mas é um exercício produtivo tentar traduzir nossas proposições para essa linguagem. Uma virtude inegável dessa escrita, além de ser totalmente precisa, é que pode ser entendida igualmente por duas pessoas que não tenham uma palavra sequer em comum em seu vocabulário cotidiano.*

No assim chamado Cálculo Proposicional (que tampouco é abordado neste texto), estudam-se as *tabelas verdade* de proposições com-

---

*Existe pelo menos um livro, o famoso *Grundlagen der Analysis*, escrito em 1929 por E. Landau, inteiramente no “estilo Landau”, em que o autor parte dos axiomas de $\mathbb{N}$ e chega em $\mathbb{C}$ (via cortes de Dedekind) sem muitas palavras, ao longo de 73 definições e 301 proposições. Mesmo escrito em alemão, foi publicado em 1951 nos Estados Unidos da América (Chelsea/AMS) só com os prefácios traduzidos para o inglês e um pequeno vocabulário alemão-inglês. Como todas suas proposições são quase inteiramente simbólicas, pode ser entendido em todo mundo; na UFRGS, já o utilizamos em seminário de Iniciação Científica.

postas. Por exemplo, o Princípio da Não Contradição que utilizamos afirma que se uma afirmação matemática P for falsa, então $\sim P$ é verdadeira. Também observamos o outro princípio fundamental da Lógica Matemática: o Princípio do Terceiro Excluído afirma que cada proposição matemática é verdadeira ou falsa, não havendo uma terceira opção. Assim, dada qualquer proposição P, ou P é verdadeira ou P é falsa.

Chamamos a atenção para o conectivo "ou" que, em Lógica, tem um significado mais abrangente do que na linguagem usual, em que quase sempre é *disjunto*. A proposição composta "P ou Q" só é falsa se ambas P e Q forem falsas. Por exemplo, $x \leqslant y$, que se lê "x é menor do que ou igual a y", é verdadeira se $x = y$ e, também, se $x < y$. Por isso, é verdadeira a declaração $3 \leqslant 5$.

Uma proposição composta que costuma provocar erro de escrita é a *condicional* $P \Rightarrow Q$, vulgarmente conhecida por "implicação" e que é lida "se P então Q". O ponto crucial ignorado por muitos estudantes é que o conectivo $\Rightarrow$ em si não abrevia "implica", mas tão somente "se ... então ...", ou, "o que está à esquerda implica o que está à direita". Um exemplo pode esclarecer isso.

A proposição verdadeira "se f é derivável, então f é contínua" pode ser escrita como "f é derivável $\Rightarrow$ f é contínua" mas, jamais, como "se f é derivável $\Rightarrow$ f é contínua", que, sequer é uma proposição, pois, em notação simbólica, essa última frase é dada por "$P \Rightarrow$", em que P é a proposição "$\big[f$ é derivável $\Rightarrow$ f é contínua$\big]$", faltando todo o lado direito do "*se ... então ...*". O conselho básico é não misturar português (se) com lógica ($\Rightarrow$) e, jamais, abreviar "então" por "$\Rightarrow$".

Além disso, na vida real uma condicional "se P então Q" só tem relevância se existir alguma relação causal entre os significados internos de P e Q, como em "se o suco é doce, então quero um", pois não se costuma ouvir "se o suco é doce, então vou ao cinema". Já na Lógica Matemática, toda proposição composta $P \Rightarrow Q$ é verdadeira ou falsa, pelo princípio da não contradição.

Também costuma ser motivo de confusão que a proposição $P \Rightarrow Q$ só seja falsa se P for verdadeira e Q for falsa; os outros três casos dão, todos, proposições verdadeiras. Digamos que P seja "$\sqrt{2}$ é racional" e Q seja "2 é racional". Então a proposição $P \Rightarrow Q$ é verdadeira e a proposição $Q \Rightarrow P$ é falsa, já que sabemos que P é falsa e Q verdadeira. Observe que, também, $P \Rightarrow S$ é verdadeira, independentemente da proposição S. Assim, a proposição "se $\sqrt{2}$ é racional, então o suco é doce" é verdadeira.

As proposições $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$ são denominadas *recíprocas* e pode ocorrer que ambas, uma, ou nenhuma delas sejam verdadeiras. Se ambas forem verdadeiras, dizemos que as afirmações P e Q são *equivalentes* e escrevemos, simplesmente, $P \iff Q$, que lemos como "P se, e só se, Q". Por exemplo, toda proposição condicional $P \Rightarrow Q$ é equivalente à condicional $\sim Q \;\Rightarrow \sim P$, ou seja,

$$\big[P \Rightarrow Q\big] \iff \big[\sim Q \;\Rightarrow \sim P\big].$$

De fato, ambas são falsas se, e só se, P for falsa e Q verdadeira, ou seja, se se e só se, $\sim Q$ for falsa e $\sim P$ verdadeira.

Muitas vezes é preferível demonstrar uma proposição $P \Rightarrow Q$ por *contraposição*, ou seja, demonstrar a validade da proposição *contrapositiva* equivalente $\sim Q \Rightarrow \sim P$ ou, ainda, por *redução ao absurdo*, o que significa demonstrar que, juntas, as afirmações P e $\sim Q$ levam a alguma impossibilidade, ou contradição com algum fato já estabelecido.

As expressões *teorema*, *proposição*, *corolário* e *lema* utilizadas no texto são, todas, relativas a proposições condicionais $P \Rightarrow Q$ verdadeiras, em diversos níveis de importância subjetiva.

Notação da Teoria de Conjuntos

Já mencionamos os dois símbolos $\in$ e $\subseteq$ consagrados da Teoria de Conjuntos. Vejamos mais um pouco da notação dessa teoria. Se $Y \subseteq X$ e $Y \neq X$, dizemos que Y é um subconjunto *próprio* de X. O símbolo $\emptyset$ indica o *conjunto vazio*, sem elemento algum. Os símbolos $\cup$, $\cap$ e $-$ indicam, respectivamente, a união, a interseção e a diferença de conjuntos, sendo que ^{c} indica o complementar de um conjunto. Por exemplo,

$$X - Y = \{x : x \in X \text{ e } x \notin Y\} = X \cap Y^c.$$

Finalmente, $X \times Y$ indica o produto cartesiano de X por Y, ou seja, o conjunto de todos pares ordenados (x, y) com $x \in X$ e $y \in Y$.

A interseção e a união podem ser estendidas a mais do que dois conjuntos. Basta observar que

$$X_1 \cup X_2 = \{x : x \in X_1 \text{ ou } x \in X_2\} = \bigcup_{\lambda \in \{1,2\}} X_\lambda,$$

o que justifica a definição e notação

$$\bigcup_{\lambda} X_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \{x : x \in X_\lambda,\ \text{para algum } \lambda \in \Lambda\}$$

para a união de todos os conjuntos X_λ, em que λ percorre alguma coleção Λ, finita ou não, de índices. Da mesma forma, definimos e denotamos

$$\bigcap_{\lambda} X_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \{x : x \in X_\lambda,\ \text{para todo e qualquer } \lambda \in \Lambda\}$$

como a interseção de todos os conjuntos X_λ.

Aplicações

Uma *aplicação* $\varphi : X \to Y$ entre dois conjuntos necessariamente associa a cada elemento $x \in X$ algum elemento y de Y sem ambiguidade, denotado por $y = \varphi(x)$. O domínio de φ é X, enquanto Y é o contradomínio de φ; a *imagem* de φ é o subconjunto $\varphi(X)$ de Y constituído de todos elementos $\varphi(x)$ de Y, com $x \in X$. Dizemos que duas aplicações φ e ψ são *iguais*, e escrevemos $\varphi = \psi$ se tiverem domínio e contradomínio iguais e valer a igualdade $\varphi(x) = \psi(x)$ entre elementos do contradomínio, para cada x do domínio.

Considere dada alguma aplicação $\varphi : X \to Y$ entre dois conjuntos X e Y quaisquer. Dizemos que φ é *sobrejetora* se a imagem $\varphi(X)$ de φ coincidir com o contradomínio Y de φ. Do ponto de vista dos elementos de X e de Y, isso significa que, para qualquer $y \in Y$ dado, existe algum $x \in X$ tal que $\varphi(x) = y$. Dizemos que φ é *injetora* se

$$x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2),$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in X$ dados.

Uma aplicação é *bijetora*, ou uma *bijeção*, se for injetora e sobrejetora. Se $\varphi : X \to Y$ for uma bijeção, então a aplicação $\psi : Y \to X$ tal que $\psi(\varphi(x)) = x$ para cada $x \in X$ e $\varphi(\psi(y)) = y$ para cada $y \in Y$ (que existe pelo Exercício A.6) é única, sendo denotada por φ^{-1} e denominada aplicação *inversa* de φ.

A aplicação *identidade* $\xi_X : X \to X$ de um conjunto X qualquer, definida por $\xi_X(x) = x$, para cada $x \in X$, é trivialmente uma bijeção, que sempre coincide com sua inversa: $\xi_X^{-1} = \xi_X$.

Dada uma aplicação $\varphi : X \to Y$ qualquer e subconjuntos $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ quaisquer, dizemos que o subconjunto

$$\begin{aligned}\varphi(A) &= \{y \in Y : \text{ existe } x \in A \text{ tal que } y = \varphi(x)\} \\ &= \{\varphi(x) \in Y : x \in A\} \subseteq Y\end{aligned}$$

da imagem $\varphi(X)$ de φ é a *imagem direta* de A por φ. Por exemplo, a própria imagem de uma função é a imagem direta de seu domínio. Por outro lado, o subconjunto

$$\varphi^{-1}(B) = \{x \in X : \varphi(x) \in B\} \subseteq X$$

do domínio é a *imagem inversa* de B por φ. Esses conceitos independem de a função φ ser ou não ser injetora, sobrejetora, ou bijetora. Dada uma função φ qualquer, sempre valem

$$A \subseteq \varphi^{-1}\big(\varphi(A)\big) \quad \text{e} \quad \varphi\big(\varphi^{-1}(B)\big) \subseteq B,$$

para quaisquer $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$. No entanto, se φ for injetora, vale a igualdade na primeira inclusão e, se φ for sobrejetora, vale a igualdade na segunda (ver Exercício A.10).

Sempre que a função $\varphi : X \to Y$ for injetora e $B \subseteq \varphi(X)$ for um subconjunto da imagem de φ, a imagem direta de B pela função inversa $\varphi^{-1} : f(X) \to X$ coincide com a imagem inversa de B por φ (ver Exercício A.11).

Números Naturais

Para referência, resumimos as propriedades dos números naturais, assim denominados por aparecerem *naturalmente* na contagem de objetos. O conjunto dos números naturais com suas propriedades habituais pode ser construído a partir de três axiomas básicos, como sendo um conjunto X tal que

(P1) cada elemento de X tem um único *sucessor* em X e elementos diferentes têm sucessores diferentes e

(P2) existe um único elemento em X que não é sucessor de nenhum elemento de X.

Mais formalmente, estamos estipulando que $\sigma(x)$ = sucessor de x define uma aplicação injetora $\sigma : X \to X$ de um certo conjunto X nele mesmo e cuja imagem é todo X, exceto por um único elemento especial.

Da existência de um conjunto satisfazendo esses axiomas decorrem (quase) todas propriedades usuais dos naturais. Não entraremos em detalhes, simplesmente usamos a notação padrão, qual seja, de escrever $\sigma(x) = x + 1$ para o sucessor de x, de denotar X por $\mathbb{N}$ e de escrever 1 como o elemento especial dado no axioma P2. Finalmente, escolhendo o sistema decimal posicional, utilizamos os símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0, definidos por $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1 = (1 + 1) + 1$, $4 = 3 + 1 = (2 + 1) + 1$, e assim por diante, até chegar no sucessor de 9, que é denotado por $10 = 9 + 1$, cujo sucessor é denotado por $11 = 10 + 1$, e assim por diante. Desse modo obtemos o conjunto dos números *naturais* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Poderíamos escolher qualquer outro sistema posicional, como o binário, em que utilizamos somente os símbolos 1 e 0; nesse caso, o mesmo conjunto dos naturais é dado por

$$\mathbb{N} = \{1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, \dots\}.$$

Em seguida, introduzimos a soma e o produto de quaisquer dois naturais. Fixado um natural $m \in \mathbb{N}$, definimos a soma $m + 1$ pelo sucessor de m e o produto $m \cdot 1 = m$ e, dado qualquer natural $n \in \mathbb{N}$, definimos a *soma* $m + (n + 1) = (m + n) + 1$ e o *produto* $m \cdot (n + 1) = (m \cdot n) + m$ de m com o sucessor de n como sendo o sucessor da soma de m com n e a soma de m com o produto de m com n, respectivamente.

Mesmo que isso tudo pareça funcionar, não podemos nem ter certeza que essas operações de soma e produto estejam bem definidas. Para provar isso, e também que essas operações são únicas com as propriedades exibidas, precisamos de um terceiro axioma, o famoso Princípio da Indução Matemática Finita (PIM), como segue.

(PIM) Se $X \subseteq \mathbb{N}$ for tal que $1 \in X$ e a afirmação

$$(\forall n \in \mathbb{N})\big[n \in X \Longrightarrow n + 1 \in X\big]$$

for verdadeira, então, necessariamente, $X = \mathbb{N}$.

De posse desse axioma, pode ser mostrado que a soma e o produto de naturais constituem operações bem definidas. Em seguida, definimos uma *ordem* nos naturais: tanto $m < n$ quanto $n > m$ significam que $m+p=n$, para algum $p \in \mathbb{N}$, e dizemos que “m é menor do que n” e “n é maior do que m”, respectivamente. Em particular, $n+1>n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. As notações $m \leqslant n$ ou $n \geqslant m$ são usadas para dizer que $m<n$ ou $m=n$.

Os naturais satisfazem o Princípio da Boa Ordenação (PBO), como segue.

(PBO) Se $Y \subseteq \mathbb{N}$ não for vazio então existe um *elemento mínimo* de Y, ou seja, um elemento $m \in Y$ tal que $y \geqslant m$, para cada $y \in Y$.

Por exemplo, 1 é o elemento mínimo de $\mathbb{N}$. Para demonstrar a validade do PBO, seja dado um subconjunto não vazio $Y \subseteq \mathbb{N}$ qualquer. Se $1 \in Y$, é claro que 1 é o elemento mínimo de Y, de modo que podemos supor que $1 \notin Y$; em outras palavras, $\{1\} \cap Y = \emptyset$. Seja X o conjunto de todos naturais n tais que $\{1,2,\ldots,n\} \cap Y = \emptyset$; pelo visto, $1 \in X$. Como Y contém pelo menos algum natural m, decorre que $m \in \{1,2,\ldots,m\} \cap Y$ e, portanto, $m \notin X$, ou seja, $X \neq \mathbb{N}$.

Como $1 \in X$ e $X \neq \mathbb{N}$, o PIM garante que não vale a afirmação $n \in X \Longrightarrow n+1 \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, necessariamente existe algum $n_1 \in X$ tal que $n_1+1 \notin X$. Traduzindo, isso significa que $\{1,2,\ldots,n_1+1\} \cap Y \neq \emptyset$ e $\{1,2,\ldots,n_1\} \cap Y = \emptyset$, o que acarreta que $n_1+1 \in Y$ e que $Y \subseteq \{n_1+1, n_1+2, \ldots\}$. Logo, $m = n_1+1$ é o elemento mínimo de Y. Como $Y \subseteq \mathbb{N}$ foi dado arbitrariamente, demonstramos que o PIM implica o PBO.

Dizemos que demonstrações como essa, que utilizam o PIM, são *por indução.* Reciprocamente, poderíamos ter usado o PBO como terceiro axioma dos naturais; nesse caso, então, mostraríamos que o PIM decorre do PBO.

Dizemos que um conjunto não vazio X qualquer é *finito* se existir algum natural $n \in \mathbb{N}$ e alguma bijeção $\varphi : I_n \to X$, onde denotamos

$$I_n = \{1,2,\ldots,n\} = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\}.$$

Funções Reais

Uma *função real* ou, simplesmente, uma *função*, é o caso particular de uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}$ definida num subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ e com contradomínio $\mathbb{R}$. As funções reais incluem as sequências reais, que são funções reais $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ de domínio $X = \mathbb{N}$. Podemos operar com funções reais da mesma forma que operamos com números, bastando operar *ponto a ponto*.

Dadas duas funções reais $f, g : X \to \mathbb{R}$ de mesmo domínio, definimos a *soma* $f + g : X \to \mathbb{R}$ de f e g e o *múltiplo* $\lambda \cdot f : X \to \mathbb{R}$ de f, ou, em geral, qualquer *combinação linear* $f + \lambda \cdot g$ de f e g ponto a ponto, ou seja, por

$$(f + \lambda \cdot g)(x) = f(x) + \lambda \cdot g(x),$$

para cada $x \in X$. Em particular temos a *diferença* $f - g$ de funções. Também definimos o *produto* $fg = f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ de f e g e o *quociente* $f/g : X \to \mathbb{R}$ de f por g ponto a ponto (o quociente só se $g(x) \neq 0$, para cada $x \in X$) por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{e} \quad (f/g)(x) = f(x)/g(x),$$

para cada $x \in X$.

Dizemos que uma função real $f : X \to \mathbb{R}$ é *crescente em* C se

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in C \subseteq X$. Mais geralmente, dizemos que f é *não decrescente em* C se $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$, para quaisquer $x_1, x_2 \in C$. Analogamente, dizemos que f é *decrescente em* C se $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$, para $x_1, x_2 \in C$, e *não crescente em* C se $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$, para $x_1, x_2 \in C$.

Finalmente, dizemos que f é *monótona em* C se f for não crescente em C ou não decrescente em C.

Dizemos que uma função real $f : X \to \mathbb{R}$ é *limitada* se a imagem $f(X)$ de f for um conjunto limitado de $\mathbb{R}$, ou seja, se existir $c \in \mathbb{R}$ tal que $-c \leqslant f(x) \leqslant c$, para cada $x \in X$. Mais precisamente, f é limitada *superiormente*, ou *inferiormente*, se $f(X)$ for limitado superiormente em $\mathbb{R}$ (existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leqslant c$, para cada $x \in X$) ou inferiormente em $\mathbb{R}$ (existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \leqslant f(x)$, para cada $x \in X$). Uma função que não é limitada (superior ou inferiormente) é dita *ilimitada* (*superior* ou *inferiormente*).

Dizemos que uma função real $f : X \to \mathbb{R}$ é *par* (respectivamente, *ímpar*) se o domínio X de f for simétrico em relação à origem (ou seja, $x \in X \iff -x \in X$) e valer $f(-x) = f(x)$ (respectivamente, $f(-x) = -f(x)$), para cada $x \in X$.

A2 A Álgebra dos Corpos

$\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ não são corpos, mas $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, bem como o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, são. Em geral, dizemos que um conjunto $\mathbb{K}$ qualquer é um *corpo* se $\mathbb{K}$ possuir dois elementos distintos bem determinados, que denotamos 0 e 1, e duas operações binárias, denominadas *adição* e *multiplicação*, que a cada par de elementos $x, y \in \mathbb{K}$ associam dois elementos $x + y$ e $x \cdot y$ de $\mathbb{K}$, que denominamos *soma* e *produto* de x e y, respectivamente, satisfazendo as propriedades seguintes.

(C1) *Associatividade*: para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{K}$,

$$x + (y + z) = (x + y) + z \quad \text{e} \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

(C2) *Comutatividade*: para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$,

$$x + y = y + x \quad \text{e} \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

(C3) *Distributividade*: para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{K}$,

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

(C4) *Elementos Neutros*: $x + 0 = x$ e $x \cdot 1 = x$, para cada $x \in \mathbb{K}$.

(C5) *Elementos Inversos*: para cada $x \in \mathbb{K}$ existe algum $y \in K$ tal que $x + y = 0$ e, se $x \neq 0$, existe algum $z \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot z = 1$.

Pela propriedade C4, o elemento especial 0 de $\mathbb{K}$ é o *neutro da adição*, denominado *zero*, e 1 é o o elemento *neutro da multiplicação*, denominado *unidade*. Mostra-se que 0 e 1 são os únicos elementos de um corpo que satisfazem C4. Finalmente, também são únicos os elementos inversos $y, z \in \mathbb{K}$, cuja existência é garantida para cada $x \in \mathbb{K}$, sendo denotados por $-x$ e x^{-1} e denominados elemento *simétrico* e *recíproco*, respectivamente.

Escrevendo $x - y = x + (-y)$ para a *subtração* e $x/y = x \cdot y^{-1}$ para o *quociente* num corpo qualquer, como sempre o fizemos em $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, obtemos todas as regras usuais da aritmética (ver Exercício A.12). Por exemplo, mostra-se que $0 \cdot x = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{K}$. Assim, o simétrico -1 de 1 satisfaz $(-1) \cdot x = -x$, para cada $x \in \mathbb{K}$. De fato,

$(-1)\cdot x + x = (-1)\cdot x + 1\cdot x = (-1+1)\cdot x = 0\cdot x = 0$, portanto, $(-1)\cdot x = -x$, pela unicidade do elemento simétrico. Também pela unicidade do simétrico, $-(-x) = x$ e, em particular, $(-1)\cdot(-1) = 1$.

Também podemos introduzir a notação de potenciação num corpo qualquer, definindo $x^1 = x$ e $x^2 = x\cdot x$ e, mais geralmente,

$$x^{n+1} = x\cdot x^n,$$

para cada natural n.

Seja $\mathbb{K}$ um corpo qualquer. Por definição, $\mathbb{K}$ contém, pelo menos, os elementos distintos 0 e 1. Além desses, podemos formar, sempre, a soma de 1 consigo mesmo, obtendo $1+1 = 2\cdot 1$, $1+1+1 = 3\cdot 1$, etc. Assim obtemos todos os elementos “naturais”

$$\mathbb{N} = \{n\cdot 1 : n = 1, 2, 3, \dots\}$$

de $\mathbb{K}$. Observe que esse subconjunto $\mathbb{N}$ de $\mathbb{K}$ pode ser caracterizado como o menor subconjunto S de $\mathbb{K}$ tal que $1 \in S$ e satisfaz a afirmação $s \in S \Longrightarrow (s+1) \in S$, para cada $s \in S$. (Exercício A.14). Além disso, temos $0 \in \mathbb{K}$ e cada simétrico $-n = (-1)\cdot n \in \mathbb{K}$, portanto obtemos os elementos “inteiros” de $\mathbb{K}$. Finalmente, como $m/n = m\cdot(1/n) \in \mathbb{K}$, obtemos os elementos “racionais” de $\mathbb{K}$.

No entanto, num corpo $\mathbb{K}$ qualquer, pode ocorrer que esses elementos não sejam todos distintos, de modo que não podem desempenhar sua função usual conhecida de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.

Exemplo A.1. O conjunto $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\cdot\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{p-1}\}$ tem uma estrutura de corpo (quociente) sempre que p for um inteiro primo. Por exemplo, $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ é um corpo “mínimo”, constituído de dois elementos, apenas. A soma e o produto de $\mathbb{Z}_p$ são definidos como em $\mathbb{Z}$, mas sempre tomando o resto na divisão por p, ou, como se diz, *congruência módulo p*. Por exemplo, temos $6 = 1 \pmod 5$ e $8 = 3 \pmod 5$ em $\mathbb{Z}$, portanto, em $\mathbb{Z}_5$, valem $\overline{3}+\overline{3} = \overline{6} = \overline{1}$ e $\overline{4}\cdot\overline{2} = \overline{8} = \overline{3}$.

Assim, $5\cdot\overline{1} = \overline{5} = \overline{0}$ em $\mathbb{Z}_5$ e, em geral, sempre $p\cdot\overline{1} = \overline{p} = \overline{0}$ em $\mathbb{Z}_p$, de modo que, em $\mathbb{Z}_p$, os “naturais”, os “inteiros” e os “racionais” de $\mathbb{Z}_p$ coincidem, todos, com $\mathbb{Z}_p$. ⊚

Dizemos que um corpo tem *característica* 0 se seus "naturais" são todos distintos, ou seja, se $n \cdot 1 \neq 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Isso equivale a exigir que $0 \notin \mathbb{N}$. Os corpos $\mathbb{Z}_p$ não têm, mas $\mathbb{Q}$ tem característica 0, sendo o *menor* desses corpos.

Se um corpo $\mathbb{K}$ tem característica 0, podemos construir autênticas cópias (isomorfas) de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ dentro de $\mathbb{K}$, da mesma maneira pela qual construímos $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{N}$. Assim,

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K},$$

sempre que $\mathbb{K}$ for um corpo de característica 0.

Corpos Ordenados

No entanto, a característica 0, em si, não determina o corpo dos reais, pois também o corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais e o corpo $\mathbb{C}$ dos complexos têm característica 0. A propriedade que falta num corpo $\mathbb{K}$ de característica 0 para ser útil em Análise é a da ordem. Dizemos que um corpo $\mathbb{K}$ é *ordenado* se existir um subconjunto $P \subseteq \mathbb{K}$ com as duas propriedades seguintes.

(O1) *Tricotomia*: dado $x \in \mathbb{K}$, vale exatamente uma das três opções:

$$x \in P, \quad x = 0, \quad \text{ou} \quad -x \in P.$$

(O2) *Fechamento*: dados $x, y \in P$, também $x + y \in P$ e $x \cdot y \in P$.

Pensando em $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, o conjunto P é, simplesmente, o conjunto dos números positivos. Assim, escrevendo $-P = \{x \in \mathbb{K} : -x \in P\}$, dizemos que os elementos de P são *positivos* e os de $-P$ são *negativos*. Observe que a exigência O1 afirma que

$$\mathbb{K} = P \cup \{0\} \cup (-P)$$

é uma união disjunta. Logo, 0 é o único elemento de $\mathbb{K}$ que não é positivo nem negativo.

Como fizemos no caso de $\mathbb{Q}$, dados $x, y \in \mathbb{K}$, dizemos que y é *menor do que* x, ou que x é *maior do que* y, se $x - y \in P$, e escrevemos $y < x$ ou $x > y$. Em particular, $x > 0$ significa $x \in P$, ou seja, que x é positivo. As expressões $y \leqslant x$ e $x \geqslant y$ têm os significados esperados.

As propriedades da ordem num corpo ordenado são as que conhecemos de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. Para referência futura, reunimos todas no resultado seguinte.

Proposição A.2. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. As afirmações seguintes são relativas a elementos $x, y, z, t \in \mathbb{K}$ quaisquer.*

(O3) *Tricotomia: vale exatamente uma das opções:*

$$x < y, \quad x = y, \quad \textit{ou} \quad x > y.$$

(O4) $0 < x^2$, *para cada* $x \neq 0$; *em particular,* $0 < 1$.

(O5) *Transitividade: se* $x < y$ *e* $y < z$, *então* $x < z$.

(O6) *Se* $x < y$ *e* $z \leqslant t$, *então* $x + z < y + t$.

(O7) *Se* $x < y$ *e* $z > 0$, *então* $x \cdot z < y \cdot z$;
analogamente, se $x < y$ *e* $z < 0$, *então* $x \cdot z > y \cdot z$.

(O8) *Se* $0 < x$ *e* $0 < x \cdot y$, *então* $0 < y$ *e* $0 < 1/x$.

(O9) *Se* $0 < x < y$, *então* $0 < 1/y < 1/x$.

Demonstração. Sejam x, y, z elementos quaisquer do corpo ordenado $\mathbb{K}$. Por O1, $x - y \in P$, $x - y = 0$ ou $y - x = -(x - y) \in P$, ou seja, vale O3. Se $x \neq 0$, então $x \in P$ ou $-x \in P$, portanto O2 garante $x^2 = x \cdot x = (-x) \cdot (-x) \in P$. Isso mostra O4. Para mostrar O5, O6 e O7, basta observar que $z - x = (z - y) + (y - x)$, $(y + t) - (x + z) = (y - x) + (t - z)$, $y \cdot z - x \cdot z = (y - x) \cdot z$ e $x \cdot z - y \cdot z = (y - x) \cdot (-z)$.

Provemos O8. Sejam x, y dados, com $0 < x$. Se $y = 0$, então $x \cdot y = 0$ e, se $0 < -y$, então $0 < x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$, ou seja, $x \cdot y < 0$. Logo, $0 < y$ decorre de $0 < x \cdot y$. Em particular, $0 < 1/x$ decorre de $0 < 1 = x \cdot (1/x)$. Finalmente, $1/x - 1/y = (y - x) \cdot (1/x \cdot y) > 0$, sempre que $0 < x < y$, mostrando O9. ☐

Observe que, por O4, $\mathbb{C}$ não pode ser ordenado, pois $i^2 = -1 < 0$. As propriedades O3, O5, O6 e O7 são suficientes para que um corpo com uma *ordem total* seja ordenado. (Ver Exercício A.13.)

Todo corpo ordenado tem característica 0, pois $0 < 1$ fornece $1 < 1 + 1 = 2$, que fornece $2 < 2 + 1 = 3$, e assim por diante.

Assim, nos corpos ordenados, as inclusões $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$ respeitam, inclusive, a ordem de $\mathbb{K}$.*

Dado $x \in \mathbb{K}$, definimos o *valor absoluto* de x por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geqslant 0, \\ -x, & \text{se} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

Sempre $|x| \geqslant 0$, com $|x| = 0$ se, e só se, $x = 0$. Essa propriedade, junto com V2 e V4 a seguir, caracterizam a noção de valor absoluto em corpos arbitrários, ordenados ou não.

As propriedades do valor absoluto num corpo ordenado são as que conhecemos de $\mathbb{R}$. Para referência futura, reunimos todas no resultado seguinte.

Proposição A.3. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. As afirmações seguintes são válidas para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$.*

(V1) $|-x| = |x|$.

(V2) $|x \cdot y| = |x|\,|y|$.

(V3) $|x| \leqslant y$ *se, e só se,* $-y \leqslant x \leqslant y$.

(V4) *Desigualdade triangular:* $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

(V5) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y| \leqslant |x| + |y|$.

Demonstração. Sejam x, y elementos quaisquer do corpo ordenado $\mathbb{K}$. Lembrando que $-(-x) = x$ e que $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$, as duas primeiras afirmações decorrem diretamente da definição. Para provar a terceira, basta observar que de $0 \leqslant x \leqslant y$ decorre $-y \leqslant 0 \leqslant x \leqslant y$ e, de $x \leqslant 0 \leqslant -x \leqslant y$, decorre $-y \leqslant x \leqslant 0 \leqslant y$. Reciprocamente, se $-y \leqslant x \leqslant y$, então $x \leqslant y$ e $-x \leqslant -(-y) = y$, de modo que $|x| \leqslant y$.

Para mostrar V4, observe que $x \leqslant |x|$ e $y \leqslant |y|$, portanto, $x + y \leqslant |x| + |y|$, pela propriedade O6. Como também $-x \leqslant |x|$ e $-y \leqslant |y|$, a mesma propriedade de ordem garante que $-(x + y) \leqslant |x| + |y|$. Por definição, decorre a propriedade V4. Por V3, a primeira desigualdade de V5 equivale a

$$-|x - y| \leqslant |x| - |y| \leqslant |x - y|,$$

*Ver demonstração do Teorema A.10, no Apêndice A3.

que, por sua vez, equivale a

$$|y| \leqslant |x| + |x - y| \quad \text{e} \quad |x| \leqslant |y| + |x - y|.$$

Escrevendo $y = x + (y - x)$ e $x = y + (x - y)$, ambas decorrem de V1 e V4. A segunda desigualdade de V5 também segue de V1 e V4. $\square$

De posse da noção de valor absoluto, podemos introduzir em $\mathbb{K}$ as noções de distância e intervalos e, com elas, todos os conceitos básicos da Análise Matemática, tais como sequências convergentes, funções contínuas, funções deriváveis e a integral. Mesmo assim, existem corpos ordenados que são um pouco diferentes do que se poderia imaginar.

Exemplo A.4. Seja $\mathbb{Q}(t)$ o conjunto das funções racionais $p(t)/q(t)$ numa variável t com coeficientes em $\mathbb{Q}$. Observe que, tomando a função constante $q(t) = 1$ como denominador, $\mathbb{Q}(t)$ inclui todas as funções polinomiais com coeficientes em $\mathbb{Q}$; em particular, todos os racionais, como funções constantes, ou seja, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(t)$. É possível verificar que as operações usuais de funções fazem de $\mathbb{Q}(t)$ um corpo. Observe, também que as funções $y = t$ e $y = t^2/t$ de $\mathbb{Q}(t)$ são consideradas iguais em $\mathbb{Q}(t)$, embora, como funções, tenham domínios diferentes.

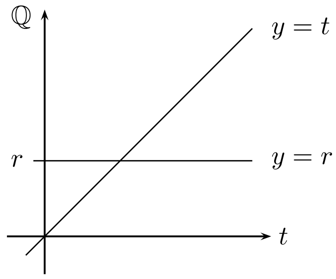

Figura A.1 A função $y = t$ é maior do que qualquer função $y = r$

Definimos uma ordem de $\mathbb{Q}(t)$ por $p(t)/q(t) > 0$ se, e só se, $a_n b_m > 0$ em $\mathbb{Q}$, onde $p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ e $q(t) = b_m t^m + \cdots + b_1 t + b_0$, com $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$. Nessa ordem, uma função racional $f(t)$ é maior do que uma função racional $g(t)$ se, e só se, o gráfico de $f(t)$ no plano de abscissa t e ordenada $\mathbb{Q}$ está acima do de $g(t)$, a partir de algum ponto da reta racional (ver Exercício A.16).

Em particular, $t > r$, para cada $r \in \mathbb{Q}$, já que $1 > 0$ em $\mathbb{Q}$, portanto, $t-r = (1t-r)/1 > 0$. Isso significa que qualquer polinômio não constante é maior de que qualquer elemento de $\mathbb{Q}$ e, em particular, que $\mathbb{N}$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{Q}(t)$, pois $\mathbb{N}$ cabe no intervalo limitado $(0,t) = \{x \in \mathbb{Q}(t) : 0 < x < t\}$ de $\mathbb{Q}(t)$. ⊚

Corpos Arquimedianos

Dizemos que um corpo ordenado é *arquimediano* se valer alguma das quatro propriedades da proposição seguinte (portanto, as quatro; ver a Proposição A.6 na próxima seção para mais duas propriedades equivalentes). Sabemos que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são arquimedianos, mas o corpo ordenado das frações racionais do Exemplo A.4 não é.

Proposição A.5. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado qualquer. As afirmações seguintes são equivalentes.*

(E1) *Se $x \in \mathbb{K}$ é positivo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < x$.*

(E2) *Se $x, y \in \mathbb{K}$ são positivos, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < y < n \cdot x$.*

(E3) *Dado qualquer $x \in \mathbb{K}$, existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$.*

(E4) *Dados quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$ com $x < y$, existe algum $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.*

Demonstração. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado com a propriedade E1. Dados $x, y \in \mathbb{K}$ positivos, temos que $x/y \in \mathbb{K}$ é positivo, portanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 1/n < x/y$. Isso significa que $0 < y < n \cdot x$ e prova E2. Supondo que valha E2, temos $x < 1$ para cada $x \in \mathbb{K}$ que não seja positivo; se x é positivo, $1/x > 0$ e E2 fornece n tal que $\frac{1}{n} < 1/x$, ou seja, $x < n$ e vale E3. Supondo que valha E4 e que $x \in \mathbb{K}$ seja positivo, obtemos $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$ tal que $0 < \frac{1}{n} \leqslant \frac{m}{n} < x$, de modo que vale E1. Resta provar que E3 $\Rightarrow$ E4.

Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado com a propriedade E3 e sejam $x, y \in \mathbb{K}$ quaisquer tais que $x < y$. A hipótese E3 garante que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/(y-x) < n$, ou seja, $1 < n \cdot (y-x) = n \cdot y - n \cdot x$. Logo, $n \cdot y > 1 + n \cdot x$.

Supomos, agora, que $x > 0$. Então existe, por E3, algum natural $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot x < m$. O conjunto desses naturais m tem algum menor elemento $m \in \mathbb{N}$ que satisfaz $n \cdot x < m$. Agora, de duas, uma: ou $m - 1 = 0$ ou $m - 1 \in \mathbb{N}$. Em ambos casos, $m - 1 \leqslant n \cdot x < m$. Assim, obtemos

$$n \cdot x < m \leqslant n \cdot x + 1 < n \cdot y,$$

do que decorre $n \cdot x < m < n \cdot y$, ou seja, $r = \frac{m}{n}$ satisfaz E4, nesse caso $x > 0$.

Finalmente, se $x \leqslant 0$, E3 fornece $k \in \mathbb{N}$ tal que $-x < k$ e, portanto, $0 < x + k < y + k$. Pela parte que acabamos de provar, existe $r \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$ tal que $x + k < r < y + k$, do que obtemos $x < r - k < y$, com $r - k \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$. Isso mostra que E3 $\Rightarrow$ E4. $\square$

A3 Os Completamentos de um Corpo

Nesta seção, mostramos que as várias opções de como caracterizar o que distingue $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$, comentadas à página 10, são todas equivalentes num corpo ordenado arquimediano $\mathbb{K}$ qualquer e também mostramos que todos corpos ordenados completos são isomorfos.

Conforme observamos na Seção A2, num corpo ordenado podemos introduzir o valor absoluto e intervalos e, com elas, todos os conceitos básicos da Análise Matemática, tais como sequências convergentes, funções contínuas, funções deriváveis e a integral. O cuidado é que, em $\mathbb{K}$ até podemos usar números racionais mas certamente não podemos usar números reais; em particular, todos os epsilons também devem ser elementos de $\mathbb{K}$. Por exemplo, dizemos que uma sequência (s_n) de $\mathbb{K}$ é *de Cauchy* se, dado qualquer $\varepsilon \in \mathbb{K}$ positivo, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que vale $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$, para quaisquer $n, p \in \mathbb{N}$ com $n \geqslant N$. Com esse cuidado em mente, podemos usar todas as nossas definições do texto, bastando trocar $\mathbb{R}$ por $\mathbb{K}$, não havendo a necessidade de reproduzir todas no presente contexto de um corpo ordenado arbitrário.

Começamos ampliando as equivalências da Proposição A.5.

Proposição A.6. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado qualquer. As afirmações seguintes são equivalentes.*

(E) $\mathbb{K}$ *é um corpo arquimediano.*

(E5) *Toda sequência monótona e limitada é de Cauchy.*

(E6) *Toda sequência limitada tem uma subsequência de Cauchy.*

Demonstração. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado com a propriedade E5 e consideremos qualquer sequência limitada de $\mathbb{K}$. Sabemos (Lema 2.18) que toda sequência limitada possui alguma subsequência monótona, que também é limitada, portanto, por hipótese, de Cauchy. Assim, vale E6. Se $\mathbb{K}$ for não arquimediano, então a sequência (n) dos naturais é limitada (ver E3) e, evidentemente, não é de Cauchy, pois $|(n+p)-n| = p \geqslant 1$, para $n, \in \mathbb{N}$. Em particular, nenhuma subsequência de (n) é de Cauchy, portanto, não vale E6. Resta mostrar que vale E5 em corpos arquimedianos.

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado arquimediano e (s_n) uma sequência não decrescente e limitada qualquer de $\mathbb{K}$. Seja $c \in \mathbb{K}$ uma cota superior dos termos s_n da sequência. Para mostrar que (s_n) é de Cauchy, fixemos, arbitrariamente, algum $\varepsilon \in \mathbb{K}$ positivo. Consideremos os elementos $c, c-\varepsilon, c-2\varepsilon, \ldots$ de $\mathbb{K}$. Como c é cota superior de $\{s_n\}$ e $\mathbb{K}$ é arquimediano, existe um único $m \in \mathbb{N}$ tal que $c-(m-1)\varepsilon$ ainda é cota superior de $\{s_n\}$, mas $c-m\varepsilon$ não é mais cota superior de $\{s_n\}$. Tomando $N \in \mathbb{N}$ tal que $c - m\varepsilon < s_N$ e lembrando que (s_n) é não decrescente, obtemos

$$c - m\varepsilon < s_N \leqslant s_n \leqslant s_{n+p} \leqslant c-(m-1)\varepsilon,$$

para cada $n \geqslant N$ e $p \in \mathbb{N}$. Como ε é arbitrário, (s_n) resulta ser de Cauchy. Pelo Exercício A.19, resulta que vale E5 em corpos ordenados arquimedianos. □

Uma das opções de caracterizar corpos ordenados completos é por meio de cortes de Dedekind, que ainda não definimos. No caso de $\mathbb{Q}$, a motivação para esse conceito pode ser encontrada na próxima seção. Em geral, dado um corpo ordenado $\mathbb{K}$ qualquer, dizemos que um subconjunto $X \subseteq \mathbb{K}$ é um *corte* de $\mathbb{K}$ se

(D1) X não é vazio nem igual a K,

(D2) $(-\infty, x] \subseteq X$, para cada $x \in X$, e

(D3) X não tem maior elemento.

Um elemento $\sigma \in \mathbb{K}$ é um *elemento separador* de um corte X se $X = (-\infty, \sigma)$.

Exemplo A.7. Dado qualquer $\sigma \in \mathbb{K}$, o intervalo $(-\infty, \sigma)$ de $\mathbb{K}$ é um corte com elemento separador σ.

Dado um corte X qualquer de $\mathbb{K}$, mostremos que X é não vazio e limitado superiormente e mais, se o corte X possuir supremo em $\mathbb{K}$, então $\sup X$ é o elemento separador de X.

Pela propriedade D1, existe pelo menos algum $c \in \mathbb{K}$ que não pertence a X. Se existisse $x \in X$ tal que $c \leqslant x$, então D2 acarretaria $c \in X$. Logo, cada $c \in \mathbb{K} - X$ é uma cota superior de X. Segue que todo corte é não vazio e limitado superiormente. Se existir $c = \sup X$ em $\mathbb{K}$, então $X \subseteq (-\infty, c]$ e, por D3, $c \notin X$, de modo que c é o elemento separador de X. ⊚

Teorema A.8. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado arquimediano. As afirmações seguintes, todas relativas a $\mathbb{K}$, são equivalentes.*

(K1) *Todo conjunto não vazio e limitado superiormente tem supremo.*

(K2) *Todo corte tem elemento separador.*

(K3) *Toda sequência monótona e limitada converge.*

(K4) *Toda sequência limitada tem subsequência convergente.*

(K5) *Toda sequência de intervalos encaixados fechados e limitados tem interseção não vazia.*

(K6) *Toda sequência de Cauchy converge.*

(K7) *Toda função contínua tem a propriedade do valor intermediário.*

Demonstração. No exemplo precedente, vimos que K1 $\Rightarrow$ K2. Reciprocamente, seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado no qual todo corte tem elemento separador e mostremos que vale K1. Seja $Y \subseteq \mathbb{K}$ um subconjunto não vazio e limitado superiormente arbitrário. Se Y possuir elemento máximo, então esse elemento é o supremo de Y e nada mais há a mostrar. Supomos, então, que Y não possui elemento máximo e consideramos a união X de todos os intervalos $(-\infty, y]$, com $y \in Y$,

$$X = \{x \in \mathbb{K} : \text{ existe algum } y \in Y \text{ tal que } x \leqslant y\}.$$

Praticamente por definição, X satisfaz D2 e, como Y não é vazio e limitado superiormente, é fácil verificar que X também satisfaz D1. Dado $x \in X$, seja $y \in Y$ tal que $x \leqslant y$. Como Y não tem maior elemento, existe $y < y' \in Y$. Então o ponto médio $x' = \frac{1}{2}(y+y')$, que é maior do que y, é maior do que x e pertence a X, ou seja, x não é o maior elemento de X.

Dessa forma mostramos que X é um corte de $\mathbb{K}$ e, por hipótese, $X = (-\infty, \sigma)$, para algum $\sigma \in \mathbb{K}$. Dado $z < \sigma$, existe $x \in X$ tal que $z < x$, portanto, existe $y \in Y$ tal que $x \leqslant y$ e decorre que $z < y$, mostrando que z não é cota superior de Y. Como $Y \subseteq X$, resulta que $\sigma = \sup Y$. Assim, mostramos que K1 $\Longleftrightarrow$ K2 em corpos ordenados.

No Teorema 2.7 demonstramos que K1 $\Rightarrow$ K3, no Exercício 2.19 demonstramos que K3 $\Rightarrow$ K5, no Teorema 2.17 demonstramos que K3 $\Rightarrow$ K4, no Teorema 2.16 demonstramos que K4 $\Rightarrow$ K6 e, no Teorema 3.7, demonstramos que K1 $\Rightarrow$ K7. A bem da verdade, tudo isso foi provado em $\mathbb{R}$, mas o leitor é convidado para reproduzir as provas pertinentes em $\mathbb{K}$ e mais, constatar que para obter K1 $\Rightarrow$ K3 $\Rightarrow$ K4 não se utiliza a propriedade arquimediana de $\mathbb{R}$.

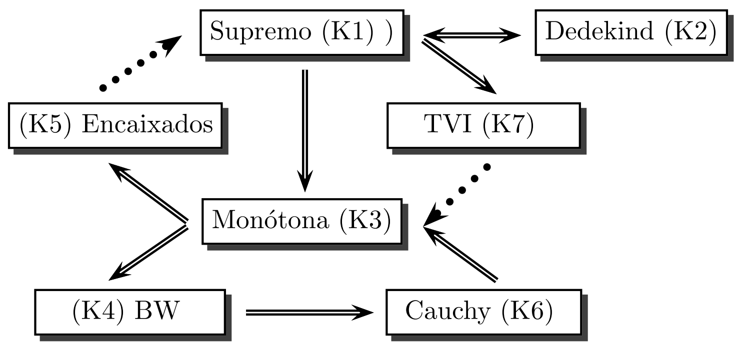

Figura A.2 A demonstração do Teorema A.8

A prova de K6 $\Rightarrow$ K3 é imediata, pela Proposição A.6. De fato, seja (s_n) uma sequência monótona e limitada de $\mathbb{K}$. Pela Proposição A.6, (s_n) é de Cauchy e, portanto, por K6, convergente. Assim, resta provar que K7 $\Rightarrow$ K3 e que K5 $\Rightarrow$ K1, para concluir a demonstração do teorema.

Seja, pois, $\mathbb{K}$ um corpo arquimediano com a propriedade do valor intermediário K7 e mostremos que vale K3. Seja (s_n) uma sequência não decrescente e limitada qualquer de $\mathbb{K}$ e mostremos que (s_n) converge. Consideremos a função $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ é cota superior de } \{s_n\}, \\ 0, & \text{se } x \text{ não é cota superior de } \{s_n\}. \end{cases}$$

Suponha que $\sigma \in \mathbb{K}$ não seja uma cota superior de $\{s_n\}$. Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma < s_N$ e, portanto, nenhum elemento de $(-\infty, s_N)$ pode ser cota superior de $\{s_n\}$; em particular, ψ é constante e igual a 0 nesse intervalo de $\mathbb{K}$ e, portanto, é contínua em σ.

Como a imagem $\psi(\mathbb{K}) = \{0, 1\}$ de ψ não é um intervalo e $\mathbb{K}$ tem a propriedade do valor intermediário, necessariamente existe algum ponto $c \in \mathbb{K}$ no qual ψ é descontínua. Pelo que acabamos de verificar, c é cota superior de $\{s_n\}$. Seja $\varepsilon \in \mathbb{K}$ positivo dado arbitrariamente. Se $c - \varepsilon$ fosse uma cota superior de $\{s_n\}$, então cada elemento de $(c - \varepsilon, \infty)$ também seria uma cota superior de $\{s_n\}$ e, portanto, ψ seria constante e igual a 1 nesse intervalo de $\mathbb{K}$; em particular, ψ seria contínua em σ, o que é impossível. Logo, $c - \varepsilon$ não é cota superior de $\{s_n\}$, ou seja, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $c - \varepsilon < s_N$. Como (s_n) é não decrescente e c é cota superior, resulta

$$c - \varepsilon < s_N \leqslant s_n \leqslant c,$$

para cada $n \geqslant N$. Como ε é arbitrário, concluímos que $\lim s_n = c \in \mathbb{K}$. Assim, $\mathbb{K}$ tem a propriedade K3.

Finalmente, mostremos que vale o axioma fundamental em corpos ordenados arquimedianos com a propriedade K5 dos intervalos encaixados. Seja, pois $X \subseteq \mathbb{K}$ um conjunto limitado superiormente e escolhamos dois elementos $x_1, y_1 \in \mathbb{K}$ tais que x_1 não é, mas y_1 é cota superior de X. Escrevendo $I_1 = [x_1, y_1]$, temos que I_1 é um intervalo compacto. Se y_1 é a menor cota superior de X, nada mais há para provar. Caso contrário, tomamos o ponto médio $\sigma = \frac{1}{2}(x_1 + y_1)$ de x_1 e y_1 e verificamos se σ é cota superior de X. Se σ for cota superior de X, definimos $x_2 = x_1$ e $y_2 = \sigma$; se σ não for cota superior de X, definimos $x_2 = \sigma$ e $y_2 = y_1$. Em ambos casos, escrevemos $I_2 = [x_2, y_2]$. Assim, $I_2 \subseteq I_1$ e o comprimento do intervalo compacto I_2 é a metade do de I_1, isto é, $y_2 - x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - x_1)$.

Continuando, se y_2 é a menor cota superior de X, nada mais há para provar. Caso contrário, tomamos o ponto médio $\sigma = \frac{1}{2}(x_2 + y_2)$ de x_2 e y_2 e verificamos se σ é cota superior de X. Se σ for cota superior de X, definimos $x_3 = x_2$ e $y_3 = \sigma$; se σ não for cota superior de X, definimos $x_3 = \sigma$ e $y_3 = y_2$. Em ambos casos, escrevemos $I_3 = [x_3, y_3]$. Assim, $I_3 \subseteq I_2$ e o comprimento do intervalo compacto I_3 é a metade do de I_2, isto é, $y_3 - x_3 = \frac{1}{2}(y_2 - x_2) = \frac{1}{2^2}(y_1 - x_1)$.

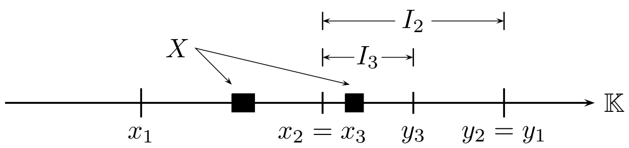

Figura A.3 O começo da sequência de intervalos encaixados

Dessa forma, chegamos num y_n que é o supremo de X ou, então, (usando indução matemática), obtemos uma sequência $I_n = [x_n, y_n]$ de intervalos compactos *encaixados* tais que cada x_n não é, mas cada y_n é uma cota superior de X, com $y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{1}{2^n}(y_1 - x_1)$.

Por hipótese, essa sequência possui algum *ponto limite* $c \in \mathbb{K}$, ou seja, $c \in I_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{K}$ é arquimediano, temos $\frac{1}{2^n} \longrightarrow 0$, portanto, de $x_n \leqslant c \leqslant y_n$ decorre que $x_n \longrightarrow c$ e $y_n \longrightarrow c$. Mostremos que $c = \sup X$. Como cada y_n é cota superior, c é cota superior (ver Exercício 2.7). Dado $\varepsilon \in \mathbb{K}$ positivo, escolhemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $I_N \subseteq (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, de modo que $c - \varepsilon < x_N$. Como x_N não é cota superior, resulta que $c - \varepsilon$ tampouco pode ser cota superior. Já que ε foi arbitrário, concluímos que $c = \sup X$. Assim, vale o axioma fundamental K1 em $\mathbb{K}$. $\square$

Essas sete equivalências não contam toda a história. Introduzindo o conceito de derivada de funções definidas em intervalos de um corpo ordenado $\mathbb{K}$ qualquer, podemos mostrar que as sete equivalências do teorema são equivalentes, ainda, às quatro condições seguintes, que também foram tratadas neste texto.

A afirmação K8 e K9 compõe o Corolário 4.22, a afirmação K10 é o Exercício 4.9 e a afirmação K11 é o Teorema 4.20 do valor médio, de Lagrange.

(K8) *Toda função derivável com derivada nula num intervalo é constante.*

(K9) *Toda função derivável com derivada não negativa num intervalo é não decrescente.*

(K10) *Toda função derivável num intervalo satisfaz a desigualdade do valor médio.*

(K11) *Toda função derivável num intervalo satisfaz a igualdade do valor médio.*

Nas afirmações K10 e K11 utilizamos a terminologia seguinte. Seja $f : I \to \mathbb{K}$ uma função qualquer derivável num intervalo $I \subseteq \mathbb{K}$.

Dizemos que f *satisfaz a desigualdade do valor médio* se dado qualquer $M \in \mathbb{K}$ não negativo tal que valha $f'(x) \leqslant M$, para cada $x \in I$, então

$$f(b) - f(a) \leqslant M \cdot (b - a),$$

para quaisquer $a, b \in I$, com $a < b$.

Dizemos que f *satisfaz a igualdade do valor médio* se dados quaisquer $a, b \in I$ distintos, existir c entre a e b tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Convém observar que as quatro primeiras afirmações do teorema são equivalentes em corpos ordenados quaisquer.

Corolário A.9. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. As afirmações seguintes, todas relativas a $\mathbb{K}$, são equivalentes.*

(K1) *Todo conjunto não vazio e limitado superiormente tem supremo.*

(K2) *Todo corte tem elemento separador.*

(K3) *Toda sequência monótona e limitada converge.*

(K4) *Toda sequência limitada tem subsequência convergente.*

Se valer qualquer uma dessas afirmações, $\mathbb{K}$ é arquimediano.

Demonstração. Na prova do teorema precedente, observamos que K1 e K2 são equivalentes em quaisquer corpos ordenados. No mesmo teorema também mostramos que K1 $\Rightarrow$ K3 $\Rightarrow$ K4, sem usar essa propriedade. Finalmente, seja $\mathbb{K}$ um corpo com a propriedade de BW, ou seja, K4. Então é evidente que vale E6 e, portanto $\mathbb{K}$ é arquimediano. Pelo teorema precedente, já sabemos que K4 $\Rightarrow$ K1 é uma afirmação válida em corpos arquimedianos. □

Dizemos que um corpo ordenado é *completo* se vale o axioma fundamental, ou seja, se todo subconjunto não vazio e limitado superiormente possuir supremo. Sabemos que $\mathbb{R}$ é completo, mas não $\mathbb{Q}$. Pelo último resultado enunciado, todo corpo ordenado completo é arquimediano.

Unicidade

Dois corpos ordenados quaisquer não têm motivo para serem considerados iguais: basta olhar para $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. No entanto, dois corpos ordenados *completos* quaisquer sempre podem ser considerados iguais, ou seja, do ponto de vista algébrico, *isomorfos*. Assim, podemos dizer que $\mathbb{R}$ é o *único* corpo ordenado completo.

Teorema A.10. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado completo. Então existe um isomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ de corpos ordenados, ou seja, uma bijeção que satisfaz as propriedades seguintes.*

(i) *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, vale $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.*

(ii) *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, vale $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$.*

(iii) *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $x < y$, então $\varphi(x) < \varphi(y)$.*

Assim, podemos identificar $\mathbb{R}$ com $\mathbb{K}$ via $x \equiv \varphi(x)$.

Demonstração. Apresentamos apenas um esboço da demonstração (indicando o Capítulo 29 de [16] para uma demonstração exaustiva). Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado qualquer e denotemos por $0_{\mathbb{K}}$ e $1_{\mathbb{K}}$ os elementos zero e unidade de $\mathbb{K}$. Evidentemente, começamos definindo φ por $\varphi(0) = 0_{\mathbb{K}}$ e $\varphi(1) = 1_{\mathbb{K}}$ e, mais geralmente, $\varphi(n) = 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} + \cdots + 1_{\mathbb{K}} = n \cdot 1_{\mathbb{K}}$ e $\varphi(-n) = (-n) \cdot 1_{\mathbb{K}}$ e mostramos que φ satisfaz (i)–(iii) para $n, m \in \mathbb{Z}$. Observe que, por ser $\mathbb{K}$ ordenado, $\varphi(n) \neq 0$

e, portanto, $\varphi(n)$ é invertível em $\mathbb{K}$. Em seguida, definimos $\varphi(r) = \varphi(m/n) = \varphi(m)/\varphi(n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)^{-1}$, para cada racional $r \in \mathbb{Q}$, mostramos que essa definição independe da particular representação m/n do racional r e verificamos que, agora, φ satisfaz (i)–(iii) para $x, y \in \mathbb{Q}$.

Assim, chegamos num isomorfismo φ do corpo ordenado $\mathbb{Q}$ sobre os "racionais" de $\mathbb{K}$, justificando a afirmação à página 129.

Para estender φ a $\mathbb{R}$, passamos a supor que $\mathbb{K}$ é completo (portanto, arquimediano). Dado qualquer $x \in \mathbb{R}$, definimos

$$\varphi(x) = \sup\{\varphi(r) : r \in \mathbb{Q} \text{ e } r < x\} \in \mathbb{K}.$$

Inicialmente conferimos que essa definição coincide com a anterior no caso $x \in \mathbb{Q}$. Ora, pelo Exercício 1.5, sabemos que, para cada $r \in \mathbb{Q}$, vale $r = \sup\{s \in \mathbb{Q} : s < r\}$. De maneira totalmente análoga, mostramos que, também no corpo arquimediano $\mathbb{K}$, cada "racional" $\varphi(r)$ é o supremo do conjunto dos "racionais" menores do que $\varphi(r)$, de modo que φ está bem definida em $\mathbb{Q}$. Também é fácil observar que realmente existe o supremo $\varphi(x)$ em $\mathbb{K}$ e que $\varphi(x) \leqslant \varphi(r)$ se $x < r$, com $x \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{Q}$.

Mostremos que vale (iii) em $\mathbb{R}$. Dados $x < y$ em $\mathbb{R}$, escolhemos $r, s \in \mathbb{Q}$ tais que $x < r < s < y$ e então, como já sabemos que $\varphi(r) < \varphi(s)$, resulta $\varphi(x) \leqslant \varphi(r) < \varphi(s) \leqslant \varphi(y)$, pelo que acabamos de explicitar. Isso mostra (iii). Finalmente, a demonstração de que φ é sobrejetora e satisfaz (i) e (ii) é deixada a cargo do leitor. $\square$

A4 Completamentos de $\mathbb{Q}$

Nesta seção final, esboçamos as duas construções de $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$ mais famosas, devidas a R. Dedekind e G. Cantor. Assim, finalmente podemos dizer que o corpo ordenado completo $\mathbb{R}$ existe e é único; o axioma fundamental, então, passa a ser um teorema.

Dedekind

Inspirado na teoria de proporções de Eudoxo, conforme exposta no Livro V do mais famoso livro de Matemática, *Os Elementos*, de Euclides, R. Dedekind concebeu a noção de *corte* como uma maneira de identificar cada elemento de $\mathbb{Q}$ e também cada "furo" de $\mathbb{Q}$ com um elemento bem determinado de um novo conjunto, que então é $\mathbb{R}$.

Essencialmente, a observação básica é que a coleção dos intervalos ilimitados $(-\infty, b)$ de $\mathbb{Q}$ fornece uma cópia de $\mathbb{Q}$, pois cada $b \in \mathbb{Q}$ define exatamente um desses intervalos, que sempre são não vazios $(b-1<b)$, distintos de $\mathbb{Q}$ e desprovidos de elemento máximo. No entanto, cada "furo" de $\mathbb{Q}$, como $\sqrt{2}$, também pode ser caracterizado como um subconjunto não vazio, distinto de $\mathbb{Q}$ e desprovido de elemento máximo, por exemplo, $\{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \text{ ou } x^2 < 2\}$ (ver Exercício 1.11). É claro que, uma vez conhecido $\mathbb{R}$, sabemos que esse conjunto é, simplesmente, $\mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})$, mas a percepção crucial é que esse conjunto pode ser caracterizado totalmente usando só $\mathbb{Q}$.

Generalizando esses intervalos limitados, definimos um *corte de Dedekind* de $\mathbb{Q}$ como um subconjunto X não vazio e distinto de $\mathbb{Q}$ que não tenha maior elemento e que contenha o intervalo $(-\infty, x]$, para cada $x \in X$ (ver definição à página 133).

Para cada $b \in \mathbb{Q}$, o intervalo ilimitado $(-\infty, b)$ de $\mathbb{Q}$ é um corte de $\mathbb{Q}$. Pelo Exercício 1.12, sabermos que, também $\{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 2\}$ é um corte. A diferença crucial desses cortes é que $(-\infty, b)$ tem o *elemento separador* b em $\mathbb{Q}$, ao passo que $\{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 2\}$ não tem, ou seja, $\{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 2\} \neq (-\infty, b)$, para qualquer $b \in \mathbb{Q}$.

Agora *definimos* $\mathbb{R}$ como a totalidade dos cortes de $\mathbb{Q}$, ou seja,

$$\mathbb{R} = \{X : X \text{ é um corte de } \mathbb{Q}\}.$$

Em primeiro lugar, podemos encontrar $\mathbb{Q}$ dentro de $\mathbb{R}$, ou melhor, uma cópia de $\mathbb{Q}$, que é a coleção dos cortes com elemento separador, ou seja, a coleção dos intervalos ilimitados $(-\infty, b)$ de $\mathbb{Q}$. Também vemos, em $\mathbb{R}$, muitos dos "furos" de $\mathbb{Q}$, como as raízes enésimas de naturais, dadas pelos cortes $\{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \text{ ou } x^n < m\}$, com $m \in \mathbb{N}$.

No entanto, esse $\mathbb{R}$ é só um conjunto de cortes e certamente ainda não é um corpo ordenado em que vale a propriedade do supremo. Para isso, precisamos definir no conjunto $\mathbb{R}$ as operações de adição e multiplicação e a ordem e verificar cada uma das exigências C1–C5, O1, O2 e a validade do axioma fundamental. Além disso, precisamos cuidar para que essas operações e a ordem resultem exatamente nas operações e ordem usuais de $\mathbb{Q}$ quando tratarmos dos elementos de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.

Como $b \leqslant c$ em $\mathbb{Q}$ se, e só se, $(-\infty, b) \subseteq (-\infty, c)$, temos uma indicação da ordem "natural" de $\mathbb{R}$: definimos $X \preccurlyeq Y$ por $X \subseteq Y$. Assim $b \leqslant c$ em $\mathbb{Q}$ se, e só se, $(-\infty, b) \preccurlyeq (-\infty, c)$ em $\mathbb{R}$ e é bastante fácil mostrar que $\preccurlyeq$ define uma ordem total em $\mathbb{R}$ (ver definição no Exercício A.13), com a qual então já podemos definir cota superior e supremo em $\mathbb{R}$, segundo $\preccurlyeq$. O espantoso é que até já podemos mostrar que, realmente, qualquer subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ que possua cota superior possui supremo!

Seja $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio qualquer de $\mathbb{R}$. Digamos que $X_0 \in \mathcal{X}$ e que $Y \in \mathbb{R}$ seja uma cota superior de $\mathcal{X}$. Se um corte S fosse o supremo de $\mathcal{X}$, teríamos $X \preccurlyeq S$, ou $X \subseteq S$, pra cada elemento X de $\mathcal{X}$. Então é natural considerar a união de todos os cortes X de $\mathcal{X}$ como candidato a supremo de $\mathcal{X}$, ou seja,

$$S = \{x \in \mathbb{Q} : \text{ existe } X \in \mathcal{X} \text{ tal que } x \in X\} = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} X.$$

Como $X_0 \in \mathcal{X}$, temos $X_0 \subseteq S$, de modo que S é não vazio, e também $X \preccurlyeq Y$, para cada $X \in \mathcal{X}$, pois Y é cota superior, do que decorre que $S \subseteq Y$. Mas Y é um corte, portanto, $Y \neq \mathbb{Q}$ e, em particular, $S \neq \mathbb{Q}$. Dado $x \in S$, existe algum $X \in \mathcal{X}$ tal que $x \in X$. Como X é corte, temos que $(-\infty, x] \subseteq X$ e existe algum $z \in X$ que é maior do que x, portanto obtemos $(-\infty, x] \subseteq X \subseteq S$ e $x < z \in X \subseteq S$. Assim, S é um corte de $\mathbb{Q}$.

Por definição, $X \preccurlyeq S$, para cada $X \in \mathcal{X}$, ou seja, S é uma cota superior de $\mathcal{X}$. Mostremos que é a menor cota superior. Se algum corte Z de $\mathbb{Q}$ for uma cota superior de S, então $X \preccurlyeq Z$, ou seja, $X \subseteq Z$, para cada $X \in \mathcal{X}$, de modo que $S \subseteq Z$, ou seja, $S \preccurlyeq Z$. Assim, $S = \sup \mathcal{X}$.

Resta, portanto, definir a estrutura de corpo ordenado para $\mathbb{R}$. A ordem está quase pronta e a adição é bastante simples, mas a multiplicação requer trabalho. Nada disso será visto aqui. Recomendamos o Capítulo 3 de [1], em que há muita informação, inclusive histórica, a respeito dessa construção de $\mathbb{R}$ e o Apêndice 6 do Volume 1 do livro *Um Curso de Cálculo*, de H. L. Guidorizzi (Editora Livros Técnicos e Científicos, 2001). As duas referências básicas em inglês, que apresentam todos os detalhes, são o Capítulo 28 de [16] e o Apêndice do Capítulo 1 de [8]; do livro de Spivak existe uma tradução para o espanhol e do livro de Rudin, uma para o português, editada de 1971 pela UnB, esgotada, mas encontrável em muitas bibliotecas. ⊚

Cantor

A construção de $\mathbb{R}$ devida a G. Cantor é completamente diferente da de Dedekind.

Na primeira metade do século XIX, B. Bolzano e A. L. Cauchy, de maneira independente, caracterizaram a convergência de uma sequência sem mencionar seu (possivelmente desconhecido) limite, por meio do conceito da sequência agora denominada *de Cauchy*. Por exemplo, todas sequências de racionais cujos limites são irracionais não têm limite em $\mathbb{Q}$, mas são de Cauchy. Ambos Bolzano e Cauchy utilizavam a convergência de toda sequência de Cauchy, sem se darem conta de que isso não estava provado.

Basta observar que para os matemáticos da época, todo número irracional era o limite de alguma sequência de racionais, mas não é logicamente coerente definir $\sqrt{2}$, por exemplo, como sendo o limite de uma sequência, digamos, de $x_0 = 1; x_1 = 1{,}4; x_2 = 1{,}41; x_3 = 1{,}414; x_4 = 1{,}4142; \ldots$ se, para provar a *convergência* dessa sequência de Cauchy, precisamos, antes de tudo, da própria *existência* do número $\sqrt{2}$, que é o limite dessa sequência.

O problema básico é que não se conseguia compreender corretamente a estrutura dos números reais. A bem da verdade, só aos poucos os matemáticos começaram a entender a necessidade de uma formalização – ou *aritmetização* – de $\mathbb{R}$ que possibilitasse entender a natureza dos números reais e a convergência das sequências de Cauchy. Então, em 1872, G. Cantor publicou sua idéia genial de definir os números reais, não como o limite de sequências de racionais, mas sim como as próprias sequências!

Essa construção também exige muito trabalho, mas uma vez na vida de todo estudante de Matemática isso deveria ser desenvolvido passo a passo. Aqui só veremos o esboço da idéia de Cantor, por total falta de espaço. Recomendamos o Capítulo 4 de [1], em que há muita informação, inclusive histórica, a respeito dessa construção de $\mathbb{R}$. Nas três referências seguintes, os detalhes dessa construção são apresentados do ponto de vista algébrico, especialmente no Capítulo 8 de [9] e no Capítulo 5 de [11] (esgotado, mas encontrável em muitas bibliotecas), em que as sequências de Cauchy são "fundamentais". No Capítulo IX de [10], o tratamento é um pouco menos algébrico.

Começamos observando que podemos definir sequências de Cauchy e sequências convergentes dentro de $\mathbb{Q}$, da mesma forma que o fizemos em $\mathbb{R}$, na Seção 2.2. O cuidado é que, como queremos construir $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$, não podemos usar números reais daqui em diante. Em particular, todos os epsilons também devem ser racionais. No entanto, como podemos encontrar várias sequências de racionais convergindo a um mesmo irracional, e queremos identificar todas essas sequências com esse irracional, precisamos decidir quando duas dessas sequências serão consideradas iguais ou, mais precisamente, equivalentes. Isso é parecido com a construção do próprio corpo $\mathbb{Q}$, em que identificamos as frações $4/6$ e $6/9$, por exemplo, como sendo o mesmo número racional.

Dadas sequências (x_n) e (y_n) de Cauchy de $\mathbb{Q}$, dizemos que (x_n) e (y_n) são *equivalentes*, e escrevemos $(x_n) \sim (y_n)$, se $\lim(x_n - y_n) = 0$. É bastante simples verificar que $\sim$ define uma relação de equivalência no conjunto de todas as sequências de Cauchy de $\mathbb{Q}$ que, portanto, divide esse conjunto de todas as sequências de Cauchy de $\mathbb{Q}$ em classes de equivalência (disjuntas). Denotamos por

$$[x_n] = \{(y_n) : (x_n) \sim (y_n)\}$$

a classe de equivalência da sequência de Cauchy (x_n) de $\mathbb{Q}$ e definimos

$$\mathbb{R} = \{[x_n] : (x_n) \text{ é uma sequência de Cauchy de } \mathbb{Q}\}.$$

Em primeiro lugar, podemos encontrar $\mathbb{Q}$ dentro de $\mathbb{R}$, ou melhor, uma cópia de $\mathbb{Q}$, que é a coleção das classes definidas pelas sequências constantes de racionais. Por exemplo, o racional $0 \in \mathbb{Q}$ é identificado com a classe $[0] \in \mathbb{R}$ da sequência constante definida por $x_n = 0$, para $n \in \mathbb{N}$. Também vemos, em $\mathbb{R}$, muitos dos "furos" de $\mathbb{Q}$, como $\sqrt{2}$, que é a classe de equivalência da sequência definida por $x_1 = 1{,}4; x_2 = 1{,}41; x_3 = 1{,}414; x_4 = 1{,}4142; \ldots$, que é igual à classe da sequência dos babilônios definida indutivamente por $x_1 = 2$ e $x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + 2/x_n\big)$, para $n \in \mathbb{N}$.

No entanto, esse $\mathbb{R}$ é só um conjunto de classes e certamente ainda não é um corpo ordenado em que vale a propriedade do supremo. Para isso, precisamos definir no conjunto $\mathbb{R}$ as operações de adição e multiplicação e a ordem e verificar cada uma das exigências C1–C5, O1, O2 e a validade do axioma fundamental. Além disso, precisamos cuidar para que essas operações e a ordem resultem exatamente nas operações e ordem usuais de $\mathbb{Q}$ quando tratarmos dos elementos de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.

Graças às propriedades algébricas das sequências convergentes (e pensando que sequências de Cauchy são, no fim do dia, sequências convergentes) é muito fácil definir as operações de corpo de $\mathbb{R}$. Dados dois elementos $[x_n]$ e $[y_n]$ de $\mathbb{R}$, definimos

$$[x_n] + [y_n] = [x_n + y_n] \quad \text{e} \quad [x_n] \cdot [y_n] = [x_n \cdot y_n].$$

Agora precisamos conferir se isso realmente resulta em operações para o corpo, antes de podermos verificar as propriedades dessas operações. Assim, precisamos mostrar, primeiro, que soma e produto termo a termo de sequências de Cauchy são sequências de Cauchy, para fazer sentido as definições. (Isso foi indicado no Exercício 2.26 para sequências reais; a mesma demonstração funciona em $\mathbb{Q}$.) Agora, se $(x_n) \sim (y_n)$ e $(x'_n) \sim (y'_n)$, então $x_n - y_n \longrightarrow 0$ e $x'_n - y'_n \longrightarrow 0$, de modo que $(x_n + x'_n) - (y_n + y'_n) = (x_n - y_n) - (x'_n - y'_n) \longrightarrow 0$ pelas regras operacionais do limite de sequências e, portanto, $(x_n + x'_n) \sim (y_n + y'_n)$, de modo que a adição independe das particulares sequências usadas em sua definição. Da mesma forma, como sequências de Cauchy são limitadas, decorre que a multiplicação de $\mathbb{R}$ está bem definida (ver Exercício 2.12).

As propriedades C1–C5 são todas razoavelmente fáceis de demonstrar, exceto a existência de recíproco, que requer mais trabalho. Depois disso, podemos afirmar que $\mathbb{R}$ é um corpo. A ordem de $\mathbb{R}$ não é de todo evidente, já que não basta ter $x_n < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ para concluir que $[x_n] < [y_n]$. De fato, basta tomar $x_n = 0 < \frac{1}{n} = y_n$ e observar que $[x_n] = [y_n]$.

A ordem de $\mathbb{R}$ depende de uma observação crucial (vista, em sua versão para $\mathbb{R}$, no Exercício 2.25): se $[x_n] \neq [0]$, como (x_n) não converge a 0 mas é de Cauchy, podemos escolher $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ positivo e $N \in \mathbb{N}$ tais que $x_n > \varepsilon$, para cada $n \geqslant N$, ou então tais que $x_n < -\varepsilon$, para cada $n \geqslant N$. Como a classe de cada subsequência de uma sequência de Cauchy coincide com a classe da própria sequência, isso significa que para toda classe $[x_n] \neq [0]$ existe algum $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ tal que, para algum representante (y_n) dessa classe, $y_n > \varepsilon$, para cada $n \in \mathbb{N}$, ou então $y_n < -\varepsilon$, para cada $n \in \mathbb{N}$. No primeiro caso, definimos $[x_n] > [0]$ e, no segundo, $[x_n] < [0]$. Agora devemos mostrar que essa relação independe da particular sequência escolhida e que satisfaz as propriedades O1 e O2 de uma ordem.

Finalmente, de posse da estrutura de corpo ordenado $\mathbb{R}$, podemos mostrar que vale o axioma fundamental. No caso dessa construção é mais conveniente mostrar que $\mathbb{R}$ é arquimediano e que toda sequência de Cauchy de $\mathbb{R}$ converge. Qualquer corpo ordenado que satisfaça essas duas propriedades, necessariamente satisfaz o axioma fundamental do supremo (ver Teorema A.8, na Seção A3).

A demonstração de $\mathbb{R}$ é arquimediano é bastante simples. De fato, dado $[x_n] \in \mathbb{R}$, obtemos uma sequência (x_n) de $\mathbb{Q}$ que, por ser de Cauchy, é limitada. Basta tomar $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leqslant N - 1 < N$, para cada $n \in \mathbb{N}$, e concluir que, na ordem de $\mathbb{R}$, resulta $[x_n] < [N]$, onde $[N]$ é a classe da sequência constante e igual a N, identificada com o natural N.

Observe que, em particular, pela propriedade arquimediana, daqui em diante tanto faz tomar epsilons em $\mathbb{R}$ ou em $\mathbb{Q}$, pois, dado qualquer $\varepsilon \in \mathbb{R}$ positivo, sempre existe $\overline{\varepsilon} \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < \overline{\varepsilon} < \varepsilon$.

Em seguida, demonstramos o lema especial seguinte. Dada qualquer sequência de Cauchy (r_n) em $\mathbb{Q}$, consideramos, para cada $m \in \mathbb{N}$, o real $[x_n]$ definido pela sequência constante (y_n) de $\mathbb{Q}$ — dada por $y_n = r_m$, com $n \in \mathbb{N}$ — e mostramos que a sequência $([x_n])$ de $\mathbb{R}$ converge em $\mathbb{R}$, com limite $[r_n]$. A partir desse lema, não resta muito para mostrar que toda sequência de Cauchy de $\mathbb{R}$ converge em $\mathbb{R}$, mas isso não será visto aqui. ⊚

A5 Exercícios

A.1. Descreva em palavras e obtenha a negação das afirmações seguintes, em que $P(x,y)$, $Q(x,y)$ e $R(x,y)$ são afirmações relativas a elementos x, y, z de algum universo X fixado.

1. $(\forall x \in X)(\exists y \in X)[P(x,y) \quad \text{ou} \quad Q(x,y)]$.
2. $(\forall x \in X)(\exists y \in X)(\forall z \in X)[P(x,z) \Rightarrow Q(x,y)]$.
3. $(\exists x \in X)(\forall y \in X)(\exists z \in X)\big\{R(y,z) \Rightarrow [P(x,z) \text{ ou } Q(x,z)]\big\}$.

A.2. Considere a proposição $F(x, y)$, que simboliza "y é filho ou filha de x" e denotemos por H o conjunto de todos homens (vivos ou mortos) e por M o de todas as mulheres (vivas ou mortas). A proposição "a é mãe de b" pode ser escrita sinteticamente como "$a \in M$ e $F(a, b)$", enquanto "a é (meio) irmão de b" pode ser escrita como "$a \in H$ e $a \neq b$ e $(\exists x)[F(x, a)$ e $F(x, b)]$". Expresse em linguagem sintética, com quantificadores e conectivos.

1. a é o avô de b.
2. a é o neto de b.
3. a é a tia de b.
4. a e b são irmãs.
5. Toda pessoa tem pai.
6. a não tem irmãos nem irmãs.
7. Toda pessoa tem avó.
8. Ninguém é neto de si mesmo.
9. a e b são primas de primeiro grau.
10. Toda pessoa é filha(o) de, exatamente, duas pessoas.

Como a linguagem do cotidiano não é tão precisa como a da Lógica Matemática, pode haver mais de uma resposta para alguns problemas.

Considere a proposição $G(x, y)$, que simboliza "y é descendente de x". Expresse $F(x, y)$ em termos de $G(x, y)$ e quantificadores e conectivos. Tente expressar $G(x, y)$ em termos de $F(x, y)$, quantificadores e conectivos.

A.3. Sejam X e Y conjuntos quaisquer. Prove as leis de de Morgan,

$$(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c \quad \text{e} \quad (X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c.$$

A.4. Seja $\varphi : X \to Y$ uma aplicação qualquer entre dois conjuntos X e Y quaisquer. Mostre que φ é injetora se, e somente se, existe uma aplicação $\eta : Y \to X$ tal que $\eta(\varphi(x)) = x$, para cada $x \in X$.

A.5. Seja $\varphi : X \to Y$ uma aplicação qualquer entre dois conjuntos X e Y quaisquer. Mostre que φ é sobrejetora se, e somente se, existe uma aplicação $\rho : Y \to X$ tal que $\varphi(\rho(y)) = y$, para cada $y \in Y$.

A.6. Seja $\varphi : X \to Y$ uma aplicação qualquer entre dois conjuntos X e Y quaisquer. Mostre que φ é bijetora se, e somente se, existe uma aplicação $\psi : Y \to X$ tal que $\psi(\varphi(x)) = x$, para cada $x \in X$, e $\varphi(\psi(y)) = y$, para cada $y \in Y$. (Observe que $\psi = \eta = \rho$, na notação dos dois exercícios precedentes.)

A.7. Sejam $\varphi : X \to Y$ e $\psi : Y \to Z$ duas aplicações quaisquer entre conjuntos X, Y e Z quaisquer e considere a aplicação composta de φ por ψ. Mostre que

1. se φ e ψ são injetoras, então a composta $\psi \circ \varphi$ é injetora;
2. se φ e ψ são sobrejetoras, então a composta $\psi \circ \varphi$ é sobrejetora;
3. se φ e ψ são bijetoras, então a composta $\psi \circ \varphi$ é bijetora.

A.8. Sejam $f : X \to Y$ uma aplicação qualquer, $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ uma coleção, finita ou não, de subconjuntos de X e $B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots$ uma coleção, finita ou não, de subconjuntos de Y. Mostre que

$$(1) \quad f^{-1}\Big(\bigcup_k B_k\Big) = \bigcup_k f^{-1}(B_k), \qquad (2) \quad f^{-1}\Big(\bigcap_k B_k\Big) = \bigcap_k f^{-1}(B_k)$$

e

$$(3) \quad f\Big(\bigcup_k A_k\Big) = \bigcup_k f(A_k).$$

A.9. Mostre que se $f : X \to Y$ for uma aplicação qualquer e $A_1, A_2 \subseteq X$ são subconjuntos de X, então

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)\,.$$

Mostre que vale a igualdade sempre que f for injetora. Dê um exemplo de A_1, A_2 e f para os quais $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.

A.10. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação qualquer. Mostre que $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$, para cada $B \subseteq Y$. Mostre que se $A \subseteq X$ é um subconjunto de X e $B \subseteq Y$ um de Y, então

$$A \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big) \qquad \text{e} \qquad f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B\,.$$

Mostre que a primeira inclusão é uma igualdade sempre que f for injetora e a segunda se f for sobrejetora. Dê exemplos de A e f para os quais $A \neq f^{-1}\big(f(A)\big)$ e de B e f para os quais $f\big(f^{-1}(B)\big) \neq B$.

A.11. Seja $\varphi : X \to Y$ uma aplicação injetora qualquer. Mostre que, para cada subconjunto $B \subseteq \varphi(X)$ da imagem de φ, a imagem direta de B pela aplicação inversa $\psi : \varphi(X) \to X$ de φ coincide com a imagem inversa de B por φ, ou seja,

$$\psi(B) = \varphi^{-1}(B).$$

A.12. Seja $\mathbb{K}$ um corpo qualquer (ver definição à página 125). Mostre que, para quaisquer $x, y, z, t \in \mathbb{K}$, valem as afirmações seguintes.

1. $0 \cdot x = 0$.
2. $x + (y - z) = (x + y) - z$ e $x - (y + z) = (x - y) - c$.
3. $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$ e $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.
4. $-(-x) = x$ e $(x^{-1})^{-1} = x$, para $x \neq 0$.
5. Se $x \cdot y = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$.
6. Se $z \neq 0$ e $x \cdot z = y \cdot z$, então $x = y$.
7. Se $y, t \neq 0$, então $\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{z}{t} = \dfrac{x \cdot z}{y \cdot t}$.
8. Se $y, z, t \neq 0$, então $\dfrac{x}{y} \Big/ \dfrac{z}{t} = \dfrac{x \cdot t}{y \cdot z}$.
9. Se $y, t \neq 0$, então $\dfrac{x}{y} + \dfrac{z}{t} = \dfrac{x \cdot t + y \cdot z}{y \cdot t}$.
10. Se $y, t \neq 0$, então $\dfrac{x}{y} - \dfrac{z}{t} = \dfrac{x \cdot t - y \cdot z}{y \cdot t}$.

A.13. Seja $\mathbb{K}$ um conjunto qualquer e considere uma relação binária $\preccurlyeq$ entre pares de elementos de $\mathbb{K}$ com as propriedades seguintes.

1. *Total*: para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$, vale $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$.
2. *Antissimétrica*: se $x \preccurlyeq y$ e $y \preccurlyeq x$, então $x = y$.
3. *Transitiva*: se $x \preccurlyeq y$ e $y \preccurlyeq z$, então $x \preccurlyeq z$.

Nesse caso, dizemos que $\preccurlyeq$ define uma *ordem total* no conjunto $\mathbb{K}$. Suponha, agora, que $\mathbb{K}$ tenha uma estrutura de corpo com uma ordem total que satisfaz as propriedades adicionais seguintes.

4. *Monótona na soma*: se $x \preccurlyeq y$ e $z \in \mathbb{K}$, então $x + z \preccurlyeq y + z$.
5. *Monótona no produto*: se $0 \preccurlyeq x$ e $0 \preccurlyeq y$, então $0 \preccurlyeq x \cdot y$.

Defina $P \subseteq \mathbb{K}$ por $x \in P$ se, e só se, $0 \preccurlyeq x$ e $x \neq 0$. Mostre que P tem as propriedades O1 e O2 de corpo ordenado (ver definição à página 127), de modo que $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado.

A.14. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado qualquer. Mostre que o menor subconjunto S de $\mathbb{K}$ tal que $1 \in S$ e, para cada $s \in S$, $(s + 1) \in S$ decorre de $s \in S$, é dado por $S = \{n \cdot 1 : n \in \mathbb{N}\}$.

A.15. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. Mostre que as afirmações seguintes, relativas a elementos $x, y, z, t \in \mathbb{K}$ quaisquer, são verdadeiras.

1. Se $0 \leqslant x < y$ e $0 < z \leqslant t$, então $0 \leqslant x \cdot z < y \cdot t$.
2. Se $x, y \geqslant 0$, então $x < y$ se, e só se, $x^2 < y^2$.
3. Se $n \in \mathbb{N}$ e $x, y \geqslant 0$, então $x < y$ se, e só se, $x^n < y^n$.
4. $x^2 + y^2 \geqslant 0$.
5. $x^2 + y^2 > 0$ se, e só se, $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

A.16. Sejam $p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ e $q(t) = b_m t^m + \cdots + b_1 t + b_0$, com a_n e b_m racionais não nulos, dois polinômios de coeficientes racionais e uma variável t. Mostre que a função racional $f = p/q$ pode ser fatorada como
$$f(t) = \frac{a_n}{b_m} t^{n-m} [1 + h(t)],$$
onde $\lim_{t \to +\infty} h(t) = 0$ (a definição desse limite pode ser encontrada em qualquer livro de Cálculo).

Como $t^p > 0$ para cada $t > 0$ e $p \in \mathbb{Z}$, mostre que $a_n/b_m > 0$ se, e só se, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que em $f(s) > 0$, para cada $s \in \mathbb{Q}$ com $s \geqslant r$. Conclua que a ordem no corpo $\mathbb{Q}(t)$ das funções racionais $f = p/q$ dada no Exemplo A.4, à página 130, satisfaz $f < g$ se, e só se, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que em $f(s) < g(s)$, para cada $s \in \mathbb{Q}$ com $s \geqslant r$.

A.17. Seja $X \subseteq \mathbb{K}$ um subconjunto não vazio e denotemos o simétrico de X por $Y = \{y \in \mathbb{K} : -y \in X\}$. Dado qualquer $z \in \mathbb{K}$, mostre que

1. z é cota superior de Y se, e só se, $-z$ é cota inferior de X;
2. z é cota inferior de Y se, e só se, $-z$ é cota superior de X;
3. $z = \min Y$ se, e só se, $-z = \max X$;
4. $z = \max Y$ se, e só se, $-z = \min X$;
5. $z = \inf Y$ se, e só se, $-z = \sup X$ e
6. $z = \sup Y$ se, e só se, $-z = \inf X$.

A.18. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado qualquer. Mostre que são equivalentes as propriedades seguintes, relativas a subconjuntos de $\mathbb{K}$.

1. Todo conjunto não vazio e limitado inferiormente tem ínfimo.
2. Todo conjunto não vazio e limitado superiormente tem supremo.
3. Todo conjunto não vazio e limitado tem ínfimo e supremo.

A.19. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado qualquer. Mostre que são equivalentes as propriedades seguintes.

1. Toda sequência monótona e limitada é de Cauchy.
2. Toda sequência não decrescente e limitada é de Cauchy.
3. Toda sequência não crescente e limitada é de Cauchy.

A.20. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado qualquer. Mostre que são equivalentes as propriedades seguintes.

1. Toda sequência monótona e limitada converge.
2. Toda sequência não decrescente e limitada converge.
3. Toda sequência não crescente e limitada converge.

Bibliografia

[1] Geraldo Ávila. *Análise Matemática para Licenciatura.* 3ª Edição revista e ampliada. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

[2] Elon Lages Lima. *Análise Real, Volume 1.* Coleção Matemática Universitária, 10ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

Esses dois livros, de Geraldo Ávila e de Elon Lima, são fáceis de encontrar nas livrarias e têm sito amplamente utilizados nos Cursos de Licencitura da UFRGS. Cada um deles contém, essencialmente, nosso texto.

Textos bem mais avançados são os três seguintes, sendo que os de Geraldo Ávila e Elon Lima são encontráveis nas livrarias, mas o excelente livro de Djairo Figueiredo encontra-se esgotado, pertencendo ao acervo de muitas bibliotecas.

[3] Geraldo Ávila. *Introdução à Análise Matemática.* 2ª Edição revista. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.

[4] Djairo Guedes de Figueiredo. *Análise I.* Coleção Elementos de Matemática. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, S. A., 1975.

[5] Elon Lages Lima. *Curso de Análise, Volume 1.* Projeto Euclides, 12ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

Três clássicos de Análise são os livros de Lang, Royden e Rudin; este tem uma tradução para o português, editada em 1971 pela UnB, de há muito esgotada, mas ainda encontrável em bibliotecas.

[6] Serge Lang. *Analysis I.* Reading: Addison-Wesley, 1968.

[7] H. L. Royden. *Real Analysis.* 2nd Edition. London: The Macmillan Company, 1968.

[8] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* 3rd Edition. London: McGraw-Hill, 1976.

Uma boa parte do material das seções do Apêndice pode ser encontrada nos livros de Abramo Hefez, de Lang, recentemente traduzido, e de Jacy Monteiro – esgotado, pertence ao acervo de muitas bibliotecas – listados a seguir.

[9] Abramo Hefez. *Curso de Álgebra, Volume 1.* Coleção Matemática Universitária, 3ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2002.

[10] Serge Lang. *Álgebra para Graduação.* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

[11] L. H. Jacy Monteiro. *Elementos de Álgebra.* Coleção Elementos de Matemática. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, S. A., 1969.

Os três livros a seguir dão excelentes relatos da história do desenvolvimento da Análise.

[12] Umberto Bottazzini. *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass.* New York: Springer, 1986.

[13] Carl B. Boyer. *The History of the Calculus and its Conceptual Development.* New York: Dover Publications, Inc., 1949.

[14] C. H. Edwards, Jr. *The Historical Development of the Calculus.* New York: Springer, 1979.

Recomendamos dois clássicos, o de Elon Lima para estudar um dos assuntos que vêm depois de uma introdução à Análise, e o livro de Análise de Spivak, disfarçado de livro de Cálculo.

[15] Elon Lages Lima. *Espaços Métricos.* Projeto Euclides, 4ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[16] Michael Spivak. *Calculus.* New York: W. A. Benjamin, Inc., 1967.

Quatro textos deste milênio que nos impressionaram são os seguintes.

[17] Stephen Abbott. *Understanding Analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 2001.

[18] Robert G. Bartle. *A Modern Theory of Integration*. Graduate Studies in Mathematics. Providence: American Mathematical Society, 2001.

[19] E. Hairer & G. Wanner. *Analysis by Its History*. Undergraduate Texts in Mathematics. Readings in Mathematics. New York: Springer, 2008.

[20] T. W. Körner. *A Companion to Analysis: A Second First and First Second Course in Analysis*. Graduate Studies in Mathematics. Providence: American Mathematical Society, 2004.

Da internet recomendamos os textos em geral confiáveis – mas em inglês – da Wikipedia e a coleção histórica da Universidade de St. Andrews, que mantém o Arquivo MacTutor de História da Matemática. Especialmente interessantes são as páginas com a genealogia da Matemática e a imensa coleção de demonstrações de "Cut-The-Knot". Entre muitas outras, há 20 provas distintas só da irracionalidade de $\sqrt{2}$, sendo a de número $11'$ a que apresentamos na Proposição 1.2.

[21] `http://www.wikipedia.org/`

[22] `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/`

[23] `http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/`

[24] `http://www.cut-the-knot.org/proofs/index.shtml`

(Endereços conferidos em 20.02.2010.)

Índice Remissivo