II Colóquio de Matemática da Região Sul
Universidade Estadual de Londrina
24 a 28 de abril, 2012

MINICURSO: O PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

Albo Carlos Cavalheiro

Departamento de Matemática
Universidade Estadual de Londrina

2012

Sumário

Introdução

A área de equações diferenciais é uma das mais importantes áreas de estudo em Matemática. A origem do estudo das equações diferenciais e as técnicas de resolução, data da época do surgimento do Cálculo Diferencial e Integral no século XVII, e envolve personagens históricos como Newton[1] e Leibniz[2].

Formalmente um problema de contorno relativo a uma equação diferencial linear de segunda ordem consiste em
(i) uma equação do tipo

$$Ly = f, \tag{0.1}$$

na qual L é um operador diferencial linear de segunda ordem, definido em um intervalo (finito) $[a, b]$ e f é uma função contínua em [a,b]; e
(ii) um par de condições de fronteira da forma

$$\begin{aligned} \alpha_1\, y(a) + \alpha_2\, y(b) + \alpha_3\, y'(a) + \alpha_4\, y'(b) &= \gamma_1, \\ \beta_1\, y(a) + \beta_2\, y(b) + \beta_3\, y'(a) + \beta_4\, y'(b) &= \gamma_2, \end{aligned} \tag{0.2}$$

onde α_i, β_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ e γ_j $(j = 1, 2)$ são constantes. O problema consiste em determinar todas as funções y duas vezes continuamente diferenciáveis que satisfazem (0.1) e (0.2) simultaneamente.

As condições de fronteira são chamadas homogêneas se $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Neste caso, o conjunto das funções duas vezes continuamente diferenciáveis em $[a, b]$ que satisfazem (0.2) é um subespaço $\mathcal{S}$ em $C^2([a, b])$ (que é o conjunto das funções $h : [a, b] \to \mathbb{C}$ duas vezes continuamente diferenciáveis).

As soluções de um problema de contorno que envolvem um operador linear $L : \mathcal{S} \to C([a, b])$ estão relaciondos com as soluções da equação

[1]Isaac Newton (1643 - 1727)
[2]Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716)

$$Ly = \lambda\, y \tag{0.3}$$

onde λ é um parâmetro desconhecido. Neste caso, temos que encontrar todos os valores de λ para os quais (0.3) admite soluções não triviais (ou seja, $y \not\equiv 0$). A equação (0.3) pode ser escrita na forma $(L - \lambda\, I)\, y = 0$, onde I representa a transformação identidade (ou seja, $I(y) = y$). O problema acima pode ser reformulado em linguagem de Álgebra Linear:

Dada uma transformação linear $L : \mathcal{S} \to V$, onde $\mathcal{S}$ é um subespaço de V, determine todos os valores de λ (ou autovalores*) para os quais a equação $Ly = \lambda\, y$ tenha solução não-triviais, e determine a seguir, todas as soluções correspondentes a esses valores de λ (ou seja, os* autovetores *correspondentes a cada valor de λ).*

Exemplo 1. Considere o problema

$$\begin{aligned}
&y''(t) + \lambda\, y(t) = 0, \ \text{para todo } t \in [0, \pi],\\
&y(0) = 0 \text{ e } y(\pi) = 0,
\end{aligned}$$

sendo $\lambda \in \mathbb{R}$. Para $\lambda = 0$ e para $\lambda < 0$ o problema só admite solução trivial ($y(t) \equiv 0$). Para $\lambda > 0$ temos que a solução geral da equação diferencial é dada por

$$y(t) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\, t) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, t),$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias. Usando as condições iniciais, obtemos

$$\begin{aligned}
&0 = y(0) = C_2,\\
&0 = y(\pi) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\, \pi) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, \pi).
\end{aligned}$$

Logo $C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\, \pi) = 0$. Se $C_1 = 0$ então $y(t) = 0$ é a solução trivial. Para $C_1 \neq 0$, temos que $\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\, \pi) = 0$, ou seja, $\sqrt{\lambda}\, \pi = k\, \pi$, $k = 1, 2, 3, ...$ Portanto os autovalores são $\lambda_k = k^2$ $(k = 1, 2, ...)$ e as autofunções são $y_k(t) = \operatorname{sen}(k\, t)$ (com $k = 1, 2, 3...$). Note que a sequência de autovalores $\{\lambda_k\}$, $\lambda_k = k^2$ $(k = 1, 2, 3...)$ satisfaz $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < ....$, $\lim_{k \to \infty} \lambda_k = \infty$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$. □

Denotando $L = -\dfrac{d^2}{d\,t^2}$, a equação $y''(t) + \lambda\, y(t) = 0$ pode ser escrita na forma $Ly = \lambda\, y$. Considerando em $C([a,b],\mathbb{R})$ (veja seção 1.3) o produto interno (veja Definição 1.1, Capítulo 1)

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(t)\, g(t)\, dt$$

e $\mathcal{S}$ o subespaço de $C([a,b],\mathbb{R})$ constituído de todas as funções duas vezes continuamente diferenciáveis tais que $y(0) = y(\pi) = 0$. Se $y_1, y_2 \in \mathcal{S}$ temos, usando integração por partes e que $y_1(0) = y_1(\pi) = y_2(0) = y_2(\pi) = 0$,

$$\begin{aligned}
\langle Ly_1, y_2\rangle &= \int_0^\pi Ly_1(t)\, y_2(t)\, dt = -\int_0^\pi y_1''(t)\, y_2(t)\, dt \\
&= -\, y_1'(t)\, y_2(t)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi y_1'(t)\, y_2'(t)\, dt \\
&= -\left(y_1'(\pi)\, y_2(\pi) - y_1'(0)\, y_2(0)\right) + \int_0^\pi y_1'(t)\, y_2'(t)\, dt \\
&= \int_0^\pi y_1'(t)\, y_2'(t)\, dt,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle y_1, Ly_2\rangle &= \int_0^\pi y_1(t)\, Ly_2(t)\, dt = -\int_0^\pi y_1(t)\, y_2''(t)\, dt \\
&= -\, y_1(t)\, y_2'(t)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi y_1'(t)\, y_2'(t)\, dt \\
&= -\left(y_1(\pi)\, y_2'(\pi) - y_1(0)\, y_2'(0)\right) + \int_0^\pi y_1'(y)\, y_2'(t)\, dt \\
&= \int_0^\pi y_1'(t)\, y_2'(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Portanto $\langle Ly_1, y_2\rangle = \langle y_1, Ly_2\rangle$ e então L é simétrico em $\mathcal{S}$.

O comportamento do operador $L = -\dfrac{d^2}{d\,t^2}$ é típico de um grande número de operadores diferenciais e, quando generalizado convenientemente, fornece uma chave para o estudo dos problemas de contorno.

Consideremos a seguinte equação diferencial ordinária, linear, de segunda ordem

$$-\,a_2(t)\,y''(t) + a_1(t)\,y'(t) + (a_0(t) - \lambda\,\mu(t))\,y(t) = g(t), \tag{0.4}$$

onde λ é uma constante, $a_2(t) > 0$ e $\mu(t) > 0$ para todo $t \in [a,b]$. Introduzindo as funções $p(t)$, $q(t)$, $f(t)$ e $\omega(t)$ definidas por

$$p(t) = \exp\left(-\int^t \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\,dx\right),\; q(t) = \frac{a_0(t)\,p(t)}{a_2(t)},\; \omega(t) = \frac{\mu(t)\,p(t)}{a_2(t)} \text{ e } f(t) = \frac{p(t)\,g(t)}{a_2(t)}$$

multiplicando a equação (0.4) por $\dfrac{1}{a_2(t)}\,p(t)$ obtemos uma equação da forma

$$-\frac{d}{dt}\left(p(t)\,\frac{dy}{dt}\right) + (q(t) - \lambda\,\omega(t))\,y(t) = f(t) \tag{0.5}$$

que é chamada *equação de Sturm-Liouville.*

A equação de Sturm-Liouville, junto com as chamadas condições de fronteira (ou condições de extremos separados)

$$\alpha_0\,y(a) + \alpha_1\,y'(a) = 0, \tag{0.6}$$

$$\beta_0\,y(b) + \beta_1\,y'(b) = 0, \tag{0.7}$$

onde $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ são números reais, constituem um *problema (ou sistema) de Sturm-Liouville regular* (ou simplesmente, sistema de Sturm-Liouville[3]).

De modo análogo aos sistemas de equações lineares, os valores de λ para os quais o sistema de Sturm-Liouville tem solução não trivial (ou seja $y(t) \not\equiv 0$) são chamados *autovalores* do sistema e as soluções correspondentes as suas *autofunções.* O conjunto de todos os autovalores de um problema de Sturm-Liouville é chamado *espectro* do sistema.

Historicamente o problema de Sturm-Liouville gerou uma série de desenvolvimentos que conduziram, no começo do século XX, ao nascimento de uma nova e importante área da Matemática, a Análise Funcional.

[3]Jacques Charles François Sturm (1803 - 1855), Joseph Liouville (1809 - 1882). Os trabalhos de Sturm e Liouville sobre o problema que é hoje conhecido como Problema de Sturm-Liouville foram desenvolvidos entre 1829 e 1837.

Exemplo 2 Considere a equação diferencial ordinária linear de segunda ordem

$$-\,y''(t) + 2t\,y'(t) + (1-\lambda)\,y(t) = 0. \tag{0.8}$$

Temos $a_2(t) = 1$, $a_1(t) = 2t$, $a_0(t) = 1$, $\mu(t) = 1$ e $g(t) = 0$. Logo

$$\begin{aligned}
p(t) &= \exp\bigg(-\int^t \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\,dx\bigg) = \exp\bigg(-\int^t \frac{2x}{1}\,dx\bigg) = \mathrm{e}^{-t^2},\\
q(t) &= \frac{a_0(t)\,p(t)}{a_2(t)} = \mathrm{e}^{-t^2},\\
\omega(t) &= \frac{\mu(t)\,p(t)}{a_2(t)} = \mathrm{e}^{-t^2},\\
f(t) &= \frac{p(t)\,g(t)}{a_2(t)} = 0,
\end{aligned}$$

e podemos escrever a equação (0.8) na forma de uma equação de Sturm-Liouville

$$-\,\frac{d}{dt}\Big(\mathrm{e}^{-t^2}\,y'(t)\Big) + (\mathrm{e}^{-t^2} - \lambda\,\mathrm{e}^{-t^2})\,y(t) = 0.$$

□

Este minicurso é dedicado ao problema de Sturm-Liouville, um clássico problema da teoria das equações diferenciais. O objetivo é o de generalizar as propriedades do operador $L = -\,\dfrac{d^2}{d\,t^2}$, apresentadas no Exemplo 1, para uma classe de operadores diferenciais lineares de segunda ordem da forma

$$L[y] = -\,\frac{d}{d\,t}[p(t)\,y'(t)] + (q(t) - \lambda\,\omega(t))\,y(t),$$

satisfazendo as condições de extremos separados (0.6) e (0.7).

A distribuição do conteúdo em cada capítulo é a seguinte: No capítulo 1 definimos os espaços euclidianos (ou espaços com produto interno), sistemas ortogonais e sistemas ortonormais, os espaços de funções que serão utilizados, os tipos de convergência para séries de funções e alguns resultados básicos da teoria de equações diferenciais ordinárias. No capítulo 2 será estudado o problema de Sturm-Liouville regular e as propriedades básicas de suas autofunções. Já no capítulo 3 apresentamos o conceito de função de Green e também são feitos alguns exemplos.

Podemos considerar problemas diferenciais mais gerais que o problema de Sturm-Liouville e mesmo problemas de ordem superior à $2^{\underline{a}}$,

$$L[y] = a_n(t)\, y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)}(t) + ... + \, a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = f(t),$$

onde $f, a_j \in C([a,b])$ e $a_n(t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$, com condições de fronteira

$$F_i[y] = \sum_{j=0}^{n-1} [\alpha_{ij}\, y^{(j)}(a) + \beta_{ij}\, y^{(j)}(b)] \quad (i = 1, 2, .., n),$$

onde $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{C}$ (veja Capítulo III de [7] e também Capítulo IV de [10]).

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Espaços com produto interno e sistemas ortogonais

Em espaços normados podemos adicionar vetores e multiplicar vetor por escalar. Além disso, a norma em tais espaços generaliza o conceito elementar de comprimento de um vetor no $\mathbb{R}^3$. Um outro conceito importante que existe no $\mathbb{R}^3$ é o produto escalar (se $v = (a_1, b_1, c_1)$ e $w = (a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$, então $v.w = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$) que é usado para definir a condição de ortogonalidade ($v, w \in \mathbb{R}^3$ são ortogonais se $v.w = 0$). O conceito que generaliza o produto escalar é a definição de produto interno.

Os espaços com produto interno são espaços normados especiais. A teoria dos espaços com produto interno é muito rica e conserva muitas das características dos espaços euclidianos de dimensão finita, principalmente o conceito de ortogonalidade.

Definição 1.1 Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Um *produto interno* sobre E é uma aplicação $\langle .,. \rangle : E \times E \to \mathbb{F}$ que tem as seguintes proriedades:
(1) para quaisquer $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in E$ e $\lambda \in \mathbb{F}$

$$\begin{aligned}
&\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle, \\
&\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle, \\
&\langle \lambda\, x, y \rangle = \lambda \, \langle x, y \rangle, \\
&\langle x, \lambda\, y \rangle = \overline{\lambda} \, \langle x, y \rangle.
\end{aligned}$$

Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ então $\overline{\lambda} = \lambda$, e se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ então $\overline{\lambda}$ denota o conjugado do número

complexo λ (ou seja, se $\lambda = a + \mathrm{i}\, b$, então $\overline{\lambda} = a - \mathrm{i}\, b$).
(2) $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$;
(3) $\langle x, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in E$;
(4) $\langle x, x\rangle = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

Um espaço vetorial E no qual está definido um produto interno $\langle ., .\rangle$ é chamado um *espaço pré-Hilbertiano*[1]. Todo espaço pré-Hilbertiano E é um espaço normado com a norma canônica $\| x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, ou seja, satisfaz as condições
(a) $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;
(b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, para todo $x \in \mathrm{E}$ e todo $\lambda \in \mathbb{F}$;
(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para quaisquer $x, y \in \mathrm{E}$.

Exemplo 1.2 Sejam $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. Então

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$$

define um produto interno no $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.3 Seja $C([a, b])$ o conjunto de todas as funções contínuas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Se $f, g \in C([a, b])$ então

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\, \overline{g(t)}\, dt$$

define um produto interno em $C([a, b])$.

Teorema 1.4 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)[2] *Seja E um espaço vetorial com produto interno $\langle ., .\rangle$. Para quaisquer $x, y \in E$ temos*

$$|\,\langle x, y\rangle\,| \leq \|\, x\|\, \|\, y\|.$$

Demonstração. Podemos escrever o número complexo $\langle x, y\rangle$ sob a forma $\langle x, y\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} |\,\langle x, y\rangle\,|$ e portanto

$$\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle} = \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\theta} |\langle x, y\rangle|.$$

[1] David Hilbert (1862 - 1943)
[2] Augustin - Louis Cauchy (1789 - 1857), Hermann Amandus Schwarz (1843 - 1921)

Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ temos

$$\begin{aligned}
&0 \leq \langle \lambda\, x + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} y, \lambda\, x + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} y \rangle \\
&= \lambda\, \overline{\lambda}\, \langle x, x\rangle + \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\ \langle x, y\rangle + \overline{\lambda}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \langle y, x\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\ \langle y, y\rangle \\
&= \lambda\, \overline{\lambda}\, \|x\|^2 + \lambda\, |\langle x, y\rangle| + \overline{\lambda} |\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\
&= |\lambda|^2\, \|x\|^2 + 2\, \mathrm{Re}(\lambda)\, |\langle x, y\rangle| + \|y\|^2.
\end{aligned}$$

Para $\lambda \in \mathbb{R}$ obtemos

$$q(\lambda) = \lambda^2\, \|x\|^2 + 2\, \lambda\, |\, \langle x, y\rangle\, | + \|y\|^2 \geq 0, \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Isto implica que a equação $q(\lambda) = 0$ possui no máximo uma solução real λ. Logo $4\, |\, \langle x, y\rangle\, |^2 - 4\, \|x\|^2\, \|y\|^2 \leq 0$, ou seja, $|\, \langle x, y\rangle\, | \leq \|x\|\, \|y\|$. $\square$

Observação. Por uma base em um espaço vetorial E (de dimensão finita) entendemos como uma família linearmente independente $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ de vetores de E tal que para todo $v \in \mathrm{E}$ pode ser escrito de forma única como combinação linear de $v_1, ..., v_n$, ou seja, $v = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$, onde $v_j \in \mathcal{B}$ e λ_j são escalares. Em espaços com produto interno (de dimensão infinita), as bases ortonormais são de grande importância. No lugar de combinações finitas $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$, somas infinitas são permitidas e a condição de linearmente independente é substituída pela condição de ortogonalidade.

Definição 1.5 (a) Seja E um espaço com produto interno $\langle ., . \rangle$. Uma família $\mathcal{F}$ de vetores não nulos em E é chamada um *sistema ortogonal* se $\langle x, y\rangle = 0$ para quaisquer dois elementos distintos x e y de $\mathcal{F}$. Se, além disso, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = 1$ para todo $x \in \mathcal{F}$, então $\mathcal{F}$ é chamado um *sistema ortonormal.*
(b) Um sistema ortonormal $\{x_\alpha :\ \alpha \in J\}$ (J um conjunto de índices) de um espaço com produto interno E é *completo* se para todo $x \in E$ temos $x = \displaystyle\sum_{\alpha \in J} \lambda_\alpha\, x_\alpha$ (onde λ_α são escalares).

Uma condição equivalente a (b) é a de que o conjunto das combinações lineares finitas dos x_α seja denso em E, isto é, dado $x \in E$ e $\varepsilon > 0$, existe uma combinação linear finita $\displaystyle\sum_{\alpha \in F} \lambda_\alpha\, x_\alpha$ tal que $\big\|x - \displaystyle\sum_{\alpha \in F} \lambda_\alpha x_\alpha\big\| < \varepsilon$ (veja Teorema 4.6, Capítulo II de [6]).

O sistema ortonormal completo $\{x_\alpha : \ \alpha \in J\}$ é também chamado base *pré-Hilbertiana.*

Todo sistema ortogonal de vetores não nulos pode ser normalizado. Se S é um sistema ortogonal, então $S_1 = \left\{ \dfrac{x}{\|x\|} \ : \ \ x \in S \right\}$ é um sistema ortonormal. Temos que S e S_1 são equivalentes no sentido que os espaços gerados por S e S_1 são o mesmo subespaço de E.

Observação. (a) Se V é um espaço de dimensão finita, com produto interno $\langle .,. \rangle$ e $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ uma base ortonormal. Então todo vetor $v \in V$ pode ser escrito de modo único sob a forma

$$v = \langle v, e_1 \rangle \, e_1 + \langle v, e_2 \rangle \, e_2 + ... + \langle v, e_n \rangle \, e_n.$$

(b) Seja E um espaço vetorial de dimensão infinita, com produto interno $\langle .,. \rangle$ e $\{e_1, e_2, e_3, ...\}$ um conjunto ortonormal infinito (enumerável). Para todo elemento $x \in E$ podemos construir a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \, e_k$. Entretanto, na ausência de informações mais amplas, não existe, nenhuma razão a priori para supor que esta série convirja, e muito menos que convirja para x. Usamos a notação $x \ \sim \ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \, e_k$ para ressaltar que a série em questão poderá não convergir para x. É claro que, se converge, escrevemos $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \, e_k$. Os coeficientes $\langle x, e_k \rangle$ são chamados de coeficientes de Fourier[3] generalizados de x com relação ao conjunto ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, ...\}$ e a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \, e_k$ é chamada série de Fourier generalizada de x.

Exemplo 1.6 As autofunções (do Exemplo 1) $y_k(t) = \text{sen}(k\,t)$ $(k = 1, 2., 3, ...)$ formam um sistema ortogonal em $C([0, \pi], \mathbb{R})$ com relação ao produto interno $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\, g(t)\, dt$. De fato, temos

$$\langle y_k, y_k \rangle = \int_0^{\pi} \text{sen}^2(k\,t)\, dt = \frac{\pi}{2},$$

[3]Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830)

e para $m \neq n$ temos

$$\begin{aligned}
\langle y_n, y_m \rangle &= \int_0^\pi \operatorname{sen}(n\,t)\operatorname{sen}(m\,t)\,dt \\
&= \int_0^\pi \frac{\cos((m-n)t)-\cos((n+m)t)}{2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}((n-m)t)}{n-m} - \frac{\operatorname{sen}((n+m)t)}{n+m}\right)\Bigg|_0^\pi = 0.
\end{aligned}$$

As funções $\varphi_k(t) = \dfrac{y_k(t)}{\| \, y_k(t) \, \|} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\operatorname{sen}(k\,t)$ $(k = 1, 2, 3, ...)$ formam um sistema ortonormal em $C([0,\pi],\mathbb{R})$.

1.2 Espaços de funções

Neste minicurso vamos utilizar os seguintes espaços de funções.

(i) $C([a,b],\mathbb{R})$ denota o conjuntos das funções contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

(ii) $C([a,b])$ denota o conjunto das funções contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{C}$.

(iii) Seja $m \in \mathbb{N}$. Denotaremos por $C^m([a,b])$ (respectivamente, $C^m([a,b],\mathbb{R})$) o conjunto das funções definidas em $[a,b]$ e a valores complexos (respectivamente, valores reais) que são m vezes continuamente diferenciáveis. Se $f \in C^m([a,b])$, então

$$\|f\|_{C^m([a,b])} = \sup_{0 \le j \le m} \| \, f^{(j)} \|,$$

é uma norma em $C^m([a,b])$, onde $\|f^{(j)}\| = \sup_{t \in [a,b]} |f^{(j)}(t)|$.

Se $f, g \in C^m([a,b])$ então

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \left(f(t)\,\overline{g(t)} + f'(t)\,\overline{g'(t)} + ... + f^{(m)}(t)\,\overline{g^{(m)}(t)} \right) dt$$

é um produto interno em $C^m([a,b])$, e $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ a norma canônica.

(iv) Seja $\omega : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função positiva ($\omega(t) > 0$ para todo $t \in [a, b]$). Denotaremos por $C_{L^2(\omega)}([a, b])$ o espaço vetorial $C([a, b])$ munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle_\omega = \int_a^b f(t)\, \overline{g(t)}\, \omega(t)\, dt$$

e $\|f\|_\omega = \sqrt{\langle f, f \rangle_\omega}$ é a norma correspondente.

1.3 Tipos de convergência para séries de funções

Uma série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se a sequência das somas parciais $\{s_n\}$ ($s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$) é convergente, ou seja, se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = C$.

Seja $\{\varphi_n\}$ uma sequência de funções $\varphi_n : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo de $\mathbb{R}$. A série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ *converge pontualmente* se, para cada $x \in I$ fixado, a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ é convergente. Isto é equivalente a dizer que dados $\varepsilon > 0$ e $x \in I$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ (dependente de ε e de x) tal que

$$\left| \sum_{k=n}^{m} \varphi_k(x) \right| < \varepsilon,$$

para todo $m > n > n_o$.

Uma série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ *converge uniformemente* se dado $\varepsilon > 0$ existir $n_o \in \mathbb{N}$ (dependendo apenas de ε) tal que

$$\left| \sum_{k=n}^{m} \varphi_k(x) \right| < \varepsilon,$$

para todo $m > n > n_o$ e todo $x \in I$.

Uma série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ *converge absolutamente* se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\, \varphi(x)\, |$ é convergente.

Exemplo 1.7 (a) seja $I = [0,1]$ e $\varphi_n(x) = \dfrac{x}{n^2}$, $x \in I$. A série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ converge uniformemente. De fato, para $x \in [0,1]$ temos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^{m} \varphi_k(x) \right| &\leq \sum_{k=n}^{m} |\, \varphi_k(x)\, | \\ &\leq \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

Como a série numérica $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ é convergente, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k^2} < \varepsilon$ para todo $m > n > n_o$.

(b) Seja $\psi_n(x) = (-1)^n \dfrac{x}{n^2}$, com $x \in [0,1]$. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n$ é absolutamente convergente, pois $|\, \psi_n(x)\, | = \varphi_n(x) = \dfrac{x}{n^2}$. □

Exemplo 1.8 Considere a sequência de funções $\{\varphi_n\}$ definidas para $x \in [0,1]$, $\varphi_1(x) = x$ e $\varphi_n(x) = x^n - x^{n-1}$ (para $n > 1$).

(a) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ converge pontualmente para cada $x \in [0,1]$, pois a sequência das somas parciais (ou reduzidas)

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + ... + \varphi_{n-1}(x) + \varphi_n(x) \\ &= x + (x^2 - x) + ... + (x^{n-1} - x^{n-2}) + (x^n - x^{n-1}) \\ &= x^n, \end{aligned}$$

converge para 0 se $0 \leq x < 1$, e para 1 se $x = 1$.

(b) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ não converge uniformemente, pois dado $0 < \varepsilon < 1/2$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, seja $x = (2\,\varepsilon)^{1/(n_0-1)}$. Temos

$$\sum_{j=n_0}^{m} \varphi_j(x) = x^m - x^{n_0 - 1},$$

e para $x = (2\,\varepsilon)^{1/(n_0-1)}$ temos

$$|\, x^m - x^{n_0-1}\,| = |\,(2\,\varepsilon)^{m/(n_0-1)} - 2\,\varepsilon\,|.$$

Logo, para m suficientemente grande, $(2\,\varepsilon)^{m/(n_0-1)} < \varepsilon$, e então

$$\left|\sum_{j=n_0}^{m} \varphi_j(x)\right| > \varepsilon, \quad \text{para} \;\; x = (2\,\varepsilon)^{1/(n_0-1)}.$$

□

Na verificação de que a série do Exemplo 1.7(a) converge uniformemente, usamos o artifício de majorar a série de funções por um série numericamente convergente. É essa a ideia que está atrás do chamado teste M de Weierstrass.

Teorema 1.9 (Teste M de Weierstrass[4]) *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ *uma série de funções* $\varphi_n : I \to \mathbb{R}$ *definidas em um intervalo* I *de* $\mathbb{R}$. *Suponha que existam constantes* $M_n \geq 0$ *tais que* $|\,\varphi_n(x)\,| \leq M_n$ *para todo* $x \in I$ *e que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *seja convergente. Então, a série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ *converge uniformemente e absolutamente em* I.

Demonstração. Veja 37.7, Capítulo 6 em [2]. □

As séries de funções que convergem uniformemente apresentam excelentes propriedades. Dentre elas, que enunciamos a seguir, cujas demonstrações são omitidas.

Teorema 1.10 *(a) Suponha que as funções* $\varphi_n : I \to \mathbb{R}$ *sejam contínuas e que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ *convirja uniformemente. Então* $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ *é contínua em* I.

[4] Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815 - 1897)

(b) Suponha que as funções $\varphi_n : I \to \mathbb{R}$ sejam continuamente deriváveis (ou seja, φ_n' são funções contínuas) e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(x)$ convirja uniformemente. Suponha que exista $x_0 \in I$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_0)$ convirja. Então

$$\frac{d}{d\,x}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi'_n(x).$$

Demonstração. Para a demonstração do item (a) veja Teorema 4 e para o item (b) veja o Teorema 7, Capítulo X de [8]. □

Exemplo 1.11 Considere as funções $\varphi_n : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $\varphi_n(x) = \dfrac{\cos(n\,x)}{n^3}$. Temos

(i) $\varphi'_n(x) = -\dfrac{\text{sen}(n\,x)}{n^2}$ são contínuas em $[0, \pi]$;

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi'_n(t)| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| -\frac{\text{sen}(n\,x)}{n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$

Logo, pelo teste M de Weierstarss, $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi'_n(x)$ é uniformemente convergente.

(iii) Para $x = 0$ temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty.$$

Portanto podemos derivar a série de funções termo a termo, ou seja, a função $\varphi : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(n\,x)}{n^3}$ é derivável e

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi'_n(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\,x)}{n^2}.$$

1.4 Alguns resultados de equações diferenciais ordinárias

Temos o seguinte resultado de existência e unicidade de solução.

Teorema 1.12 (Existência e unicidade de solução) *Sejam $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ e $f(x)$ funções contíuas em um intervalo $[a,b]$, com $a_2(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$, e seja $x_0 \in [a,b]$. Então existe uma única solução para o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} a_2(x)\, y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x), \text{ em } [a,b], \\ y(x_0) = y_1, \\ y'(x_0) = y_2. \end{cases}$$

onde y_1, y_2 são constantes.
Demonstração. Veja Teorema 4.1, Capítulo 4 de [1]. $\square$

Neste minicurso vamos precisar resolver algumas equações diferenciais ordinárias de ordem dois com coeficientes constantes e também algumas equações de Euler[5] de ordem dois.

(1) Solução geral de equações diferenciais ordinárias homogênea de ordem dois e com coeficientes constantes.

Para determinar a solução geral de uma equação diferencial ordinária homogênea de ordem dois do tipo

$$a\, y''(x) + b\, y'(x) + c\, y(x) = 0,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, precisamos simplesmente determinar as raízes da equação característica $a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0$ (uma equação polinomial de grau 2 na variável λ). Podem ocorrer 03 casos.

Caso 1: Existem duas raízes reais e distintas λ_1 e λ_2. A solução geral é da forma

$$y(x) = C_1\, \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\, \mathrm{e}^{\lambda_2 x},$$

onde C_1 e C_2 são constantes.

[5]Leonhard Euler (1707 - 1783)

Caso 2: Existe uma única raíz real $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. Neste caso a solução geral é da forma

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda x} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{\lambda x}.$$

Caso 3: Existem duas raízes complexas $\lambda = a + \mathrm{i}\,b$ e $\overline{\lambda} = a - \mathrm{i}\,b$. Neste caso a solução geral é dada por

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{a\,x}\cos(b\,x) + C_2\,\mathrm{e}^{a\,x}\,\mathrm{sen}(b\,x).$$

(2) Solução geral da equação de Euler de ordem dois.

A equação de Euler de ordem dois é do tipo

$$x^2\,y''(x) + b\,x\,y'(x) + c\,y(x) = 0.$$

Para determinar a solução geral precisamos determinar as raízes da equação característica $\lambda(\lambda - 1) + b\,\lambda + c = 0$, que é uma equação polinomial de grau 2. Podem ocorrer três casos.

Caso 1: Existem duas raízes reais distintas λ_1 e λ_2. Neste caso a solução geral é

$$y(x) = C_1\,x^{\lambda_1} + C_2\,x^{\lambda_2},\ \text{para } x > 0.$$

Caso 2: Existe uma única raíz real $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, e neste caso a solução geral é dada por

$$y(x) = C_1\,x^{\lambda} + C_2\,x^{\lambda}\ln(x),\ \text{para } x > 0.$$

Caso 3: Existem duas raízes complexas $\lambda = a + \mathrm{i}\,b$ e $\overline{\lambda} = a - \mathrm{i}\,b$. A solução geral é da forma

$$y(x) = C_1\,x^{a}\cos(b\ln(x)) + C_2\,x^{a}\,\mathrm{sen}(b\ln(x)),\ \text{para } x > 0.$$

Para os casos de equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes de ordem superior a dois e para a equação de Euler de ordem superior a dois veja [4], [9] ou [10].

Exemplo 1.13 Considere a equação $y''(x) + y'(x) - 2y(x)$. Sua equação característica $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ possui raízes $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$. Logo a solução geral é

$$y(x) = C_1 \, \mathrm{e}^{x} + C_2 \, \mathrm{e}^{-2x}.$$

Exemplo 1.14 Considere a equação de Euler $x^2 \, y''(x) + 2\,x\,y'(x) - 6\,y(x)$. Sua equação característica é $\lambda(\lambda - 1) + 2\,\lambda - 6 = 0$, e tem raízes $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$. Portanto a solução geral é

$$y(x) = C_1 \, x^2 + C_2 \, x^{-3}, \text{para } x > 0.$$

Capítulo 2

O problema de Sturm-Liouville

Considere o operador diferencial linear de segunda ordem

$$L_\lambda[y] = -(p(t)\, y'(t))' + (q(t) - \lambda\, \omega(t))\, y(t)$$

no intervalo $[a,b]$, onde $p \in C^1([a,b],\mathbb{R})$, $p(t) > 0$ em $[a,b]$, $\omega \in C([a,b],\mathbb{R})$ com $\omega(t) > 0$ para todo $t \in [a,b]$ e $q \in C([a,b],\mathbb{R})$, com as condições de fronteira

$$\begin{aligned} F_1[y] &= \alpha_0\, y(a) + \alpha_1\, y'(a), \\ F_2[y] &= \beta_0\, y(b) + \beta_1\, y'(b), \end{aligned}$$

onde $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$, com $|\,\alpha_0| + |\,\alpha_1| \neq 0$ e $|\,\beta_0| + |\,\beta_1| \neq 0$.

Dada uma função $f \in C([a,b])$, o problema de Sturm-Liouville (regular) consiste em determinar uma função $y = y(t)$ solução do sitema

$$(P) \begin{cases} (S_\lambda) \quad L_\lambda[y](t) = f(t), \ \text{para } t \in [a,b], \\ \\ (F) \quad F_1[y] = 0, \ F_2[y] = 0. \end{cases}$$

Os exemplos mais comuns de condição de fronteira são

$$y(a) = y(b) = 0 \ \text{ e } \ y'(a) = y'(b) = 0.$$

Observações. (1) Se o problema de Sturm-Liouville (P) possui solução para toda função $f \in C([a,b])$, então também tem solução o problema

$$(P1)\begin{cases} L_\lambda[y] = f, \\ F_1[y] = c_1, \\ F_2[y] = c_2. \end{cases}$$

De fato, seja $y_0 \in C^2([a,b])$ uma função tal que $F_1[y_0] = c_1$ e $F_2[y_0] = c_2$. Então $y(t) = z(t) + y_0(t)$ é solução do problema $(P1)$, onde $z = z(t)$ é solução do problema

$$\begin{aligned} &L_\lambda[z] = f - L_\lambda[y_0], \\ &F_1[z] = 0, \\ &F_2[z] = 0. \end{aligned}$$

(2) Dada uma equação diferencial linear de segunda ordem

$$-\,a_2(t)\,y''(t) + a_1(t)\,y'(t) + (a_0(t) - \lambda\,\mu(t))\,y(t) = g(t),$$

onde $a_2 \in C([a,b],\mathbb{R})$, $a_2(t) > 0$ para $t \in [a,b]$, $\mu \in C([a,b],\mathbb{R})$ com $\mu(t) > 0$ para $t \in [a,b]$ e $a_0, a_1 \in C([a,b];\mathbb{R})$, se multiplicarmos todos os seus termos pela função

$$\frac{1}{a_2(t)}\,p(t) = \frac{1}{a_2(t)}\exp\biggl(-\int^t \frac{a_1(s)}{a_2(s)}\,ds\biggr),$$

obtemos uma equação da forma (S_λ)

$$-(p(t)\,y'(t))' + (q(t) - \lambda\,\omega(t))\,y(t) = f(t),$$

onde $q(t) = \dfrac{p(t)\,a_0(t)}{a_2(t)}$, $\omega(t) = \dfrac{p(t)\,\mu(t)}{a_2(t)}$ e $f(t) = \dfrac{p(t)\,g(t)}{a_2(t)}$.

Definição 2.1 Dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor do sistema (S_λ), (F) ou do problema se Sturm-Liouville regular (P), se a equação homogênea

$$L_\lambda[y] = 0,$$

tem uma solução $y(t) \not\equiv 0$ (ou seja, solução não - trivial) que satisfaz as condições de fronteira (F). A solução $y = y(t)$ é chamada autofunção (correspondente ao autovalor λ).

Observe que se $L_\lambda[y] = -\,(p(t)\,y'(t))' + q(t)\,y(t) - \lambda\,\omega(t)\,y(t) = 0$ então

$$L_0[y] = -\left(p(t)\,y'(t)\right)' + q(t)\,y(t) = \lambda\,\omega(t)\,y(t).$$

Exemplo 2.2 Considere o problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} & y''(t) + \lambda\,y(t) = 0, \\ & y'(0) = y'(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Para $\lambda \leq 0$ o problema só admite solução trivial ($y(t) \equiv 0$). Para $\lambda > 0$ a solução geral da equação $y''(t) + \lambda\,y(t) = 0$ é da forma

$$y(t) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\,t) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}\,t).$$

Usando as condições $y'(0) = 0$ e $y'(\pi) = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} & C_1\,\sqrt{\lambda} = 0, \\ & C_1\,\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\,\pi) - C_2\,\sqrt{\lambda}\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0. \end{aligned}$$

Logo $C_1 = 0$ e $C_2\,\sqrt{\lambda}\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0$. Se $C_2 = 0$ então $y(t) = 0$. Para $C_2 \neq 0$ então $\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0$. Logo $\sqrt{\lambda}\,\pi = k\,\pi$, $k = 1, 2, ...$ Com isso $\lambda_k = k^2$ são os autovalores e $y_k(t) = \cos(k\,t)$ são as autofunções.

Com o produto interno $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^\pi f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$ em $C([0,\pi])$ as autofunções $y_k(t) = \cos(k\,t)$ ($k = 1, 2, ...$) formam um conjunto ortogonal, pois

$$\langle y_k, y_k\rangle = \int_0^\pi \cos^2(k\,t)\,dt = \frac{\pi}{2},$$

e para $k \neq m$, temos

$$\begin{aligned} \langle y_k, y_m\rangle &= \int_0^\pi \cos(k\,t)\cos(m\,t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos(k+m)\,t + \cos(k-m)\,t]\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(k+m)t}{k+m} + \frac{\operatorname{sen}(k-m)t}{k-m}\Bigg|_0^\pi\right] = 0. \end{aligned}$$

As funções $\varphi_k(t) = \dfrac{y_k(t)}{\|y_k(t)\|} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos(k\,t)$ $(k = 1, 2, ...)$ formam um conjunto ortonormal em $C([0,\pi])$. $\square$

Exemplo 2.3 Considere o problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} &y''(t) + \lambda\, y(t) = 0, \ \text{ para } t \in [0,\pi],\\ &y(0) = 0,\\ &y(\pi) + y'(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Novamente não existe solução não-trivial se $\lambda \leq 0$. Para $\lambda > 0$ a solução geral é dada por $y(t) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\, t) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, t)$. Usando que $y(0) = 0$ obtemos $C_2 = 0$. E usando a segunda condição $y(\pi) + y'(\pi) = 0$ obtemos $C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\,\pi) + C_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0$. Para $C_1 \neq 0$ obtemos

$$\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}\,\pi) = -\sqrt{\lambda}.$$

Denotando $\mu = \sqrt{\lambda}\,\pi$, então

$$\operatorname{tg}(\mu) = -\frac{\mu}{\pi}.$$

Os autovalores λ_n não podem ser dados analíticamente, mas atráves das raízes de uma equação transcendental, que pode ser resolvida numericamente. Os autovalores λ_n satisfazem

$$\lambda_n = \frac{\mu_n^2}{\pi^2} \ \text{ e } \ \operatorname{tg}(\mu_n) = -\,\frac{\mu_n}{\pi}.$$

As soluções de $\operatorname{tg}(\mu) = -\mu/\pi$ podem ser visualizadas como os pontos de interseção dos gráficos das funções $y = \operatorname{tg}(x)$ e $y = -x/\pi$. Esta equação possui infinitas soluções. As respectivas autofunções são

$$y_n(t) = \operatorname{sen}(\mu_n/\pi)\, t = \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}\, t).$$

$\square$

Exemplo 2.4 Considere a equação de Euler $t^2\, y''(t) + t\, y'(t) + \lambda^2\, y(t) = 0$ no intervalo $t \in [1, \mathrm{e}]$, e com as condições $y(1) = 0$ e $y(\mathrm{e}) = 0$. Podemos escrever a equação diferencial na forma

$$\frac{d}{dt}\Big[t\, y'(t)\Big] + \frac{\lambda^2}{t}\, y(t) = 0.$$

Para $\lambda = 0$ o problema só admite a solução trivial. Para $\lambda \neq 0$, a solução geral da equação é dada por $y(t) = C_1 \cos(\lambda \ln(t)) + C_2 \operatorname{sen}(\lambda \ln(t))$, com $\lambda > 0$. Usando que $y(1) = 0$ obtemos $C_1 = 0$, e a condição $y(\mathrm{e}) = 0$ implica que $C_2 \operatorname{sen}(\lambda) = 0$. Se $C_2 = 0$ temos a solução trivial. Para obter soluções não-triviais devemos considerar $C_2 \neq 0$ e $\operatorname{sen}(\lambda) = 0$, ou seja, os autovalores são $\lambda_n = n\,\pi$ $(n = 1, 2, 3, ...)$. Com isso, as autofunções são $y_n(t) = \operatorname{sen}(n\,\pi \ln(t))$. □

Vamos agora apresentar alguns resultados fundamentais sobre os problemas de Sturm-Liouville regulares. Provaremos que os autovalores são simples, que são reais, que as autofunções podem ser escolhidas reais e que as mesmas satisfazem importantes relações denominadas *relações de ortogonalidade*.

Teorema 2.5 *Seja* $L_0[y] = -(p(t)\,y'(t))' + q(t)\,y(t)$ *em* $[a, b]$. *Dadas duas funções* $u, v \in C^2([a, b])$ *então vale a identidade de Lagrange*[1]

$$\int_a^b (\overline{v}\,L_0[u] - u\,\overline{L_0[v]})\,dt = M[u, v](b) - M[u, v](a),$$

onde $M[u, v](t) = -p(t)\,(u'(t)\,\overline{v(t)} - u(t)\,\overline{v'(t)})$.

Demonstração. Como $q(t) = \overline{q(t)}$ (pois $q \in C([a, b], \mathbb{R})$), temos

$$\begin{aligned}
&\overline{v(t)}\,L_0[u] - u(t)\,\overline{L_0[v]} \\
&= \overline{v(t)}\,(-(p(t)\,u'(t))' + q(t)\,u(t)) - u(t)(-(\overline{p(t)}\,\overline{v'(t)})' + \overline{q(t)}\,\overline{v(t)}) \\
&= -\,\overline{v(t)}\,(p(t)\,u'(t))' + \overline{v(t)}\,q(t)\,u(t) + u(t)\,(\overline{p(t)\,v'(t)})' - \overline{q(t)}\,u(t)\,\overline{v(t)} \\
&= -\,\overline{v(t)}\,(p(t)\,u'(t))' + u(t)\,(\overline{p(t)\,v'(t)})'.
\end{aligned}$$

Logo, usando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (\overline{v}\,L_0[u] - u\,\overline{L_0[v]})\,dt = -\int_a^b (\overline{v}\,(p\,u')' - u\,(\overline{p\,v'})')\,dt \\
&= -(\overline{v}\,(p\,u') - u\,(\overline{p\,v'}))\Big|_a^b + \int_a^b [\overline{v'}\,(p\,u') - u'\,(p\,\overline{v'})]\,dt \\
&= -\,p(b)[u'(b)\,\overline{v(b)} - u(b)\,\overline{v'(b)}] + p(a)\,[u'(a)\,\overline{v(a)} - u(a)\,\overline{v'(a)}] \\
&= M[u, v](b) - M[u, v](a).
\end{aligned}$$

□

[1] Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813)

Teorema 2.6 *Sejam* $y_1, y_2 \in C^2([a,b])$ *satisfazendo as condições de fronteira* (F). *Então*

$$
\begin{aligned}
&(i)\ M[y_1,y_2](a) = M[y_1,y_2](b) = 0,\\
&(ii)\ \int_a^b (\overline{y_1(t)}\, L_0[y_2] - y_2(t)\,\overline{L_0[y_1]})\, dt = 0.
\end{aligned}
$$

Demonstração. (i) Como y_1 e y_2 satisfazem a condição $[F_1]$, então o sistema

$$
\begin{cases}
\alpha_0\, y_1(a) + \alpha_1\, y_1'(a) = 0\\[2ex]
\alpha_0\, \overline{y_2(a)} + \alpha_1\, \overline{y_2'(a)} = 0
\end{cases}
$$

tem solução não trivial $(\alpha_0, \alpha_1) \neq (0,0)$. Logo

$$
W[y_1, \overline{y_2}](a) = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_1'(a) \\[2ex] \overline{y_2(a)} & \overline{y_2'(a)} \end{vmatrix} = 0.
$$

Com isso, temos $M[y_1,y_2](a) = -\,p(a)(y_1'(a)\,\overline{y_2(a)} - y_1(a)\,\overline{y_2'(a)}) = 0$. Analogamente, usando a condição $[F2]$ obtemos $M[y_1,y_2](b) = 0$.

(ii) Usando o Teorema 2.5 e o item *(i)*, obtemos

$$
\int_a^b (\overline{y_1(t)}\, L_0[y_2] - y_2(t)\,\overline{L_0[y_1]})\, dt = M[y_1,y_2](b) - M[y_1,y_2](a) = 0.
$$

Observe que por (ii), se y_1 e y_2 são autofunções (correspondentes a autovalores λ_1 e λ_2) então

$$
\langle L_0[y_1], y_2\rangle - \langle y_1, L_0[y_2]\rangle = \int_a^b \overline{y_2(t)}\, L_0[y_1](t)\, dt - \int_a^b y_1(t)\,\overline{L_0[y_2](t)}\, dt = 0,
$$

ou seja, $\langle L_0[y_1], y_2\rangle = \langle y_1, L_0[y_2]\rangle$. Portanto o operador L_0 é simétrico no subconjunto $\mathcal{S}$ das funções em $C^2([a,b])$ que satisfazem as condições de fronteira (F).

$\square$

Teorema 2.7 *Todos os autovalores do problema de Sturm-Liouville são reais.*

Demonstração. Se λ é um autovalor então

$$\begin{aligned} 0 = L_\lambda[y] &= -(p(t)\,y'(t))' + (q(t) - \lambda\,\omega(t))\,y(t) \\ &= -(p(t)\,y'(t))' + q(t)\,y(t) - \lambda\,\omega(t)\,y(t) \\ &= L_0[y] - \lambda\,\omega(t)\,y(t). \end{aligned}$$

Logo $L_0[y] = \lambda\,\omega(t)\,y(t)$. Então $L_0[\overline{y}] = \overline{\lambda}\,\omega(t)\,\overline{y(t)}$. Pelo Teorema 2.6(ii) obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b (\overline{y}\,L_0[y] - y\,L_0[\overline{y}])\,dt \\ &= \int_a^b (\overline{y(t)}\,\lambda\,\omega(t)\,y(t) - y(t)\,\overline{\lambda}\,\omega(t)\,\overline{y(t)})\,dt \\ &= \int_a^b (\lambda - \overline{\lambda})\,\overline{y(t)}\,\omega(t)\,y(t)\,dt \\ &= (\lambda - \overline{\lambda}) \int_a^b |\,y(t)|^2 \omega(t)\,dt. \end{aligned}$$

Como $y(t) \not\equiv 0$, temos portanto $\lambda = \overline{\lambda}$, ou seja, $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Teorema 2.8 *Sejam λ_1 e λ_2 dois autovalores distintos do problema de Sturm-Liouville. Então as autofunções correspondentes a λ_1 e λ_2 são ortogonais relativamente a ω, ou seja, se $L_0[y_1] = \lambda_1\,y_1\,\omega$ e $L_0[y_2] = \lambda_2\,y_2\,\omega$ (com $\lambda_1 \neq \lambda_2$) então*

$$\langle y_1, y_2 \rangle_\omega = \int_a^b y_1(t)\,\overline{y_2(t)}\,\omega(t)\,dt = 0.$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.7 temos que λ_1 e λ_2 são reais. Logo, usando o Teorema 2.6(ii)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b (\overline{y_2}\,L_0[y_1] - y_1\,L_0[\overline{y_2}])\,dt \\ &= \int_a^b (\overline{y_2(t)}\,\lambda_1\,y_1(t)\,\omega(t) - y_1(t)\,\lambda_2\,\overline{y_2(t)}\,\omega(t))\,dt \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b y_1(t)\,\overline{y_2(t)}\,\omega(t)\,dt. \end{aligned}$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $\displaystyle\int_a^b y_1(t)\,\overline{y_2(t)}\,\omega(t)\,dt = 0$. □

Teorema 2.9 *Toda autofunção do problema de Sturm-Liouville é combinação linear de autofunções reais.*

Demonstração. Se $L_0[y] = \lambda\,\omega\,y$, então $L_0[\overline{y}] = \overline{\lambda}\,\omega\,\overline{y} = \lambda\,\omega\,\overline{y}$ (pelo Teorema 2.7). Logo podemos escrever

$$y(t) = \frac{1}{2}\,(y(t) + \overline{y(t)}) + \frac{\mathrm{i}}{2}\,(\mathrm{i}\,\overline{y(t)} - \mathrm{i}\,y(t)) = y_1(t) + \mathrm{i}\,y_2(t),$$

onde $y_1(t) = \dfrac{y(t) + \overline{y(t)}}{2} = Re(y(t))$ e $y_2(t) = \dfrac{\mathrm{i}\,\overline{y(t)} - \mathrm{i}\,y(t)}{2} = Im(y(t))$.
Com isso temos

$$\begin{aligned} L_0[y_1] = L_0[(y + \overline{y})/2] &= \frac{1}{2}\,(\lambda\,\omega\,y + \lambda\,\omega\,\overline{y}) \\ &= \frac{1}{2}\,\lambda\,\omega\,(y + \overline{y}) \\ &= \lambda\,\omega\,y_1, \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} L_0[y_2] &= L_0[(\mathrm{i}\,\overline{y} - \mathrm{i}\,y)/2] \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2}\,(\lambda\,\omega\,\overline{y} - \lambda\,\omega\,y) \\ &= \lambda\,\omega\,y_2. \end{aligned}$$

Portanto as funções y_1 e y_2 são autofunções reais. □

Com o resultado do Teorema 2.9, consideraremos agora apenas as autofunções de problemas de Sturm-Liouville regulares como sendo funções reais.

Para o próximo resultado, vamos usar que o espaço $C_{L^2(\omega)}([a,b])$ é separável, ou seja, existe um subconjunto $E \subset C_{L^2(\omega)}([a,b])$ que é enumervél e denso ($\overline{E} = C_{L^2(\omega)}([a,b])$) (veja [6]).

Teorema 2.10 *Os autovalores do problema de Sturm-Liouvile formam um conjunto enumerável.*

Demonstração Pelo Teorema 2.8, aos autovalores corresponde um sistema ortonormal de $C_{L^2(\omega)}([a,b])$, e como esse espaço é separável então o sistema ortonormal é necessariamente enumerável. Seja então $\{\lambda_n\}$ a sequência de autovalores do problema de Sturm-Liouville e $\{\varphi_n\}$ o sistema ortonormal de autofunções correspondentes. Admitindo que as funções φ_n formam uma base ortonormal de $C_{L^2(\omega)}([a,b])$, então podemos resolver formalmente o problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} L_0[y] &= \lambda\,\omega\,y + f, \\ F_1[y] &= F_2[y] = 0. \end{aligned}$$

De fato, seja $y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\varphi_n(t)$, onde $c_n = \langle y, \varphi_n\rangle_\omega = \int_a^b y(t)\,\overline{\varphi_n(t)}\,\omega(t)\,dt$. Então temos

$$L_0[y] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,L_0[\varphi_n] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\lambda_n\,\omega(t)\,\varphi_n(t).$$

Portanto $L_0[y] - \lambda\,\omega\,y = f$ implica (usando que $L_0[\varphi_n] = \lambda_n\,\omega\,\varphi_n$),

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\lambda_n\,\omega(t)\,\varphi_n(t) &= L_0[y] = \lambda\,\omega(t)\,y(t) + f(t) \\ &= \lambda\,\omega(t)\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\varphi_n(t) + f(t), \end{aligned}$$

e com isso, obtemos

$$\begin{aligned} &\omega(t)\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n - \lambda)\,c_n\,\varphi_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\lambda_n\,\omega(t)\,\varphi_n(t) - \sum_{n=1}^{\infty}\lambda\,\omega(t)\,c_n\,\varphi_n(t) \\ &= f(t) = \omega(t)\,\frac{f(t)}{\omega(t)} \\ &= \omega(t)\sum_{n=1}^{\infty}\langle \frac{f}{\omega}, \varphi_n\rangle_\omega\,\varphi_n(t) \text{ (usando que } \frac{f(t)}{\omega(t)} = \sum_{n=1}^{\infty}\langle \frac{f}{\omega}, \varphi_n\rangle_\omega\,\varphi_n(t)) \\ &= \omega(t)\sum_{n=1}^{\infty}\langle f, \varphi_n\rangle\,\varphi_n(t), \end{aligned}$$

pois $\langle \frac{f}{\omega}, \varphi_n \rangle_\omega = \int_a^b \frac{f(t)}{\omega(t)}\, \varphi_n(t)\, \omega(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, \varphi_n(t)\, dt = \langle f, \varphi_n \rangle$.

Portanto $(\lambda_n - \lambda)\, c_n = \langle f, \varphi_n \rangle$, ou seja, $c_n = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\lambda_n - \lambda}$. Com isso obtemos que

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\lambda_n - \lambda}\, \varphi_n(t), \tag{2.1}$$

se $\lambda \neq \lambda_n$ para todo n. □

De fato, o sistema ortonormal de autofunções do problema de Sturm-Liouville é uma base ortonormal e quando $\lambda \neq \lambda_n$, o problema de Sturm-Liouville tem solução y dada pela fórmula (2.1), sendo essa série, convergente não apenas em $C_{L^2(\omega)}([a, b])$, mas uniformemente e absolutamente (veja o Teorema 2.16).

Observação. Dada uma equação diferencial linear de ordem n

$$a_n(t)\, y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = 0, \tag{2.2}$$

onde $a_i \in C([a, b])$, $i = 0, 1, ..., n$, e $a_n(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$, o conjunto das funções $y \in C^n([a, b])$ que são soluções da equação (2.2) formam um espaço vetorial E_0 de dimensão n. Temos que $y_1, y_2, ..., y_n \in E_0$ formam uma base de E_0 se, e somente se, o *determinante wronskiano*[2]

$$W(t) = W[y_1, ..., y_n](t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

é diferente de zero em todo $t \in [a, b]$. Agora, fixado $t_0 \in [a, b]$ temos, pela Fórmula de Abel[3] (veja Teorema 3.7, Capítulo 3 de [4])

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(- \int_{t_0}^{t} \frac{a_{n-1}(s)}{a_n(s)}\, ds \right), \text{ para todo } t \in [a, b].$$

[2] Conde Josef Hoëné de Wronski (1778 - 1853)
[3] Niels Henrik Abel (1802 - 1829)

$\square$

Teorema 2.11 *Todo autovalor do problema de Sturm-Liouville tem multiplicidade 1, isto é, o espaço vetorial das autofunções correspondentes tem dimensão 1.*

Demonstração. Sejam $y_1 = y_1(t)$ e $y_2 = y_2(t)$ duas soluções linearmente independentes de $L_\lambda[y] = 0$ e satisfazendo as condições de fronteira $F_1[y] = F_2[y] = 0$. Considerando o wronskiano

$$W(t) = W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix},$$

temos que $W[y_1, y_2](t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$ e, usando a Fórmula de Abel, obtemos

$$\begin{aligned} W(t) &= W(a)\, \mathrm{e}^{-\int_a^t p'(s)/p(s)\, ds} \\ &= W(a)\, \mathrm{e}^{-\ln(p(t)) + \ln(p(a))} \\ &= \frac{W(a)\, p(a)}{p(t)}. \end{aligned}$$

Logo $p(t)\, W(t) = p(a) W(a)$ (ou seja, $p(t)\, W[y_1, y_2](t) =$ constante). Por outro lado, como

$$\begin{aligned} F_1[y_1] = \alpha_0\, y_1(a) + \alpha_1\, y_1'(a) = 0, \\ F_2[y_2] = \alpha_0\, y_2(a) + \alpha_1\, y_2'(a) = 0, \end{aligned}$$

e como $|\,\alpha_1| + |\,\alpha_2| \neq 0$, então

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_1'(a) \\ y_2(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} = 0,$$

isto é, $W(a) = 0$. Logo $W[y_1, y_2] \equiv 0$, contra a hipótese de independência linear de y_1 e y_2. Portanto, se y_1 e y_2 são autofunções correspondentes ao mesmo autovalor λ então existe uma constante C tal que $y_2(t) = C\, y_1(t)$. $\square$

Teorema 2.12 *Existe $C_0 \in \mathbb{R}$ tal que, para $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor do problema de Sturm-Liouville, temos $\lambda \geq C_0$.*

Demonstração. Seja $y = y(t)$ uma autofunção real correspondente ao autovalor λ (veja Teorema 2.9). Temos que $L_\lambda[y] = 0$. É suficiente demonstrar que existe $C_0 \leq 0$ tal que, para $\lambda < C_0$ e $y \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ com $\| y\|_2 = 1$, temos sempre

$$\int_a^b L_\lambda[y](t)\, y(t)\, dt \; > \; 0,$$

isto é, $\displaystyle\int_a^b [-(p\,y')' + q\,y - \lambda\,\omega\,y]\,y\,dt > 0$. Usando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_a^b [-(p\,y')' + q\,y - \lambda\,\omega\,y]\,y\,dt \\ &= -(p\,y')\,y\Big|_a^b + \int_a^b (y')^2\,p\,dt + \int_a^b q\,y^2\,dt - \lambda \int_a^b y^2\,\omega\,dt. \qquad (2.3)\end{aligned}$$

Provaremos inicialmente o teorema em três casos particulares, a saber:
(i) quando as condições de fronteira são $y(a) = y(b) = 0$;
(ii) quando as condições de fronteira são $y'(a) = y'(b) = 0$;
(iii) quando, nas condições de fronteira (F), temos $\alpha_0\,\alpha_1 \leq 0 \leq \beta_0\,\beta_1$.

Nos casos (i) e (ii) o primeiro termo do segundo membro de (2.3) é nulo. No caso (iii), podemos supor que $\alpha_1\,\beta_1 \neq 0$ (se não, o raciocínio é análogo) e então o primeiro termo do segundo membro de (2.3) é

$$p(a)\,y'(a)\,y(a) - p(b)\,y'(b)\,y(b) = -\,p(a)\,\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\,y^2(a) + p(b)\,\frac{\beta_0}{\beta_1}\,y^2(b),$$

que é positivo, pois $\dfrac{\alpha_0}{\alpha_1} \leq 0$ e $\dfrac{\beta_0}{\beta_1} \geq 0$. Nos três casos, a soma dos dois últimos somandos de (2.3) é $\displaystyle\int_a^b (q(t) - \lambda\,\omega(t))\,y^2(t)\,dt$ e essa expressão é $>\ 0$ se para todo $t \in [a,b]$ temos $q(t) - \lambda\,\omega(t)\ > 0$. Como $\omega(t)\ >\ 0$ isso equivale a

$$\lambda \; < \; C_0 = \inf_{a \leq t \leq b} \frac{q(t)}{\omega(t)}.$$

Portanto nos casos (i), (ii) e (iii) o segundo membro de (2.3) é $>\ 0$ para $\lambda \; < \; C_0$.

Para demonstrar o teorema no caso geral precisamos do seguinte resultado.

Lema 2.13 *Seja $f \in C^1_{L^2}([a,b])$. Para todo $t \in [a,b]$ temos*

$$| f(t) |^2 \leq \frac{1}{b-a} \, \|f\|_2^2 + 2 \, \|f\|_2 \| f'\|_2,$$

onde $\| f\|_2 = \left(\int_a^b | f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$.

Demonstração. Seja $t_0 \in [a,b]$ o ponto de máximo de $| f(t) |$. Temos então, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} | f(t_0)|^2 &= | f(t)|^2 + \int_t^{t_0} (f(s) \, \overline{f(s)})' \, ds \\ &= | f(t)|^2 + \int_t^{t_0} (f'(s) \, \overline{f(s)} + f(s) \, \overline{f'(s)}) \, ds \\ &\leq | f(t)|^2 + 2 \, \|f\|_2 \, \|f'\|_2. \end{aligned}$$

Agora integrando essa desigualdade (em $[a,b]$) obtemos

$$(b-a) \, | f(t_0)|^2 \leq \|f\|_2^2 + 2 \, (b-a) \, \|f\|_2 \, \|f'\|_2.$$

Logo $|f(t)|^2 \leq |f(t_0)|^2 \leq \dfrac{1}{b-a} \, \|f\|_2^2 + 2 \, \|f\|_2 \, \|f'\|_2$. □

Corolário 2.14 *Se $f \in C^1_{L^2}([a,b])$ com $\|f\|_2 = 1$, então para todo $t \in [a,b]$ temos*

$$|f(t)|^2 \leq \frac{1}{b-a} + 2 \, \|f'\|_2.$$

Demonstração Imediata do Lema 2.13. □

Voltando para a demonstração do Teorema 2.12, em (2.3) temos

$$\begin{aligned} &\int_a^b [- (p \, y')' + q \, y - \lambda \, \omega \, y] \, y \, dt \\ &= - (p \, y') \, y \Big|_a^b + \int_a^b (y')^2 \, p \, dt + \int_a^b q \, y^2 \, dt - \lambda \int_a^b y^2 \, \omega \, dt. \end{aligned}$$

No segundo termo da igualdade:

(i) No primeiro somando temos, se $y(a)=0$ então $p(a)\,y'(a)\,y(a)=0$. Se $y(a)\neq 0$, da condição $F_1[y]=0$ e do Corolário 2.14, temos que

$$
\begin{aligned}
|\,p(a)\,y'(a)\,y(a)\,| &= \left|p(a)\,\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\,y^2(a)\right| \\
&\leq \left|\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right|\frac{p(a)}{b-a}+2\,p(a)\left|\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right|\,\|y'\|_2,
\end{aligned}
$$

ou seja, existem constantes C_1 e C_2 tais que

$$|\,p(a)\,y'(a)\,y(a)|\leq C_1+C_2\,\|y'\|_2.$$

Portanto $p(a)\,y'(a)\,y(a)\geq -\,C_1-C_2\,\|y'\|_2$.
Analogamente, existem constantes C_3 e C_4 tais que

$$-\,p(b)\,y'(b)\,y(b)\geq C_3+C_4\,\|y'\|_2.$$

(ii) No segundo somando, temos

$$\int_a^b p(t)\,(y'(t))^2\,dt\geq p_1\,\|y'\|_2^2$$

onde $p_1=\inf\limits_{t\,\in\,[a,b]} p(t)>0$.

(iii) No terceiro somando, temos

$$\int_a^b q(t)\,y^2(t)\,dt\geq C_5$$

onde $C_5=\inf\limits_{t\,\in\,[a,b]} q(t)$ e $\|\,y\|_2=1$.

(iv) No quarto somando, temos

$$-\,\lambda\int_a^b \omega(t)\,y^2(t)\,dt\geq -\,\lambda\,p_2$$

onde $p_2=\inf\limits_{t\,\in\,[a,b]} \omega(t)>0$ (com $\lambda<0$).

Portanto existem constantes C_6 e C_7 tais que

$$\begin{aligned}
\int_a^b L_\lambda[y](t)\,y(t)\,dt &\geq C_6 + C_7\,\|y'\|_2 + p_1\,\|y'\|_2^2 - \lambda\,p_2 \\
&= \left(\sqrt{p_1}\,\|y'\|_2 + \frac{1}{2}\,\frac{C_7}{\sqrt{p_1}}\right)^2 + C_6 - \frac{1}{4}\,\frac{C_7^2}{p_1} - \lambda\,p_2 \\
&\geq C_8 - \lambda\,p_2.
\end{aligned}$$

onde $C_8 = C_6 - \dfrac{1}{4}\,\dfrac{C_7^2}{p_1}$. Temos que $C_8 - \lambda\,p_2 > 0$ se, e somente se, $\lambda < C_8/p_2 = C_9$. Portanto o teorema fica demonstrado com $C_0 = \min\{0, C_9\}$. □

O que o Teorema 2.12 diz é que existe um limitante inferior para os autovalores de um problema de Sturm-Liouville, ou seja, os autovalores podem até ser eventualmente negativos, mas não arbitrariamente negativos (Em verdade, em um problema de Sturm-Liouville regular pode ocorrer no máximo um número finito de autovalores negativos).

Exemplo 2.15 Considere o problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned}
&y''(t) + \lambda\,y(t) = 0, \text{ em } [0,1], \\
&y(0) = 0, \\
&\beta_0\,y(1) + \beta_1\,y'(1) = 0.
\end{aligned}$$

Temos que $p(t) = 1$, $q(t) = 1$, $\omega(t) = 1$, $\alpha_0 = 1$ e $\alpha_1 = 0$. Se $y = y(t)$ é uma autofunção para o problema, então $-\,y''(t) = \lambda\,y(t)$. Multiplicando essa igualdade por $y(t)$ e integrando por partes (no intervalo $[0,1]$) obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda\int_0^1 y^2(t)\,dt &= -\int_0^1 y''(t)\,y(t)\,dt \\
&= -\,\big(y'(1)\,y(1) - y'(0)\,y(0)\big) + \int_0^1 [y'(t)]^2\,dt \\
&= \int_0^1 [y'(t)]^2\,dt - y'(1)\,y(1). \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

(i) No caso $\beta_0 = 0$ então $y'(1) = 0$, e no caso $\beta_1 = 0$ temos $y(1) = 0$. Em ambos os casos temos

$$\lambda\int_0^1 y^2(t)\,dt = \int_0^1 [y'(t)]^2\,dt,$$

o que garante que $\lambda > 0$.
(ii) Se $\beta_0\,\beta_1 > 0$, temos que $\lambda > 0$, pois neste caso em (2.4) obtemos

$$\lambda \int_0^1 y^2(t)\,dt = \int_0^1 [y'(t)]^2\,dt + \frac{\beta_1}{\beta_0}\,(y'(1))^2 > 0.$$

(iii) Se $\beta_0\,\beta_1 < 0$, podemos ter autovalores negativos. Se $0 < -\dfrac{\beta_1}{\beta_0} < 1$, temos um único autovalor negativo que é a solução para $\sqrt{-\lambda} = -\dfrac{\beta_0}{\beta_1}\,\mathrm{tgh}(\sqrt{-\lambda})$ (onde $\mathrm{tgh}(x) = \dfrac{\mathrm{senh}(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ é a função tangente hiperbólica).
Se $-\dfrac{\beta_1}{\beta_0} < 0$ ou $-\dfrac{\beta_1}{\beta_0} > 1$, então o problema não possui solução não-trivial. $\square$

Do Teorema 2.12 segue que, substituindo $q(t)$ por $\tilde{q}(t) = q(t) - \tilde{C}\,\omega(t)$, onde $\tilde{C} < 0$ e $\tilde{C} < C_0$, temos um operador $\tilde{L}_0$ tal que $\lambda = 0$ não é autovalor do problema de Sturm-Liouville correspondente e do qual todos os autovalores são estritamente positivos.

Vamos trabalhar com a hipótese que $\lambda = 0$ não é autovalor do problema de Sturm-Liouville. Essa hipótese implica que para toda função $f \in C([a,b])$ o problema $L_0[y] = f$, $F_1[y] = 0$ e $F_2[y] = 0$ tem, no máximo uma solução.

As principais propriedades do problema de Sturm-Liouville estão reunidas no próximo teorema.

Teorema 2.16 *Consideremos o problema de Sturm-Liouville*

$$\begin{aligned} &L_\lambda[y] = -\,(p(t)\,y'(t))' + (q(t) - \lambda\,\omega(t))\,y(t) = f(t), \text{ em } [a,b],\\ &F_1[y] = \alpha_0\,y(a) + \alpha_1\,y'(a) = 0,\\ &F_2[y] = \beta_0\,y(b) + \beta_1\,y'(b) = 0,\end{aligned}$$

onde L_λ, F_1 e F_2 satisfazem as condições mencionadas no começo deste capítulo.
(a) *Os valores $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que exista uma solução não-trivial de $L_\lambda[y] = 0$ satisfazendo $F_1[y] = F_2[y] = 0$, ou seja, os autovalores do problema de Sturm-Liouville formam uma sequência infinita crescente $\{\lambda_n\}$ de números reais tais que*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty.$$

(b) *Cada autovalor* λ_n *tem multiplicidade 1, isto é, o espaço vetorial das autofunções correspondentes tem dimensão 1; fixado uma autofunção real* φ_n *tal que* $\int_a^b \varphi_n^2(t)\,\omega(t)\,dt = 1$ *então qualquer outra autofunção correspondente a* λ_n *é múltipla de* φ_n.
(c) *A sequência de autofunções* $\{\varphi_n\}$ *é uma base ortonormal de* $C_{L^2}([a,b])$.
(d) *Para toda função* $g \in C^2([a,b])$ *tal que* $F_1[g] = 0$ *e* $F_2[g] = 0$ *temos*

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\varphi_n(t),$$

onde $C_n = \int_a^b g(t)\,\varphi_n(t)\,\omega(t)\,dt$, *sendo que a série é uniformemente e absolutamente convergente em* $[a,b]$.
(e) *Seja* $\lambda \neq \lambda_n$ *para todo* n *e* $f \in C([a,b])$. *O sistema* $L_\lambda[y] = f$, *com* $F_1[y] = 0$ *e* $F_2[y] = 0$ *tem uma única solução dada por*

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, \varphi_n\rangle}{\lambda_n - \lambda}\,\varphi_n(t),$$

onde $\langle f, \varphi_n\rangle = \int_a^b f(t)\,\varphi_n(t)\,dt$, *sendo que a série é uniformemente e absolutamente convergente em* $[a,b]$.
(f) *Se* $\lambda = \lambda_n$, *dada* $f \in C([a,b])$ *o sistema* $L_\lambda[y] = f$, *com* $F_1[y] = F_2[y] = 0$ *tem solução se, e somente se,* $\langle f, \varphi_n\rangle = 0$ *para todo* n.

Demonstração Veja Teorema 2.10, Capítulo IV de [6]. □

Exemplo 2.17 Consideremos o sistema

$$\begin{aligned} &y''(t) + \lambda\,y(t) = f(t), \text{ em } [0,\pi], \\ &y(0) = y(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Vimos no Exemplo 1 que a solução geral da equação homogênea $y''(t) + \lambda\,y(t) = 0$ (com $\lambda > 0$) é $y(t) = C_1\cos(\sqrt{\lambda}\,t) + C_2\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\,t)$. Para satisfazer $y(0) = 0$ obtemos $C_1 = 0$, e para satisfazer $y(\pi) = 0$ devemos ter $\sqrt{\lambda}\,\pi = n\,\pi$ $(n = 1, 2, ...)$, ou seja, os autovalores são $\lambda_n = n^2$. Portanto $\psi_n(t) = \mathrm{sen}(n\,t)$ formam um sistema ortogonal, e $\varphi_n(t) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\mathrm{sen}(n\,t)$ formam um sistema ortonormal de autofunções do problema de Sturm-Liouville.

Como $\lambda = 0$ não é autovalor do problema homogêneo, pelo Teorema 2.16(e) a solução do problema

$$\begin{aligned} &y''(t) = f(t), \ \text{em } [0,\pi],\\ &y(0) = y(\pi) = 0, \end{aligned}$$

pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, \varphi_n\rangle}{\lambda_n - 0}\,\varphi_n(t)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{n^2}\left(\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(n\,x)\,dx\right)\mathrm{sen}(n\,t). \end{aligned}$$

Por exemplo, se $f(t) = t$ então a solução para $y''(t) = t$, com $y(0) = y(\pi) = 0$ é dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{n^2}\left(\int_0^{\pi} x\,\mathrm{sen}(n\,x)\,dx\right)\mathrm{sen}(n\,t)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{n^2}\,\frac{(-1)^{n+1}\,\pi}{n}\,\mathrm{sen}(n\,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\,\mathrm{sen}(n\,t). \end{aligned}$$

É claro que o problema $y''(t) = t$, $y(0) = y(\pi) = 0$ poder ser resolvido na forma direta aplicando-se as condições de contorno à solução geral de $y''(t) = t$ (cuja solução é $y(t) = (t^3 - \pi^2 t)/6$. Mas frequentemente tal opção não existe, e as únicas soluções disponíveis são as expressas como séries em termos de autofunções do problema. Por exemplo, se $f(t) = \cos(t^2 + t)$, a solução para o problema $y''(t) = f(t)$, $y(0) = y(\pi) = 0$, é dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, \varphi_n\rangle}{\lambda_n - 0}\,\varphi_n(t)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{n^2}\left(\int_0^{\pi} f(x)\,\varphi_n(x)\,dx\right)\mathrm{sen}(n\,t)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{n^2}\left(\int_0^{\pi} \cos(x^2 + x)\,\mathrm{sen}(n\,x)\,dx\right)\mathrm{sen}(n\,t). \end{aligned}$$

Exemplo 2.18 Considere o problema

$$\begin{aligned}&y''(t) - 3\,y'(t) + 3(1+\lambda)\,y(t) = 0, \text{ para } t \in [0,\pi],\\ &y(0) = y(\pi) = 0.\end{aligned}$$

O problema admite apenas solução trivial se $\lambda \leq -1/4$. Para $\lambda > -1/4$ a solução geral da equação $y''(t) - 3\,y'(t) + 3(1+\lambda)\,y(t) = 0$ é dada por

$$y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-3\,t/2}\cos(t\,\sqrt{3(1+4\lambda)}/2) + C_2\,\mathrm{e}^{-3\,t/2}\,\mathrm{sen}(t\,\sqrt{3(1+4\lambda)}/2).$$

Usando a condição $y(0) = 0$ obtemos $C_1 = 0$. E usando a condição $y(\pi) = 0$ obtemos

$$C_2\,\mathrm{sen}(\pi\,\sqrt{3(1+4\lambda)}/2) = 0.$$

Se $C_2 = 0$ temos apenas a solução trivial. Para que exista solução não-trivial devemos ter $C_2 \neq 0$ e então $\dfrac{\pi\,\sqrt{3(1+4\lambda)}}{2} = n\,\pi$ $(n = 1, 2, 3...)$. Logo os autovalores são $\lambda_n = \dfrac{1}{12}(4n^2 - 3)$ e as autofunções são $\psi_n(t) = \mathrm{e}^{-3t/2}\,\mathrm{sen}(n\,t)$ $(n = 1, 2, 3, ...)$. Temos que $\langle \psi_n, \psi_n \rangle = \dfrac{2n^2}{3(9+4n^2)}(1 - \mathrm{e}^{-3\,\pi})$. Logo as funções

$$\varphi_n(t) = \frac{\psi_n(t)}{\|\psi_n\|} = \sqrt{\frac{3(9+4n^2)}{2n^2(1-\mathrm{e}^{-3\,\pi})}}\;\mathrm{e}^{-3t/2}\,\mathrm{sen}(n\,t),$$

$(n = 1, 2, 3, ...)$ formam um conjunto ortonormal.

Como $\lambda = 0$ não é autovalor, a solução do problema

$$\begin{aligned}&y''(t) - 3\,y'(t) + 3\,y(t) = f(t), \text{ em } [0,\pi],\\ &y(0) = y(\pi) = 0,\end{aligned}$$

é dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\lambda_n - 0}\,\varphi_n(t)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{4n^2-3}\,\frac{3(9+4n^2)}{2n^2(1-\mathrm{e}^{-3\,\pi})}\left(\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-3x/2}\mathrm{sen}(n\,x)\,dx\right)\mathrm{e}^{-3t/2}\mathrm{sen}(n\,t).\end{aligned}$$

Exemplo 2.19 Os problemas de Sturm-Liouville aparecem quando se aplica o método de separação de variáveis no estudo de algumas equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem. Considere o problema da corda vibrante

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right] - q(x)\,u(x,t) = \omega(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t), \tag{2.5}$$

com as condições iniciais $u(x,0) = f(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ (com $x \in [a,b]$) e com as condições de fronteira $u(a,t) = 0$ e $u(b,t) = 0$ (com $t \in [0,\infty)$). As funções p e ω representam a tensão e a densidade da corda, respectivamente, sendo, portanto, funções contínuas e positivas em $[a,b]$. Usando o método de separação de variáveis, procuramos soluções da equação diferencial parcial (2.5) que sejam da forma $u(x,t) = X(x)\,T(t)$.Substituindo na equação (2.5) obtemos

$$\frac{[p(x)\,X'(x)]' - q(x)\,X(x)}{\omega(x)\,X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\,\lambda \text{ (constante)},$$

(pois cada um dos lados é função de uma variável diferente) e separando as variáveis as funções $X(x)$ e $T(t)$ devem satisfazer

$$\begin{aligned}
&(i)\ T''(t) = -\lambda\,T(t),\\
&(ii)\ [\,p(x)\,X'(x)]' - q(x)\,X(x) = -\,\lambda\,\omega(x)\,X(x),\\
&\quad\ \text{com } X(a) = X(b) = 0.
\end{aligned}$$

Observe que *(ii)* é um problema de Sturm-Liouville e que $\lambda = 0$ não é autovalor. Pelo Teorema 2.16, existe uma sequência $\{\lambda_n\}$ de autovalores tendendo para infinito e *(ii)* possui uma única solução não nula (a menos de uma constante multiplicativa). Seja $\{\varphi_n\}$ as autofunções normalizadas correspondentes aos autovalores λ_n ($\displaystyle\int_a^b |\varphi_n(x)|^2\,\omega(x)\,dx = 1$). Agora para cada λ_n a solução geral da equação $T''(t) = -\,\lambda_n\,T(t)$ é da forma

$$T_n(t) = a_n\cos(\sqrt{\lambda_n}\,t) + b_n\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_n}\,t).$$

Logo, para cada $n = 1, 2, 3, ...$, temos que

$$\begin{aligned}
u_n(x,t) &= \varphi_n(x)\,T_n(t)\\
&= \varphi_n(x)\,[\,a_n\cos(\sqrt{\lambda_n}\,t) + b_n\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_n}\,t)],
\end{aligned}$$

é uma solução da equação (2.5). Procurando então a solução do problema sob a forma

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)\,[\,a_n \cos(\sqrt{\lambda_n}\,t) + b_n \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}\,t)].
\end{aligned}
$$

Para satisfazer as condições iniciais devemos ter

$$
f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\varphi_n(x),
$$

$$
g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\,b_n\,\varphi_n(x).
$$

Se f e g admitem esse desenvolvimento em série, os coeficientes a_n e b_n são determinados por

$$
a_n = \langle f, \varphi_n \rangle_\omega = \int_a^b f(x)\,\overline{\varphi_n(x)}\,\omega(x)\,dx,
$$

$$
b_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\,\langle\, g, \varphi_n \rangle_\omega = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_a^b g(x)\,\overline{\varphi_n(x)}\,\omega(x)\,dx.
$$

Vemos, pois, a importância do estudo sobre a possibilidade de desenvolvimento de uma função f em série das autofunções φ_n, bem com a importância de condições que assegurem que essa série é absolutamente e uniformemente convergente em $[a,b]$, e não apenas em $C_{L^2(\omega)}([a,b])$. Ainda subsiste a questão de saber como devem ser as funções f e g para que a série de $u(x,t)$ seja convergente, para que ela represente de fato uma solução da equação diferencial parcial (2.5), para que tenhamos $u(x,t) \to f(x)$ quando $t \to 0^+$, entre outras. Essas últimas questões, em geral, tem de ser estudadas particularmente para cada tipo de equação.

Exemplo 2.20 Outro tipo de problema que frequentemente ocorre é o chamado *sistema de Sturm-Liouville periódico*

$$\begin{aligned}
&-\frac{d}{dt}\left[p(t)\,\frac{dy}{dt}(t)\right] + (q(t) - \lambda\,\omega)\,y(t) = 0, \text{ para } t \in [a,b],\\
&p(a) = p(b),\\
&y(a) = y(b),\\
&y'(a) = y'(b).
\end{aligned}$$

Por exemplo, consideremos o problema

$$\begin{aligned}
&y''(t) + \lambda\,y(t) = 0, \text{ para } t \in [-\pi,\pi],\\
&y(-\pi) = y(\pi),\\
&y'(-\pi) = y'(\pi).
\end{aligned}$$

Note que $p(t) = 1$ e então $p(-\pi) = p(\pi)$. Para $\lambda > 0$ a solução geral da equação é da forma $y(t) = C_1\cos(\sqrt{\lambda}\,t) + C_2\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\,t)$. Usando as condições $y(-\pi) = y(\pi)$ e $y'(-\pi) = y'(\pi)$ obtemos

$$\begin{aligned}
&C_2\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0,\\
&2\,C_1\,\sqrt{\pi}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\pi}) = 0.
\end{aligned}$$

Assim, para que exista soluções não-triviais, devemos ter $\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0$, ou seja, $\sqrt{\lambda}\,\pi = n\,\pi$ $(n = 1, 2, ...)$. Logo $\lambda_n = n^2$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ são autovalores. Para cada $\lambda_n = n^2$ existem duas soluções linearmente independentes $\varphi_n(t) = \cos(n\,t)$ e $\psi_n(t) = \mathrm{sen}(n\,t)$ (diferentemente do caso de sistema de Sturm-Liouville regular).

Além disso, $\lambda = 0$ é autovalor e a correspondente autofunção é a função constante $\varphi_0(t) = 1$. Para $\lambda < 0$ o problema só possui solução trivial.

Portanto os autovalores são

$$0, 1, 4, 9, ..., n^2, ...$$

e as autofunções são

$$1, \cos(t), \mathrm{sen}(t), \cos(2t), \mathrm{sen}(2t), ..., \cos(nt), \mathrm{sen}(nt), ...$$

□

Exemplo 2.21 Se a equação

$$-\,(p(t)\,y'(t))' + (q(t) - \lambda\,(\omega)(t))\,y(t) = 0, \tag{2.6}$$

é definida no interior de um intervalo finito I, mas em uma ou em ambas as extremidades de I temos que, ou pelo menos uma das funções $p(t), q(t), \omega(t)$ não é contínua ou uma das funções $p(t), q(t)$ se anula então dizemos que os problemas de contorno para a equação (2.6) em I são *singulares*. Se I é um intervalo infinito, os problemas de contorno para (2.6) em I também são chamados *singulares*. Para esses problemas veja [10].

Por exemplo, considere o problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\,t}[(1-t^2)\,y'(t)] + \lambda\,y(t) = 0, \text{ em } (-1,1),\\
&y(1) = 1,\\
&y \text{ limitada em } (-1,1).
\end{aligned}$$

A função $p(t) = (1-t^2)$ se anula nos pontos extremos $t = -1$ e $t = 1$, o que torna o problema de Sturm-Liouville singular.

Os autovalores são $\lambda_n = n(n+1)$ $(n = 0, 1, 2, 3...)$ e as autofunções são

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{d^n}{d\,t^n}\,[(t^2-1)^n],$$

que são chamados *polinômios de Legendre*[4]. Temos

$$\begin{aligned}
&P_0(t) = 1,\\
&P_1(t) = t,\\
&P_2(t) = \frac{3}{2}\,t^2 - \frac{1}{2},\\
&P_3(t) = \frac{5}{2}\,t^3 - \frac{3}{2}\,t,\\
&P_4(t) = \frac{35}{8}\,t^4 - \frac{15}{4}\,t^2 + \frac{3}{8},\\
&...
\end{aligned}$$

Utilizando a equação $(1-t^2)\,y''(t) - 2\,t\,y'(t) + n(n+1)\,y(t) = 0$ e que cada P_n é solução, temos (para $n \neq m$)

$$\begin{aligned}
&(1-t^2)\,P_n''(t) - 2\,t\,P_n'(t) + n(n+1)\,P_n(t) = 0,\\
&(1-t^2)\,P_m''(t) - 2\,t\,P_m'(t) + m(m+1)\,P_m(t) = 0.
\end{aligned}$$

[4] Adrien-Marie Legendre (1752 - 1833)

Multiplicando a primeira igualdade por $P_m(t)$, a segunda por $P_n(t)$, e subtraindo, obtemos

$$\begin{aligned}
&P_m(t)\,P_n(t)\,[m(m+1)-n(n+1)]\\
&= (1-t^2)\,[P_m(t)P_n''(t)-P_m''(t)P_n(t)] - 2t[P_m(t)P_n'(t)-P_m'(t)P_n(t)]\\
&= \frac{d}{dt}[(1-t^2)\,[P_m(t)P_n'(t)-P_m'(t)P_n(t)]].
\end{aligned}$$

Logo, integrando de -1 a 1 obtemos

$$[m(m+1)-n(n+1)]\int_{-1}^{1} P_m(t)\,P_n(t)\,dt = (1-t^2)[P_m(t)P_n'(t)-P_m'(t)P_m(t)]\Big|_{-1}^{1} = 0,$$

ou seja, se $n \neq m$, $\langle P_n, P_m\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t)\,P_m(t)\,dt = 0$. Além disso, temos que $\langle P_n, P_n\rangle = 2/(2n+1)$.

EXERCÍCIOS

(I) Determine os autovalores e as autofunções dos seguintes problemas de Sturm-Liouville no intervalo e com as condições dadas.

[1] $y''(x) + y'(x) + \lambda\, y(x) = 0$, em $[0, 1]$,
com $y(0) = y(1) = 0$.
[2] $y''(x) + \lambda\, y(x) = 0$, em $[0, 1]$,
com $y(0) = 0$ e $3\, y(1) + y'(1) = 0$.
[3] $y''(x) + \lambda\, y(x) = 0$, em $[0, 1]$,
com $y'(0) = y(1) = 0$.
[4] $x^2\, y''(x) + 3\, x\, y'(x) + \lambda\, y(x) = 0$, em $[1, \mathrm{e}]$,
com $y(1) = y(\mathrm{e}) = 0$.
[5] $y''(x) + 2\, y'(x) + (\lambda + 1)\, y(x) = 0$, em $[0, 5]$,
com $y(0) = y(5) = 0$.
[6] $x^2\, y''(x) + xy'(x) = \lambda\, y(x) = 0$, em $[1, \mathrm{e}^\pi]$,
com $y(1) = y(\mathrm{e}^\pi) = 0$.
[7] $x^2\, y''(x) + x\, y'(x) + 9\, \lambda\, y(x) = 0$, em $[1, \mathrm{e}]$,
com $y'(1) = 0$ e $y(\mathrm{e}) = 0$.

(II) Encontre o desenvolvimento em série da solução dos seguintes problemas em termos das autofunções do sistema de Sturm - Liouville associado.

(1) $y''(x) = x\,(x - 2\,\pi)$, com $y(0) = 0$ e $y'(\pi) = 0$.
(2) $y''(x) = f(x)$, com $y(0) = y(\pi) = 0$, sendo

$$f(x) = \begin{cases} -\,x, & \text{se } 0 \le x \le \pi/2 \\ x - \pi, & \text{se } \pi/2 \le x \le \pi. \end{cases}$$

(III) Para $h \in C([0, 2\,\pi]; \mathbb{R})$, discuta o problema

$$\begin{aligned} &y''(x) = -\,h(x), \\ &y(0) = y(2\pi), \\ &y'(0) = y'(2\pi). \end{aligned}$$

(Sugestão Considere separadamente os casos $\int_0^{2\pi} h(x)\, dx = 0$ e $\int_0^{2\pi} h(x)\, dx \neq 0$).

RESPOSTAS:
(I) λ_n indica os autovalores e φ_n as respectivas autofunções.

[1] $\lambda_n = n^2\,\pi^2 + \dfrac{1}{4}$ $(n = 1, 2, 3, ..)$ e $\varphi_n(x) = \mathrm{e}^{-x/2}\mathrm{sen}(n\,\pi\,x)$.
[2] Os autovalores são as soluções positivas de $tg(\sqrt{\lambda}) = -\sqrt{\lambda}/3$ e $\varphi_n(x) = \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_n}\,x)$.

[3] $\lambda_n = (n + \dfrac{1}{2})^2\pi^2$ $(n = 0, 1, 2, 3...)$ e $\varphi_n(x) = \cos((n + \dfrac{1}{2})\pi\,x)$.

[4] $\lambda_n = n^2\pi^2 + 1$ $(n = 1, 2, 3...)$ e $\varphi_n(x) = x^{-1}\,\mathrm{sen}(n\,\pi\ln(x))$.

[5] $\lambda_n = n^2\pi^2/25$ e $\varphi_n(x) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{sen}(n\pi\,x/5)$.

[6] $\lambda_n = n^2$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ e $\varphi_n(x) = \mathrm{sen}(n\ln(x))$.

[7] $\lambda_n = (2n-1)^2\pi^2/36$ e $\varphi_n(x) = \cos(\dfrac{(2n-1)}{2}\pi\ln(x))$.

(II)
(1) $y(x) = \dfrac{128}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^5}\mathrm{sen}((2n+1)x/2)$.
(2) $y(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{4(-1)^{n+1}}{(2n-1)^4\,\pi}\right]\mathrm{sen}((2n-1)x)$.
(III) Se $\displaystyle\int_0^{2\pi} h(x)\,dx \neq 0$ não existe solução.
Se $\displaystyle\int_0^{2\pi} h(x)\,dx = 0$ então $y(x) = C + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\,x) + b_n\,\mathrm{sen}(n\,x)$, onde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(x)\cos(n\,x)\,dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(x)\,\mathrm{sen}(n\,x)\,dx,$$

onde C é uma constante arbitrária.

Capítulo 3

A função de Green

Um típico problema de valor de fronteira para equações diferenciais ordinárias pode ser escrito na forma de operador

$$L\,u = f. \tag{3.1}$$

Procurando uma solução u que satisfaça essa equação e as condições de fronteira dadas. Se $\mathcal{D}(L)$ é o espaço das funções satisfazendo as condições de fronteira, então o problema se reduz a encontrar uma solução de (3.1) em $\mathcal{D}(L)$. Uma maneira de abordar o problema é procurar o operador inverso L^{-1}. Se for possível determinar L^{-1}, então a solução de (3.1) pode ser obtida por $u = L^{-1}(f)$. Em muitos casos importantes isto é possível, e o operador inverso é um operador integral da forma

$$[L^{-1}(f)](x) = \int_a^b G(x,t)\,f(t)\,dt.$$

A função G é chamada *função de Green*[1] do operador L. A existência da função de Green e sua determinação não é um problema simples. Vamos examinar o problema no caso do sistema de Sturm-Liouville regular.

Exemplo 3.1 Para $f \in C([0,1])$, considere o problema

$$\begin{aligned} &y''(t) = f(t), \text{ em } [0,1],\\ &y(0) = y(1) = 0. \end{aligned}$$

[1] George Green (1793 - 1841)

Integrando a equação diferencial $y''(t) = f(t)$ duas vezes e invertendo a ordem de integração, obtemos

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x \left[\int_0^s f(t)\,dt\right] ds + Ax + B \\ &= \int_0^x \left[\int_t^x ds\right] f(t)\,dt + Ax + B \\ &= \int_0^x (x-t)\,f(t)\,dt + Ax + B. \end{aligned}$$

Usando a condição $y(0) = 0$ obtemos $B = 0$. Usando a condição $y(1) = 0$ obtemos

$$0 = y(1) = \int_0^1 (1-t)\,f(t)\,dt + A,$$

ou seja, $A = -\displaystyle\int_0^1 (1-t)\,f(t)\,dt$. Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x (x-t)\,f(t)\,dt - x\int_0^1 (1-t)\,f(t)\,dt \\ &= \int_0^x (x-t)\,f(t)\,dt - \int_0^x x\,(1-t)\,f(t)\,dt - \int_x^1 x\,(1-t)\,f(t)\,dt \\ &= \int_0^x t\,(x-1)\,f(t)\,dt + \int_x^1 x\,(t-1)\,f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Assim podemos escrever a solução do problema na forma

$$y(x) = \int_0^1 G(x,t)\,f(t)\,dt,$$

onde

$$G(x,t) = \begin{cases} t\,(x-1), & \text{se } 0 \le t < x, \\ x\,(t-1), & \text{se } x \le t \le 1. \end{cases}$$

□

Vamos trabalhar com a hipótese de que $\lambda = 0$ *não é autovalor do problema de Sturm-Liouville*. Essa hipótese implica que para toda $f \in C([a,b])$, o problema $L_0[y] = f$, $F_1[y] = 0$ e $F_2[y] = 0$ tem, no máximo, uma solução.

Teorema 3.2 *Existe uma função contínua* $G : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ *tal que, dada* $f \in C([a,b])$*, uma função* $y \in C^2([a,b])$ *é solução para o problema*

$$(P_0) \begin{cases} (S_0) \;\; L_0[y] = -\,(p\,y')' + q\,y \;=\, f \text{ em } [a,b], \\[2ex] (F) \begin{cases} F_1[y] = \alpha_0\, y(a) + \alpha_1\, y'(a) = 0, \\ F_2[y] = \beta_0\, y(b) + \beta_1\, y'(b) = 0, \end{cases} \end{cases}$$

se, e somente se, $y(t) = \displaystyle\int_a^b G(t,s)\, f(s)\, ds$*.A função* G *é chamada de função de Green do problema* (P) *e é definida por*

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{y_1(t)\, y_2(x)}{p(t)\, W[y_1,y_2](t)} = G_1(x,t), \;\text{ se } a \le t \,<\, x, \\[3ex] \dfrac{y_2(t)\, y_1(x)}{p(t)\, W[y_1,y_2](t)} = G_2(x,t), \;\text{ se } x \le t \le b. \end{cases}$$

onde y_1 *e* y_2 *são duas soluções linearmemente independentes da equação homogênea* $L_0[y] \;=\; -\,[p(t)\, y'(t)]' + q(t)\, y(t) \;=\; 0$*, com as condições de fronteira* $F_1[y_1] = 0$ *e* $F_2[y_2] = 0$.

Demonstração. De acordo com a teoria de equações diferenciais ordinárias, a solução geral da equação

$$L_0[y] = -\,[p(t)\, y'(t)]' + q(t)\, y(t) \;=\, f(t) \tag{3.2}$$

é da forma $y(t) = C_1\, y_1(t) + C_2\, y_2(t) + y_p(t)$, onde C_1 e C_2 são constantes, y_1 e y_2 são duas soluções linearmente independentes da equação homogênea

$$L_0[y] = -\,[p(t)\, y'(t)]' + q(t)\, y(t) = 0 \tag{3.3}$$

e y_p é uma solução particular de (3.2). Em particular a solução y_p pode ser determinada pelo método de Lagrange de variação dos parâmetros, ou seja, vamos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = v_1(t)\, y_1(t) + v_2(t)\, y_2(t), \tag{3.4}$$

onde v_1 e v_2 são funções que serão determinadas. Derivando (3.4) obtemos

$$y_p'(t) = v_1'(t)\, y_1(t) + v_1(t)\, y_1'(t) + v_2'(t)\, y_2(t) + v_2(t)\, y_2'(t).$$

Existem infinitos pares de funções v_1 e v_2 para os quais y_p satisfaz (3.2).Vamos adicionar uma segunda condição

$$v_1'(t)\,y_1(t) + v_2'(t)\,y_2(t) = 0. \tag{3.5}$$

Com isso temos

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= v_1(t)\,y_1'(t) + v_2(t)\,y_2'(t), \\ y_p''(t) &= v_1(t)\,y_1''(t) + v_2(t)\,y_2''(t) + v_1'(t)\,y_1'(t) + v_2'(t)\,y_2'(t). \end{aligned}$$

Substituindo na equação $-\,[p(t)\,y'(t)]' + q(t)\,y(t) = f(t)$ obtemos

$$\begin{aligned} &v_1(t)\,[-\,p(t)\,y_1''(t) + p'(t)\,y_1'(t) + q(t)\,y_1(t)] \\ &+ v_2(t)\,[-\,p(t)\,y_2''(t) + p'(t)\,y_2'(t) + q(t)\,y_2(t)] \\ &+ p(t)\,[v_1'(t)\,y_1'(t) + v_2'(t)\,y_2'(t)] = f(t). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Como y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea (3.3), os dois primeiros termos em (3.6) são nulos e então (como $p(t) > 0$) obtemos

$$v_1'(t)\,y_1'(t) + v_2'(t)\,y_2'(t) = \frac{f(t)}{p(t)}.$$

Resolvendo o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1'(t)\,y_1(t) + v_2'(t)\,y_2(t) = 0 \\ v_1(t)\,y_1'(t) + v_2'(t)\,y_2'(t) = \dfrac{f(t)}{p(t)} \end{array} \right.$$

obtemos

$$v_1'(t) = -\,\frac{f(t)\,y_2(t)}{p(t)\,W[y_1,y_2](t)}, \tag{3.7}$$

$$v_2'(t) = \frac{f(t)\,y_1(t)}{p(t)\,W[y_1,y_2](t)}. \tag{3.8}$$

Vamos provar que o wronskiano $W[y_1,y_2](t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$. Suponha que

$$W[y_1,y_2](t) = y_1(t)\,y_2'(t) - y_2(t)\,y_1'(t)$$

seja igual a zero em algum ponto $t_0 \in [a,b]$. Então o sistema

$$\begin{aligned} a_1\,y_1(t_0) + a_2\,y_2(t_0) &= 0 \\ a_1\,y_1'(t_0) + a_2\,y_2'(t_0) &= 0 \end{aligned}$$

possui uma solução não-trivial, pois a_1 e a_2 não são ambos iguais a zero. Então a função $g(t) = a_1\, y_1(t) + a_2\, y_2(t)$ é uma solução para o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} &-[p(t)\, y'(t)]' + q(t)\, y(t) = 0, \\ &g(t_0) = g'(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Mas esse problema possui somente solução trivial (veja o Teorema 1.12), e assim $g = 0$. Isto significa que y_1 e y_2 são linearmente dependentes, ou seja, $y_1(t) = \tilde{C}\, y_2(t)$ para alguma constante $\tilde{C}$. Consequentemente, y_1 satisfaz ambas as condições de fronteira $F_1[y] = 0$ e $F_2[y] = 0$, mas isto implica que $\lambda = 0$ é um autovalor do sistema de Sturm-Liouville, contrário a hipótese. Logo $W[y_1, y_2](t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$.

Pelo Teorema 2.11, $p(t)\, W[y_1, y_2](t) =$ constante. Como $W[y_1, y_2](t) \neq 0$ e $p(t) > 0$, a constante é diferente de zero. Vamos denotar essa constante por $C = \dfrac{1}{p(t)\, W[y_1, y_2](t)}$.

Integrando as igualdades (3.7) e (3.8), obtemos

$$v_1(x) = -\int_b^x C\, y_2(t)\, f(t)\, dt \quad \text{e} \quad v_2(x) = \int_a^x C\, y_1(t)\, f(t)\, dt,$$

e finalmente

$$\begin{aligned} y_p(x) &= v_1(x)\, y_1(x) + v_2(x)\, y_2(x) \\ &= -\, y_1(x) \int_b^x C\, y_2(t)\, f(t)\, dt + y_2(x) \int_a^x C\, y_1(t)\, f(t)\, dt \\ &= \int_a^x \frac{y_2(x) y_1(t)\, f(t)}{p(t)\, W[y_1, y_2](t)}\, dt + \int_x^b \frac{y_1(x) y_2(t)\, f(t)}{p(t)\, W[y_1, y_2](t)}\, dt. \end{aligned}$$

Consequentemente, se definimos a função de Green como

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{y_1(t)\, y_2(x)}{p(t)\, W[y_1, y_2](t)} = G_1(x,t), \ \text{se } a \leq t \leq x, \\[2ex] \dfrac{y_2(t)\, y_1(x)}{p(t)\, W[y_1, y_2](t)} = G_2(x,t), \ \text{se } x \leq t \leq b, \end{cases}$$

podemos escrever

$$y_p(x) = \int_a^x G_1(x,t)\, f(t)\, dt + \int_x^b G_2(x,t)\, f(t)\, dt = \int_a^b G(x,t)\, f(t)\, dt.$$

A função G é contínua em $[a,b]\times[a,b]$, $G(x,t)=G(t,x)$ e

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\partial G_2}{\partial x}(t-\varepsilon,t)-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\partial G_1}{\partial x}(t+\varepsilon,t)=-\frac{1}{p(t)}.$$

□

Exemplo 3.3 Considere a equação $y''(t)=f(t)$ em $[a,b]$, sendo f uma função contínua em $[a,b]$, com as condições $y(a)=y(b)=0$.

As soluções para a equação homogênea $y''(t)=0$ satisfazendo as condições $y_1(a)=0$ e $y_2(b)=0$ são $y_1(t)=t-a$ e $y_2(t)=t-b$. Temos

$$W(t)=W[y_1,y_2](t)=\begin{vmatrix} t-a & t-b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=t-a-(t-b)=b-a.$$

Logo a função de Green para o problema é

$$G(x,t)\;=\;\begin{cases}\dfrac{y_1(t)\,y_2(x)}{p(t)\,W[y_1,y_2](t)}, & \text{se } a\le t\le x,\\[2mm] \dfrac{y_2(t)\,y_1(x)}{p(t)\,W[y_1,y_2](t)}, & \text{se } x\le t\le b,\end{cases}$$

ou seja,

$$G(x,t)\;=\;\begin{cases}\dfrac{(t-a)\,(x-b)}{(b-a)}=G_1(x,t), & \text{se } a\le t\le x,\\[2mm] \dfrac{(t-b)\,(x-a)}{(b-a)}=G_2(x,t), & \text{se } x\le t\le b.\end{cases}$$

Portanto a solução do problema é dada por

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_a^b G(x,t)\,f(t)\,dt \\ &= \int_a^x G_1(x,t)\,f(t)\,dt+\int_x^b G_2(x,t)\,f(t)\,dt \\ &= \frac{x-b}{b-a}\int_a^x (t-a)\,f(t)\,dt+\frac{x-a}{b-a}\int_x^b (t-b)\,f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Por exemplo

• Para $f(x) = -6x$, $a = 0$ e $b = 1$, então a solução do problema $y''(x) = -6x$, com $y(0) = y(1) = 0$ é

$$\begin{aligned} y(x) &= (x-1)\int_0^x t\,(-6t)\,dt + x\int_x^1 (t-1)\,(-6t)\,dt \\ &= x(1-x^2). \end{aligned}$$

• Para $f(x) = \mathrm{e}^x$, $a = 0$ e $b = 1$, então a solução do problema $y''(x) = \mathrm{e}^x$, com $y(0) = y(1) = 0$ é

$$\begin{aligned} y(x) &= (x-1)\int_0^x t\,\mathrm{e}^t\,dt + x\int_x^1 (t-1)\,\mathrm{e}^t\,dt \\ &= \mathrm{e}^x + x - 1 - x\,\mathrm{e}. \end{aligned}$$

• Para $f(x) = \cos(x^2 + x)$, $a = 0$ e $b = 1$, então a solução do problema $y''(x) = \cos(x^2 + x)$, com $y(0) = y(1) = 0$ é

$$y(x) = (x-1)\int_0^x t\cos(t^2+t)\,dt + x\int_x^1 (t-1)\cos(t^2+t)\,dt.$$

Exemplo 3.4 Considere a equação $y''(t) + y(t) = f(t)$ em $[0, \pi]$, com as condições de fronteira $y(0) = y'(\pi) = 0$. Temos que $\lambda = 0$ não é autovalor desse problema, pois a solução geral da equação homogênea $y''(t) + y(t) = 0$ é dada por $y(t) = C_1\,\mathrm{sen}(t) + C_2\cos(t)$ e $y(0) = 0$ implica $C_2 = 0$ e $y'(\pi) = 0$ implica $C_1 = 0$. Agora $y_1(t) = \mathrm{sen}(t)$ e $y_2(t) = \cos(t)$ são soluções da equação homogênea $y''(t) + y(t) = 0$ satisfazendo $y_1(0) = 0$ e $y_2'(\pi) = 0$, e temos $W[y_1, y_2](t) = -1$. Portanto a função de Green do problema é dada por

$$G(x,t) = \begin{cases} -\,\mathrm{sen}(x)\cos(t), & \text{para } 0 \le t \le x, \\ -\cos(x)\,\mathrm{sen}(t), & \text{para } x \le t \le \pi, \end{cases}$$

e a solução do problema é dada por

$$y(x) = -\,\mathrm{sen}(x)\int_0^x \cos(t)\,f(t)\,dt - \cos(x)\int_x^\pi \mathrm{sen}(t)\,f(t)\,dt.$$

Corolário 3.5 *Temos que y é solução do problema de Sturm-Liouville*

$$(P)\begin{cases} (S_\lambda) \quad L_\lambda[y](t) = f(t), \ \text{para } t\in[a,b], \\ \\ (F) \quad F_1[y]=0, \ F_2[y]=0. \end{cases}$$

se, e somente se,

$$y(t) - \lambda \int_a^b G(t,s)\, y(s)\, \omega(s)\, ds = g(t),$$

onde $g(t) = \int_a^b G(t,s)\, f(s)\, ds$.

Demonstração. Como

$$\begin{aligned} L_\lambda[y] &= -\left(p(t)\, y'(t)\right)' + \left(q(t) - \lambda\, \omega(t)\right) y(t) \\ &= L_0[y] - \lambda\, \omega(t)\, y(t), \end{aligned}$$

então $L_\lambda[y] = f$ se, e somente se, $L_0[y] = \lambda\, \omega\, y + f$. Pelo Teorema 3.2 temos $L_0[y] = \lambda\, \omega\, y + f$ com $F_1[y] = F_2[y] = 0$ se, e somente se,

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)\left[\lambda\, \omega(s)\, y(s) + f(s)\right] ds$$

ou seja, se e somente se,

$$y(t) - \lambda \int_a^b G(t,s)\, y(s)\, \omega(s)\, ds = g(t) = \int_a^b G(t,s)\, f(s)\, ds.$$

$\square$

Indicando por $\mathcal{T}$ o operador integral definido em $C_{L^2}([a,b])$

$$\mathcal{T}[y](t) = \int_a^b G(t,s)\, y(s)\, \omega(s)\, ds, \quad t\in[a,b].$$

Pelo Teorema 3.2, temos que $L_0[y] = \lambda\, \omega\, y$ com $F_1[y] = F_2[y] = 0$ se, e somente se,

$$y(t) - \lambda \int_a^b G(t,s)\, y(s)\, \omega(s)\, ds = 0,$$

ou seja, $\dfrac{1}{\lambda}\, y(t) = \mathcal{T}[y](t)$, ou ainda, $\dfrac{1}{\lambda}$ é autovalor de $\mathcal{T}$. Temos portanto o seguinte resultado.

Corolário 3.6 *(a) λ é autovalor do problema de Sturm-Liouville se, e somente se, $1/\lambda$ é autovalor de $\mathcal{T}$.*
(b) y é autofunção do problema de Sturm-Liouville correspondente ao autovalor λ se, e somente se, y é autofunção do operador $\mathcal{T}$ correspondente ao autovalor $1/\lambda$.

Exemplo 3.7 Considere o problema

$$\begin{aligned}&(1+x^2)\,y''(x)+2\,x\,y'(x)-\,\lambda\,y(x)=f(x),\\&y(0)=0 \text{ e } y'(1)=0,\end{aligned}$$

onde $f\in C([0,1],\mathbb{R})$. Podemos escrever a equação na forma

$$\frac{d}{d\,x}\Big[(1+x^2)\,y'(x)\Big]-\,\lambda\,y(x)=f(x).$$

Se $L_\lambda[y]=\dfrac{d}{d\,x}\Big[(1+x^2)\,y'(x)\Big]-\,\lambda\,y(x)$, então $L_0[y]=\dfrac{d}{d\,x}\Big[(1+x^2)\,y'(x)\Big]$.

Pelo Teorema 3.2, para determinar a função de Green precisamos obter duas soluções y_1 e y_2 linearmente independentes da equação homogênea associada

$$\frac{d}{d\,x}\Big[(1+x^2)\,y'(x)\Big]=0,$$

satisfazendo $y_1'(1)=0$ e $y_2(0)=0$. Podemos encontrar duas soluções observando que

(a) se $y'(x)=0$ e então $y_1(x)=C_1$ (constante) e
(b) se $(1+x^2)\,y'(x)=C_2$, obtemos $y_2(x)=C_2\,\mathrm{arctg}(x)$.

Temos que $y_1'(1)=0$ e $y_2(0)=0$. Além disso

$$W[y_1,y_2](x)=\begin{vmatrix}C_1 & C_2\,\mathrm{arctg}(x)\\ 0 & \dfrac{C_2}{1+x^2}\end{vmatrix}=\frac{C_1\,C_2}{1+x^2}.$$

Como $p(x)=(1+x^2)$ então $p(s)\,W[y_1,y_2](s)=C_1\,C_2$, e a função de Green é

$$G(x,t)\;=\;\begin{cases}\dfrac{y_1(t)\,y_2(x)}{p(t)\,W[y_1,y_2](t)}, & \text{se } 0\le t\le x,\\[2mm] \dfrac{y_2(t)\,y_1(x)}{p(t)\,W[y_1,y_2](t)}, & \text{se } x\le t\le 1,\end{cases}$$

ou seja,

$$G(x,t) \;=\; \begin{cases} \operatorname{arctg}(x) = G_1(x,t), & \text{se } 0 \le t \le x, \\ \operatorname{arctg}(t) = G_2(x,t), & \text{se } x \le t \le 1. \end{cases}$$

Portanto, pelo Corolário 3.5, uma função $y = y(x)$ é solução do problema se, e somente se,

$$y(x) - \lambda \int_0^1 G(x,t)\, y(t)\, \omega(t)\, dt = \int_0^1 G(x,t)\, f(t)\, dt,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} y(x) - \lambda &\left[\int_0^x \operatorname{arctg}(x)\, y(t)\, dt + \int_x^1 \operatorname{arctg}(t)\, y(t)\, dt \right] \\ &= \int_0^x \operatorname{arctg}(x)\, f(t)\, dt + \int_x^1 \operatorname{arctg}(t)\, f(t)\, dt. \end{aligned}$$

Por exemplo, para $f(x) = 0$ temos que $y = y(x)$ é solução do problema se, e somente se, $y = y(x)$ é solução da equação integral

$$y(x) = \lambda \int_0^1 G(x,t)\, y(t)\, dt.$$

Exemplo 3.8 Vamos determinar a função de Green para o problema

$$\begin{aligned} & y''(t) + y(t) = f(t), \text{ em } [0,\pi], \\ & y(0) + y'(0) = 0, \\ & y(\pi) = 0. \end{aligned}$$

A solução geral da equação homogênea $y''(t) + y(t) = 0$ é da forma $y(t) = C_1 \operatorname{sen}(t) + C_2 \cos(t)$. A função $y_1(t) = \operatorname{sen}(t) - \cos(t)$ satisfaz a condição $y_1(0) + y_1'(0) = 0$, e a função $y_2(t) = \operatorname{sen}(t)$ satisfaz a condição $y_2(\pi) = 0$ (y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes da equação $y''(t) + y(t) = 0$). Temos

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}(t) - \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) + \operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{vmatrix} = -1,$$

e $p(t) = 1$. Logo a função de Green é dada por

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{y_1(t)\, y_2(x)}{p(t)\, W[y_1,y_2](t)}, & \text{se } 0 \leq t \leq x, \\ \dfrac{y_2(t)\, y_1(x)}{p(t)\, W[y_1,y_2](t)}, & \text{se } x \leq t \leq \pi, \end{cases}$$

ou seja,

$$G(x,t) = \begin{cases} -\,(\operatorname{sen}(t) - \cos(t)) \operatorname{sen}(x), & \text{se } 0 \leq t \leq x, \\ -\operatorname{sen}(t)(\operatorname{sen}(x) - \cos(x)), & \text{se } x \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Portanto a solução do problema é dada por

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^\pi G(x,t)\, f(t)\, dt \\ &= \int_0^x (\cos(t) - \operatorname{sen}(t)) \operatorname{sen}(x)\, f(t)\, dt + \int_x^\pi (\cos(x) - \operatorname{sen}(x)) \operatorname{sen}(t)\, f(t)\, dt \\ &= \operatorname{sen}(x) \int_0^x (\cos(t) - \operatorname{sen}(t))\, f(t)\, dt + (\cos(x) - \operatorname{sen}(x)) \int_x^\pi \operatorname{sen}(t)\, f(t)\, dt. \end{aligned}$$

Exemplo 3.9 Vamos determinar a função de Green para o problema

$$\begin{aligned} & y''(x) + \omega^2\, y(x) = f(x), \text{ em } [0,1], \\ & y'(0) = y'(1) = 0, \end{aligned}$$

onde $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$ e $\omega \neq n\,\pi$ $(n = 1, 2, 3, ...)$. A solução geral da equação homogênea associada $y''(x) + \omega^2\, y(x) = 0$ é dada por

$$y(x) = C_1 \operatorname{sen}(\omega\, x) + C_2 \cos(\omega\, x).$$

Temos que $y_1(x) = \cos(\omega\, x)$ satisfaz $y_1'(0) = 0$, e que

$$y_2(x) = \operatorname{sen}(\omega\, x) + \frac{\cos(\omega)}{\operatorname{sen}(\omega)} \cos(\omega\, x) = \frac{\cos(x-1)\,\omega}{\operatorname{sen}(\omega)}$$

satisfaz $y_2'(1) = 0$. Além disso, temos que

$$W[y_1,y_2](x) = \begin{vmatrix} \cos(\omega\, x) & \dfrac{\cos((x-1)\,\omega)}{\operatorname{sen}(\omega)} \\ -\,\omega \operatorname{sen}(\omega\, x) & -\,\omega \dfrac{\operatorname{sen}((x-1)\,\omega)}{\operatorname{sen}(\omega)} \end{vmatrix} = \omega\,,$$

ou seja, as funções y_1 e y_2 são linearmente independentes em $[0,1]$. Portanto a função de Green do problema é definida por

$$G(x,t) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\cos(\omega\, t)\cos((x-1)\,\omega)}{\omega\,\mathrm{sen}(\omega)}, & \text{se } 0 \le t \le x, \\ \dfrac{\cos((t-1)\,\omega)\cos(\omega\, x)}{\omega\,\mathrm{sen}(\omega)}, & \text{se } x \le t \le 1. \end{cases}$$

Com isso, a solução do problema é dada por

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^1 G(x,t)\, f(t)\, dt \\ &= \frac{\cos((x-1)\,\omega)}{\omega\,\mathrm{sen}(\omega)} \int_0^x \cos(\omega\, t)\, f(t)\, dt \\ &+ \frac{\cos(\omega\, x)}{\omega\,\mathrm{sen}(\omega)} \int_x^1 \cos((t-1)\,\omega)\, f(t)\, dt. \end{aligned}$$

Observe que para o caso $\omega = 0$ o problema não possui função de Green.

EXERCÍCIOS

Use a função de Green para determinar a solução para cada problema, onde a função $f \in C([0,1],\mathbb{R})$.

(1) $y''(x) = f(x)$, com $y(0) = 0$ e $y(1) + y'(1) = 0$.

(2) $y''(x) + k^2\, y(x) = f(x)$, $y(0) = y(1) = 0$ (sendo $k > 0$ e $k \neq n\pi$ $(n = 1, 2, 3, ...)$.

RESPOSTAS:

(1) $y(x) = \dfrac{(x-2)}{2} \displaystyle\int_0^x t\, f(t)\, dt + \frac{x}{2} \int_x^1 (t-2)\, f(t)\, dt.$

(2)

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{k}[\mathrm{cotg}(k)\,\mathrm{sen}(k\,x) - \cos(k\,x)] \int_0^x f(t)\,\mathrm{sen}(k\,t)\, dt \\ &+ \mathrm{sen}(k\,x) \int_x^1 f(t)\,[\mathrm{cotg}(k)\,\mathrm{sen}(k\,t) - \cos(k\,t)]\, dt. \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

[1] A.F.Neves e D.G. de Figueiredo, *Equações Diferenciais Aplicadas*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2005.

[2] R.G. Barthe, *Elementos de Análise Real*, Editora Campus, 1983.

[3] L. Debnath e P. Mikusiński, *Introduction to Hilbert Sapces with Applications*, Academic Press, 1990.

[4] D. Kreider, D.R. Ostberg, R.C. Kuller e F.W.Perkins, *Introdução à Análise Linear*, Volume 1, Livro Técnico, 1972.

[5] D. Kreider, D.R. Ostberg, R.C. Kuller e F.W.Perkins, *Introdução à Análise Linear*, Volume 3, Livro Técnico, 1972.

[6] C.S. Honig, *Análise Funcional e o problema de Sturm-Liouville*, EDUSP, 1978.

[7] C.S. Honig, *Análise Funcional e Aplicações*, Volume 2, Instituto de Matemática e Estatistica da Universidade de São Paulo, 1970.

[8] E.L.Lima, *Curso de Análise*, volume 1, Projeto Euclides, IMPA, 1982.

[9] E.C. de Oliveira e M. Tygel, *Métodos Matemáticos para Engenharia*, Textos Universitários, SBM, 2010.

[10] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais*, Projeto Euclides, IMPA, 1979.

[11] D.G. Zill e M.R. Cullen, *Equações Diferenciais*, Volume 2, Makron Books, 2001.