Sistemas Dinâmicos: uma primeira visão

A. T. Baraviera   Flávia M. Branco
Instituto de Matemática - UFRGS

"... e a vida o que é?
diga lá meu irmão
ela é a batida
de um coração ... "
(Luiz Gonzaga Júnior)

Ao Pedro

Conteúdo

Este texto foi preparado com a intenção de servir de apoio ao mini-curso que será ministrado no segundo colóquio de matemática da região sul. Nossos objetivos são modestos: longe de desenvolver uma teoria sólida pretendemos apenas colecionar, da maneira que nos parece a mais consistente, uma série de exemplos onde ideias interessantes acerca do assunto vão aparecendo e esperamos que isso motive os alunos a buscar textos mais aprofundados no momento em que começarem a adquirir mais maturidade matemática e dominarem mais ferramentas.

Fizemos a opção de exigir um mínimo de pré-requisitos de forma a aumentar o público e manter aberta a possibilidade de despertar em mais pessoas o interesse por esse assunto. Se isso ocorrer, o leitor encontrá nas referências algumas sugestões de leitura que seguramente garantirão um aprofundamento do tema.

O assunto dessas notas é tema constante de nossas conversas com Artur Lopes e a ele somos muito gratos por isso. Agradecemos também aos organizadores do segundo colóquio de matemática da região sul pela oportunidade de apresentar este mini-curso.

O leitor que quiser comunicar erros do texto, enviar algum comentário ou simplesmente manter contato com os autores pode nos escrever usando os endereços abaixo:

`baravi@mat.ufrgs.br` `fmbranco@mat.ufrgs.br`

Será um prazer saber que este texto despertou a curiosidade de alguém.

Alexandre T. Baraviera Flávia M. Branco

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo reunimos, para conveniência do leitor, diversos conceitos e definições básicas que serão usados no texto. Ainda que a teoria dos sistemas dinâmicos possa ser feita em situações onde o tempo é uma variável real, nas linhas que seguem nos restringiremos ao caso de uma evolução discreta, ou seja, onde o tempo está em $\mathbb{Z}$ (ou em um subconjunto de $\mathbb{Z}$).

1.1 Conjuntos

Usaremos em todo esse texto a seguinte notação: o conjunto dos números naturais inclui o zero

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

e, quando precisarmos excluir o zero escreveremos

$$\mathbb{N}_* = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

1.2 Sistemas dinâmicos

Um sistema dinâmico é uma função f definida em um certo conjunto X, ou seja,

$$f\colon X \to X$$

A dinâmica, isto é, a passagem do tempo, é vista como sendo a iteração dessa função. Desta forma, se começamos com um ponto $x \in X$ (que corresponde ao instante zero) depois ele estará em $f(x)$ (instante 1), depois em $f(f(x))$ (instante 2) e assim sucessivamente. Para evitarmos escrever expressões como

$$f(f(f(f(f(x)))))$$

usaremos a seguinte convenção, padrão nessa área:

$$f^0(x) := x \qquad f^1(x) := f(x) \qquad f^n(x) := f(f^{n-1}(x)) \quad \text{para } n \geq 1$$

Desta maneira a expressão enorme acima pode ser reescrita simplesmente como $f^5(x)$ significando que f foi iterada 5 vezes; o leitor não deve jamais confundir isso com elevar $f(x)$ a potência 5, até porque essa operação algébrica pode não fazer o menor sentido no conjunto X. Nessa nova notação, então, o que se pretende estudar é a evolução no tempo de um ponto x, ou seja, x, $f(x)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$,... Este conjunto é conhecido como órbita do ponto

$$O(x) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(x)$$

Um dos objetivos da teoria é saber se essa órbita tem algum limite, ou, se não tem, ao menos descrever seus pontos de acumulação (em palavras simples, os pontos dos quais a órbita se aproxima infinitas vezes no futuro).

A estrutura do conjunto X (e a natureza da função f) variam bastante. É muito comum, por exemplo, o estudo da chamada dinâmica diferenciável na qual $X = M$ é uma variedade diferenciável e f é um difeomorfismo; nesse caso a existência de uma estrutura geométrica ajuda bastante a compreender melhor a evolução do sistema. Mas paga-se um preço ao ser necessário incluir diversas hipóteses que garantem um aspecto razoável para M.

De maneira um pouco mais geral, X pode ser um espaço métrico (ou seja, um conjunto com uma noção de distância entre seus pares de pontos) e f uma aplicação contínua (e a situação acima mencionada da dinâmica diferenciável é um caso particular desse).

Simplificamos bastante a compreensão do problema se assumimos que X é um conjunto enumerável e, mais ainda, se supomos que X é finito. Nesse livro pretendemos seguir exatamente esse caminho do mais simples para o mais complicado: vamos iniciar com X sendo finito e subiremos na escala da dificuldade até chegar, no último capítulo, ao caso de uma dinâmica diferenciável. Para manter o texto bem elementar, vamos usar como variedade um conjunto com o qual o leitor certamente tem familiaridade, o intervalo $[a, b]$ da reta (tecnicamente isso é uma variedade unidimensional com bordo, mas isso não será fundamental para nós). No caso intermediário de uma dinâmica contínua em um espaço métrico ficaremos com um exemplo bastante clássico, mas riquíssimo, que é conhecido como shift. Embora essa palavra possa ser traduzida como deslocamento seu uso no contexto de dinâmica já está tão disseminado que adotaremos, como toda a comunidade já fez, o anglicismo.

1.3 Pré-imagens

Quando temos uma $f\colon X \to X$ podemos, se f é uma bijeção, definir sua função inversa $f^{-1}\colon X \to X$. Porém mesmo quando f não é bijeção (e portanto não tem uma função inversa) é sempre possível definir a pré-imagem de um conjunto Y, que denotamos por $f^{-1}(Y)$ como sendo

$$f^{-1}(Y) = \{x \in X : f(x) \in Y\}$$

Ou seja, são os pontos de X que são levados em Y pela função f. Note que o conjunto $f^{-1}(Y)$ pode conter vários pontos, um único ponto ou mesmo ser o conjunto vazio.

Quando para cada ponto $x \in X$ temos que $f^{-1}(\{x\})$ é vazio ou tem um único elemento então dizemos que f é injetiva.

Quando para todo $x \in X$ o conjunto $f^{-1}(\{x\})$ é não vazio então dizemos que f é sobrejetiva.

Quando f é injetiva e sobrejetiva, ou seja, quando para todo $x \in X$ temos que $f^{-1}(\{x\})$ é um conjunto com exatamente um elemento, então dizemos que f é bijetiva.

1.4 Pontos periódicos

Dizemos que x é um ponto periódico de período p se p é o menor inteiro tal que $f^p(x) = x$. Quando $p = 1$, ou seja, temos que $f(x) = x$ então dizemos simplesmente que x é um ponto fixo para f.

Quando x é periódico então sua órbita $x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x)$ é um conjunto finito, conhecido como órbita periódica.

Observação 1. *Note que se y é um ponto periódico de período $p > 1$ então podemos definir uma função $g\colon X \to X$ como sendo $g = f^p$. Desta forma, é fácil ver que*

$$g(y) = f^p(y) = y$$

ou seja, y é um ponto fixo de g. E se x é um ponto fixo de f então também é fácil ver que

$$g(x) = f \circ f \circ \cdots \circ f(x) = x$$

ou seja, x também é ponto fixo de g. Porém se temos um ponto z que é fixo para g a única coisa que podemos afirmar é que ele é um ponto periódico de f; voltaremos a essa assunto, com exemplos, nos capítulos que seguem.

1.5 Distância

Para falarmos em "proximidade", continuidade, pontos de acumulação de uma órbita precisamos estabelecer algum tipo de estrutura no conjunto X que faça com que essas noções tenham sentido. Uma possibilidade, que é a que adotaremos ao longo de todo o texto, é a de se assumir que X é um espaço métrico, ou seja, um conjunto dotado de uma distância. Uma distância nada mais é do que uma certa função que, para cada par de pontos x e y em X associa um número real não negativo $d(x, y)$ que é conhecido como distância de x a y; de forma mais precisa, uma distância é uma função $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Esta última desigualdade é conhecida como desigualdade triangular e fica muito natural quando d é a distância usual no plano e pensamos nos pontos x, y e z como vértices de um triângulo; nesse caso a distância entre dois pontos corresponde ao comprimento de um lado do triângulo e sabemos, da geometria, que a soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo é sempre maior do que o comprimento do lado restante. O leitor com mais curiosidade sobre esse tema deve consultar [Li2]

1.6 Limites e continuidade

Uma vez que X admite uma distância podemos definir alguns conceitos elementares que serão importantes. Vamos começar considerando uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_*} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$. Dizemos que L é o limite da sequência (x_n) se $d(x_n, L)$ assume valores muito próximos de zero sempre que tomamos o índice n suficientemente grande.

Dado um ponto $a \in X$, podemos definir uma bola de centro a e raio r como o conjunto de todos os pontos do conjunto X cuja distância ao ponto a é menor que o raio r, ou seja:

$$B_{a,r} = \{x \in X, d(x, a) < r\}$$

esta bola é um caso particular de vizinhança do ponto a. Se um subconjunto A de X é tal que para cada ponto $a \in A$ existe uma bola $B_{a,r}$ que está contida em A então dizemos que este conjunto é um aberto de X.

Dizemos que um subconjunto B de X é um conjunto fechado se o limite de qualquer sequência convergente $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ pertence a B, onde $b_n \in B$ para todo índice n.

O fecho de um subconjunto B de X, denotado por $\overline{B}$, é formado por todos os pontos $x \in X$ que são limites de alguma sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ com $b_n \in B$. Note que, B é um subconjunto fechado se e somente se $B = \overline{B}$.

É importante notar que o fato de um conjunto ser aberto não exclui a possibilidade deste conjunto também ser fechado. Um exemplo é o conjunto $\mathbb{R}$, quando consideramos a distância usual. Nos depararemos com mais exemplos dessa situação no texto.

1.7 ω-limite

Quando temos uma órbita $O(x)$ podemos procurar os seus pontos de acumulação, ou seja, os pontos em torno dos quais a órbita irá passar uma infinidade de vezes. Este conjunto é conhecido como o ω-limite de x e denotado por $\omega(x)$. De forma mais técnica, dizemos que $z \in \omega(x)$ se existe uma sequência infinita e crescente (ou seja, que vai a infinito) de números naturais $n_1, n_2, \ldots$ tal que

$$d(f^{n_i}(x), z) \to 0$$

Podemos também falar no ω-limite de um conjunto:

$$\omega(Y) := \{\omega(x) \text{ para todo } x \in Y\}$$

1.8 α-limite

Se a função f tem uma inversa (para isso é necessário e suficiente que f seja uma bijeção) então podemos também falar na órbita de um ponto para o passado e, de forma análoga à seção anterior, procurar saber quais são os pontos de acumulação de uma órbita quando o tempo caminha no sentido contrário ao usual. Isso é o que se chama de α-limite de um ponto, denotado por $\alpha(x)$, e sua definição técnica é a seguinte: dizemos que $y \in X$ está em $\alpha(x)$ se existe uma sequência infinita e descrescente (ou seja, que vai para menos infinito) de números inteiros negativos $m_1, m_2, \ldots$ tal que

$$d(f^{m_i}(x), y) \to 0$$

Analogamente podemos falar no α-limite de um conjunto:

$$\alpha(Y) := \{\alpha(x) \text{ para todo } x \in Y\}$$

1.9 Atratores

Dizemos que um conjunto $A \subset X$ é um atrator para um ponto x se $f(A) = A$, ou seja, é um conjunto invariante para f, e a órbita de x se aproxima de pontos de A; mais precisamente

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), A) = 0$$

(onde $d(p, A) = \inf_{a\in A} \{d(p, a)\}$). Note que uma vez que a órbita de x entra no conjunto A ela não pode mais sair. O conjunto de pontos cujas órbitas se aproximam de A é chamado de bacia de atração de A:

$$B(A) = \left\{x \in X : \lim_{n\to\infty} d(f^n(x), A) = 0\right\}$$

Quando $B(A) = X$, ou seja, todos os pontos têm sua órbita futura atraída para A então dizemos que A é um atrator global.

Observação 2. *Essa não é a definição mais geral de atrator, mas é razoavelmente simples e é adequada para os propósitos desse texto.*

1.10 Repulsor

Um conjunto $R \subset X$ é um repulsor para um ponto x se $f^{-1}(R) = R$ e a órbita de x se aproxima de R no passado, ou seja, se $d(f^{-n}(x), R)$ tende a zero quando n tende a infinito.

1.11 Conjugação

Uma conjugação é uma mudança de coordenadas que relaciona duas dinâmicas distintas. Mais precisamente: considere $f\colon X \to X$ e $g\colon Y \to Y$. A conjugação é uma transformação $h\colon X \to Y$ que é contínua e que tem inversa também contínua (ou seja, é um homeomorfismo) tal que

$$h^{-1}gh = f$$

Duas transformações conjugadas partilham diversas propriedades. Por exemplo, se p é um ponto periódico de período P para f então $h(p)$ é um ponto periódico de período P para g: de fato note que

$$h^{-1}gh = f \Rightarrow h^{-1}g^nh = f^n$$

(pois $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f = h^{-1}ghh^{-1}gh \ldots h^{-1}gh = h^{-1}gidgid \ldots idgh = h^{-1}g^nh$). Portanto

$$p = f^P(p) = h^{-1}g^Ph(p) \Rightarrow h(p) = g^P(h(p))$$

Também não é difícil verificar que uma órbita de f é levada, por h em uma órbita de g e que uma órbita densa de f é levada em uma órbita densa de g.

1.12 Topologicamente mixing

Dizemos que um sistema dinâmico $f\colon X \to X$ é topologicamente mixing se para todo par de abertos U e V em X temos um inteiro $N = N(U,V)$ tal que

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset \qquad \text{para todo } n \geq N$$

Cabe observar que a palavra mixing pode perfeitamente ser traduzida por misturadora (e efetivamente é assim que nossos colegas portugueses se referem a estas transformações: como topologicamente misturadoras). No entanto esse anglicismo é comum em nossa literatura matemática e não fugiremos ao hábito.

1.13 Princípio da casa dos pombos

Essa é uma ideia simples, mas bastante útil: se temos n caixas (as casas dos pombos) e queremos distribuir k objetos (os pombos) entre as caixas, com $k > n$, então certamente uma das caixas terá mais de um objeto.

1.14 Pseudo-órbita

Dizemos que uma sequência de pontos $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma ϵ-pseudo-órbita para f se

$$d(f(x_i), x_{i+1}) \leq \epsilon$$

Uma órbita de verdade é, claramente, uma ϵ-pseudo-órbita para todo ϵ positivo. Mas uma ϵ-pseudo-órbita é um conceito mais abrangente que engloba, por exemplo, a órbita de um sistema dinâmico quando vista na tela de um computador: devido a erros de truncamento no processamento (para um computador os números sempre tem uma quantidade finita e não muito grande de casas após a vírgula) o que se observa de fato nesse caso não é uma órbita e sim uma pseudo-órbita.

1.15 Sombreamento

Dizemos que uma função tem a propriedade do sombreamento se, dada uma ϵ-pseudo-órbita $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ então existe $\delta > 0$ e um ponto $x \in X$ tal que

$$d(f^n(x), x_n) \leq \delta \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}$$

(ou seja, ha uma órbita verdadeira que acompanha, ou sombreia, a pseudo-órbita).

1.16 Expansividade

Dizemos que uma transformação $f\colon X \to X$ (com inversa f^{-1}) é ϵ-expansiva se existe $\epsilon > 0$ tal que

$$d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = y$$

(o que pode ser refraseado como segue: se consideramos dois pontos distintos x e y então existe um iterado $k \in \mathbb{Z}$ tal que $d(f^k(x), f^k(y)) \geq \epsilon$, ou seja, é sempre possível separar dois pontos distintos fazendo-os ficar a uma distância de pelo menos ϵ em algum momento).

Capítulo 2

Dinâmica Enumerável

Neste capítulo faremos uma introdução aos sistemas dinâmicos em conjuntos enumeráveis.

2.1 Conjuntos finitos

Um sistema dinâmico é uma função $f\colon X \to X$; nessa seção assumiremos que X é um conjunto finito que descreveremos simplesmente como

$$X = \{1, 2, \dots, n\}$$

Nesse caso, a órbita de um certo ponto $x \in X$ é o conjunto

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(x)$$

Porém não é difícil se convencer de que o conjunto acima é um subconjunto de X e, portanto, também é finito. Desta forma temos que, para um certo k e um certo l,

$$f^{l+k}(x) = f^k(x)$$

(use o princípio da casa dos pombos: as casas, isto é, os pontos de X, são um conjunto finito e a órbita tem uma quantidade de pontos, os pombos, arbitrariamente grande. Logo alguma casa necessariamente terá mais de um pombo o que, neste caso, significa que um mesmo ponto é visitado mais de uma vez pela órbita) ou seja, o ponto $f^k(x)$ é um ponto periódico de período l para a dinâmica. Se $l = n$ então a órbita passa exatamente uma vez por cada um dos pontos do conjunto X. Os pontos $x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)$ estão na bacia de atração da órbita periódica $f^k(x), f^{k+1}(x), \dots, f^{l+k-1}(x)$. De fato, os pontos que serão levados nessa órbita periódica, ou seja, a bacia de atração, são dados por

$$B_1 = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} f^{-m}(f^k(x))$$

Agora podemos ter duas situações: ou $B_1 = X$, e nesse caso todos os pontos de X são atraídos pela órbita periódica ou, então, $B_1 \neq X$; nesse caso considere um ponto y em $X \setminus B_1$. A órbita futura de y não pode entrar em B_1 (pois se entrasse y estaria na bacia de atração B_1, o que contraria a afirmação anterior). O conjunto $X \setminus B_1$ também é finito e a órbita de y está contida em $X \setminus B_1$, logo, de forma similar ao que foi feito para X, podemos encontrar uma órbita periódica que ou inclui y ou atrai y. A bacia de atração desta órbita é B_2.

Então, ou $B_1 \cup B_2 = X$ ou $X \neq B_1 \cup B_2$ e, como antes, podemos tomar um ponto $z \in X \setminus B_1 \cup B_2$; repetindo o procedimento teremos então que X pode ser escrito como união finita de bacias de órbitas periódicas:

$$X = B_1 \cup B_2 \cup \cdots B_j$$

e portanto, dado um ponto inicial qualquer $a \in X$ então ele está na bacia de uma dessas órbitas periódicas e desta forma os iterados de a, no futuro, estarão exatamente sobre essa órbita periódica.

O que acabamos de fazer foi provar o seguinte:

Teorema 2.1. *Considere X um conjunto finito e a dinâmica $f\colon X \to X$; então $X = B_1 \cup \ldots \cup B_j$ (onde a união é disjunta) sendo cada B_i a bacia de atração de uma órbita periódica.*

2.2 Bijeção entre conjuntos finitos

Se $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ é uma bijeção então estamos em uma situação mais especial, que é conhecida como permutação.

Nesse caso a bacia de atração de uma órbita periódica assume um aspecto mais simples: de fato, note que se

$$x, f(x), \ldots, f^{P-1}(x), f^P(x) = x$$

é uma órbita periódica então sua pré-imagem é ela mesma, pois cada ponto tem exatamente uma pré-imagem. A de $f^k(x)$ é $f^{k-1}(x)$ e a de x é o ponto $f^{P-1}(x)$ (pois a imagem deste ponto é x). Portanto a bacia de atração de uma órbita periódica é ela mesma. Usando agora o teorema da seção anterior vemos que o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ pode então ser decomposto na união finita e disjunta de bacias de órbitas periódicas, que são as próprias órbitas periódicas. Desta forma, no caso de uma bijeção de um conjunto finito temos que cada ponto pertence exatamente a uma órbita periódica.

2.3 Conjuntos infinitos

Consideraremos agora que X é um conjunto infinito enumerável; sem perda de generalidade, podemos imaginar que $X = \mathbb{N}_* = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

2.4 Alguns exemplos

Vamos considerar algumas dinâmicas e suas propriedades.

Exemplo 2.1. *Considere $f\colon \mathbb{N}_* \to \mathbb{N}_*$ definida como segue:*

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \textit{se } x \textit{ não é múltiplo de } 3 \\ x/3 & \textit{se é múltiplo de } 3 \end{cases}$$

Um ponto $x \in \mathbb{N}_*$ pode ser escrito como

$$x = 2^{p_1} 3^{p_2} 5^{p_3} 7^{p_4} \cdots$$

Então $f(x) = 2^{p_1} 3^{p_2 - 1} 5^{p_3} 7^{p_4} \cdots$ até que $f^{p_2}(x) = 2^{p_1} 5^{p_3} 7^{p_4} \cdots$ Este ponto não é múltiplo de 3 e, então, sua imagem por f é $2^{p_1} 3 5^{p_3} 7^{p_4} \cdots$; este ponto, por sua vez, é levado por f em $2^{p_1} 5^{p_3} 7^{p_4} \cdots$. Ou seja, o ponto inicial foi atraído para a órbita periódica (de período 2) $2^{p_1} 5^{p_3} 7^{p_4} \cdots, 2^{p_1} 3 5^{p_3} 7^{p_4} \cdots$. Sendo assim vemos que temos uma infinidade de órbitas periódicas atratoras e suas bacias são todo o conjunto $\mathbb{N}$.

Exemplo 2.2. *Seja f uma função tal que*

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \textit{se } x \textit{ é par} \\ 2^x & \textit{se } x \textit{ não é par} \end{cases}$$

Se x é ímpar então sua imagem é 2^x, que é par. A imagem desse ponto, por sua vez, será $2^{x-1}, 2^{x-2}, \ldots, 1, 2, 1 \ldots$. Se o ponto é par então é da forma $x = 2^k p$ (com p ímpar). Assim sua órbita será $2^{k-1}p, 2^{k-2}p, \ldots, p$ e a órbita de p, que é ímpar, é a vista acima, que leva ao atrator periódico $1, 2$. Portanto nesse caso a órbita periódica $1, 2$ atrai todas as órbitas, não importando o ponto de partida. Temos, portanto, um atrator global nesse caso.

Exemplo 2.3. *Considere a função f dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ x+1 & \text{se } x \text{ é primo} \\ \text{maior fator primo na decomposição de } x & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então temos uma órbita periódica $2, 3, 4$. Esta órbita é um atrator global; primeiro, note que a órbita sempre passará por um número primo, pois se o número não é primo sua imagem certamente o será. Portanto, basta mostrar que a órbita de um primo irá para a órbita periódica acima. A órbita do primeiro primo, 2, já está na órbita periódica.

Vamos agora proceder por indução: sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ os n primeiros primos. Assumindo que $f^k(p_i) \to 2, 3, 4$ então queremos verificar se $f^k(p_{n+1}) \to 2, 3, 4$. Note que

$$f(p_{n+1}) = p_{n+1} + 1 = 2q_1^{k_1} \cdots q_r^{k_r}$$

(pois o primo é ímpar, logo seu sucessor é par. Note que q_1 pode ser igual a 2). Mas então q_r é um dos primos $p_1, \ldots, p_n$, pois se não fosse teríamos algum primo entre p_n e p_{n+1}. Portanto

$$f^2(p_{n+1}) = f(p_{n+1} + 1) = f(2q_1^{k_1} \cdots q_r^{k_r}) = q_r = p_l$$

(para algum $l \in [1, n]$) e a órbita de p_l vai para a órbita periódica $2, 3, 4$, portanto a órbita de p_{n+1} também vai. Logo a órbita de qualquer primo irá para essa órbita periódica e portanto temos que $2, 3, 4$ é um atrator global para a dinâmica.

Exemplo 2.4. *Seja a função dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{se } x \text{ é primo ou se } x = 1 \\ \text{menor fator primo na decomposição de } x, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Temos então que a órbita de 1 é

$$1, 3, 5, 7, 9, 3, \ldots$$

(pois $f(1) = 3$, $f(3) = 5$ e assim sucessivamente) logo $3, 5, 7, 9$ é uma órbita periódica.

Temos também que a órbita de 2 é

$$2, 4, 2, \ldots$$

Se x é par e maior do que 2 então x não é primo e seu menor fator primo é 2. Portanto $f(x) = 2$ e este ponto é atraído para a órbita periódica $2, 4$.

Se p é um primo gêmeo (isto é, um primo tal que $p+2$ também é primo) então não é difícil ver que $p+1$ é múltiplo de 3; logo $f(p+2) = p+4 = p+1+3$ também é múltiplo de 3 (e não pode ser par), e portanto $f(p+4) = 3$ e a órbita foi então atraída pela órbita periódica de 3 exibida acima.

Exemplo 2.5. *Considere a função*

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{se } x \text{ é par} \\ 3x+1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então não é difícil ver que temos uma órbita periódica:

$$1, 4, 2, 1, \ldots$$

E, de fato, se começamos em algum outro número, a órbita parece ser atraída pela órbita periódica acima. Isso já foi testado para muitos números e sempre com o mesmo resultado, o que leva a conjectura de que esta órbita é um atrator global. Esse é um problema bastante conhecido (muitas vezes chamado de problema $3n+1$) e cuja prova parece estar bem distante...

2.5 Caracterização do ω-limite

Inspirado pelos exemplos da seção anterior podemos agora enunciar (e provar) um resultado que caracteriza o conjunto limite de uma órbita:

Teorema 2.2. *Dada $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e dado $x \in \mathbb{N}$ então $\omega(x)$ ou é vazio ou é uma órbita periódica.*

Demonstração. *Seja $p \in \omega(x)$ (ou seja, $\omega(x)$ é não vazio); então temos uma sequência de números inteiros $n_i \to \infty$ tal que $d(f^{n_i}(x), p) \leq \epsilon$. Se $\epsilon < 1$ então isso na verdade significa que $f^{n_i}(x) = p$. Portanto temos*

$$f^{n_1}(x) = p \qquad e \qquad f^{n_2}(x) = p = f^{n_2 - n_1}(f^{n_1}(x)) = f^{n_2 - n_1}(p)$$

mostrando que p de fato é um ponto periódico.

Portanto temos duas situações possíveis: ou o ω-limite é vazio ou é uma órbita periódica. Desta forma o ω-limite de todo o conjunto $\mathbb{N}_*$ é ou vazio ou uma união enumerável de órbitas periódicas, exatamente as situações com as quais nos deparamos nos exemplos.

2.6 Órbitas densas

Vamos agora caracterizar situações em que existe algum ponto $x \in \mathbb{N}$ cuja órbita é densa em todo $\mathbb{N}$. O conceito de densidade significa que a órbita deve passar arbitrariamente próxima de qualquer ponto de $\mathbb{N}$, mas observe que ficar a uma distância menor do que 1 de um ponto $y \in \mathbb{N}$ é, de fato, o mesmo que ser igual a y. Desta forma temos o primeiro resultado:

Teorema 2.3. *Uma transformação $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tem órbita densa se e somente se não tem nenhuma órbita periódica.*

Demonstração. *Se há uma órbita periódica então existe um subconjunto de $\mathbb{N}$ (a saber, a órbita periódica) que é invariante por f e que não é denso. Uma outra órbita que comece fora deste conjunto não pode visitá-lo, portanto também não é densa, logo a existência de ao menos uma órbita periódica impede a existência de órbitas densas.*

Suponha agora que existe uma órbita densa, isto é, existe x tal que o conjunto

$$x, f(x), f^2(x), \ldots$$

é denso em $\mathbb{N}$. Pela observação feita anteriormente isso significa dizer que $x, f(x), f^2(x), \ldots$ é de fato igual a $\mathbb{N}$. Para isso é preciso que os iterados $f^n(x)$ sejam todos distintos, pois se não fossem haveria $f^n(x) = f^{n+k}(x)$, o que é o mesmo que dizer que $f^n(x)$ é ponto periódico (de período k), mas se isso ocorre a órbita não é todo $\mathbb{N}$. Portanto a existência de órbita densa impede a existência de uma órbita periódica.

Se temos órbita densa então o ω-limite de qualquer ponto, que não pode ser periódico, pode apenas ser vazio.

Observação 3. *O ω-limite ser vazio não implica em órbita densa. Por exemplo, considere $f(x) = 2x$. Então o ω-limite de toda órbita é vazio, mas obviamente nenhuma órbita é densa.*

Porém temos efetivamente alguma dinâmica com órbita densa?

Exemplo 2.6. *Considere a transformação $t(x) = x + 1$. Então é claro que a órbita de 0, que é $0, 1, 2, \ldots$, é todo o $\mathbb{N}$, ou seja, temos uma órbita densa. Também não é difícil verificar que nesse caso não temos nenhuma órbita periódica.*

Em um certo sentido esse exemplo é o único que permite órbitas densas! Este é o conteúdo do próximo resultado.

Teorema 2.4. *Uma transformação $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tem órbita densa se e somente se é conjugada a $t\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*

Demonstração. *Se a transformação é conjugada a t então claramente tem órbita densa.*

Suponha agora que f tem órbita densa, ou seja, existe x tal que sua órbita $x, f(x), f^2(x), \ldots$ é densa. Queremos então construir a conjugação entre t e f. Como no teorema anterior, sabemos que os pontos $x, f(x), \ldots$ são todos distintos e este conjunto é o próprio $\mathbb{N}$. Portanto vamos construir uma bijeção φ de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ da seguinte forma:

$$\varphi(n) = f^n(x)$$

Agora note que

$$\varphi^{-1} f \varphi(k) = \varphi^{-1} f f^k(x) = \varphi^{-1} f^{k+1}(x) = k + 1 = t(k)$$

ou seja, $\varphi^{-1} f \varphi = t$ e portanto φ conjuga f e t.

Ou seja, a menos de uma transformação de coordenadas, a única transformação com órbita densa em $\mathbb{N}$ é t.

2.7 Topologicamente mixing

Dizemos que uma transformação $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é topologicamente mixing se dados dois conjuntos U e V existe um inteiro $N = N(U, V)$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq N(U, V)$.

Queremos mostrar o seguinte:

Teorema 2.5. *Não existe $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ topologicamente mixing.*

Demonstração. *Suponha, por absurdo, que existe f nessas condições. Então para todo par U e V temos a existência de um N tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para $n \geq N$. Em particular, fixemos dois conjuntos disjuntos e unitários $U = \{u\}$ e $V = \{v\}$ (que são abertos: note que a bola aberta centrada em u e de raio menor do que $1/2$ é exatamente o ponto u, mostrando que ele é um conjunto aberto. O mesmo se passa com qualquer ponto de $\mathbb{N}$, como por exemplo v). Então $f^n(u) = v$ para todo $n \geq N$ significa que v é ponto fixo; mas nesse caso invertendo os papéis de U e V vemos que não é possível um iterado de V intersectar U, o que contradiz a suposição de termos uma f topologicamente mixing.*

2.8 Probabilidades em conjuntos enumeráveis

Não é nosso objetivo nessas curtas notas fazer uma exposição completa de um assunto tão sofisticado como a teoria da medida; porém no caso de conjuntos enumeráveis esta assume uma forma bastante simples e acreditamos que o leitor tem todas as condições de seguir adiante sem apelo a um enorme esforço de raciocínio.

Essencialmente uma probabilidade sobre o conjunto $\mathbb{N}$ é uma função que, para cada conjunto $A \subset \mathbb{N}$, associa um numero $\mu(A) \in [0,1]$ de forma que

$$\mu(\emptyset) = 0$$

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

e $\mu(\mathbb{N}) = 1$.

Exemplo 2.7. *Um exemplo de probabilidade em* $\mathbb{N}$ *é a delta de Dirac no ponto* $x \in \mathbb{N}$*, definida como segue:*

$$\delta_x(A) = 1 \textit{ se } x \in A \qquad \textit{e } \delta_x(A) = 0 \textit{ se } x \notin A$$

O leitor pode notar que $\delta_x(\mathbb{N}) = 1$ *(pois* $x \in \mathbb{N}$*); também é fácil ver que* $\delta_x(\emptyset) = 0$*, pois* $x \notin \emptyset$*. Por fim, dados* A *e* B *disjuntos, então ou* $x \notin A \cup B$*, e nesse caso* $0 = \delta_x(A \cup B) = \delta_x(A) + \delta_x(B)$*; ou* $x \in A$ *(e portanto não está em* B*), logo*

$$1 = \delta_x(A \cup B) = 1 + 0 = \delta_x(A) + \delta_x(B)$$

ou $x \in B$ *e um raciocínio análogo nos permite verificar a mesma igualdade já vista acima.*

Exemplo 2.8. *Outro exemplo de probabilidade, nesse caso no conjunto* $\{1,2,3,4,5,6\}$ *é a seguinte:*

$$\mu = \frac{1}{6}\delta_1 + \frac{1}{6}\delta_2 + \frac{1}{6}\delta_3 + \frac{1}{6}\delta_4 + \frac{1}{6}\delta_5 + \frac{1}{6}\delta_6$$

Este exemplo pode ser interpretado de forma simples imaginando que cada um dos números de 1 *a* 6 *representam uma das faces de um dado honesto; a probabilidade de se sortear uma determinada face nesse caso é exatamente* $1/6$*, o que é descrito pela probabilidade acima.*

De fato o exemplo acima é um caso particular da seguinte situação:

Definição 2.1. *Dados n números reais $r_1, r_2, \ldots, r_n$ e $p_i \geq 0$, $\sum p_i = 1$ dizemos que*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i r_i$$

é uma combinação convexa de $r_1, \ldots, r_n$.

Se μ_1 e μ_2 são probabilidades então uma combinação convexa μ de μ_1 e μ_2 também é uma probabilidade. De fato, note que

$$\mu(A) = p_1\mu_1(A) + p_2\mu_2(A)$$

Então

$$\mu(\mathbb{N}) = p_1\mu_1(\mathbb{N}) + p_2\mu_2(\mathbb{N}) = p_1 + p_2 = 1$$

De maneira mais geral, dadas probabilidades $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ então combinações convexas dessas medidas também são probabilidades, resultado simples que o leitor é convidado a mostrar.

Um fato bastante interessante é que uma probabilidade qualquer em $\mathbb{N}$ pode ser escrita como

$$\mu = \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i \delta_i$$

onde cada $p_i \in [0, 1]$ e $\sum_{i \in \mathbb{N}} p_i = 1$. Desta forma, para um conjunto $A \subset \mathbb{N}$ a probabilidade é

$$\mu(A) = \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i \delta_i(A)$$

2.9 Probabilidades invariantes

Quando temos uma dinâmica $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e uma probabilidade μ sobre $\mathbb{N}$ dizemos que μ é invariante por f se para todo subconjunto $Y \subset \mathbb{N}$ temos

$$\mu(Y) = \mu(f^{-1}(Y))$$

Exemplo 2.9. *Seja q um ponto fixo de f, ou seja, $f(q) = q$. Então a medida de probabilidade δ_q é invariante por f. De fato, note que o conjunto $f^{-1}(Y)$ satisfaz uma única das afirmações abaixo:*

a) Contém q: nesse caso $f^{-1}(Y)$ também contém q e ambas as medidas são 1.

b) Não contém q: nesse caso $f^{-1}(Y)$ também não contém q e ambas as medidas são 0.

De fato essa situação nos inspira a mostrar o próximo resultado:

Lema 2.6. *Dado $a \in \mathbb{N}$ então*

$$\delta_a \circ f^{-1} = \delta_{f(a)}$$

Demonstração. *Queremos mostrar que para qualquer conjunto $Y \subset X$ temos*

$$\delta_a(f^{-1}(Y)) = \delta_{f(a)}(Y)$$

Note que temos dois casos:

a) se Y contém $f(a)$ então $f^{-1}(Y)$ contém a e nesse caso ambas as medidas são 1.

b) se Y não contém $f(a)$ então $f^{-1}(Y)$ não contém a e nesse caso ambas as medidas são 0.

Portanto as medidas são iguais.

Exemplo 2.10. *Se x é ponto periódico de período p então*

$$\mu = \frac{1}{p}\Big(\delta_x + \delta_{f(x)} + \ldots + \delta_{f^{p-1}(x)}\Big)$$

é uma medida invariante por f. De fato, note que

$$\mu\Big(f^{-1}(A)\Big) = \frac{1}{p}\Big(\delta_x + \delta_{f(x)} + \ldots + \delta_{f^{p-1}(x)}\Big)\Big(f^{-1}(A)\Big) =$$

$$\frac{1}{p}\Big(\delta_{f(x)} + \delta_{f^2(x)} + \ldots + \delta_{f^p(x)}\Big)(A) =$$

$$\frac{1}{p}\Big(\delta_{f(x)} + \delta_{f^2(x)} + \ldots + \delta_x\Big)(A) = \mu(A)$$

para todo conjunto $A \subset \mathbb{N}$, e portanto a medida é mesmo f-invariante.

Agora usaremos isso para provar nosso principal resultado sobre a existência de probabilidades invariantes para dinâmicas em $\mathbb{N}$:

Teorema 2.7. *Uma transformação $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ admite uma probabilidade invariante se e somente se f tem alguma órbita periódica.*

Demonstração. *Seja p um ponto periódico; então, como já observado, temos uma medida de probabilidade invariante naturalmente associada a esse ponto.*

Suponha agora que $\mu = \sum p_i\delta_i$ seja uma probabilidade invariante para f. Então

$$\mu = \sum_{i\in\mathbb{N}} p_i\delta_i = \mu(f^{-1}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} p_i\delta_{f(i)} = \sum_{i\in\mathbb{N}} p_{f^{-1}(i)}\delta_i$$

Portanto temos as seguintes relações entre os coeficientes:

$$p_i = p_{f^{-1}(i)} \qquad \textit{para todo } i \in \mathbb{N}$$

Portanto p_i é constante ao longo de sua pré-órbita:

$$p_i = p_{f^{-1}(i)} = p_{f^{-2}(i)} = \cdots$$

Como μ é uma probabilidade sabemos que ao menos um dos p_i é não-nulo; vamos admitir que seja p_j. Pela observação acima toda a pré-órbita de j tem os coeficientes correspondentes iguais a p_j. Se essa pré-órbita é um conjunto infinito então

$$1 = \mu(\mathbb{N}) \geq \sum_{k\in\mathbb{N}} p_{f^k(j)}\delta_{f^k(j)} = \sum_{k\in\mathbb{N}} p_j\delta_{f^k(j)} =$$

$$= p_j \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_{f^k(j)} = \infty$$

o que é uma contradição. Portanto a pré-órbita é um conjunto finito e dessa maneira temos que ela é necessariamente uma órbita periódica.

2.10 Exercícios

1- Considere $f\colon \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ definida por $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 5, f(4) = 3, f(5) = 4$. Obtenha as órbitas periódicas e o conjunto limite da dinâmica de cada ponto.

2- Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{se } x \text{ é par} \\ 2x & \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Obtenha seus atratores.

3- Para as duas funções a seguir, obtenha as órbitas periódicas e as medidas invariantes:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \\ x \bmod 11 & \text{se } x \geq 10 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{se } x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \\ x \bmod 10 & \text{se } x \geq 10 \end{cases}$$

Capítulo 3

Dinâmica no Espaço de Sequências

Nesse capítulo vamos falar de um sistema dinâmico sobre um conjunto que não é mais enumerável, como o que foi estudado no capítulo anterior.

3.1 O espaço de sequências

O objeto básico desse capítulo é o espaço

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots), x_i \in \{0,1\}\}$$

formado por sequências de $0's$ e $1's$ que são infinitas. Um elemento típico é

$$011000111101001\ldots$$

onde as reticências substituem uma infinidade de elementos que, obviamente, não podemos escrever.

Para simplificar a notação convencionaremos o seguinte: o símbolo $0^{+\infty}$ corresponde a um bloco infinito (para a direita) de símbolos 0 ou seja,

$$0^{+\infty} = 000000\ldots$$

(e nesse caso as reticências substituem a infinidade de zeros que não escreveremos). De forma similar definimos $1^{+\infty}$; podemos também indicar a repetição de um bloco de símbolos por meio dessa notação: por exemplo

$$(0110)^{+\infty} = 0110\,0110\,0110\,0110\,\ldots$$

$$001(1011)^{+\infty} = 001\,1011\,1011\,1011\,\ldots$$

3.2 Espaço de sequências como espaço métrico

Para podermos falar em proximidade e em limites precisamos introduzir uma maneira de medir distâncias no espaço das sequências $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, ou seja, precisamos definir uma métrica. Há mais de uma maneira de fazer isso, mas seguiremos de perto apenas uma dessas alternativas.

Primeiro, dadas duas sequências $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ e $y = (y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots)$ então definimos

$$N(x, y) = \min_{k \geq 0} \{x_k \neq y_k\}$$

Note que $N(x, y) = N(y, x)$ e que $N(x, x) = +\infty$. Aliás, esta última afirmação pode ser reescrita de maneira ainda mais forte, pois de fato se $N(x, y) = +\infty$ então necessariamente as duas sequências coincidem termo a termo, ou seja, temos $x = y$. Logo $N(x, y) = +\infty \iff x = y$.

Agora vamos considerar um número real entre 0 e 1, por exemplo, 1/2. Definimos então a distância entre duas sequências x e y como sendo

$$d(x, y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N(x,y)}$$

Em palavras, podemos dizer que essa noção de distância significa o seguinte: duas sequências x e y estão próximas se coincidem no início, isto é, $x_0 = y_0$, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, até um certo $x_k = y_k$ e depois diferem.

Por exemplo, $d(0^{+\infty}, 10^{+\infty}) = 1$ (pois já diferem no primeiro símbolo); $d(010^{+\infty}, 0010^{+\infty}) = 1/2$ (pois diferem no segundo símbolo).

Devemos então verificar que esta função realmente satisfaz os axiomas de uma métrica: de fato temos uma função definida em $X \times X$ e que assume valores em $\mathbb{R}^+$. A função é simétrica, pois

$$d(x, y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N(x,y)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{N(y,x)} = d(x, y)$$

Também temos que

$$d(x, y) = 0 \iff N(x, y) == \infty \iff x = y$$

Por fim devemos verificar a desigualdade triangular, ou seja

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Note que se $d(x, z) \leq d(x, y)$ então não há nada a ser provado. Vamos, pois, assumir que $d(x, z) > d(x, y)$. Isso significa que as sequências x e y

coincidem por mais símbolos do que x e z. Agora vamos estimar $d(y,z)$. Note que para os primeiros símbolos, as sequências de x, y e z são iguais. Mas num determinado z_k temos $z_k \leq x_k$. Porém, como x e y coincidem para mais símbolos do que x e z então temos que $z_k \neq x_k = y_k$; portanto z_k também é o primeiro símbolo no qual y e z ficam diferentes, o que nos permite concluir que $d(y,z) = d(x,z)$. Logo $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (pois $d(x,y) \geq 0$) e d é realmente uma métrica.

3.3 Cilindros

Vamos introduzir uma classe especial de conjuntos que tem um papel importante no estudo do espaço de sequências.

Em primeiro lugar, definimos o espaço de palavras de comprimento n, W_n como sendo o conjunto

$$W_n = \{(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) : x_i \in \{0,1\}\}$$

Dada uma palavra $w \in W_n$ definimos o cilindro $[w]$ como sendo o conjunto

$$[w] = [w_0 w_1 \ldots w_{n-1}] = \Big\{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : x_0 = w_0, \ldots, x_{n-1} = w_{n-1}\Big\}$$

ou seja, este é o conjunto de sequências de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ que coincidem com w em seus n primeiros símbolos.

Da definição de distância vemos então que se $a, b \in [w]$ então $d(a,b) \leq (1/2)^n$, pois a e b certamente tem os n primeiros símbolos iguais.

De fato isso nos permite caracterizar o cilindro como sendo uma bola fechada

$$[w] := \{z \in X \mid d(z, w_0 w_1 \ldots w_{n-1} 0^{+\infty}) \leq (1/2)^n\}$$

e também como a bola aberta

$$[w] := \{z \in X \mid d(z, w_0 w_1 \ldots w_{n-1} 0^{+\infty}) < (1/2)^n + \epsilon\}$$

(onde escolhemos um $\epsilon > 0$ bem pequeno). Essas duas descrições nos contam que os cilindros são exemplos de conjuntos que ao mesmo tempo são abertos e fechados.

O leitor também não terá dificuldade em verificar que

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = [0] \cup [1] = [00] \cup [01] \cup [10] \cup [11] = \cdots$$

De fato, mais geralmente temos que

$$[a_0 a_1 a_2 \ldots a_n] = [a_0 a_1 a_2 \ldots a_n 0] \cup [a_0 a_1 a_2 \ldots a_n 1]$$

3.4 Não enumerabilidade do espaço de sequências

Uma das características que claramente diferenciam o espaço que estamos estudando nesse capítulo do conjunto já visto no capítulo anterior é o fato de que ele não é enumerável, ou seja, não há uma bijeção entre os dois conjuntos. Em linguagem menos técnica, estamos dizendo que não podemos relacionar elementos de ambos um a um, pois sempre sobrarão elementos não relacionados no conjunto $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, o que é uma maneira de dizer que, de alguma forma, ele tem bem mais elementos que $\mathbb{N}$. Vamos provar esse resultado usando uma belíssima técnica introduzida por G. Cantor no final do século XIX.

Primeiro, vamos assumir, por absurdo, que há uma bijeção b entre $\mathbb{N}$ e X. Isso é o mesmo que dizer que podemos montar uma lista de elementos de X com $x_0 = b(0)$, $x_1 = b(1)$, $x_2 = b(2) \ldots$. Mas cada elemento dessa lista é, ele mesmo, uma sequência de símbolos 0 e 1:

$$x_0 = (x_{00}, x_{01}, x_{02}, x_{03} \ldots)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= (x_{10} x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots) \\ x_2 &= (x_{20} x_{21}, x_{22}, x_{23}, \ldots) \\ x_3 &= (x_{30} x_{31}, x_{32}, x_{33}, \ldots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Esta lista tem de ser completa (pois uma bijeção é sobrejetiva), ou seja, precisa conter todos os elementos de X. Em particular, precisa conter o elemento $y \in X$ definido abaixo:

$$y = (1 - x_{00}, 1 - x_{11}, 1 - x_{22}, 1 - x_{33}, \ldots)$$

Mas y não pode ser o elemento x_0, pois na primeira coordenada y é diferente de x_{00}, a primeira coordenada de x_0; y também não pode ser x_1, pois na segunda coordenada as duas sequências são distintas. De forma similar o leitor pode concluir que y não é o elemento x_n para nenhum $n \in \mathbb{N}$, e portanto y não está na lista acima, mostrando que a suposta bijeção construída entre $\mathbb{N}$ e X não é de fato uma bijeção, contradizendo nossa hipótese inicial. Desta forma, concluímos que X não é um conjunto enumerável!

(o leitor deve notar que usamos o alfabeto $\{0, 1\}$ por uma questão de simplicidade, mas poderíamos trocá-lo por um alfabeto com mais elementos ainda mantendo a conclusão. Convidamos o leitor a tentar adaptar a prova acima a essa situação mais geral).

3.5 A dinâmica do shift

Vamos agora introduzir um sistema dinâmico $f\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ da seguinte forma:

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

ou seja, esquecemos a coordenada x_0 e deslocamos os demais para a esquerda; por essa razão esta transformação é conhecida como "shift", deslocamento em inglês.

Uma primeira observação importante é a seguinte:

Teorema 3.1. $f\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *é uma função contínua.*

Demonstração. *Queremos mostrar que dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \epsilon$ se $d(x,y) \leq \delta$.*

Primeiramente, consideremos $\epsilon = (1/2)^N$. Então $d(f(x), f(y)) \leq \epsilon$ é o mesmo que dizer que

$$d((x_1, x_2, x_3, \ldots), (y_1, y_2, y_3, \ldots)) \leq (1/2)^N$$

o que significa que $x_i = y_i$ para todo i entre 1 e N. Agora tome $\delta = (1/2)^{N+1} = (1/2)\epsilon$. Então se $d(x,y) \leq \delta = (1/2)^{N+1}$ temos que $x_i = y_i$ para todo i entre 0 e N. Dessa forma, se $d(x,y) \leq \delta$ temos que $d(f(x), f(y))$ é menor ou igual a $(1/2)^N = \epsilon$, como desejado.

No caso de um $\epsilon > 0$ qualquer, basta tomar N_0 suficientemente grande de forma que $(1/2)^{N_0} \leq \epsilon$, pois assim

$$d(f(x), f(y)) \leq (1/2)^{N_0} \leq \epsilon$$

Então podemos proceder como antes e encontrar o valor de $\delta = (1/2)^{N_0+1}$, mostrando assim que o shift efetivamente é uma função contínua.

Uma outra característica desta função é que ela não é injetiva: não é difícil ver que $01^{+\infty} = (0,1,1,1,\ldots)$ e $1^{+\infty} = (1,1,1,1,\ldots)$, embora distintos, têm exatamente a mesma imagem por f, que é $1^{+\infty}$.

E também não é difícil verificar que

$$f^{-1}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \{(0, x_1, x_2, x_3, \ldots), (1, x_1, x_2, x_3, \ldots)\}$$

ou seja, é bem simples descrever o conjunto das pré-imagens de um ponto dado.

Embora não seja injetiva, podemos verificar que f é sobrejetiva: de fato, como visto acima, um ponto qualquer tem duas pré-imagens no conjunto.

A ação de f em cilindros também é simples: não é difícil verificar que

$$f([0]) = X = f([1])$$

e, mais geralmente,

$$f([a_0 a_1 a_2 \ldots a_n]) = [a_1 a_2 a_3 \ldots a_n].$$

3.6 Pontos periódicos

Uma coisa bastante simples é encontrar os pontos periódicos do shift. Comecemos pelos pontos fixos. Queremos sequências tais que

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) = f((x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

ou seja, queremos que $x_0 = x_1$, $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3, \ldots$; em outras palavras, precisamos que $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 \ldots$. Para isso temos apenas duas possibilidades: ou consideramos todos $x_i = 0$ e o ponto é

$$0^{+\infty} = (0, 0, 0, \ldots)$$

ou $x_i = 1$

$$1^{+\infty} = (1, 1, 1, \ldots)$$

Portanto esses são os dois únicos pontos fixos do shift.

Queremos agora encontrar os pontos periódicos de período 2; ou seja, as sequências tais que

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) = f^2(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots)$$

ou seja, $x_0 = x_2$, $x_1 = x_3$, $x_2 = x_4$, $x_3 = x_5$, $x_4 = x_6, \ldots$, ou ainda $x_0 = x_2 = x_4 = x_6 = \ldots$ e $x_1 = x_3 = x_5 = \ldots$. Nesse caso podemos escolher $x_0 = 1$ e $x_1 = 0$ ou $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$, isto é, temos as sequências

$$(10)^{+\infty} = (1, 0, 1, 0, \ldots) \qquad \text{e} \qquad (01)^{+\infty} = (0, 1, 0, 1, \ldots)$$

(observação: obviamente os pontos fixos também satisfazem a expressão $f^2(x) = x$, mas o período é o menor inteiro tal que $f^k(x) = x$. Assim $0^{+\infty}$ tem período 1 e não 2, ainda que $f^2(0^{+\infty}) = 0^{+\infty}$)

Raciocinando como acima, vemos então que para construir um ponto periódico de período n basta pegar uma palavra de comprimento n e repetí-la: $B_n = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})$, então o ponto

$$B_n\, B_n\, \ldots = b_0\, b_1\, b_2\, \ldots\, b_{n-1}\, b_0\, b_1\, b_2 \ldots\, b_{n-1}\, b_0\, \ldots$$

tem período n.

3.7 Órbita densa

Queremos agora mostrar que existe ao menos uma órbita que é densa para a transformação shift, ou seja, podemos encontrar $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$x, f(x), f^2(x), \ldots$$

é um conjunto denso (isto é, que tem pontos arbitrariamente próximos de qualquer ponto do conjunto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$).

Vamos exibir x explicitamente:

$$x = 0\,1\,00\,01\,10\,11\,000\,001\,010\,100\,110\,101\,111\,\ldots$$

ou seja, x é construído pela concatenação de todas as palavras de comprimento 1, depois todas as de comprimento 2, todas as de comprimento 3 e assim sucessivamente.

Porque a órbita de x é densa? Bem, considere um ponto qualquer $y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Devemos mostrar que existem iterados de x arbitrariamente próximos de y. Como fazer a órbita ficar a uma distância $1/2$ de y? O primeiro símbolo de y, y_0, só pode ser 0 ou 1. Desta forma, usando o próprio x ou $f(x)$ podemos fazer a imagem de x coincidir com y no primeiro símbolo, garantindo assim que a distância é menor ou igual a $1/2$. Como fazer a distância ficar igual a $(1/2)^2$? Basta fazer com que o iterado de x coincida com y nas duas primeiras coordenadas, o que não é difícil pois x é formado pela concatenação de todas as palavras de comprimento 2, e em particular tem exatamente a palavra que corresponde a $y_0 y_1$. Podemos continuar com esse procedimento e verificar que então pode-se obter iterados de x tão próximos de y quanto desejado. Portanto a órbita de x é densa em $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

O leitor consegue exibir outro ponto, distinto de x, também com órbita densa? Bem, note que a construção de x não é única: podemos, por exemplo, modificar a ordem de aparecimento das palavras de um certo comprimento (o que certamente nos dá novos pontos) sem que o órbita deixe de ser densa. Por exemplo, podemos considerar

$$x' = 1\,0\,00\,01\,10\,11\,000\,001\,010\,100\,110\,101\,111\,\ldots \neq x$$

que também terá órbita densa, ou então

$$x'' = 0\,1\,01\,00\,11\,10\,000\,001\,010\,100\,110\,101\,111\,\ldots$$

que é distinto de x e x', mas que também tem órbita densa. Deixamos para a imaginação do leitor a construção de muitos outros exemplos.

3.8 Topologicamente mixing

Vamos agora mostrar que o shift é uma transformação topologicamente mixing, ou seja, dados dois abertos U e V existe $N = N(U, V)$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$:

Teorema 3.2. *O shift é topologicamente mixing.*

Demonstração. *Um aberto necessariamente contém um cilindro: de fato, uma aberto é um conjunto que contém alguma bola aberta, mas os cilindros são exatamente bolas abertas na métrica que estamos considerando; portanto, basta mostrarmos que para U e V cilindros temos que existe $N = N(U, V)$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. O cilindro U contém palavras da seguinte forma:*

$$[U] = P_U K$$

onde P_U é uma palavra de comprimento $|U|$, ou seja, $P_U \in W_{|U|}$, e K é qualquer continuação possível. Portanto, em particular, o cilindro contém palavras como

$$P_U P_V K, P_U B_1 P_V K, \dots P_U B_n P_V K, \dots$$

onde P_V é a palavra que define o cilindro $[V]$ e B_n é um bloco de comprimento n. Logo o primeiro ponto é levado em $[V]$ após $|U|$ iterados, o segundo é levado em $[V]$ após $|U| + 1$ iterados e assim sucessivamente, mostrando que $f^n([U]) \cap [V] \neq \emptyset$ para todo $n \geq |U|$.

3.9 Sensibilidade as condições iniciais

Considere dois pontos próximos $a_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1} 0$ e $a_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1} 1$; ambos pertencem ao cilindro $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$ e sua distância é $(1/2)^n$. A função f é contínua, portanto deve levar pontos próximos em pontos próximos, mas na verdade as imagens tipicamente são mais distantes e essa distância cresce muito: após apenas n iterados os pontos acima são transformados em $0 \dots$ e $1 \dots$ cuja distância é 1, a maior possível em X. Ou seja, uma pequena diferença nos pontos iniciais pode ser transformada em poucos iterados numa grande distância após a ação de f. Por esse motivo dizemos que o shift apresenta grande sensibilidade às condições iniciais.

3.10 Sombreamento

Vamos agora mostrar que o shift satisfaz a propriedade do sombreamento. Ou seja, dada uma ϵ-pseudo-órbita $x_0, x_1, x_2, \ldots$ queremos encontrar $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$d(f^n(x), x_n) \leq \epsilon$$

No lugar de tentar uma prova geral iremos, em nome da clareza, particularizar o valor de ϵ como sendo $(1/2)^{10}$. Dessa maneira, provar que

$$d(f^n(x), x_n) \leq \epsilon$$

equivale a mostrar que os 10 primeiros símbolos de $f^n(x)$ e x_n são os mesmos.

Sejam

$$x_0 = x_1^0 x_2^0 \ldots x_{10}^0 \ldots$$

$$x_1 = x_1^1 x_2^1 \ldots x_{10}^1 \ldots$$

$$x_2 = x_1^2 x_2^2 \ldots x_{10}^2 \ldots$$

$$\vdots$$

A condição de ϵ-pseudo-órbita significa que $d(f(x_i), x_{i+1}) \leq (1/2)^{10}$, e assim nas sequências acima temos $x_1^k = x_2^{k-1}, x_2^k = x_3^{k-1}, \ldots, x_{10}^k = x_{11}^{k-1}$.

Agora considere x construído como segue:

$$x = x_1^0 x_2^0 \ldots x_{10}^0 x_{10}^1 x_{10}^2 x_{10}^3 \ldots$$

Então, como o bloco inicial de 10 símbolos é o mesmo que o de x_0 temos que $d(x, x_0) \leq \epsilon$; tomando o primeiro iterado,

$$f(x) = x_2^0 \ldots x_{10}^0 x_{10}^1 x_{10}^2 x_{10}^3 \ldots$$

vemos que ele coincide com os 10 primeiros símbolos de x_1. O segundo iterado,

$$f^2(x) = x_3^0 \ldots x_{10}^0 x_{10}^1 x_{10}^2 x_{10}^3 \ldots$$

tem seus 10 primeiros símbolos iguais aos de x_2 e assim sucessivamente. Notamos assim que a órbita de x, construída dessa forma, efetivamente sombreia, ou seja, acompanha, a pseudo-órbita dada.

A prova em geral é um pouco mais trabalhosa, mas as ideias gerais estão contidas nas linhas acima.

3.11 Limites de algumas órbitas

Vamos considerar um ponto da forma

$$C(01)^{+\infty} = C\,010101\ldots$$

onde C é um bloco de símbolos de comprimento arbitrário (ou seja, é um bloco de comprimento n onde n é algum número natural fixado, que pode ser enorme: em suma, $C \in W_n$). Então não é difícil ver que após um certo número de iterados teremos exatamente o ponto periódico $(01)^{+\infty}$. Portanto os pontos da forma $C(01)^{+\infty}$ se acumulam na órbita periódica de $(01)^{+\infty}$. De forma mais técnica,

$$\omega\Big(C(01)^{+\infty}\Big) = O\Big((01)^{+\infty}\Big)$$

Note que os pontos que se acumularão em $O\big((01)^{+\infty}\big)$ são precisamente os que estão no conjunto

$$B\Big((01)^{+\infty}\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}\Big((01)^{+\infty}\Big)$$

e claramente $C(01)^{+\infty} \in B\big((01)^{+\infty}\big)$. Este conjunto é a bacia de atração do ponto periódico em questão.

Naturalmente o ponto periódico $(01)^{+\infty}$ não tem nada de especial. Podemos perfeitamente considerar uma palavra $P \in W_k$ (ou seja, de comprimento k) e o ponto periódico correspondente, formado pela concatenação repetida de $P\,P\,P\ \ldots$), que será o ω-limite de pontos na forma

$$CP^{+\infty} = CPPP\ldots$$

(C novamente um bloco de símbolos de comprimento arbitrário), ou seja,

$$CP^{+\infty} \in B(P^{+\infty})$$

3.12 Exercícios

1- Obtenha a distância entre os pontos $00001001^{+\infty}$ e $00011001^{+\infty}$

2- Obtenha a pré-imagem por f do cilindro $[x_1x_2\ldots x_k]$

3- Quantos pontos tem período 5 para o shift unilateral? Quantos tem período 4?

4- Considere o conjunto

$$\{0,1,2,\ldots,9\}^{\mathbb{N}} = \{(x_0, x_1, \ldots) \mid x_i \in \{0,1,2,\ldots,9\}\}$$

Mostre que esse conjunto não é enumerável.

Capítulo 4

Dinâmica no Espaço de Sequências - Bis

Nesse capítulo vamos falar de outras dinâmicas em conjuntos não-enumeráveis

4.1 O espaço $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$

Vamos agora considerar o espaço de sequências

$$\{0,1\}^{\mathbb{Z}} = \{(\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\}$$

Um elemento típico é, por exemplo,

$$\dots 000100100100 \dots$$

Poém o que esta escrito acima tem uma grande ambiguidade: qual dos elementos esta na posição zero da sequência? Para evitar esse problema identificaremos esta posição colocando uma barra sobre o elemento que lá se encontra, como abaixo:

$$\dots 000100\bar{0}100100 \dots$$

Note que esse elemento não é o mesmo que

$$\dots 000100\bar{1}00100 \dots$$

mas a omissão da barra não permitiria a distinção entre ambos.

Para definirmos uma distância entre elementos desse espaço procederemos de forma similar ao que já havia sido feito no capítulo anterior. Primeiro, definimos

$$M(x,y) = \min_{k\in\mathbb{Z}} \{|k| : x_k \neq y_k\}$$

Se $x = y$ então $M(x,y) = +\infty$. Depois, analogamente ao que já foi feito antes, definimos

$$d(x,y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{M(x,y)}$$

4.1.1 Notação

De forma similar ao que foi feito no capítulo anterior, vamos convencionar que, dado um bloco de símbolos B,

$$(B)^{\infty} = \ldots\, B\, B\, B\, B\, \ldots$$

(ou seja, o bloco é repetido infinitamente para a esquerda e para a direita) e

$$(B)^{-\infty} = \ldots\, B\, B$$

(ou seja, o bloco é repetido infinitamente apenas para a esquerda).

4.2 O shift completo

Agora definiremos um sistema dinâmico nesse novo espaço, da seguinte forma:

$$f(\ldots, x_{-2}, x_{-1}, \overline{x_0}, x_1, x_2, \ldots) = (\ldots, x_{-1}, x_0, \overline{x_1}, x_2, \ldots)$$

ou seja $(f(x))_i = x_{i+1}$, o que corresponde ao seguinte: a nova sequência é obtida deslocando-se a sequência original de uma unidade para a esquerda.

Esse fato nos faz pensar que definimos uma dinâmica idêntica a anterior, mas isso não passa de uma ilusão... Note que, por exemplo, essa f tem uma função inversa: de fato basta deslocar uma sequência de uma unidade para a direita para obter a (única) pré-imagem de f. Dessa forma não fica difícil verificar que, ao contrário do shift unilateral definido no capítulo anterior, este shift de fato é uma bijeção, ou seja, é uma transformação sobrejetiva e injetiva.

4.3 Expansividade

Nessa seção provaremos o seguinte resultado:

Teorema 4.1. *O shift bilateral* $f\colon \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ *é uma transformação expansiva.*

Demonstração. *Considere dois pontos* x *e* y *tais que*

$$d(f^n(x), f^n(y)) < 1 \qquad \textit{para todo } n \in \mathbb{Z}$$

Logo, $d(x,y) < 1$*, o que significa que* $x_0 = y_0$*.* $d(f(x), f(y)) < 1$*, e portanto* $x_1 = y_1$*; de forma similar* $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) < 1$ *e assim* $x_{-1} = y_{-1}$*. Procedendo da mesma forma seremos capazes de mostrar que* $x_n = y_n$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$*, o que implica que de fato* $x = y$ *e assim a transformação é expansiva. A constante de expansividade associada é* 1 *(e de fato qualquer outra constante menor do que* 1 *também desempenha o mesmo papel).*

4.4 Pontos homoclínicos

Vamos agora tentar exibir pontos com o seguinte comportamento: queremos que $f^n(x) \to p$ quando $n \to +\infty$ e também quando $n \to -\infty$, com p sendo um ponto fixo de f. Pontos assim, que se acumulam tanto no futuro quanto passado em um mesmo ponto dado são conhecidos como pontos homoclínicos.

Para fixar ideias, tomemos $p = 0^\infty$. Vamos então considerar um ponto x definido como segue:

$$x = 0^{-\infty}\, B\, 0^{+\infty}$$

onde B é um bloco finito de símbolos (e o leitor então tem diversas escolhas distintas a fazer, o que mostra que x não é único). Então está claro, da construção de x, que seus iterados se acumulam, tanto no passado quanto no futuro, no ponto 0^∞, ou seja, x é um exemplo de ponto homoclínico.

Podemos repetir isso com pontos periódicos; por exemplo

$$(101)^{-\infty} B (101)^{+\infty}.$$

Este ponto se acumula, tanto no passado quanto no futuro, no ponto periódico de período 3

$$(101)^\infty.$$

4.5 Pontos heteroclínicos

Agora queremos encontrar, dado um par de pontos fixos p e q, pontos x tais que $f^n(x) \to p$ quando $n \to +\infty$ e $f^n(x) \to q$ quando $n \to -\infty$. Um ponto x com essas características é conhecido como ponto heteroclínico.

Vamos fixar $p = 0^\infty$ e $q = 1^\infty$. Tome então

$$x = 1^{-\infty}B0^{+\infty}$$

onde B é algum bloco finito de símbolos.

Podemos repetir o procedimento com o objetivo de obter pontos que se acumulam, no futuro, em uma determinada órbita periódica e, no passado numa outra órbita periódica.

Por exemplo, considere,

$$(001)^{-\infty}B(100)^{+\infty}$$

Este ponto se acumula, no futuro, em $(100)^\infty$ e no passado em $(001)^\infty$.

4.6 Transitividade e outras propriedades

Usando a distância introduzida antes e ideias bastante similares as do capítulo anterior, é possível mostrar que o shift bilateral possui órbita densa e também é topologicamente mixing.

Para provar a existência de órbitas densas, por exemplo, podemos considerar o ponto

$$0^{-\infty}\bar{0}100011011000001010100011101110111\ldots$$

Ou seja, consideramos o ponto do capítulo anterior (cuja órbita é densa para o shift unilateral) e a completamos com uma infinidade de zeros para a esquerda, de forma a termos um ponto de $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. O leitor pode então verificar que a órbita do ponto acima, no futuro, irá se aproximar de qualquer ponto dado no espaço.

O shift bilateral também é topologicamente mixing e deixamos ao leitor a tarefa, não muito complicada, de adaptar o raciocínio do capítulo anterior a este caso. (bem, leitor, se você é daqueles que fica profundamente irritado quando encontra no meio do texto uma prova deixada exatamente para o leitor então não hesite em fazer o seguinte: olhe a introdução deste texto, veja nossos endereços eletrônicos e nos escreva, ficaremos felizes sabendo que alguém chegou até essa frase! Além disso poderemos dar mais explicações sobre esse resultado, se porventura o leitor tiver dificuldades em obtê-lo sozinho).

4.7 Autômatos celulares

Uma outra forma de definir uma dinâmica sobre este espaço de sequências é o que se chama de um autômato celular. Vamos nos ater a um caso particular para definir funções que são exemplos desse tipo de dinâmica.

Em primeiro lugar, precisamos de dois números naturais E e D. Depois, precisamos de uma função

$$g\colon \{0,1\}^{E+D+1} \to \{0,1\}$$

Definimos então a dinâmica como segue: dado $x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ então

$$(f(x))_i = g(x_{i-E}, x_{i-E+1}, \ldots, x_i, \ldots, x_{i+D-1}, x_{i+D})$$

Muito misterioso? Vamos observar alguns exemplos:

Exemplo 4.1. *Considere $E = 0$, $D = 1$ e $g\colon \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ como sendo $g(x,y) = y$. Então não é difícil ver que*

$$f(\ldots x_{-2}x_{-1}\overline{x_0}x_1x_2x_3\ldots) = \ldots x_{-1}x_0\overline{x_1}x_2x_3\ldots$$

ou seja, a dinâmica de f é exatamente a do shift bilateral. Logo o shift é um caso particular de autômato celular.

Sendo o shift um caso particular de autômato celular, então vemos que existem exemplos desse tipo de transformação que possuem órbita densa e que são topologicamente mixing. Mas essas propriedades valem apenas em casos particulares de autômatos, veremos em outros exemplos comportamentos bem distintos.

Exemplo 4.2. *Considere $E = 1$, $D = 0$ e $g\colon \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ como sendo $g(x,y) = x$. Então não é difícil ver que*

$$f(\ldots x_{-2}x_{-1}\overline{x_0}x_1x_2x_3\ldots) = \ldots x_{-2}\overline{x_{-1}}x_0x_1\ldots$$

ou seja, a dinâmica de f é exatamente a da inversa do shift bilateral.

Exemplo 4.3. *Considere $E = D = 1$, e*

$$g\colon \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$$

a função definida como segue:

$$g(000) = g(001) = g(010) = g(100) = 0$$

e

$$g(011) = g(101) = g(110) = g(111) = 1$$

(esta função g é por vezes chamada de função maioria: seu valor é o valor assumido pela maioria dos pontos em seu argumento, se a maioria é de zeros então g se anula e se a maioria é de uns então g é um).

Note que os pontos 0^∞ e 1^∞ são fixos para este autômato celular. Mas o leitor pode também se convencer de que

$$\dots 0000000\,1111111\,\dots = 0^{-\infty}1^{+\infty}$$

é um ponto fixo, assim como $1^{-\infty}0^{+\infty}$. Porém, como nessa notação não está fixada a coordenada zero, pois não nos preocupamos em colocar uma barra sobre nenhum dos símbolos (e podemos então escolher qualquer ponto para ser a origem) vemos assim que temos uma infinidade de pontos fixos para essa dinâmica. O leitor pode fazer o teste colocando a barra sobre um símbolo qualquer de sua escolha e verificando que terá sempre um ponto fixo.

Também não é difícil ver que os pontos

$$1^{-\infty}01^{+\infty}$$

(onde o 0 também pode estar em qualquer sítio, ou seja, podemos novamente colocar a barra que denota a posição zero em qualquer lugar!) tem como imagem o mesmo ponto, 1^∞. Portanto esta transformação não é injetiva e um ponto como 1^∞ tem uma infinidade de pré-imagens, algo que não acontecia no caso do shift.

O exemplo acima mostra que, em geral, não é possível esperar injetividade de um autômato celular.

Exemplo 4.4. *Considere $E = 1$, $D = 1$ e $g\colon \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ definida como*

$$g(111) = 1 \qquad e \qquad g = 0 \text{ nos outros casos}$$

Novamente não é difícil ver que 0^∞ e 1^∞ são pontos fixos; f também não é injetiva, pois $f((01)^\infty) = 0^\infty$.

Podemos detalhar um pouco mais a dinâmica deste exemplo. De fato, podemos provar que os únicos pontos fixos são 0^∞, 1^∞: se x é um ponto fixo então $g(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = x_i$. Então, se $x_i = 1$, a única possibilidade é que $x_{i-1} = x_{i+1} = 1$; repetindo procedimento sítio a sítio, concluímos que $x_i = 1$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ e portanto $x = 1^\infty$; a outra possibilidade é que $x_i = 0$. Porém se algum x_k é igual a 1 podemos repetir o preocedimento *anterior para concluir que todo* x_j*,* $j \in \mathbb{Z}$*, incluindo* $x_i = 0$ *deveria ser* 1*, uma contradição. Portanto se* $x_i = 0$ *devemos ter todos os* $x_j = 0$ *e assim o ponto fixo é* 0^∞*.*

Além disso, o limite das órbitas pode ser obtido:

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \begin{cases} 1^\infty & \textit{se } x = 1^\infty \\ 0^\infty & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

Se $x = 1^\infty$*, que é ponto fixo, então não há nada a ser provado. Caso contrário, significa que em ao menos um sítio temos um símbolo* 0*. Suponhamos que este símbolo esteja no sítio* i*. Então podemos garantir que, na imagem, ao menos os sítios* $i-1, i$ *e* $i+1$ *terão símbolo* 0*. No segundo iterado, ao menos os sítios* $i-2, i-1, i, i+1$ *e* $i+2$ *terão símbolos* 0*; repetindo esse processo podemos ver que, após o n-ésimo iterado teremos ao menos os sítios* $i-n, \ldots, i+n$ *sendo* 0*. Desta forma vemos que os iterados estão se aproximando cada vez mais de* 0^∞*, que é então o limite da órbita.*

Esse detalhamento do comportamento das órbitas nos permite ainda concluir que, nesse caso, o autômato celular não tem nenhuma órbita densa (e também não será topologicamente mixing).

No próximo exemplo veremos que a sobrejetividade também não é uma propriedade geral dos autômatos celulares.

Exemplo 4.5. *Considere* $E = 0$*,* $D = 2$ *e* $g\colon \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ *definida como*

$$g(111) = 1 \qquad e \qquad g = 0 \textit{ nos outros casos}$$

Novamente não é difícil ver que 0^∞ *e* 1^∞ *são pontos fixos; e também são pontos fixos os da forma* $0^{-\infty}1^{+\infty}$ *(note que não fixamos a posição zero o que nos dá infinitos pontos com essa propriedade).* f *também não é injetiva, pois* $f((01)^\infty) = 0^\infty$*. Finalmente, considere o ponto*

$$1^{-\infty}01^{+\infty}$$

Este ponto não tem nenhuma pré-imagem, mostrando que essa f *não é sobrejetiva. De fato, considere o trecho* 101*. Para produzir o* 1 *mais à esquerda devemos, obrigatoriamente, ter um ponto do tipo* 111*. Para gerar o* 0 *teremos então que continuar o ponto da seguinte forma:* 1110*. Por fim, a continuação do ponto será do tipo* $1110*$ *(com* $*$ *podendo ser zero ou um), mas* $g(10*) = 0$ *para qualquer dos valores assumidos por* $*$*, o que mostra que o* 1 *da direita não pode ser criado a partir do ponto anterior. Portanto este ponto não está na imagem do autômato celular* f *acima definido.*

Exemplo 4.6. *Tome $E = 0$ e $D = 1$; a função $g\colon \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ é definida como sendo $g(x, y) = (x + y) \bmod 2$. Nesse caso vemos que, por exemplo, 0^∞ é ponto fixo, mas 1^∞ não é: de fato $f(1^\infty) = 0^\infty$. Vemos também que*

$$f(\ldots 0001000\ldots) = \ldots 0011000\ldots$$

e que

$$f((011)^\infty) = (101)^\infty.$$

Exemplo 4.7. *Tome $E = 1$ e $D = 1$; a função $g\colon \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ é definida como sendo $g(x, y, z) = (x + z) \bmod 2$. Nesse caso vemos que, por exemplo, 0^∞ é ponto fixo, mas 1^∞ não é: de fato $f(1^\infty) = 0^\infty$. E a órbita de certos pontos assume um aspecto curioso. Por exemplo,*

$$\ldots 0000000\bar{1}000000\ldots$$

$$\ldots 000001\bar{0}100000\ldots$$

$$\ldots 00010\bar{0}01000\ldots$$

$$\ldots 00101\bar{0}10100\ldots$$

e assim sucessivamente.

4.8 Propriedades básicas de um autômato celular

4.8.1 Continuidade

Queremos agora mostrar o seguinte resultado:

Teorema 4.2. *$f\colon \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ autômato celular é uma transformação contínua*

Demonstração. *Devemos mostrar que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $d(x, y) \le \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) \le \epsilon$.*

Primeiro, vamos assumir que $\epsilon = (1/2)^N$ para algum N inteiro. Nesse caso, $d(f(x), f(y))$ significa que os símbolos de $f(x)$ e $f(y)$, ou seja, $(f(x))_i$ e $(f(y))_i$, são iguais para todo i entre $-N$ e N. Considere agora x e y que se encontram a uma distância menor ou igual que $\delta = (1/2)^{N+M} = (1/2)^M\epsilon$, onde M é o máximo entre D e E. Então note que os símbolos de x e y, x_i e y_i, coincidem para todo i entre $-N - M$ e $N + M$. Portanto temos o seguinte: $(f(x))_0 = g(x_{-E}, \ldots, x_D) = (f(y))_0 = g(y_{-E}, \ldots, y_D)$, pois $x_i = y_i$ nos índices acima. De forma análoga podemos mostrar que $(f(x))_i =$

$(f(y))_i$ para todo i entre $-N$ e N e dessa forma acabamos de concluir que se $d(x,y) \leq \delta = (1/2)^M(1/2)^N$ então $d(f(x), f(y)) \leq (1/2)^N = \epsilon$.

Agora considere um ϵ qualquer. Nesse caso, basta tomar N_0 suficientemente grande de forma que $(1/2)^{N_0} \leq \epsilon$, pois dessa forma $d(f(x), f(y)) \leq (1/2)^{N_0} \leq \epsilon$. Mas então basta proceder como antes usando $\delta = (1/2)^{N_0}(1/2)^M$ e teremos o resultado desejado, concluindo assim que f é uma função contínua.

4.8.2 Comutatividade com o shift

Vamos mostrar agora uma outra propriedade interessante, a comutatividade do shift com um autômato celular:

Teorema 4.3. *Seja σ o shift bilateral e f um autômato celular. Então*

$$\sigma \circ f = f \circ \sigma.$$

Demonstração. *Consideremos primeiro a expressão de $\sigma \circ f(x)$. No ponto $i \in \mathbb{Z}$ teremos*

$$(\sigma \circ f(x))_i = (f(x))_{i+1} = g(x_{i+1-E}, \ldots, x_{i+1+D})$$

Agora considere $f(\sigma(x))$: no ponto $i \in \mathbb{Z}$ teremos

$$(f(\sigma(x)))_i = g(\sigma(x)_{i-E}, \ldots, \sigma(x)_{i+D}) = g(x_{i+1-E}, \ldots, x_{i+1+D})$$

Portanto para todo ponto $i \in \mathbb{Z}$ temos $(\sigma \circ f(x))_i = (f(\sigma(x)))_i$, o que corresponde a dizer que $\sigma \circ f = f \circ \sigma$, ou seja, estas transformações comutam, como afirmamos.

4.8.3 O teorema de Hedlund

Na última seção mostramos que o autômato celular é uma transformação contínua de $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ que comuta com o shift bilateral. O teorema de Hedlund, de forma muito interessante, mostra que vale a recíproca: se uma transformação T é contínua e comuta com o shift então ela é um autômato celular! A demonstração foge ao escopo dessas notas, mas o leitor pode encontrar alguma informação a mais sobre esse caso olhando [BS]

4.9 Exercícios

1- Obtenha a distância entre os pontos $0^{-\infty}0000\bar{1}001^{+\infty}$ e $0^{-\infty}1000\bar{1}001^{+\infty}$ (onde a barra sobre o símbolo indica a posição zero).

2- Uma outra forma de definir a distância: podemos definir a métrica no espaço das sequências como segue:

$$D(x,y) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|i|}} \delta(x_i, y_i)$$

(sendo $\delta(a,a) = 0$ e $\delta(a,b) = 1$ para todo símbolo $a \neq b$). O leitor é convidado a mostrar que D efetivamente é uma métrica.

3- Mostre que para o shift $f\colon \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ existe um ponto x tal que $\cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(x)$ é denso em $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ mas $\cup_{n \in \mathbb{N}} f^n(x)$ não é.

4- Considere os autômatos celulares definidos de forma que $E = D = 2$. De quantas maneiras diferentes podemos definir este tipo de aplicação? (sugestão: tente contar o número de possíveis funções g)

Capítulo 5

Dinâmica no intervalo

Nesse capítulo vamos falar de um conjunto que é um exemplo de variedade (com bordo e unidimensional), o intervalo fechado da reta $[a, b]$. Na maior parte do tempo usaremos $[0, 1]$ mas em algumas ocasiões será mais conveniente trabalhar com $[-1, 1]$, porém sempre deixaremos bem claro qual o intervalo usado.

5.1 Dinâmicas no intervalo

O leitor talvez já tenha feito o seguinte "experimento"(e se não fez, largue o livro e faça-o agora!): considere um número entre 0 e 1, insira-o em uma calculadora e aperte a tecla da raiz quadrada; aperte de novo, e de novo diversas vezes... Para qual número este processo está convergindo? Se o leitor já fez isso (não fez? Não é possível, pare a leitura!) então sabe que o processo converge para o número 1. O que isso tem a ver com o tema dessas notas? Bem, vamos ver como interpretar essa brincadeira em nossa linguagem. De fato estamos considerando um número entre 0 e 1, ou seja, um elemento do conjunto $[0, 1]$. Extrair a raiz quadrada é o mesmo que calcular o valor da função $f(x) = \sqrt{x}$, e o resultado também é um número entre 0 e 1; ou seja, estamos considerando uma aplicação

$$f\colon [0, 1] \to [0, 1]$$

onde $f(x) = \sqrt{x}$. Apertar a tecla uma vez equivale a obter $f(x)$; apertá-la a segunda vez implica em obter $f(f(x)) = f^2(x)$ e assim sucessivamente, ou seja, estamos tentando entender a dinâmica dessa função em um conjunto que é um intervalo fechado da reta. A brincadeira com a calculadora nos autoriza a conjecturar que $f^n(x)$ se aproxima de 1 quando n cresce.

Como podemos provar a conjectura? Bem, uma maneira ingênua é achar que a conjectura já esta provada uma vez que todos os exemplos feitos na calculadora mostram exatamente este comportamento (e nesse momento supomos que o leitor já fez isso diversas vezes...). Mas não se esqueça: por mais exemplos que façamos, não teremos explorado nada além de um conjunto finito de condições iniciais, enquanto o intervalo da reta nos exibe uma infinidade de possibilidades... Como ter certeza de que todas elas nos levarão ao 1?

Em primeiro lugar devemos observar que a frase acima esta incorreta, nem todas as condições iniciais nos levarão ao 1: se o leitor começou com o número 0 então, é claro, só obteve 0 ao apertar a tecla da raiz e a órbita não foi para 1. Isso acontece porque 0 é um ponto fixo da função f; temos outros? Sim, o 1 também é ponto fixo e estes são os únicos, portanto não temos mais nada para nos preocupar. Feita essa ressalva, queremos verificar que toda condição inicial em $(0,1]$ nos leva ao 1. Ou seja,

$$\lim f^n(x) = 1$$

Vamos admitir que a sequência $f^n(x)$ tem um limite. Então

$$\lim f^n(x) = L = \lim f(f^n(x)) = f(\lim f^n(x)) = f(L)$$

onde usamos fortemente a continuidade da função f. Em conclusão, descobrimos que se f^n tem um limite então ele necessariamente satisfaz a equação $f(L) = L$, ou seja, é um ponto fixo de f. Bem, como os pontos fixos de $f(x) = \sqrt{x}$ no intervalo são apenas 0 e 1 então esses são os possíveis candidatos a limite.

Mas o limite de fato existe? Note que se $x \in (0,1)$ então sua raiz quadrada é maior do que o número original, ou seja, $f(x) > x$. Por isso temos uma sequência crescente $x, f(x), f^2(x), \ldots$ de números reais; por outro lado essa sequência é limitada superiormente por 1. Mas sequências crescentes e limitadas são sempre convergentes (consulte um livro de análise real, como por exemplo [Li1]) e assim a órbita efetivamente tem um limite. Como já visto, o limite tem de ser um ponto fixo de f, mas temos apenas duas opções de pontos fixos, 0 e 1. Como a sequência é crescente e já começa com um ponto maior do que 0 então o único limite que nos resta é 1 e dessa forma mostramos que de fato o que vemos na calculadora é um fenômeno geral.

5.2 Comportamento na vizinhança de pontos fixos

Vamos agora tentar compreender o comportamento da dinâmica na vizinhança de um ponto fixo que, por razões óbvias, é conhecido como atrator.

Teorema 5.1. *Seja $f\colon [0,1] \to [0,1]$ uma função de classe C^1, $p \in [0,1]$ um ponto tal que $|f'(p)| = \lambda_0 < 1$. Então existe uma vizinhança $B(p)$ do ponto p tal que, para todo $x \in B(p)$, $f^n(x) \to p$ quando $n \to \infty$.*

Demonstração. *Se $|f'(p)| = \lambda_0 < 1$ então a continuidade de f' (lembre-se de que f é de classe C^1, ou seja, tem derivada contínua) nos permite encontrar uma vizinhança de p, que denotaremos por $B(p)$ onde $|f'| \leq \lambda_0 + \epsilon = \lambda < 1$. Considere agora um ponto $x \in B(p)$. Então o teorema do valor médio nos permite escrever o seguinte:*

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| \leq (\sup f')|x - p| \leq \lambda|x - p| < |x - p|$$

Portanto a distância entre $f(x)$ e p é menor (e sabemos até mesmo a taxa de contração) que a distância de x a p, ou seja, a aplicação da dinâmica aproxima o ponto de p; em particular, $f(x)$ continua na vizinhança $B(p)$. Para uma segunda iteração temos

$$|f^2(x) - p| = |f^2(x) - f^2(p)| = |f(f(x)) - f^(f(p))| \leq (\sup f')|f(x) - f(p)| \leq$$

$$\leq \lambda|f(x) - f(p)| \leq \lambda^2|x - p|$$

Ou seja, $f^2(x)$ está ainda mais próximo de p. Aplicando este mesmo raciocínio podemos mostrar que para o $n-$ésimo iterado temos

$$|f^n(x) - p| \leq \lambda^n|x - p|$$

de forma que não apenas $f^n(x)$ está convergindo para p, mas também sabemos que a convergência se dá de forma geométrica, pois a distância está diminuindo proporcionalmente a λ^n, ou seja, exponencialmente.

5.3 Ponto com derivada 1

Vamos nessa seção, por conveniência, usar o intervalo $[-1, 1]$. Queremos ilustrar o fato de que, para derivada 1, o comportamento na vizinhança de um ponto fixo pode variar bastante e não podemos provar um teorema tão simples quanto o da seção anterior.

Comecemos com o seguinte exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x - x^3 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ x + x^3 & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases}$$

Esta função é diferenciável na origem e $f'(0) = 1$; ao mesmo tempo é fácil ver que $f(0) = 0$, ou seja, 0 é um ponto fixo. Vamos começar na vizinhança de 0 com um ponto $x > 0$. Então $f(x) = x+x^3 > x$; assim vemos que a sequência de pontos $x, f(x), f^2(x), \dots$ é uma sequência crescente, e portanto o ponto se afasta da origem. O leitor pode agora considerar o caso de um ponto $y < 0$ que começa próximo de 0 e verificar que a sequência $y, f(y), f^2(y), \dots$ é decrescente e o ponto também se afasta da origem. Então podemos concluir que um ponto com derivada 1 se comporta como um repulsor? Calma leitor, aguarde até o próximo exemplo.

Considere agora a função

$$f(x) = \begin{cases} x + x^3 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ x - x^3 & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases}$$

Novamente 0 é um ponto fixo e $f'(0) = 1$. Nesse caso, começando com $x > 0$ temos que $f(x) = x - x^3 < x$ e portanto a sequência $x, f(x), f^2(x), \dots$ é decrescente e se acumula em 0; de forma semelhante, para $y > 0$ temos que $y, f(y), f^2(y), \dots$ é uma sequência crescente e que se acumula também em 0. Portanto nesse caso o ponto 0 se comporta como um atrator.

Mas serão essas as duas únicas opções? Bem, considere agora

$$f(x) = \begin{cases} x + x^3 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ x + x^3 & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases}$$

Nesse caso, um ponto $x > 0$ começa a se afastar da origem, enquanto $y < 0$, cuja órbita também será crescente, se aproxima de 0. Portanto de um lado da origem 0 se comporta como atrator, enquanto que do outro lado o comportamento é de repulsor.

Vemos assim que diversos comportamentos distintos podem acontecer com um ponto fixo de derivada 1, não sendo possível ser tão categórico quanto na seção anterior a menos que sejam assumidas mais hipóteses sobre a função na vizinhança do ponto fixo.

O leitor é desafiado a descrever o que ocorre com pontos na vizinhaça de 0 para a próxima função:

$$f(x) = \begin{cases} x - x^3 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ x - x^3 & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases}$$

5.4 A tenda

Nesse momento vamos nos concentrar por algum tempo em um exemplo de dinâmica que, por conveniência, é definida no intervalo $[-1, 1]$:

$$T(x) = 1 - 2|x|$$

Esta transfomação é conhecida como tenda, por razões que ficam claras se o leitor fizer o gráfico da função.

Uma das características dessa transformação é que ela tem derivada definida em quase todo o intervalo: na verdade a derivada só não está definida no ponto zero, pois nos demais a derivada é ou 2 ou -2.

Uma das consequências desse fato é a seguinte: se consideramos um intervalo qualquer $[a, b]$ que não contém o zero (ou seja, está todo à esquerda ou à direita de zero) então sua imagem $T([a, b])$ é um intervalo cujo comprimento é o dobro do comprimento original de $[a, b]$.

Queremos mostrar que esta transformação exibe ao menos alguma órbita que é densa. Para isso precisaremos percorrer algumas etapas com certo cuidado, sendo que a ferramenta básica é o próximo lema:

Lema 5.2. *Seja $f\colon [-1, 1] \to [-1, 1]$ uma transformação contínua tal que, dados dois intervalos abertos I e J existe algum inteiro n de forma que $f^n(I) \cap J \neq \emptyset$. Então existe um ponto cuja órbita por f é densa.*

Demonstração. *Vamos provar primeiro que, dado $\delta > 0$, é possível obter uma órbita δ-densa, ou seja, uma órbita que passa a uma distância de no máximo δ de qualquer ponto do intervalo.*

Para obter uma órbita assim começamos com uma cobertura de $[-1, 1]$ por bolas abertas de raio $\delta/2$, $B_1, B_2, \ldots, B_N$, ou seja, escolhemos bolas (lembre-se de que a bola aberta, no caso do intervalo, corresponde a um intervalo aberto contido em [-1, 1]) de forma que $[-1, 1] \subset B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_N$. Note que dessa forma cada ponto $q \in [-1, 1]$ está contido em pelo menos uma bola. Logo, se um ponto visita esta bola ele está a uma distância menor do que δ de q e se a órbita de um ponto visita todas as bolas então ela passa a uma distância menor do que δ de todos os pontos de $[-1, 1]$.

Prosseguindo na prova, note que nossa hipótese diz que existe n_{N_1} tal que

$$f^{n_{N-1}}(B_{N-1}) \cap B_N \neq \emptyset$$

(pois basta tomar I e J como sendo, respectivamente, B_{N-1} e B_N).

Tome o aberto

$$A_{N-1} = f^{-n_{N-1}}(f^{n_{N-1}}(B_{N-1}) \cap B_N) \subset B_{N-1}$$

Então existe um iterado n_{N-2} tal que $f^{n_{N-2}}(B_{N-2}) \cap A_{N-1} \neq \emptyset$ Considere o aberto

$$A_{N-2} = f^{-n_{N-2}}(f^{n_{N-2}}(B_{N-2}) \cap A_{N-1}) \subset B_{N-2}$$

e podemos continuar com esse procedimento até obter o aberto $A_1 \subset B_1$.

Tome um ponto $p \in A_1 \subset B_1$*; então* $f^{n_1}(p) \in A_2 \subset B_2$*,* $f^{n_1+n_2}(p) \in A_3 \subset B_3$ *e assim sucessivamente, até* $f^{n_1+n_2+\cdots+n_{N-1}}(p) \in B_N$*; desta forma essa órbita é* δ*-densa, pois visita todas as bolas da cobertura.*

Agora note que o valor de δ *não foi fixado, o que significa que podemos repetir o truque com valores de* δ *arbitrariamente pequenos. Desta forma seremos capazes de construir uma órbita capaz de passar arbitrariamente próxima de qualquer ponto de* $[-1, 1]$*, como desejado.*

Também usaremos o próximo resultado:

Lema 5.3. *Considere um intervalo da forma* $[-1, a]$*. Então existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $T^n([-1, a]) = [-1, 1]$*.*

Demonstração. *Considere* $[-1, a]$*; a imagem desse intervalo por* T *será um novo intervalo. Como* -1 *é ponto fixo da dinâmica, ele necessariamente estará no novo intervalo e deverá ser um dos seus extremos, e portanto*

$$T([-1, a]) = [-1, b]$$

Se $a > 0$ *então é fácil ver que* $T([-1, a]) = [-1, 1]$ *e não há mais nada a ser feito.*

Se $a < 0$ *então a imagem de* $[-1, a]$ *terá o dobro do comprimento do intervalo original; nesse caso a imagem, que é* $[-1, b]$ *pode ou conter o zero (e assim sua imagem será tudo) ou ter* $b < 0$ *e podemos repetir o processo de iteração, dobrando novamente o comprimento do intervalo. Em algum momento a imagem conterá o zero, pois seu comprimento será maior do que* 1 *após um certo número de iterados e a imagem seguinte já será todo o intervalo* $[-1, 1]$*.*

Finalmente estamos em condições de mostrar que a tenda de fato tem alguma órbita densa:

Teorema 5.4. *Existe ponto* $p \in [-1, 1]$ *tal que a órbita de* p *é densa em* $[-1, 1]$*.*

Demonstração. *Pelo lema anterior, basta verificarmos que, dados dois intervalos* I *e* J *então há um* n *tal que* $f^n I \cap J \neq \emptyset$*.*

Considere o intervalo I*; se* $0 \in I$ *então* $f(I) = [-1, a]$ *e então algum iterado seu, pelo lema acima, será todo o intervalo* $[-1, 1]$ *e, em particular, intersectará* J*.*

Se $0 \notin I$ *então* $f(I)$ *tem comprimento que é o dobro do comprimento de* I*; repetindo as iterações o comprimento sempre dobrará, até que em algum iterado a imagem contenha* 0*; depois disso basta aplicar novamente o lema acima.*

Os resultados anteriores de fato nos permitem mostrar mais do que a existência de órbita densa:

Teorema 5.5. *$T\colon [-1,1] \to [-1,1]$ é uma transformação topologicamente mixing.*

Demonstração. *Considere dois abertos U e V; como cada aberto necessariamente contém algum intervalo assumiremos que U e V são intervalos. Pelo que já foi visto, dado um intervalo U então temos algum iterado N tal que $T^N(U) = [-1,1]$ e, portanto, $T^n(U) = [-1,1]$ para todo $n \geq N$; mas então $T^n(U) \cap V = [-1,1] \cap V = V \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$ e assim a transformação tenda é de fato topologicamente mixing.*

5.5 Alguns casos da familia quadrática

Nesta seção concentraremos nossa energia no estudo de alguns casos de uma família de sistemas dinâmicos, conhecida como família quadrática:

$$f_a\colon [0,1] \to [0,1], \qquad a \in [0,4], \qquad f_a(x) = ax(1-x)$$

O objetivo é fixar algum valor do parâmetro a na função acima e tentar compreender o destino das órbitas após a iteração de f_a. Que o leitor não se engane com a aparente simplicidade da função: entender completamente esta família ainda é objeto de pesquisa e a atual compreensão, bastante avançada, de características dessa transformação demandou o esforço de muitas pessoas, dentre elas alguns dos grandes matemáticos de nossa época.

5.5.1 $a < 1$

Nesse caso a equação de pontos fixos $f_a(x) = x$ tem apenas uma solução no intervalo $[0,1]$ que é 0. A derivada é $f'(x) = a - 2ax$ e portanto no ponto fixo temos $f'(0) = a$. Dessa forma $|f'(0)| < 1$ e estamos em condição de dizer que a origem é de fato um atrator local para este sistema dinâmico. Mas é possível ir além e ver que de fato ela é um atrator global: note que se $x \in [0,1/2]$ a função f é decrescente. Portanto a órbita $x, f(x), \ldots$ decresce e se acumula no ponto fixo 0, sendo assim atraída por ele. Se a condição inicial x está em $(1/2,1]$ note que $f((1/2,1]) \subset [0,a/4] \subset [0,1/4]$ e portanto $f(x)$ já está na região $[0,1/2]$ e a partir desse ponto a órbita é decrescente e também se acumulará em 0. Logo este ponto fixo efetivamente atrai todas as órbitas do intervalo e é um atrator global.

5.5.2 $1 < a < 3$

Nesse caso a equação de pontos fixos tem duas soluções em $[0,1]$, uma delas sendo o 0 e a outra $1-1/a$. Para 0 temos $f'(0) = a$ que agora satisfaz a condição para ser um repulsor local; ou seja, ao modificarmos o parâmetro a transformamos o ponto atrator global 0 em um repulsor de órbitas! Quanto ao outro ponto fixo: temos $f'(1-1/a) = 2-a$ e assim $|f'(1-1/a)| < 1$, ou seja, este ponto é um atrator local.

Podemos ir além e verificar que esse é um ponto atrator global; por simplicidade, trataremos separadamente dois casos:

$1 < a < 2$

Nessa situação note que, para $x < 1-1/a$, temos que f é crescente, e portanto órbitas com essa condição inicial serão crescentes e se aproximarão do ponto fixo; se $1-1/a < x < 1/2$ temos que f é decrescente e então uma órbita que começa nessa região irá decrescer e ter como limite o ponto fixo. E se o ponto começa na região entre $[1/2,1]$? Nesse caso, note que $f([1/2,1]) \subset [0,a/4] \subset [0,1/2]$. Portanto, o primeiro iterado já está de novo na região $[0,1/2]$ onde se aplica a analise feita acima; desta forma, para qualquer condição inicial no intervalo vemos que uma órbita tem limite e este limite é o ponto fixo atrator $1-1/a$, que é assim um atrator global.

$2 < a < 3$

Nesta região o ponto fixo $1-1/a$ continua sendo um atrator global. O raciocínio exato é um pouco mais sutil do que no caso anterior, mas como não encontraremos nenhuma ideia fundamentalmente nova omitiremos os detalhes em nome da simplicidade.

5.5.3 $a = 4$

Faremos agora um salto da região de parâmetros menores do que 3 diretamente para $a = 4$.

Para entender um pouco da dinâmica de $f(x) = 4x(1-x)$ recorreremos a um expediente extremamente útil na teoria de sistemas dinâmicos, que é a mudança de coordenadas. O nome técnico é conjugação, e essencialmente significa encontrar uma transformação que relaciona duas dinâmicas distintas, sendo uma delas conhecida ou mais fácil de descrever que a primeira. Para ilustrar essa ideia consideremos primeiro uma outra versão da família quadrática, mas no intervalo $[-1,1]$: $Q(x) = 1-2x^2$.

Primeiro mostraremos que f e Q são conjugadas, ou seja, que existe uma transformação $h\colon [-1,1] \to [0,1]$ contínua e com inversa contínua, tal que $Q(x) = h^{-1}(f(h(x)))$. De fato, considere $h(x) = (x+1)/2$, que é claramente uma aplicação contínua e com inversa também contínua que pode ser facilmente obtida: $h^{-1}(x) = 2x - 1$. Então note que

$$h^{-1} \circ f \circ h(x) = h^{-1} \circ 4h(x)(1 - h(x)) =$$
$$= h^{-1} \circ 4\frac{x+1}{2}(1 - \frac{x+1}{2}) = h^{-1} \circ (1 - x^2) =$$
$$= 2(1 - x^2) - 1 = 1 - 2x^2 = Q(x)$$

mostrando que de fato Q e f são conjugadas.

Agora construiremos uma conjugação entre Q e uma outra transformação de $[-1,1]$ que já conhecemos, a tenda $T(x) = 1 - 2|x|$. Considere a transformação contínua $H(x) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x)$, que também tem uma inversa contínua $H^{-1}(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arcsen}(x)$. Então note que

$$H^{-1} \circ Q \circ H(x) = H^{-1} \circ 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) =$$
$$= H^{-1} \circ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(1 - 2|x|)\right) = 1 - 2|x| = T(x)$$

Observação 4. *Na dedução acima utilizamos as seguintes identidades trigonométricas:*

$$\cos(2x) = 1 - 2sen^2 x$$
$$sen(a+b) = sen\, a \cos b + sen\, b \cos a$$

Dessas duas expressões podemos deduzir

$$\cos(2x) = sen(\frac{\pi}{2} - 2x) = 1 - 2sen^2 x$$

Por fim, podemos então construir uma conjugação entre f e T. Na verdade, basta usar $h \circ H\colon [-1,1] \to [0,1]$ cuja expressão explícita é

$$h(H(x)) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x) + 1\right)$$

Sendo conjugadas, T e f compartilham diversas propriedades; por exemplo, já sabemos que T tem alguma órbita densa. Portanto podemos usar a mudança de coordenadas $h \circ H$ para transformar a órbita densa de T em uma órbita densa de f, ou seja, acabamos de mostrar que $f(x) = 4x(1-x)$ tem órbita densa no intervalo $[0,1]$.

De forma similar, podemos verificar que a transformação $f(x) = 4x(1 - x)$ é topologicamente mixing, pois é conjugada com uma que, como já provado, também é topologicamente mixing.

5.5.4 O caso $3 < a < 4$

O que ocorre nessa região intermediária? Para valores de a menores do que 3 temos sempre um ponto fixo atrator; para o parâmetro 4 temos uma dinâmica bastante rica, com órbita densa e topologicamente mixing, o que dá uma ideia de que a complexidade do sistema cresce junto com a e algo de bastante interessante acontece nessa região que separa dois comportamentos distintos. De fato é isso o que ocorre; mas a análise mais cuidadosa iria requerer bem mais tempo (e espaço), por isso nos limitamos a uma breve descrição do primeiro passo rumo a complexidade: o ponto fixo que existe para $a < 3$ e que é um atrator global continua existindo, mas para $a > 3$ se torna um repulsor pois sua derivada passa a ter valor absoluto maior do que 1. Mas nesse momento surge um ponto periódico p de período 2 como atrator, e então as órbitas tendem a se acumular em $\{p, f(p)\}$. Com o aumento de a este ponto de período 2 também se transforma em repulsor e surge um ponto de período 4 que atrai as órbitas; este processo continua com uma infinidade de duplicações de período, gerando um quadro bastante sofisticado e que está bem além dos modestos objetivos destas notas. O leitor que tiver interesse em conhecer mais detalhadamente esse processo pode, por exemplo, consultar [Dev].

5.6 Exercícios

1- Considere o sistema dinâmico $f\colon [0,1] \to [0,1]$ definido por $f(x) = x^2$. Descreva os pontos fixos, os pontos periódicos e os conjuntos limite para um ponto inicial x_0 qualquer. (sugestão: inspire-se no início do capítulo)

2- Considere agora $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$ definida por $f(x) = x^{1/3}$. Proceda como no exercício anterior encontrando pontos fixos e o comportamento limite para um ponto qualquer.

3- Considere duas transformações do intervalo $[-1,1]$, a tenda $T(x) = 1-2|x|$ e $f(x) = 2|x|-1$ (que pode ser vista como uma tenda invertida). Mostre que o homeomorfismo $h(x) = -x$ conjuga f e T.

3- Seja $f\colon [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = 2x$ para $x \in [0,1/2]$ e $f(x) = 2-2x$ para $x \in [1/2,1]$. Esboce o gráfico de f, f^2 e de uma f^n geral. Obtenha os pontos de período n de f (sugestão: esses são pontos fixos de f^n)

Bibliografia

[BS] M. Brin e G. Stuck, *Introduction to Dynamical Systems* Cambridge University Press (2002).

[Dev] Robert L. Devaney, *An introduction to chaotic dinamical systems* Boulder : Westview Press (2003).

[Li1] Elon Lages Lima, *Análise Real Volume 1* IMPA (2009).

[Li2] Elon Lages Lima, *Espaços Métricos* IMPA (2009).