2° Colóquio de Matemática da Região Sul

Introdução aos números normais

Jairo Krás Mengue

Cydara Cavedon Ripoll

2012

Prefácio

Este texto é uma consequência do estudo de vários livros e artigos sobre números normais, realizado pelos autores, que também resultou em uma dissertação de mestrado apresentada pelo primeiro autor em março de 2008.

Existe uma grande coleção de resultados sobre números normais na literatura. O leitor poderá, por exemplo, encontrar vários artigos cuja proposta é a prova de que um número ou classe de números é normal em base 10. No entanto, muitos destes trabalhos possuem provas baseadas em numerosas estimativas (interessantes) que optamos por não incluir ou mencionar em um livro introdutório sobre números normais.

Como o conceito de normalidade está fortemente ligado ao conceito de probabilidade, preparamos uma seção com definições e conceitos iniciais de probabilidades geralmente vistas em um curso de teoria da medida. Também buscamos apresentar o Teorema de Borel com uma prova "elementar" baseada em ideias de Sierpinski, porém com estimativas de Copeland e Erdos.

O principal teorema apresentado neste livro é o que chamamos "Critério de Normalidade" de Pjateckii-Sapiro. Este teorema pode ser utilizado (e será neste livro) para simplificar a prova da normalidade de algumas constantes, ou até mesmo deixá-las muito simples.

Conteúdo

1 Números normais: primeiras propriedades **4**

2 Algumas técnicas para a construção de números normais **9**

3 Introdução à Teoria da Medida **15**

3.1 Algumas definições e resultados 15

3.2 Teorema de Borel sobre números normais 20

4 Distribuição de Sequências **32**

4.1 Sequências equidistribuídas 32

4.2 Função de distribuição Assintótica 39

5 Critério de Normalidade **45**

6 Outros Tópicos **58**

Capítulo 1

Números normais: primeiras propriedades

Existe algum dígito que ocorre com maior frequência na expansão decimal de π?

Note que na pergunta acima apareceu a palavra **frequência**. Embora de significado intuitivo, convém apresentarmos uma definição para a mesma:

Definição 1. *Seja X um conjunto qualquer e $(x_1, x_2, ...)$ uma seqüência de elementos de X. Dizemos que um conjunto $Y \subset X$ é visitado com frequência a por $(x_1, x_2, ...)$, se*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{i : x_i \in Y \ e \ 1 \leq i \leq N\}}{N} = a.$$

Exercício 2. *Usando a definição anterior:*

i) Determine a frequência de ocorrência do dígito 1 na expansão do racional

$$0,\overline{0351612}.$$

ii) Considere o número real

$$\alpha = .122111122222222...,$$

onde os blocos de 1's e de 2's intercalam-se, duplicando de tamanho em cada etapa. Mostre que a frequência do dígito 1 não está determinada. Mais precisamente: truncando após a ocorrência dos blocos de 1's mostre que a frequência deveria ser $2/3$ *enquanto que, truncando após a ocorrência dos blocos de 2's, mostre que a frequência deveria ser* $1/3$.

Observação: Dado $X = \{0, 1, ..., 9\}$, a expansão de um número real em base 10 pode ser vista como uma seqüência de elementos de X e uma lista finita de k dígitos pode ser vista como uma sequência finita de elementos de X. Se $(y_1, ..., y_k)$ é uma sequência finita de elementos de X, dizemos que $(y_1, ..., y_k)$ ocorre com freqüência a em $(x_1, x_2, ...)$ se

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\#\{i \leq N - k + 1 : (x_i, ..., x_{i+k-1}) = (y_1, ..., y_k)\}}{N} = a. \tag{1.1}$$

E o que é um número normal?

Antes de apresentarmos a definição cabem algumas indagações:

1) Se escolhermos ao acaso um ponto do intervalo [0,1], qual a "probabilidade" de seu sétimo dígito ser 5?

2) Se escolhermos ao acaso um ponto do intervalo [0,1], qual a "probabilidade" de seu 28^0 *dígito ser 7?*

3) Se escolhermos ao acaso um ponto do intervalo [0,1], qual a "probabilidade" de termos o dígito 1 ocorrendo com frequência maior que o dígito 9 em sua expansão decimal?

A terceira pergunta acima é sem dúvida mais complicada. É um fato conhecido que a resposta correta para ela é : *zero.* Além disso, os dígitos 1 e 9 poderiam ser trocados por quaisquer outros. A resposta sempre seria a mesma.

Definição 3. *Um número real α é dito normal em base 10 (ou apenas normal) se em sua expansão qualquer dígito ocorre com frequência* $1/10$ *e qualquer lista finita de k dígitos ocorre com freqüência* $\frac{1}{10^k}$.

Assim, por exemplo, se um número α é normal, então os dígitos 0 e 7 aparecerão em sua expansão com frequência $1/10$ enquanto que 1329 deverá aparecer com frequência $1/10000$.

Um resultado conhecido desde o início do século XX, devido ao matemático Émile Borel (ver [7]) garante que "quase todos" os números são normais. A expressão "quase todos" é uma expressão probabilística, comum em Teoria da Medida e será explicada no Capítulo 3. Estamos dizendo que se escolhermos ao acaso um número em $[0, 1]$, a probabilidade deste número não ser normal é nula.

Sendo então o conjunto dos números normais realmente grande (probabilisticamente falando) não deveria ser difícil apresentarmos exemplos de números normais. No entanto isso não é, na prática, simples como parece. Como exemplo podemos observar que não conhecemos a resposta para a pergunta do início deste capítulo: "Existe algum dígito que ocorre com maior frequência na expansão decimal de π?"

Exercício 4. *Mostre que se α é racional então α não é normal.*

Não existem exemplos triviais de números normais conhecidos. Ou seja, utilizando apenas a definição dada acima, não conhecemos nenhum exemplo de número normal cuja prova da normalidade seja trivial. O primeiro exemplo "concreto" de expansão de número normal foi apresentado em 1933 por Champernowne (ver [8]):

$$\alpha = .012...9\,000102...99\,000001002...999\,0000...,$$

obtido encadeando-se todas as listas finitas em ordem crescente de tamanho e ordenando-se lexicograficamente as lista de mesmo tamanho.

Partindo da normalidade deste número, Champernowne também mostrou que a constante obtida listando-se os números naturais

$$\alpha = .123456789101112...$$

é normal.

Um fascinante resultado Conjecturado por Champernowne e provado por Copeland e Erdos em 1946 (ver [9]) garante a normalidade da constante

$$\alpha = .2\,3\,5\,7\,11\,13...$$

cuja expansão é obtida listando-se os números primos.

Em todo este livro a palavra **bloco** estará significando lista finita de dígitos. Por exemplo 456 é um bloco de 3 dígitos, enquanto que 628945 é um bloco de 6 dígitos distinto de 624589. Por $B_k = b_1...b_k$ estaremos denotando um bloco de k dígitos. Por $|B_k|$ estaremos denotando o tamanho do bloco, que com esta notação é igual a k. Por exemplo $|4521| = 4$ e $|421213| = 6$.

Notação 5. *Sejam N um número natural, B_k um bloco de k dígitos e $\alpha \in [0, 1)$:*

Denotamos por $\#(B_k; N; \alpha)$ *o número de vezes que o bloco* B_k *aparece na expansão decimal de* α *até seu* $N-$*ésimo dígito. Ou seja: se* $\alpha = .a_1a_2a_3...$ *e se* $N \geq k$ *então*

$$\#(B_k; N; \alpha) = \#\{n \in \{1, ..., N-k+1\} : (a_n, ..., a_{n+k-1}) = (b_1, ..., b_k)\}.$$

Se $N < k$ *então* $\#(B_k; N; \alpha) = 0$.

Exercício 6. *Seja* α *um número contido em* $[0, 1)$. *Seja* B_k *um bloco qualquer de dígitos e seja* T_k *o bloco que satisfaz* $T_k + B_k = \underbrace{99...99}_{k \text{ vezes}}$.

Mostre que se a expansão de α *não é finita*[1], *então*

$$\#(B_k; N; \alpha) = \#(T_k; N; 1-\alpha).$$

Conclua que α *é normal se e somente se* $1-\alpha$ *é normal.*

[1]Uma expansão finita é uma expansão da forma $.a_1a_2...a_d0000...$

Capítulo 2

Algumas técnicas para a construção de números normais

Nesta seção, seguindo algumas ideias apresentadas em [8], vamos estudar algumas técnicas para construir números normais, partindo da normalidade de um número conhecido, como

$$\alpha = .012...9\,0001...99\,000001...999\,0000...$$

Vamos provar a normalidade deste número no Capítulo 5 . Ainda que a normalidade deste número pareça intuitiva, convém observarmos que sua prova não é trivial. Isso porque, se desejarmos analisar a frequência do dígito 7 em sua expansão, por exemplo, não é suficiente calcular sua ocorrência média truncando apenas em (.012...9), (.012...9 0001...99) (isto é, após a listagem de todos os blocos de tamanho n, para n=1,2,3,...). De fato, com isso estaríamos calculando apenas o limite de uma subsequência, o que não garante necessariamente que exista o limite dado em (1.1). Veja também o Exercício

2.

Observação: Seja $x_1, x_2, ...$ uma lista infinita de blocos. Seja

$$\alpha = .x_1x_2x_3...$$

Se B_k é um bloco qualquer, então existem duas formas de B_k aparecer na expansão de α:

i) como sub-bloco de algum x_n

ii) estritamente na junção de dois blocos x_nx_{n+1}.

Assim

$$\#(B_k; N; \alpha) = \#_i(B_k; N; \alpha) + \#_{ii}(B_k; N; \alpha),$$

onde $\#_i(B_k; N; \alpha)$ denota o número de ocorrências satisfazendo i), enquanto $\#_{ii}(B_k; N; \alpha)$ denota o número de ocorrências satisfazendo ii). Segue que

$$\frac{\#(B_k; N; \alpha)}{N} = \frac{\#_i(B_k; N; \alpha)}{N} + \frac{\#_{ii}(B_k; N; \alpha)}{N}.$$

Proposição 7. *Seja $x_1, x_2, ...$ uma lista infinita de blocos tal que $|x_n| \to +\infty$ quando $n \to +\infty$. Então a frequência de B_k na expansão de*

$$\alpha = .x_1x_2x_3...$$

não depende do número de ocorrências de B_k no caso ii) acima, isto é

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#_{ii}(B_k; N; \alpha)}{N} = 0. \tag{2.1}$$

Demonstração. Fixado $L \in \mathbb{N}$, existe n_0 tal que $|x_n| > L$ para $n \geq n_0$. Seja $C = |x_1| + ... + |x_{n_0}|$. Para cada $N > C$ existe um n_1 tal que

$$|x_1| + ... + |x_{n_1}| \leq N < |x_1| + ... + |x_{n_1}| + |x_{n_1+1}|.$$

Segue que

$$\frac{\#_{ii}(B_k;N;\alpha)}{N} \leq \frac{k.(n_1+1)}{N} \leq \frac{k.(n_1+1)}{|x_1|+...+|x_{n_1}|} \leq \frac{k.(n_1+1)}{C+L(n_1-n_0)}.$$

Quando $N \to \infty$ temos que $n_1 \to \infty$. Segue que

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\#_{ii}(B_k;N;\alpha)}{N} \leq \limsup_{n_1\to\infty} \frac{k.(n_1+1)}{C+L(n_1-n_0)} = \frac{k}{L}.$$

Como L é um natural qualquer e a sequência é não negativa, concluímos a prova de (2.1). $\square$

Exercício 8. *Seja $x_1, x_2, ...$ uma lista infinita de blocos satisfazendo: $|x_n| \to +\infty$ quando $n \to +\infty$. Se $\alpha = .x_1x_2x_3...$ é normal, então também são normais os números $\alpha_2 = .x_1x_1x_2x_2x_3x_3...$, $\alpha_3 = .x_1x_1x_1x_2x_2x_2x_3x_3x_3...$, etc.*

Sugestão: Consideremos por exemplo α_4. Fixado um N, suponhamos que com N dígitos seja possível listar os blocos $x_1x_1x_1x_1...x_n$ mas não seja possível listar completamente os blocos $x_1x_1x_1x_1...x_nx_n$. Ou seja, não conseguimos listar x_n completamente pela segunda vez. Suponhamos no entanto que podemos listar até m dígitos de x_n. Fixado B_k podemos comparar α com α_4 e escrever:

$$\begin{aligned}\#_i(B_k;N;\alpha_4) = \#_i(B_k;|x_1|+...+|x_n|;\alpha) + \#_i(B_k;|x_1|+...+|x_{n-1}|+m;\alpha)\\ + 2\#_i(B_k;|x_1|+...+|x_{n-1}|;\alpha).\end{aligned}$$

Exercício 9. *Seja $x_1, x_2, ...$ uma lista infinita de blocos satisfazendo: $|x_n| \to +\infty$ quando $n \to +\infty$. Se $\alpha = .x_1x_2x_3...$ é normal então para dígitos quaisquer $j_1, j_2, ...$, o número*

$$\beta = .j_1x_1j_2x_2j_3x_3...$$

é normal.

Agora podemos aplicar estes resultados para apresentar construções interessantes de números normais.

Proposição 10. *Suponhamos que*

$$\alpha = .01...9\,0001...99\,000001...999\,...$$

é normal. Então a Constante de Champernowne

$$\beta = .1234567891011...$$

obtida listando-se os números naturais é normal.

Demonstração. Seja $x_1 = 01...9$, $x_2 = 00...99$, etc. Então, aplicando o Exercício 8, obtemos que

$$\alpha_9 = \underbrace{(0...9)(0...9)...(0...9)}_{9\,vezes}\underbrace{(00...99)(00...99)...(00...99)}_{9\,vezes}...$$

é normal.

Pelo Exercício 9 para quaisquer dígitos $j_1, j_2, ...$ (vamos denotar apenas por j) o número

$$.(j0...j9)(j0...j9)...(j0...j9)\quad(j00...j99)(j00...j99)...(j00...j99)...$$

é normal. Segue que

$$.(10...19)(20...29)...(90...99)\quad(100...199)(200...299)...(900...999)...$$

é normal. Adicionando os dígitos 123456789 ao início da expansão anterior obtemos que a Constante de Champernowne

$$.12345678910111213...$$

é normal. □

Exercício 11. *Supondo que a Constante de Champernowne*

$$\alpha = .1234567891011...$$

é normal, mostre que a constante obtida retirando-se os naturais que são potência de dois:

$$\beta = .3567910111213141517181 9...$$

é normal.

No exercício acima um fato importante é que as potencias de dois ocorrem com frequência zero sobre os naturais. Essa ideia não pode ser aplicada na proposição abaixo.

Proposição 12. *Suponhamos que a Constante de Champernowne*

$$.1234567891011...$$

é normal. Então a constante

$$\alpha = .13579111315...$$

obtida listando-se os números impares é normal.

Demonstração. Pelo Exercício 8 sabemos que

$$\alpha_5 = .111112222233333...,$$

obtido concatenando-se cada natural repetido cinco vezes, é normal.

Além disso pelo Exercício 9, para dígitos quaisquer $j_i \in \{0, ..., 9\}$,

$$.1j_1 1j_2 1j_3 1j_4 1j_5 2j_6 2j_7 2j_8 2j_9 2j_{10} ... 9j_{45} 10j_{46} 10j_{47} ... 10j_{50} 11...$$

é normal. Escolhendo os dígitos $1, 3, 5, 7, 9, 1, 3, 5, 7, 9, 1, 3, 5, 7, 9, ...$ obtemos que

$$.1113151719\,2123252729\,31...$$

é normal. Adicionando os dígitos 13579 ao início desta expansão concluímos que

$$\beta = .13579\,1113151719\,2123...$$

é normal. $\square$

Capítulo 3

Introdução à Teoria da Medida

Neste capítulo vamos apresentar algumas definições e enunciar resultados conhecidos em Teoria da Medida. Vamos desenvolver estes conceitos sobre o intervalo [0,1]. As provas para os resultados aqui enunciados podem ser encontradas em [4]. Na segunda seção vamos apresentar uma prova para o teorema de Borel que afirma que "quase todos os números são normais".

3.1 Algumas definições e resultados

Notação: Denotamos por $\mathcal{P}$ a coleção de todos os subconjuntos de $[0,1]$.

Definição 13. *Uma σ-álgebra de $[0,1]$ é uma coleção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $[0,1]$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. $\varnothing, [0,1] \in \mathcal{A}$;

2. Se $X \in \mathcal{A}$ então $X^c = ([0,1] - X) \in \mathcal{A}$;

3. Se $X_1, X_2, X_3, ...$ estão em A então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \in \mathcal{A}$.

Note que $\mathcal{P}$ é uma σ-álgebra (a maior possível). Como $\varnothing \in \mathcal{A}$ a propriedade 3. é válida para uniões finitas.

Se $X_1, X_2, ... \in \mathcal{A}$ então $X_1 \cap X_2 \cap ... = (X_1^c \cup X_2^c \cup ...)^c$ pertence a $\mathcal{A}$.

Se $X_1, X_2 \in \mathcal{A}$ então $X_1 - X_2 = X_1 \cap X_2^c \in \mathcal{A}$.

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são σ-álgebras, a interseção de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é a sigma álgebra formada por todos os subconjuntos de $[0,1]$ que estão em $\mathcal{A}$ e em $\mathcal{B}$.

Exercício 14. *Mostre que a coleção formada por $\varnothing$ e todos os intervalos de $[0,1]$ **não** forma uma σ-álgebra.*

Definição 15. *A σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ é a menor σ-álgebra que contém os intervalos abertos.*

Podemos obter $\mathcal{B}$ intersectando todas as σ-álgebras que contêm os intervalos abertos. Note que $\mathcal{P}$ é uma delas.

Um conjunto $X \subseteq [0,1]$ pertencente a $\mathcal{B}$ será chamado **mensurável** ou **boreliano**. No que segue, vamos fixar a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$.

Definição 16. *Uma probabilidade em $[0,1]$ é uma aplicação $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ satisfazendo:*

1. $\mu(\varnothing) = 0$ e $\mu([0,1]) = 1$

2. Se $X_1, X_2, X_3, ... \in \mathcal{B}$ são disjuntos então $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(X_n)$.

Segue que para todo conjunto mensurável X:

$$\mu(X^c) = 1 - \mu(X) \ \text{ e } \ \mu(X) \leq 1.$$

Se $X \subset Y$ são conjuntos mensuráveis, então

$$\mu(X) \leq \mu(X) + \mu(Y - X) = \mu(Y).$$

Se $X_1, X_2, X_3, ...$ são mensuráveis então definindo

$$Y_1 = X_1 \ \text{ e, para} \, n \geq 2, \quad Y_n = X_n - (X_1 \cup ... \cup X_{n-1}),$$

garantimos que $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ são disjuntos e concluímos que

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(Y_n) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(X_n).$$

Exercício 17. *Mostre que se* $\mu(X_n) = 0$, *n=1,2... então* $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) = 0$.

Exercício 18. *Fixado* $x \in [0,1]$ *defina* $\mu_x : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ *por:* $\mu_x(X) = 0$ *se* $x \notin X$ *e* $\mu_x(X) = 1$ *se* $x \in X$. *Mostre que* μ_x *é uma probabilidade.*

Exercício 19. *Seja* $0 \leq a_1, a_2, ...$ *uma sequência de números reais tais que* $a_1 + a_2 + ... = 1$. *Seja* μ_1, $\mu_2, ...$ *uma sequência de probabilidades. Mostre que* $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$, *definida por*

$$\mu(X) = a_1\mu_1(X) + a_2\mu_2(X) + ...$$

é uma probabilidade.

Proposição 20. *Existe uma única probabilidade* m *em* $[0,1]$ *satisfazendo:* $m([a,b]) = b - a$ *para todo intervalo* $[a,b] \subseteq [0,1]$.

Definição 21. *Vamos chamar a probabilidade* m *explicitada na proposição anterior de medida (ou probabilidade) de Lebesgue em* $[0,1]$.

Definição 22. *Dada uma probabilidade* μ, *dizemos que uma propriedade é verdadeira* μ*-q.t.p. (quase todos os pontos) se existe um conjunto mensurável* $X \subseteq [0,1]$ *tal que* $\mu(X) = 1$ *sobre o qual a propriedade é verdadeira. Quando a probabilidade considerada é a medida de Lebesgue dizemos que a propriedade é verdadeira em q.t.p.*

Exercício 23. *Mostre que quase todos os pontos do intervalo* $[0, 1]$ *são irracionais. Essa afirmação é verdadeira se considerarmos uma probabilidade qualquer?*

A proposição abaixo será utilizada futuramente.

Proposição 24. *Seja* E *um conjunto mensurável. Para cada* $\varepsilon > 0$*, existe uma coleção de intervalos abertos* $O = A_1 \cup A_2 \cup ...$ *tal que* $E \subseteq O$ *e*

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} m(A_i) - m(E) < \varepsilon.$$

Agora passamos ao estudo de integrais de funções.

Definição 25. *Dizemos que uma função* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *é mensurável se para todo* $X \in \mathcal{B}$ *temos que* $f^{-1}(X) = \{x \in [0, 1] : f(x) \in X\}$ *está em* $\mathcal{B}$*.*

Dizemos que uma função mensurável $g : [0, 1] \to [0, 1]$ é **simples** se ela assume um número finito de valores. Se os valores assumidos são $a_1, ..., a_n$, definindo $A_i = g^{-1}(a_i)$ temos que $A_1, ..., A_n$ são mensuráveis e disjuntos. Além disso, $g = a_1 1_{A_1} + ... + a_n 1_{A_n}$, onde

$$1_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{se}\, x \in A \\ 0, & \text{se}\, x \notin A \end{cases}.$$

Neste caso, dada uma probabilidade μ, definimos a integral da função simples g por:

$$\int g \, d\mu = a_1 \mu(A_1) + ... + a_n \mu(A_n).$$

Definição 26. *Se* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *é uma função mensurável e* μ *é uma probabilidade, definimos*

$$\int f \, d\mu := \sup \left\{ \int g \, d\mu : g \leq f \ \ e \ g \ \text{é simples} \right\},$$

onde $g \leq f$ *quando* $g(x) \leq f(x)$ *para todo* $x \in [0, 1]$*.*

Enunciamos agora três importantes resultados.

Teorema 27 (Convergência Monótona)**.** *Seja* $f_1, f_2, \ldots$ *uma sequência de funções mensuráveis,* $f_n : [0,1] \to [0,1]$*, satisfazendo:* $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$ *para todo* $x \in [0,1]$.
Defina $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$*. Então* f *é mensurável e para toda probabilidade* μ

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Teorema 28 (Lemma de Fatou)**.** *Seja* $f_1, f_2, \ldots$ *uma sequência de funções mensuráveis,* $f_n : [0,1] \to [0,1]$*. Defina* $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$*. Então* f *é mensurável e para toda probabilidade* μ

$$\int f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Teorema 29 (Convergência Dominada)**.** *Seja* μ *uma probabilidade em* $[0,1]$ *e seja* $f_1, f_2, \ldots$ *uma sequência de funções mensuráveis,* $f_n : [0,1] \to [0,1]$*. Seja* $f : [0,1] \to [0,1]$ *uma função tal que* $f_n(x) \to f(x) \quad \mu-q.t.p.$ *Então* f *é mensurável e*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Observações: O leitor deve ter cuidado ao estudar espaços mais gerais, onde são necessárias hipóteses adicionais. Por exemplo, em $\mathbb{R}$ cada função $f_n = (1/n)1_{[0,n]}$ é mensurável e com integral (de Lebesgue) igual a 1. Estas funções convergem uniformemente para a função $f \equiv 0$. No entanto a integral de f é igual a zero.

Encerramos com um resultado que nos permite interpretar probabilidades como aplicações lineares de $C([0,1])$ em $\mathbb{R}$, onde denotamos por $C([0,1])$ o espaço vetorial formado pelas funções $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínuas.

Teorema 30 (Representação de Riesz)**.** *Seja Ψ uma aplicação que para cada função $f \in C([0,1])$ associa um número real. Suponhamos que:*

1. Ψ é linear, ou seja $\Psi(af + bg) = a\Psi(f) + b\Psi(g)$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in C([0,1])$

2. $\Psi(f) \geq 0$ se $f(x) \geq 0$ para todo x

3. $\Psi(1_{[0,1]}) = 1$

Então existe uma única probabilidade μ em $[0,1]$ tal que $\Psi(f) = \int f\, d\mu$ para toda função contínua $f : [0,1] \to [0,1]$.

Utilizando este Teorema, é possível considerar que uma probabilidade em $[0,1]$ é uma aplicação linear $\Psi : C[0,1] \to \mathbb{R}$ satisfazendo: $\Psi(f) \geq 0$ se $f \geq 0$ e $\Psi(1) = 1$.

3.2 Teorema de Borel sobre números normais

Fixado um número natural $b \geq 2$ podemos representar os números do intervalo $[0,1]$ utilizando a base b. A construção da representação em base b é análoga à que fazemos em base 10, utilizando um símbolo para cada elemento do conjunto $\{0, 1, ..., (b-1)\}$ e que aqui chamaremos $b-$dígitos. Um número real α é dito normal em base b se, em sua expansão nesta base, cada símbolo ocorre com frequência $1/b$ e cada bloco de tamanho k ocorre com frequência $\frac{1}{b^k}$. Denotamos por $\#_b(B_k; N; \alpha)$ o número de vezes que o bloco B_k aparece na expansão de α em base b, até seu $N-$ésimo b-dígito.

Definição 31. *Um número $\alpha \in [0,1]$ é absolutamente normal se for normal em todas as bases $b \geq 2$.*

Teorema 32 (Borel)**.** *Quase todos os números do intervalo [0,1] são absolutamente normais.*

Esta seção é dedicada à prova do Teorema de Borel.

Iniciamos observando que há uma correspondência entre a expansão de um número α nas bases b e b^k. De fato cada bloco de tamanho k na expansão em base b corresponde a um $b-$dígito na expansão em base b^k.

Exemplo 33. *Se* $b = 2$ *então* $b^3 = 8$. *Para cada bloco de tamanho 3 na base 2 corresponde um bloco de tamanho 1 na base 8.*

Definição 34. *Um real* α *é simplesmente normal em base* b *se em sua expansão nesta base cada um dos b-dígitos ocorre com frequência* $1/b$.

Vamos mostrar que a prova do Teorema de Borel pode ser reduzida ao estudo dos números simplesmente normais.

Lema 35. *Fixados* $\alpha \in [0, 1]$ *e uma base* $b \geq 2$ *temos: se* α, $b\alpha$, $b^2\alpha, ...$ *são simplesmente normais em todas as bases:* b, b^2, ... *(potências de* b*), então* α *é normal em base* b.

Demonstração. Fixado o bloco B_k, consideramos a base b^k e o correspondente bloco de tamanho 1 que denotaremos por d. Para cada N:

$$\#_b(B_k; k(N+1)-1; \alpha) = \#_{b^k}(d; N; \alpha)+\#_{b^k}(d; N; b.\alpha)+...+\#_{b^k}(d; N; b^{k-1}\alpha).$$

Como por hipótese $\alpha, b\alpha, ..., b^{k-1}\alpha$ são simplesmente normais na base b^k, concluímos que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#_b(B_k; k(N + 1) - 1; \alpha)}{kN} = \frac{1}{b^k}.$$

Como

$$\lim_{N\to\infty} \frac{kN}{k(N+1)-1} = 1,$$

concluímos a prova. □

Exercício 36. *Mostre que se para cada base $b \geq 2$, quase todos os números são simplesmente normais, então quase todos os números são absolutamente normais.*

sugestão: Utilize o lema anterior e o Exercício 17.

Segue que o Teorema de Borel é consequência do teorema abaixo

Teorema 37. *Fixada uma base $b \geq 2$, quase todos os números são simplesmente normais nesta base.*

A prova que vamos apresentar utiliza estimativas contidas em [9].

No que segue, vamos analisar os blocos de tamanho k, denotados por B_k.

Definição 38. *Fixado $\varepsilon \in (0,1)$, vamos dizer que um bloco B_k escrito em base b é $\epsilon-$normal se qualquer $b-$dígito ocorre em B_k com freqüência*[1] *entre*

$$\frac{1}{b} - \varepsilon \text{ e } \frac{1}{b} + \varepsilon.$$

Para provarmos o Teorema 37, será útil uma estimativa para o número de blocos de tamanho k que não são $\epsilon-$normais.

Exemplo 39. *O bloco* 1234567890 *é $\epsilon-$normal em base* 10*, seja qual for a escolha de $\varepsilon \in (0,1)$.*

[1] A expressão "freqüência" aqui representa a razão entre o número de ocorrências e número total de b-dígitos, k.

Exemplo 40. *Seja* $\alpha = (.a_1a_2a_3...)_b$ *um número normal em base* b*. Fixado* ε*, temos que, para* n *suficientemente grande, o bloco* $a_1a_2...a_n$ *é* $\varepsilon-$ *normal em base* b*.*

Lema 41. *Sejam* c *um real positivo,* B_k *um bloco da base* b *e* $\varepsilon \in (0,1)$*. Se cada* $b-$*dígito ocorre entre* $\frac{c(2-\varepsilon)}{b}$ *e* $\frac{c(2+\varepsilon)}{b}$ *vezes em* B_k*, então* B_k *é* $\varepsilon-$*normal em base* b*.*

Demonstração. Se cada $b-$dígito ocorre em B_k entre $\frac{c(2-\varepsilon)}{b}$ e $\frac{c(2+\varepsilon)}{b}$ vezes, então B_k possui entre $c(2-\varepsilon)$ e $c(2+\varepsilon)$ dígitos e cada dígito ocorre em B_k com freqüência entre

$$\frac{(2-\varepsilon)}{b(2+\varepsilon)} \text{ e } \frac{(2+\varepsilon)}{b(2-\varepsilon)}.$$

Resta verificar que

$$\frac{1}{b} - \varepsilon \leq \frac{(2-\varepsilon)}{b(2+\varepsilon)} \leq \frac{(2+\varepsilon)}{b(2-\varepsilon)} \leq \frac{1}{b} + \varepsilon.$$

Mas

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b} - \varepsilon \leq \frac{(2-\varepsilon)}{b(2+\varepsilon)} &\Leftrightarrow 1 - b\varepsilon \leq \frac{(2-\varepsilon)}{(2+\varepsilon)} \\
&\Leftrightarrow 2 + \varepsilon - 2b\varepsilon - b\varepsilon^2 \leq 2 - \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \varepsilon(1 - 2b - b\varepsilon) \leq -\varepsilon \\
&\Leftrightarrow 1 - 2b - b\varepsilon \leq -1 \\
&\Leftrightarrow 2 \leq b(2+\varepsilon)
\end{aligned}$$

o que é verdade pois $b \geq 2$ e $\varepsilon > 0$. Analogamente,

$$\frac{(2+\varepsilon)}{b(2-\varepsilon)} \leq \frac{1}{b} + \varepsilon \Leftrightarrow 2 \leq b(2-\varepsilon),$$

o que é verdade pois $b \geq 2$ e $\varepsilon \in (0,1)$. □

Notação 42. *Com base neste último lema, fixados um inteiro positivo k e $\varepsilon \in (0,1)$, vamos denotar por*

$$r = r(k,\varepsilon) = \left\lfloor \frac{k(2-\varepsilon)}{2b} \right\rfloor \text{ e } R = R(k,\varepsilon) = \left\lceil \frac{k(2+\varepsilon)}{2b} \right\rceil,$$

onde $\lfloor z \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a z e $\lceil z \rceil$ denota o menor inteiro maior ou igual a z.

Corolário 43. *Sejam k um inteiro positivo, $\varepsilon \in (0,1)$ e B_k um bloco em base b. Se cada $b-$dígito ocorre entre $r+1$ e $R-1$ vezes em B_k, então B_k é $\varepsilon-$normal na base b.*

Demonstração. Inicialmente, note que

$$r \leq \frac{k(2-\varepsilon)}{2b} < r+1 \qquad \text{e} \qquad R-1 < \frac{k(2+\varepsilon)}{2b} \leq R,$$

logo cada dígito da base b ocorre entre $\frac{k(2-\varepsilon)}{2b}$ e $\frac{k(2+\varepsilon)}{2b}$ vezes em B_k. Daí, aplicando o lema anterior com $c = k/2$, concluímos a prova. $\square$

Notação 44. *Fixado um inteiro positivo k, para cada s vamos denotar por*

$$T_s = T_s(k) = (b-1)^{k-s} \binom{k}{s} = (b-1)^{k-s} \frac{k!}{(k-s)!s!}.$$

Lema 45. *Dados um inteiro positivo k e $\varepsilon \in (0,1)$, o número de blocos de tamanho k que não são $\varepsilon-$normais na base b é menor ou igual a*

$$b\left(\sum_{s=0}^{r} T_s + \sum_{s=R}^{k} T_s\right).$$

Demonstração. Pelo corolário anterior, é suficiente estimar um valor máximo para o número de blocos de tamanho k que possuem pelo menos um $b-$dígito d que ocorre entre 0 e r ou entre R e k vezes em sua expansão.

Afirmamos que o número de blocos de tamanho k que contêm o $b-$dígito $d \neq 0$ ocorrendo s vezes é

$$T_s = (b-1)^{k-s} \frac{k!}{(k-s)!s!}.$$

De fato, há $\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} = \frac{k!}{(k-s)!s!}$ formas diferentes de os dígitos d estarem posicionados. Nas demais posições há $(b-1)$ possibilidades de dígitos. Concluímos que o número de blocos de tamanho k onde o dígito d ocorre entre 0 e r ou entre R e k vezes em sua expansão é igual a

$$\sum_{s=0}^{r} T_s + \sum_{s=R}^{k} T_s$$

Lembrando que temos b dígitos na base b, concluímos a prova. □

Lema 46. *Fixados um inteiro positivo k e $\varepsilon \in (0,1)$, com as notações 42 e 44 temos:*

(i) $\sum_{s=0}^{r} T_s < (k+1)T_r$

(ii) $\sum_{s=R}^{k} T_s < (k+1)T_R$.

Demonstração. Para verificarmos (i) observamos que $r < k/b$ e que

$$\frac{(k-k/b)}{k/b} = (b-1), \text{ portanto } \forall j \leq k/b, \ \frac{(k-j+1)}{j} > b-1. \tag{3.1}$$

Daí:

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{r} T_s &= T_r + \sum_{s=0}^{r-1}\left((b-1)^{k-s}\frac{k!}{(k-s)!s!}\right)\\
&= T_r + \sum_{s=0}^{r-1}\left((b-1)^{k-r}(b-1)^{r-s}\frac{k!}{(k-s)!s!}\right) \overset{(3.1)}{<}\\
&< T_r + \sum_{s=0}^{r-1}\left((b-1)^{k-r}\left(\prod_{j=s+1}^{r}\frac{(k-j+1)}{j}\right)\frac{k!}{(k-s)!s!}\right)\\
&= T_r + \sum_{s=0}^{r-1}\left((b-1)^{k-r}\frac{k!}{(k-r)!r!}\right)\\
&= \sum_{s=0}^{r} T_r = (r+1)T_r < (k+1)T_r.
\end{aligned}$$

Para verificarmos (ii) observamos que $R > k/b$ e que

$$\frac{k/b}{(k-k/b)} = \frac{1}{b-1}, \text{ portanto } \forall j \geq \frac{k}{b}+1,\ \frac{j}{(k-j+1)} > \frac{1}{b-1}. \tag{3.2}$$

Daí:

$$\begin{aligned}
\sum_{s=R}^{k} T_s &= T_R + \sum_{s=R+1}^{k}\left((b-1)^{k-s}\frac{k!}{(k-s)!s!}\right)\\
&= T_R + \sum_{s=R+1}^{k}\left((b-1)^{k-R}\left(\frac{1}{(b-1)^{s-R}}\right)\frac{k!}{(k-s)!s!}\right) \overset{(3.2)}{<}\\
&< T_R + \sum_{s=R+1}^{k}\left((b-1)^{k-R}\left(\prod_{j=R+1}^{s}\frac{j}{(k-j+1)}\right)\frac{k!}{(k-s)!s!}\right)\\
&= T_R + \sum_{s=R+1}^{k}\left((b-1)^{k-R}\frac{k!}{(k-R)!R!}\right) = \sum_{s=R}^{k} T_R < (k+1)T_R.
\end{aligned}$$

□

Dos Lemas 45 e 46 obtemos

Corolário 47. *Dados um inteiro positivo k e $\varepsilon \in (0,1)$, o número de blocos de tamanho k que não são $\varepsilon-$normais na base b é menor ou igual a*

$$b(k+1)(T_r + T_R).$$

Observamos que, dados um inteiro positivo k e um inteiro positivo $s < k$:

$$\frac{T_{s+1}}{T_s} = \frac{(b-1)^{k-s-1}\frac{k!}{(k-s-1)!(s+1)!}}{(b-1)^{k-s}\frac{k!}{(k-s)!s!}} = \frac{k-s}{(s+1)(b-1)}. \tag{3.3}$$

Decorre daí que $\frac{T_{s+1}}{T_s}$ é decrescente em s, ou seja,

$$0 < s_1 < s_2 < k \Rightarrow \frac{T_{s_1+1}}{T_{s_1}} > \frac{T_{s_2+1}}{T_{s_2}}. \tag{3.4}$$

Notação 48. *Fixados um inteiro positivo k e $\varepsilon \in (0,1)$, vamos denotar por*

$$\begin{aligned} r^{'} = r'(k,\varepsilon) &= \left\lfloor \frac{k}{2b}(2 - \frac{\varepsilon}{2}) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k(4-\varepsilon)}{4b} \right\rfloor \quad e \\ R' = R'(k,\varepsilon) &= \left\lceil \frac{k}{2b}(2 + \frac{\varepsilon}{2}) \right\rceil = \left\lceil \frac{k(4+\varepsilon)}{4b} \right\rceil. \end{aligned}$$

Vamos denotar, ainda, por

$$\rho_1 = \frac{T_{r'}}{T_{r'-1}}; \quad \rho_2 = \frac{T_{R'}}{T_{R'+1}} \quad e \quad \Psi = \Psi(\varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon}{4(b-1)}$$

Note que, pela Notação 42

$$r \le r' \le R' \le R.$$

Lema 49. *Com as notações anteriores temos que $\rho_1, \rho_2 \ge \Psi > 1$.*

Demonstração. É claro que $\Psi = 1 + \frac{\varepsilon}{4(b-1)} > 1$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{T_{r'}}{T_{r'-1}} \overset{(3.3)}{=} \frac{k - r' + 1}{r'(b-1)} = \frac{k - \left\lfloor \frac{k(4-\varepsilon)}{4b} \right\rfloor + 1}{\left\lfloor \frac{k(4-\varepsilon)}{4b} \right\rfloor} \frac{1}{(b-1)} \\
&\geq \frac{k - \frac{k(4-\varepsilon)}{4b} + 1}{\frac{k(4-\varepsilon)}{4b}} \frac{1}{(b-1)} \geq \frac{k - \frac{k}{b} + \frac{\varepsilon k}{4b}}{\frac{k}{b}} \frac{1}{(b-1)} \\
&= \frac{\frac{(b-1)k}{b} + \frac{\varepsilon k}{4b}}{\frac{k}{b}} \frac{1}{(b-1)} = \left((b-1) + \frac{\varepsilon}{4}\right) \frac{1}{(b-1)} \\
&= 1 + \frac{\varepsilon}{4(b-1)} = \Psi.
\end{aligned}$$

Da mesma forma

$$\begin{aligned}
\rho_2 &= \frac{T_{R'}}{T_{R'+1}} \overset{(3.3)}{=} \frac{(R'+1)(b-1)}{k - R'} = \frac{(\left\lceil \frac{k(4+\varepsilon)}{4b} \right\rceil + 1)(b-1)}{k - \left\lceil \frac{k(4+\varepsilon)}{4b} \right\rceil} \\
&\geq \frac{\frac{k(4+\varepsilon)}{4b} + 1}{k - \frac{k(4+\varepsilon)}{4b}}(b-1) \geq \frac{\frac{k}{b} + \frac{\varepsilon k}{4b}}{k - \frac{k}{b}}(b-1) \\
&= \frac{\frac{k}{b} + \frac{\varepsilon k}{4b}}{\frac{(b-1)k}{b}}(b-1) = \frac{1 + \frac{\varepsilon}{4}}{b-1}(b-1) = 1 + \frac{\varepsilon}{4} > \Psi.
\end{aligned}$$

□

Lema 50. *Com as notações anteriores, dado* $\varepsilon \in (0,1)$, *para cada* k *inteiro positivo suficientemente grande temos:*

i) $T_r \Psi^{\frac{\varepsilon k}{5b}} < T_{r'} < b^k$;

ii) $T_R \Psi^{\frac{\varepsilon k}{5b}} < T_{R'} < b^k$.

Demonstração. A segunda desigualdade de i) e ii) decorre do Binômio de Newton pois

$$b^k = ((b-1)+1)^k = \sum_{s=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} (b-1)^{k-s} = \sum_{s=0}^{k} T_s$$

e $r', R^{'} \in \{0, ..., k\}$.

Para provarmos a primeira desigualdade de *i)* observamos inicialmente que

$$\frac{k(4-\varepsilon)}{4b} - \frac{k(2-\varepsilon)}{2b} = \frac{\varepsilon k}{4b} \Longrightarrow \left\lfloor \frac{k(4-\varepsilon)}{4b} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k(2-\varepsilon)}{2b} \right\rfloor > \frac{\varepsilon k}{4b} - 2.$$

Logo, para k suficientemente grande,

$$r' - r = \left\lfloor \frac{k(4-\varepsilon)}{4b} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k(2-\varepsilon)}{2b} \right\rfloor > \frac{\varepsilon k}{4b} - 2 \geq \frac{\varepsilon k}{5b}.$$

Então, aplicando o lema anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \Psi^{\frac{\varepsilon k}{5b}} \overset{\text{Lema 49}}{\leq} \rho_1^{\frac{\varepsilon k}{5b}} < \rho_1^{r'-r} = \left(\frac{T_{r'}}{T_{r'-1}}\right)^{r'-r} &\overset{(3.4)}{<} \\ < \frac{T_{r'}}{T_{r'-1}} \frac{T_{r'-1}}{T_{r'-2}} \cdots \frac{T_{r+1}}{T_r} &= \frac{T_{r'}}{T_r}. \end{aligned}$$

A prova da primeira desigualdade de ii) é análoga:

$$\frac{k(2+\varepsilon)}{2b} - \frac{k(4+\varepsilon)}{4b} = \frac{\varepsilon k}{4b} \overset{k \text{ grande}}{\Longrightarrow} R - R' > \frac{\varepsilon k}{5b},$$

daí

$$\begin{aligned} \Psi^{\frac{\varepsilon k}{5b}} \overset{\text{Lema 49}}{\leq} \rho_2^{\frac{\varepsilon k}{5b}} < \rho_2^{R-R'} = \left(\frac{T_{R'}}{T_{R'+1}}\right)^{R-R'} &\overset{(3.4)}{<} \\ < \frac{T_{R'}}{T_{R'+1}} \frac{T_{R'+1}}{T_{R'+2}} \cdots \frac{T_{R-1}}{T_R} &= \frac{T_{R'}}{T_R}. \end{aligned}$$

□

Corolário 51. *Dados $\varepsilon \in (0,1)$ e um inteiro positivo k suficientemente grande, o número de blocos de tamanho k que não são $(\varepsilon, 1)-$normais na base b é menor ou igual a*

$$2b(k+1)\left(\Psi^{-\frac{\varepsilon}{5b}} b\right)^k.$$

Demonstração. Pelos ítens *i)* e *ii)* do último lema temos

$$(T_r + T_R)\Psi^{\frac{\varepsilon k}{5b}} < 2b^k,$$

para k suficientemente grande. Daí

$$b(k+1)(T_r + T_R) \leq 2b(k+1)\left(\Psi^{-\frac{\varepsilon}{5b}}b\right)^k.$$

Agora basta aplicar o Corolário 47. □

Lema 52. *Dado $\varepsilon \in (0,1)$ existem $\delta = \delta(\varepsilon) < 1$ e k_0 tais que, para todo $k \geq k_0$, o número de blocos de tamanho k que não são $\varepsilon-$normais na base b é menor que $b^{\delta.k}$.*

Demonstração. Aplicando o Corolário anterior, vemos que é suficiente mostrar que existe $\delta < 1$ tal que para k suficientemente grande

$$2b(k+1)\left(\Psi^{-\frac{\varepsilon}{5b}}b\right)^k < b^{\delta.k}.$$

Para isso observamos que, como $\Psi > 1$, então $\Psi^{-\frac{\varepsilon}{5b}} < 1$, e $\Psi^{-\frac{\varepsilon}{5b}}b < b$. Logo podemos escolher um $c < 1$ tal que $\Psi^{-\frac{\varepsilon}{5b}}b < b^c$. Seja c' satisfazendo $0 < c' < 1 - c$. Para k suficientemente grande

$$2b(k+1) < b^{c'k},$$

pois a expressão à esquerda é linear em k, enquanto a expressão à direita é exponencial em k. Segue que

$$2b(k+1)\left(\Psi^{-\frac{\varepsilon}{5b}}b\right)^k < b^{(c'+c)k}$$

Chamando $\delta = c + c'$ concluímos a prova. □

Prova do Teorema 37:

Para cada bloco $B_k = b_1...b_k$ em base b associamos o intervalo

$$C(B_k) := \left[\frac{b_1...b_k}{b^k}, \frac{b_1...b_k + 1}{b^k}\right).$$

Fixados $m \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon = \frac{1}{m}$, tomamos δ e k_0 determinados pelo lema anterior. Seja

$$X_{m,k} = \cup\{C(B_k) : B_k \text{ não é } \frac{1}{m} - \text{normal}\}.$$

Seja

$$X_m = \bigcap_{s \geq k_0} \bigcup_{k \geq s} X_{m,k}.$$

Se α está em $[0,1] - X_m$ então para qualquer $b-$dígito d:

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{m} \leq \liminf_{N\to\infty} \frac{\#_b(d;N;\alpha)}{N} \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{\#_b(d;N;\alpha)}{N} \leq \frac{1}{b} + \frac{1}{m}.$$

Como, pelo lema anterior, $X_{m,k}$ tem no máximo $b^{k\delta}$ intervalos, todos de tamanho $\frac{1}{b^k}$, concluímos que a medida de Lebesgue $m\left(X_{m,k}\right)$ é menor ou igual a $(b^{\delta-1})^k$. Segue que para cada $s \geq k_0$:

$$m\left(X_m\right) \leq m\left(\bigcup_{k \geq s} X_{m,k}\right) \leq (b^{\delta-1})^s + (b^{\delta-1})^{s+1} + ... \leq (b^{\delta-1})^s \frac{1}{1-(b^{\delta-1})}.$$

Então como s é qualquer, fazendo $s \to \infty$, concluímos que $m(X_m) = 0$. Pelo Exercício 17 o conjunto $X = X_1 \cup X_2 \cup ...$ tem medida zero. Observamos que se α está em $[0,1] - X$ então α é simplesmente normal na base b. ■

Capítulo 4

Distribuição de Sequências

Vamos iniciar este capítulo com o estudo de sequências equidistribuídas em $[0, 1]$. Como veremos abaixo, este conceito está intimamente ligado com o de normalidade. Na seção seguinte apresentamos o conceito de função de distribuição, relacionado ao estudo de expansões quaisquer e não necessariamente normais.

4.1 Sequências equidistribuídas

Em [12] há uma excelente exposição de resultados sobre sequências equidistribuídas. Vamos aqui expor apenas alguns resultados úteis para provar o Critério de Normalidade, que será apresentado no próximo capítulo, junto com algumas aplicações.

Notação 53. *Seja* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *uma seqüência de números em* $[0, 1]$*. Dados um conjunto* $I \subseteq [0, 1]$ *e um natural* N*, denotamos por* $\#(I; N; (x_n))$ *o número* *de vezes em que os N primeiros termos de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ visitam I, ou seja*

$$\#(I;N;(x_n)) = \#\{s \in \{1,...N\} : x_s \in I\}.$$

Se α é um número real, denotamos por $\{\alpha\}$ ou $\alpha\, mod(1)$, a parte fracionária de α (o único real em $[0,1)$ que difere de α por um inteiro). Se (x_n) é uma sequência de números reais, denotaremos por $(\{x_n\})$ a correspondente sequência formada pelas partes fracionárias dos x_n.

Seja $\alpha = .a_1a_2a_3...$ Construímos, a partir de α, uma sequência $x_n = \{10^n\alpha\} = 10^n\alpha \mod (1)$. Assim, por exemplo:

$$x_0 = \{10^0\alpha\} = .a_1a_2a_3...,$$
$$x_1 = \{10^1\alpha\} = .a_2a_3a_4...,$$
$$x_2 = \{10^2\alpha\} = .a_3a_4a_5...,$$

Se considerarmos a aplicação

$$T : [0,1) \to [0,1), \text{ definida por } T(x) = \{10x\} = 10x\, mod(1),$$

vemos que (x_n) representa a órbita de α pela aplicação T, ou seja

$$x_0 = \alpha,$$
$$x_1 = T(\alpha),$$
$$x_2 = T^2(\alpha) = T(T(\alpha)), ...$$

Definição 54. *Dado um bloco $B_k = b_1...b_k$, definimos o cilindro de B_k por*

$$\begin{aligned} C(B_k) &= \{.a_1a_2... : a_1 = b_1, ..., a_k = b_k\} \\ &= \left[(.b_1...b_k),\, (.b_1...b_k) + \frac{1}{10^k}\right). \end{aligned}$$

É natural esperarmos que as ocorrências de B_k na expansão de α estejam relacionadas com as visitas de α ao intervalo $C(B_k)$. Por exemplo, se o quinto dígito de α é 2 então naturalmente $10^4\alpha \in [2/10, 3/10)$, ou seja $10^4\alpha \in C(2)$.

Exercício 55.

$$\#(B_k; N; \alpha) = \#(C(B_k); N - k + 1; (\{10^n\alpha\})).$$

Em particular

$$\#(B_k; N; \alpha) \leq \#(C(B_k); N; (\{10^n\alpha\})) \leq \#(B_k; N; \alpha) + k.$$

Segue do exercício acima que se α é normal então a sequência $(\{10^n\alpha\})$ visita:

$[0, 1/10), ..., [9/10, 1)$ com frequência $1/10$.

$[0, \frac{1}{100}), ..., [\frac{99}{100}, 1)$ com frequência $1/100$, etc.

Exercício 56. *α é normal se e somente se, para quaisquer naturais k e x com $\left[\frac{x}{10^k}, \frac{x+1}{10^k}\right) \subset [0, 1)$, temos que*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left(\left[\frac{x}{10^k}, \frac{x+1}{10^k}\right); N; (\{10^n\alpha\})\right) = \frac{1}{10^k}.$$

O exercício acima indica que quando α é normal, a sequência $(\{10^n\alpha\})$ tem uma distribuição uniforme sobre o intervalo $[0, 1]$.

Definição 57. *Uma seqüência (x_n) em $[0, 1]$ é dita **equidistribuída** se, dados quaisquer reais r e s com $0 \leq r < s \leq 1$, temos que*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#([r, s); N; (x_n)) = s - r.$$

Exercício 58. *Mostre que seria equivalente, na definição anterior, considerar intervalos da forma $[r, s]$, (r, s), $(r, s]$.*

Exercício 59. *Mostre que α é normal se e somente $(\{10^n\alpha\})$ é equidistribuída.*

Em alguns momentos será conveniente uma análise que não considere intervalos do tipo $[0, s)$ nem $[r, 1)$. Para isso será útil o lema abaixo.

Lema 60. *Uma seqüência (x_n) de números em [0,1) é equidistribuída se e somente se para quaisquer* $0 < r < s < 1$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#([r, s); N; (x_n)) = s - r. \tag{4.1}$$

Demonstração. Supondo (4.1) e fixado $0 < x < 1$, temos que para quaisquer r, s satisfazendo $0 < r < x < s < 1$:

$$\begin{aligned}
1 - s + x = 1 - \lim_{N\to\infty} \frac{\#([x, s); N; (x_n))}{N} &\geq \limsup_{N\to\infty} \frac{\#([0, x); N; (x_n))}{N} \\
&\geq \liminf_{N\to\infty} \frac{\#([0, x); N; (x_n))}{N} \\
&\geq \lim_{N\to\infty} \frac{\#([r, x); N; (x_n))}{N} \geq x - r.
\end{aligned}$$

Fazendo $s \to 1$ e $r \to 0$ concluímos que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#([0, x); N; (x_n))}{N} = x.$$

Segue também que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#([x, 1); N; (x_n))}{N} = 1 - \lim_{N\to\infty} \frac{\#([0, x); N; (x_n))}{N} = 1 - x.$$

□

Teorema 61. *Uma seqüência (x_n) em $[0, 1]$ é equidistribuída se e somente se, para toda função contínua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, satisfazendo $f(0) = f(1)$:*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\, dx. \tag{4.2}$$

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Se (x_n) é equidistribuída então (4.2) é satisfeita para qualquer função do tipo $f = 1_{[r,s]}$, $0 < r < s < 1$. Se f é uma função escada, digamos,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k-1} c_i 1_{[r_i, r_{i+1})}(x),\ 0 < r_0 < r_1 < ... < r_k < 1,$$

então,

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f\ ((x_n)) &= \sum_{i=0}^{k-1} c_i \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[r_i, r_{i+1})}((x_n)) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} c_i \int_0^1 1_{[r_i, r_{i+1})}\ (x)\ dx \\ &= \int_0^1 f\ (x)\ dx.\end{aligned}$$

Vamos supor agora que f é uma função contínua. Neste caso, pela definição de integral de Riemann, dado $\varepsilon > 0$, existem duas funções escada f_1 e f_2 tais que $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ para todo $x \in [0, 1]$ e

$$\int_0^1 [f_2(x) - f_1(x)]\ dx \leq \varepsilon.$$

Então:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx - \varepsilon \leq \int_0^1 f_1(x)dx &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_1(x_n) \\ &= \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_1(x_n) \leq \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \\ &\leq \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_2(x_n) \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_2(x_n) = \int_0^1 f_2(x)dx \\ &\leq \int_0^1 f(x)dx + \varepsilon.\end{aligned}$$

Como ε pode ser arbitrariamente pequeno, concluímos que obrigatoriamente

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

($\Leftarrow$) Seja $[r, s)$ um intervalo arbitrário, onde $0 < r < s < 1$. Basta mostrarmos que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[r,s)}(x_n) = \int_0^1 1_{[r,s)}(x)\, dx. \tag{4.3}$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $0 < r < s < 1$, existem duas funções contí nuas g_1 e g_2 (em forma de trapézio), $g_1(0) = g_1(1) = g_2(0) = g_2(1) = 0$, satisfazendo:

$$g_1(x) \le 1_{[r,s)}(x) \le g_2(x)\ \forall\ x \in [0, 1)$$

e

$$\int_0^1 g_2(x) - g_1(x)\, dx \le \varepsilon.$$

Sobre g_1 e g_2 podemos aplicar a hipótese da recíproca do teorema e então:

$$\begin{aligned}
s - r - \varepsilon &\le \int_0^1 g_2(x)dx - \varepsilon \le \int_0^1 g_1(x)dx \overset{\textit{hipótese}}{=} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g_1(x_n) \\
&= \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g_1(x_n) \le \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[r,s)}(x_n) \\
&\le \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[r,s)}(x_n) \le \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g_2(x_n) \overset{\textit{hipótese}}{=} \\
&= \int_0^1 g_2(x)dx \le \int_0^1 g_1(x)dx + \varepsilon \le s - r + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como ε pode ser arbitrariamente pequeno, concluímos a prova. □

Encerramos esta seção com alguns resultados que serão úteis futuramente.

Proposição 62. *Se $(x_n^1), (x_n^2), ..., (x_n^k)$ são k seqüências equidistribuídas, então também é equidistribuída a seqüência*

$$(x_n) := \{x_1^1, ..., x_1^k, x_2^1, ..., x_2^k, ...\}.$$

Demonstração. Inicialmente observamos que

$$\#([r,s); kN; (x_n)) = \sum_{j=1}^{k} \#([r,s); N; (x_n^j)),$$

e portanto

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \frac{1}{kN}\#([r,s); kN; (x_n)) &= \frac{1}{k} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#([r,s); kN; (x_n)) \\ &= \frac{1}{k} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{k} \#([r,s); N; (x_n^j)) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#([r,s); N; (x_n^j)) = s - r.\end{aligned}$$

□

Exercício 63. *Se $(\{x_n\})$ é equidistribuída e $(\{y_n\})$ é convergente, então $(\{x_n + y_n\})$ é equidistribuída.*

Exercício 64. *Se x_n é equidistribuída e c é um inteiro então a sequencia $(\{c.(x_n)\})$ é equidistribuída*

Como consequência concluímos que se α é normal, então $\{c\alpha\}$ é normal para qualquer inteiro c.

4.2 Função de distribuição Assintótica

Convenção- Dado $a \in [0,1)$, convencionamos que para qualquer seqüência (x_n) em $[0,1)$.

$$\#([a,a);N;(x_n)) = 0.$$

Definição 65. *Seja (x_n) uma seqüência de números em $[0,1]$. Suponhamos que para cada $x \in [0,1]$ existe o*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#([0,x);N;(x_n)).$$

Então dizemos que (x_n) possui a ***função de distribuição assintótica*** *(abrev. f.d.a.) $z:[0,1]\to[0,1]$ definida por*

$$z(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#([0,x);N;(x_n)).$$

Exercício 66. *Mostre que a sequência $(\{10^n\alpha\})$, onde α está definido no Exercício 2, não possui uma função de distribuição assintótica.*

Se a f.d.a. z existir então ela é não decrescente, com $z(0) = 0$ (pela convenção anterior) e $z(1) = 1$. Uma função é equidistribuída se e somente se tem a f.d.a. $z(x) = x$.

Definição 67. *Seja (x_n) uma seqüência de números em $[0,1]$. Dizemos que uma função $z:[0,1]\to[0,1]$ é* ***uma função de distribuição*** *(abrev. f.d.) de (x_n) se existe uma seqüência crescente de naturais $N_1, N_2, ...$ tal que para cada $x \in [0,1]$*

$$\lim_{N_i\to\infty} \frac{1}{N_i}\#([0,x);N_i;(x_n)) = z(x).$$

Alternativamente diremos também que z é uma f.d. de (x_n) sobre $N_1, N_2, ...$, quando for útil destacar (N_i).

Obviamente uma f.d. é uma candidata a ser f.d.a. Enquanto uma sequência pode não ter uma f.d.a., queremos mostrar que ela sempre admite uma f.d. No próximo capítulo esse fato será útil; lá vamos supor que uma sequência tem pelo menos uma função de distribuição z e mostrar que obrigatoriamente qualquer função de distribuição satisfaz z(x)=x.

Lema 68. *Seja* $(F_n) = F_1, F_2, ...$ *uma seqüência de funções* $F_n : [0,1] \to [0,1]$ *e* C *um conjunto enumerável de* $[0,1]$. *Então existe uma subseqüência* (F_{n_j}) *de* (F_n) *tal que*

$$\lim_{j\to\infty} F_{n_j}(x)$$

existe para todo x *de* C.

Demonstração. Basta usar o argumento da diagonal de Cantor e que toda seqüência limitada possui subseqüência convergente:

Suponhamos $C = \{x_1, x_2, ...\}$. Como $(F_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, possui uma subseqüência convergente que denotaremos por $(F_n^1(x_1))$. Analogamente, $(F_n^1(x_2))_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subseqüência convergente, digamos $(F_n^2(x_2))$. Continuando o processo sempre obtemos um novo refinamento da seqüência de funções inicial. Tomamos agora a seqüência (F_{n_j}) de funções, formada pela escolha da j-ésima função de (F_n^j), para $j = 1, 2, 3, ...$, ou seja, tomando-se a primeira função de (F_n^1), a segunda função de (F_n^2) e assim por diante. Então (F_{n_j}) satisfaz a condição desejada. □

Teorema 69. *Toda seqüência* (x_n) *em* $[0,1]$ *possui pelo menos uma f.d..*

Demonstração. Considere a seqüência de funções $F_N : [0,1] \to [0,1]$ dadas por

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\#([0,x); N; (x_n)).$$

Usando o lema anterior, com $C = \mathbb{Q}$, obtemos uma subseqüência (N_j) tal que $(F_{N_j}(x))$ converge, para todo x racional em $[0,1]$. A função limite $z(x) = \lim_{j\to\infty} F_{N_j}(x)$ está portanto bem definida nos racionais. Considere agora $\overline{z}(x) = \limsup_{j\to\infty} F_{N_j}(x)$ e $\underline{z}(x) = \liminf_{j\to\infty} F_{N_j}(x)$. Observamos que

$$\overline{z}(x) = z(x) = \underline{z}(x)$$

para todo x racional. Seja $y \in [0,1]\backslash\mathbb{Q}$. Se $\underline{z}$ é contínua em y, seja (x_i) uma seqüência de racionais que converge a y pela direita. Então, como $\overline{z}$ é não decrescente, para todo $i \in \mathbb{N}^*$ temos

$$\overline{z}(y) \leq \overline{z}(x_i) = \underline{z}(x_i),$$

e portanto

$$\overline{z}(y) \leq \lim_{i\to\infty} \underline{z}(x_i) \overset{\underline{z}\ \textit{é contínua em}\ y}{=} \underline{z}(\lim_{i\to\infty} x_i) = \underline{z}(y).$$

Concluímos que $C = \{y \in [0,1]\backslash\mathbb{Q};\ \underline{z}$ é descontínua em $y\}$ é o maior conjunto onde $\overline{z}$ pode diferir de $\underline{z}$. Como $\underline{z}$ é não decrescente, o conjunto C é enumerável. Aplicando novamente o Lema anterior garantimos uma subseqüência (N_s) de (N_j) tal que existe $\lim_{s\to\infty} F_{N_s}(x)\ \forall\ x \in [0,1]$. A função $z : [0,1] \to [0,1]$ dada por $z(x) = \lim_{s\to\infty} F_{N_s}(x)$ é então uma f.d. de (x_n) sobre (N_s). $\square$

Corolário 70. *Seja (x_n) uma seqüência em $[0,1]$. Fixados $x_0 \in (0,1)$ e $\alpha \in [0,1]$, suponhamos que existe uma seqüência crescente de números naturais $N_1, N_2, ...$ tal que*

$$\lim_{N_j\to\infty} \frac{1}{N_j} \#([0,x_0); N_j; (x_n)) = \alpha.$$

Então (x_n) possui uma f.d. $z : [0,1] \to [0,1]$, tal que $z(x_0) = \alpha$.

Demonstração. É a mesma prova do teorema anterior, apenas partindo-se das funções $F_{N_j}(x)$ e não de $F_N(x)$. □

Corolário 71. *(x_n) possui a f.d.a z se e somente se z é a única f.d. de (x_n).*

Demonstração. (⇒): Basta lembrar que se a seqüência

$$\left(\frac{1}{N}\#([0,x);N;(x_n))\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$$

converge a $z(x)$, então qualquer subseqüência converge ao mesmo valor.

(⇐): Se por absurdo existe x_0 tal que

$$\left(\frac{1}{N}\#([0,x_0);N;(x_n))\right) \nrightarrow z(x_0),$$

então existe $\alpha \neq z(x_0)$ e uma seqüência crescente de naturais $N_1, N_2, ...$ tal que

$$\lim_{N_j\to\infty} \frac{1}{N_j}\#([0,x_0);N_j;(x_n)) = \alpha.$$

Então, pelo corolário anterior, (x_n) possui uma f.d. $z' : [0,1] \to [0,1]$, tal que $z'(x_0) = \alpha \neq z(x_0)$. Isso contraria a hipótese de z ser única. □

Teorema 72. *Se uma função contínua z é uma f.d. de (x_n) sobre $N_1, N_2, ...$ então, existe uma probabilidade μ_z tal que para toda função contínua $f : [0,1] \to [0,1]$*

$$\lim_{N_i\to\infty} \frac{1}{N_i}\sum_{n=1}^{N_i} f(x_n) = \int f\, d\mu_z.$$

Demonstração. Iniciamos mostrando que existe

$$\lim_{N_i\to\infty} \frac{1}{N_i}\sum_{n=1}^{N_i} f(x_n).$$

Se f é uma função escada, digamos,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k-1} c_i 1_{[r_i, r_{i+1})}(x), \ 0 = r_0 < r_1 < ... < r_k = 1,$$

então,

$$\begin{aligned}\lim_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} f\ (x_n) &= \sum_{i=0}^{k-1} c_i \lim_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} 1_{[r_i, r_{i+1})}(x_n) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} c_i (z(r_{i+1}) - z(r_i)).\end{aligned}$$

Vamos supor agora que f é uma função contínua. Dado $\varepsilon > 0$, existem duas funções escada f_1 e f_2 tais que $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x) \le f_1(x) + \varepsilon$ para todo $x \in [0,1]$. Então:

$$\begin{aligned}\lim_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} f_1(x_n) &= \liminf_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} f_1(x_n) \le \liminf_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} f(x_n) \\ &\le \limsup_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} f(x_n) \le \limsup_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} f_2(x_n) \\ &= \lim_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} f_2(x_n) \le \lim_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} f_1(x_n) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Assim

$$\limsup_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} f(x_n) - \liminf_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} f(x_n) \le \varepsilon.$$

Como ε pode ser arbitrariamente pequeno, concluímos que obrigatoriamente existe

$$\lim_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} f(x_n). \tag{4.4}$$

Seja Ψ a aplicação que para cada função contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ associa o limite (4.4). É fácil ver que Ψ é linear, $\Psi(f) \ge 0$ se $f \ge 0$ e que $\Psi(1_{[0,1]}) = 1$.

Pelo Teorema da Representação de Riesz existe uma única probabilidade μ_z tal que para toda função contínua $f : [0,1] \to [0,1]$:

$$\lim_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} f(x_n) = \int f \, d\mu_z.$$

$\square$

Capítulo 5

Critério de Normalidade

Lema 73. *Seja ν uma probabilidade tal que existe uma constante $C > 0$ satisfazendo*

$$\int f\, d\nu \leq C \int_0^1 f(x)dx$$

para toda função contínua $f : [0,1] \to [0,1]$, $f(0) = f(1)$.

Então para todo conjunto mensurável E,

$$\nu(E) \leq C.m(E).$$

Demonstração. Iniciamos supondo que E, é um intervalo. Fixado $\varepsilon > 0$ existem funções continuas f_1 e f_2, satisfazendo:

$$f_1(x) \leq 1_E(x) \leq f_2(x), \quad \int_0^1 f_2(x)\, dx \leq \int_0^1 f_1(x)\, dx + \varepsilon \;\text{ e }\; f_i(0) = f_i(1).$$

Segue que

$$\nu(E) \leq \int f_2\, d\nu \leq C \int_0^1 f_2(x)\, dx \leq C(\int_0^1 f_1(x)\, dx + \varepsilon) \leq C.m(E) + C\varepsilon.$$

Como C é uma constante fixada, fazendo $\varepsilon \to 0$, concluímos o desejado.

Agora estudamos o caso geral. Se E é um conjunto mensurável, então (pela Proposição 24) para cada $\varepsilon > 0$, existe uma coleção de intervalos abertos $O = A_1 \cup A_2 \cup ...$ tal que $E \subseteq O$ e $\sum_{i \in \mathbb{N}} m(A_i) - m(E) < \varepsilon$. Segue que

$$\nu(E) \leq \nu(O) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \nu(A_i) \leq C \sum_{i \in \mathbb{N}} m(A_i) \leq C(m(E) + \varepsilon) = C.m(E) + C\varepsilon.$$

Como C é uma constante fixada, fazendo $\varepsilon \to 0$, concluímos o desejado. $\square$

Lembramos que partindo de um número fixado $\alpha = .a_1 a_2 a_3...$ podemos construir uma sequência (x_n), onde $x_n = \{10^n \alpha\} = 10^n \alpha \mod (1)$.

Se considerarmos a aplicação

$$T : [0,1) \to [0,1), \text{ definida por } T(x) = 10x \, mod(1),$$

vemos que $x_n = (\{10^n \alpha\})$ representa a órbita de α pela aplicação T, ou seja

$$x_0 = \alpha,$$
$$x_1 = T(\alpha),$$
$$x_2 = T^2(\alpha) = T(T(\alpha)), ...$$

Teorema 74 (Critério de Normalidade - primeira versão). -

Seja α um número em $[0,1]$. Suponha que existe uma constante $C > 0$ tal que, para toda função contínua $f : [0,1] \to [0,1]$, $f(0) = f(1)$,

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f((\{10^n \alpha\})) \leq C \int_0^1 f(x) dx. \tag{5.1}$$

Então $\{10^n \alpha\}$ é equidistriuída e portanto α é normal.

Demonstração. Supondo (5.1), afirmamos que a função identidade é a única f.d. da seqüência $(\{10^n\alpha\})$. Seguirá disso que, pelo Corolário 71, $z(x) = x$ é a f.d.a da seqüência $(\{10^n\alpha\})$, ou seja, $(\{10^n\alpha\})$ é equidistribuída.

Para mostrarmos que $z(x) = x$ é a única f.d., iniciamos observando que pelo Teorema 69 existe pelo menos uma f.d. para a seqüência $(\{10^n\alpha\})$. Seja então $z(x)$ uma f.d. sobre $N_1, N_2, ...$, para a seqüência $(\{10^n\alpha\})$. Queremos mostrar que $z(x) = x$.

Pelo Teorema 72, existe uma probabilidade μ_z tal que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=0}^{N_i-1} f(\{10^n\alpha\}) = \int f\, d\mu_z, \tag{5.2}$$

para toda função contínua $f : [0,1] \to [0,1]$, e portanto, da hipótese, obtemos que

$$\int f\, d\mu_z \leq C \int_0^1 f(x)dx. \tag{5.3}$$

Seja $T : [0,1] \to [0,1]$ a aplicação definida por $T(x) = 10.x \mod (1)$. Como $f(0) = f(1)$, a função $g : [0,1] \to [0,1]$, dada por $g(x) = f(T(x))$, é contínua e $g(0) = g(1)$. Podemos aplicar (5.2) à função g e obter:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=0}^{N_i-1} f(\{10^{n+1}\alpha\}) = \int f(T(x))\, d\mu_z. \tag{5.4}$$

Além disso

$$\left| \frac{1}{N_i} \sum_{n=0}^{N_i-1} f(\{10^{n+1}\alpha\}) - \frac{1}{N_i} \sum_{n=0}^{N_i-1} f(\{10^n\alpha\}) \right| \leq \frac{2}{N_i},$$

o que mostra que os dois limites em (5.2) e (5.4) são idênticos. Conseqüentemente

$$\int f \circ T d\mu_z = \int f\, d\mu_z. \tag{5.5}$$

Repetindo estes argumentos, por indução obtemos, para todo $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int f \circ T^n \, d\mu_z = \int f \, d\mu_z(x). \tag{5.6}$$

Como f é contínua em $[0,1]$, e x é normal em q.t.p.,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n(x)) = \int_0^1 f(t)\, dt, \tag{5.7}$$

para todo $x \in [0,1] \backslash E$, onde $E \subset [0,1]$ possui medida de Lebesgue zero. Pelo Lema anterior,

$$\mu_z(E) \leq C.m(E) = 0. \tag{5.8}$$

Concluímos assim que para μ_z q.t.p. x

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n(x)) \to \int_0^1 f(t)d(t).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada (TCD) obtemos:

$$\begin{aligned}
\int f \, d\mu_z &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int f \, d\mu_z \overset{(5.6)}{=} \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int f \circ T^n \, d\mu_z \\
&= \lim_{N\to\infty} \int \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n \right) d\mu_z \overset{TCD}{=} \\
&= \int \left(\int_0^1 f(t)\, dt \right) dz \\
&= \int_0^1 f(x) dx.
\end{aligned}$$

Segue de (5.2) que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=0}^{N_i-1} f(\{b^n \alpha\}) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Como f é arbitrária, concluímos que $z(x) = x$. Isso mostra que $z(x) = x$ é a única f.d. de $(\{10^n\alpha\})$. $\square$

Uma generalização deste resultado, pode ser encontrada em [15] pag. 41-47.

Comentários um pouco mais avançados: A prova acima pode ser vista como um resultado de Teoria Ergódica:

Dada uma transformação $T : [0,1) \to [0,1)$, se μ é absolutamente contínua com respeito a ν, ambas probabilidades invariantes e ν ergódica para T, então $\mu = \nu$.

O Teorema anterior utilizou este fato:

- A medida de Lebesgue dx é ergódica para a transformação $T : [0,1) \to [0,1)$ dada por $x \to 10x \mod (1)$.

- Fixado $\alpha \in [0,1)$, satisfazendo (5.1), vemos por (5.6) que toda função de distribuição z para $(\{b^n\alpha\})$ pode ser associada a uma probabilidade invariante $d\mu_z$ para T.

- Ainda, de (5.1) fica garantido, como concluímos no Lema anterior, que $d\mu_z$ é absolutamente contínua com respeito a dx.

Teorema 75 (Critério de Normalidade - segunda versão)**.** -

Seja α um número real

i) Se existe uma constante $C > 0$ tal que a seqüência $(\{10^n\alpha\})$ satisfaz

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\#([u,v); N; (10^n\alpha))}{N} \leq C(v-u)$$

para todo $[u,v) \subset [0,1)$, então α é normal.

ii) Se existe uma constante $C > 0$ tal que para todo bloco B_k

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\#(B_k; N; \alpha)}{N} \leq C\frac{1}{10^k},$$

para todo bloco B_k, então α é normal.

iii) Se existem constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ e uma seqüência crescente de naturais (N_j) tais que

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{N_{j+1}}{N_j} \leq C_2$$

e

$$\limsup_{N_j\to\infty} \frac{\#(B_k; N_j; \alpha)}{N_j} \leq C_1\frac{1}{10^k}, \tag{5.9}$$

então α é normal.

Demonstração. i) Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ uma função escada, digamos

$$f = \sum_{i=1}^{k} d_i 1_{[a_{i-1},a_i)},$$

com $0 = a_0 < ... < a_k = 1$ e $d_i \geq 0$ para todo i. Então

$$\begin{aligned}
\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{10^n\alpha\}) &= \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{k} d_i 1_{[a_{i-1},a_i)}(\{10^n\alpha\})\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} d_i \limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[a_{i-1},a_i)}(\{10^n\alpha\}) \overset{hip.}{\leq} \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} d_i C\int_0^1 1_{[a_{i-1},a_i)}(x)dx = C\int_0^1 f(x)dx.
\end{aligned}$$

Seja agora $g : [0,1] \to [0,1]$ uma função contínua. Dado $\varepsilon > 0$ existe f escada, como definida acima, tal que $g(x) \leq f(x)\ \forall\, x \in [0,1)$ e $\int_0^1 f(x) - g(x)dx < \frac{\varepsilon}{C}$.

Daí

$$\begin{aligned}
\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(\{10^n\alpha\}) &\le \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{10^n\alpha\}) \\
&\le C\int_0^1 f(x)dx \\
&\le \left(C\int_0^1 g(x)dx\right) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(\{10^n\alpha\}) \le C\int_0^1 g(x)dx,$$

e aplicando o Teorema 74 concluímos a prova de i).

ii) Se existe uma constante $C > 0$ tal que, para todo bloco B_k,

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\#(B_k;N;\alpha)}{N} \le C\frac{1}{10^k},$$

então pelo Exercício 55 concluímos que, para quaisquer naturais k e x com $\left[\frac{x}{10^k}, \frac{x+1}{10^k}\right) \subset [0,1)$,

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left(\left[\frac{x}{10^k}, \frac{x+1}{10^k}\right); N; (\{10^n\alpha\})\right) \le C\frac{1}{10^k}.$$

Decorre que, para quaisquer naturais r_1, r_2 e k satisfazendo $0 < r_1 < r_2 < 10^k$, vale

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left(\left[\frac{r_1}{10^k}, \frac{r_2}{10^k}\right); N; (\{10^n\alpha\})\right) \le C\frac{r_2 - r_1}{10^k}.$$

Seja agora $[u,v) \subset [0,1)$ um intervalo arbitrário. Dado $\varepsilon > 0$, existem inteiros r_1, r_2 e k com $0 < r_1 < r_2 < 10^k$ tais que:

$$[u,v) \subset \left[\frac{r_1}{10^k}, \frac{r_2}{10^k}\right)$$

e

$$\frac{r_2 - r_1}{10^k} \leq (1+\varepsilon)(v-u).$$

Daí

$$\begin{aligned}\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left([u,v)\,;N;(\{10^n\alpha\})\right) &\leq \limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\#\left(\left[\frac{r_1}{10^k},\frac{r_2}{10^k}\right)\,;N;(\{10^n\alpha\})\right)\\ &\leq C\frac{r_2-r_1}{10^k} \leq C(1+\varepsilon)(v-u).\end{aligned}$$

Logo

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\#\left([u,v)\,;N;(\{10^n\alpha\})\right) \leq C(v-u).$$

Aplicando i), concluímos a prova de ii).

iii) A hipótese

$$\limsup_{j\to\infty}\frac{N_{j+1}}{N_j} \leq C_2,$$

garante que para j suficientemente grande,

$$N_{j+1} \leq (C_2+1)N_j.$$

Dado N, seja $j = j(N)$ o índice tal que $N_j \leq N < N_{j+1}$. Então

$$\begin{aligned}\limsup_{N\to\infty}\frac{\#(B_k;N;\alpha)}{N} &\leq \limsup_{j\to\infty}\frac{\#(B_k;N_{j+1};\alpha)}{N_j} \leq \limsup_{j\to\infty}\frac{\#(B_k;N_{j+1};\alpha)}{N_j}\frac{(C_2+1)N_j}{N_{j+1}}\\ &= (C_2+1)\limsup_{j\to\infty}\frac{\#(B_k;N_{j+1};\alpha)}{N_{j+1}} \overset{(5.9)}{\leq} C_1(C_2+1)\frac{1}{10^k}.\end{aligned}$$

Aplicando ii) com $C = C_1(C_2+1)$ concluímos a prova. □

Algumas aplicações do Critério de Normalidade:

Baseados nas idéias descritas em [20], vamos generalizar um resultado de Champernowne que provou que o número

$$(.(0)(1)...(9)(00)...(99)(000)...(999)...),$$

obtido pelo encadeamento em ordem lexicográfica de todos os blocos de tamanho 1, seguidos de todos os blocos de tamanho 2, etc., é normal na base 10.

Lema 76. *Sejam a_n e b_n duas seqüências de números reais que convergem ao infinito. Se $\frac{a_n}{b_n} \to c > 0$ então*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^N a_n}{\sum_{n=1}^N b_n} = c.$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que, para $n \geq n_0$, temos

$$(1-\varepsilon)c < \frac{a_n}{b_n} < (1+\varepsilon)c,$$

ou seja,

$$(1-\varepsilon)cb_n < a_n < (1+\varepsilon)cb_n.$$

Portanto

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)c = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=n_0}^N (1-\varepsilon)cb_n}{\sum_{n=n_0}^N b_n} &\leq \liminf_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=n_0}^N a_n}{\sum_{n=n_0}^N b_n} \\ \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=n_0}^N a_n}{\sum_{n=n_0}^N b_n} &\leq \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=n_0}^N (1+\varepsilon)cb_n}{\sum_{n=n_0}^N b_n} = (1+\varepsilon)c.\end{aligned}$$

Como a_n e b_n convergem ao infinito, temos que

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^N a_n}{\sum_{n=1}^N b_n} = \limsup_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=n_0}^N a_n}{\sum_{n=n_0}^N b_n} \text{ e } \liminf_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^N a_n}{\sum_{n=1}^N b_n} = \liminf_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=n_0}^N a_n}{\sum_{n=n_0}^N b_n},$$

decorrendo que

$$(1-\varepsilon)c \leq \liminf_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^N a_n}{\sum_{n=1}^N b_n} \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^N a_n}{\sum_{n=1}^N b_n} \leq (1+\varepsilon)c.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ concluímos a prova. □

Teorema 77. *Seja S_n a listagem* ***em qualquer ordem*** *de todos os blocos de tamanho n na base 10. Então a constante*

$$(.S_1S_2S_3S_4...)_{10}$$

é normal na base 10.

Demonstração. Seja k um natural e B_k um bloco qualquer de k dígitos. Seja N_j o número de dígitos utilizados para listar $S_1S_2...S_j$. Como S_n possui $n10^n$ dígitos temos que

$$\limsup_{j\to\infty}\frac{N_{j+1}}{N_j}=1+\limsup_{j\to\infty}\frac{(j+1)10^{j+1}}{N_j}\leq 1+\lim_{j\to\infty}\frac{(j+1)10^{j+1}}{j10^j}=11,$$

logo, pelo ítem iii) do Critério de Normalidade (Teorema 75), é suficiente mostrarmos que existe uma constante $c>0$ tal que para todo bloco B_k:

$$\limsup_{j\to\infty}\frac{\#(B_k;N_j;\alpha)}{N_j}\leq c\frac{1}{10^k}.$$

Se $n\geq k$ então B_k ocorre no máximo

$$(n-k+1)10^{n-k}+k10^n$$

vezes em S_n, onde $k10^n$ é uma cota superior para o número de ocorrências de B_k nas 10^n junções de blocos de S_n. Decorre daí que

$$\begin{aligned}\limsup_{j\to\infty}\frac{\#(B_k;N_j;\alpha)}{N_j} &\leq \limsup_{j\to\infty}\frac{\sum_{n=k}^{j}(n-k+1)10^{n-k}+k10^n}{\sum_{n=1}^{j}n10^n}\\ &=\limsup_{j\to\infty}\frac{\sum_{n=k}^{j}(n-k+1)10^{n-k}}{\sum_{n=1}^{j}n10^n}\\ &=\limsup_{j\to\infty}\frac{\sum_{n=k}^{j}(n-k+1)10^{n-k}}{\sum_{n=k}^{j}n10^n}\overset{Lema}{=}\\ &=\frac{1}{10^k}.\end{aligned}$$

□

O Critério de normalidade e demais resultados deste texto podem ser aplicados para uma base inteira qualquer $b \geq 2$. Usando este fato vamos provar a seguinte:

Proposição 78. *Dados s e r naturais não nulos e α um número real, temos que α é b^s-normal se e somente se α é b^r-normal.*

Demonstração. É suficiente mostrarmos que α é $b-$normal se e somente se α é b^k-normal, $k \in \mathbb{N}^*$.

Suponhamos ser α normal na base b. Então $(\{b^n\alpha\})$ é equidistribuída. Note que, para qualquer intervalo $[u,v) \subset [0,1)$ temos

$$\frac{1}{N}\#\left([u,v)\,;N;(\{b^{kn}\alpha\})\right) \leq k\frac{1}{kN}\#\left([u,v)\,;kN;(\{b^n\alpha\})\right).$$

Assim, tomando o limite em ambos os lados:

$$\begin{aligned}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\#\left([u,v)\,;N;(\{b^{kn}\alpha\})\right) &\leq k\lim_{N\to\infty}\frac{1}{kN}\#\left([u,v)\,;kN;(\{b^n\alpha\})\right)\\ &= k(v-u).\end{aligned}$$

Pelo Critério de Normalidade (aplicado para a base b^k) concluímos que α é normal na base b^k.

Agora, se α é b^k-normal então $(\{b^{kn}\alpha\})$ é equidistribuída. Pelo Exercício 64, as seqüências $(\{b^{kn+j}\alpha\})$, $j = 0, 1, ..., k-1$ são também equidistribuídas. Aplicando a Proposição 62, obtemos que $(\{b^n\alpha\})$ é equidistribuída, ou equivaletemente, α é $b-$normal. $\square$

Corolário 79. *Se α é normal e s é racional, então $\alpha + s$ é normal.*

Demonstração. Suponhamos que s possui uma expansão decimal com período de tamanho k. Então, na base 10^k, s possui expansão com período de tamanho 1. Assim a seqüência $(\{10^{kn}s\})$ é convergente. Pela proposição anterior,

$(\{10^{kn}\alpha\})$ é também equidistribuída, e aplicando o Exercício 63 garantimos que $(\{10^{kn}(\alpha+s)\})$ é equidistribuída, ou seja, $\alpha+s$ é 10^k-normal. O teorema anterior nos garante que $\alpha + s$ é $10-$normal. $\square$

Teorema 80. *Se α é normal e r é um racional não-nulo, então $r\alpha$ é normal.*

Demonstração. Pelo Exercício 64, é suficiente estudarmos o caso $r = \frac{1}{q}$, onde $q \in \mathbb{N}^*$.

Dado $[u, v) \subset [0, 1)$, se $\left\{\frac{10^s\alpha}{q}\right\} \in [u, v)$ então

$$\{10^s\alpha\} \in \{\{y\} : y \in [uq, vq)\} =: E.$$

Portanto

$$\#\left([u, v); N; \left(\left\{\frac{10^n\alpha}{q}\right\}\right)\right) \leq \#(E; N; (\{10^n\alpha\})).$$

Se $(v - u) < \frac{1}{q}$ ou, equivalentemente $q(v - u) < 1$; garantimos que

$$E = \begin{cases} [\{uq\}, \{vq\}), & \text{se } \{uq\} < \{vq\} \\ [0, \{vq\}) \cup [\{uq\}, 1), & \text{se } \{uq\} \geq \{vq\} \end{cases}$$

e que $m(E) = q(v - u)$, onde m é a medida de Lebesgue.

Daí, como por hipótese α é normal,

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left([u, v); N; \left(\left\{\frac{10^n\alpha}{q}\right\}\right)\right) \leq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#(E; N; \{10^n\alpha\}) = q(v-u).$$

Se $[u, v)$ é um intervalo arbitrário, podemos tomar $[u, v) = [u_1, u_2) \cup ... \cup [u_{k-1}, u_k)$ com $(u_j - u_{j-1}) < \frac{1}{q}$ $\forall\, j \in \{2, ..., k\}$, daí

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#([u, v); N; \{\frac{10^n\alpha}{q}\}) \leq \sum_{j=1}^{k-1} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left([u_j, u_{j+1}); N; \{\frac{b^n\alpha}{q}\}\right)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k-1} q(u_j - u_{j-1}) = q(v - u).$$

Aplicando o Critério de Normalidade (Teorema 75), concluímos a prova. $\square$

Capítulo 6

Outros Tópicos

1 - Davenport e Erdös em [10] mostraram que se $p(x)$ é um polinômio que leva naturais em naturais então o número $(.p(1)p(2)...)_{10}$ (onde $p(i)$ está escrito em base 10) é $10-$normal. Na introdução de [19] há um comentário de que Mahler, com a mesma hipótese, mostrou que $(.p(1)p(2)...)_{10}$ é transcendente.

2 - Bailey e Crandall apresentaram avanços no estudo da normalidade de algumas constantes clássicas como π e $\ln 2$, conectando os estudos de normalidade com o conceito de "pseudo-random number generator" (ver [3] e [2]).

Definição 81. *Um **PRNG** (pseudo-random number generator) é uma iteração*

$$x_n = (bx_{n-1} + r_n) \mod (1), \tag{6.1}$$

onde x_0 é um número real, $b \geq 2$ é um inteiro e (r_n) é uma seqüência de números reais.

Nos comentários que seguem estamos fixando $x_0 = 0$.

A relação entre números normais e PRNGs é dada no seguinte

Teorema 82. *Seja* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência convergente de números reais. Então* $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{b^n}$ *é* $b-$*normal se e somente se a seqüência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada em* (6.1)*é equidistribuída módulo 1.*

Bailey e Crandall conjecturam a $b-$normalidade de todo irracional que pode ser escrito na forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^n}\frac{p(n)}{q(n)}$, onde p e q são polinômios satisfazendo $grau(q) > grau(p) \geq 0$, e $q(\mathbb{N}) \neq 0$. Dois desses são $\ln 2$ e π nas bases 2 e 16, respectivamente. De fato:

- Partindo da Série de Taylor, aplicada à função $\ln x$, obtemos

$$\ln(x) = \ln(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-x_0)^n}{n(x_0)^n},$$

e tomando $x = 1$ e $x_0 = 2$ obtemos

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{1}{n}.$$

- Em [1] é provado que

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right).$$

3 - O conceito de normalidade admite generalizações:

Se β é um real maior que um, existem dois conceitos de normalidade usuais. O primeiro consiste em estudar o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : (\{\beta^n x\}) \text{ é equidistribuída}\}.$$

O segundo conceito de normalidade é dado pela Teoria Ergódica:

Dado $\beta > 1$, podemos considerar a transformação $T_\beta : [0,1) \to [0,1)$ dada por $T_\beta(x) = \{\beta x\}$. Fixado $x \in [0,1)$, definimos a seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por $a_i = \lfloor \beta T^{i-1}(x) \rfloor$. Em [17], Renyi provou que

$$x = \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \frac{a_3}{\beta^3} + \dots ,$$

chamada *Renyi* $\beta-$*expansão de* x.

Os elementos a_i pertencem ao conjunto $\{0, 1, ..., \lceil \beta \rceil - 1\}$, mas dado um bloco $b_1...b_k$ de elementos deste conjunto, não é garantida a existência de algum número $x \in [0,1)$, cuja Renyi $\beta-$expansão contenha este bloco. Caso exista, dizemos que o bloco $b_1...b_k$ é *admissível.*

Renyi provou também o seguinte

Teorema 83. *Para cada real* $\beta > 1$, *existe uma medida* μ, *equivalente à medida de Lebesgue, ergódica para* T_β.

Em particular, dado um bloco admissível $b_1...b_k$, o intervalo

$$C(b_1, ..., b_k) = \{x \in [0,1) : \text{ a } \beta - \text{expansão de } x \text{ inicia com } b_1...b_k\},$$

é visitado por $(T^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ com freqüência $\mu(C(b_1, ..., b_k))$, para $\mu-$quase todos os pontos x de $[0,1)$. Isso define um novo conceito de normalidade:

Definição 84. $\alpha \in [0,1)$ *é dito* $\beta-$*normal se em sua* $\beta-$*expansão todo bloco admissível* $b_1...b_k$ *ocorre com freqüência igual a* $\mu(C(b_1, ..., b_k)$.

Shunji e Shiokawa, em [20], usando uma versão do Critério de normalidade para $\beta-$expansões (ver [15]), generalizaram uma das construções de

Champernowne, provando que a listagem de todos os blocos admissíveis em base β gera um número[1] $\beta-$normal.

4 - O conjunto dos números não normais é pequeno, no sentido de ter medida de Lebesgue zero, e grande, no sentido de ser não enumerável. Esse fato deu origem a estudos de caracterizações deste conjunto, usando dimensão de Hausdorff. Abaixo citamos os Teoremas de Besicovitch e Eggleston, cujas provas podem ser encontradas em [5] e [11], respectivamente:

Teorema 85 (Besicovitch). *Fixado $p \in [0, \frac{1}{2})$, o conjunto $X_p \subset [0,1]$ formado pelos reais x tais que*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\#_2(0;N;x)}{N} \leq p < \frac{1}{2},$$

possui dimensão α dada pela equação

$$2^\alpha = \frac{1}{p^p(1-p)^{(1-p)}}.$$

Teorema 86 (Eggleston). *O conjunto $X \subset [0,1]$ formado pelos reais x tais que*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#_b(d;N;x)}{N} = p_d, \; d = 0, 1, ..., b-1$$

onde $0 \leq p_d \leq 1$ e $\sum_{d=0}^{b-1} p_d = 1$, possui dimensão fracionária α dado pela equação

$$b^{-\alpha} = \prod_{d=1}^{b-1} (p_d)^{(p_d)}.$$

[1]Listar os blocos admissíveis pode não gerar uma Renyi $\beta-$expansão, pois a concatenação de dois blocos admissíveis pode não ser um bloco admissível. No entanto, o cálculo de freqüências pode ser feito sem problemas.

Bibliografia

[1] Bailey, D. - Borwein, P. - Plou, S. "*On the rapid computation of various polylogarithmic constants*", Math. Comp. 66:218, 903-913, 1997. (disponível em http://crd.lbl.gov/~dhbailey/dhbpapers/index.html)

[2] Bailey, D. H. - Crandall, R. E. "*On the Random Character of Fundamental Constant Expansions.*" Exper. Math. 10, 175-190, 2001. (disponível em http://crd.lbl.gov/~dhbailey/dhbpapers/index.html)

[3] Bailey, D. H. - Crandall, R. E. *"Random Generators and Normal Numbers."* To appear in Exper. Math. Preprint dated Feb. 22, 2003. (disponível em http://crd.lbl.gov/~dhbailey/dhbpapers/index.html)

[4] Bartle, R. G. *The elements of integration and Lebesgue Measure*. New York: Wiley Classics Library, 1995.

[5] Besicovitch, A. S. *"On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system"*. Math. Ann. 110, 321-330, 1934.

[6] Besicovitch, A. S. "*The asymptotic distribution of the numerals in the decimal representation of the squares of the natural numbers*". Math. Z. 39, 146-156 (1935).

[7] Borel, E. "*Les probabilités dénombrables et leurs aplications arithmétiques"*. Rend. Circ. Mat. Palermo 26, 247-271, 1909.

[8] Champernowne, D. G. *"The Construction of Decimals Normal in the Scale of Ten."* J. London Math. Soc. 8, 254-260, 1933.

[9] Copeland, A. H. - Erdös, P. *"Note on Normal Numbers."* Bull. Amer. Math. Soc. 52, 857-860, 1946.

[10] Davenport - Erdös. *"Note on normal decimals*". Canad. J. Math. 4, 58-63, 1952

[11] Eggleston, H. G. *"The fractional dimension of a set defined by decimal properties"*. Quart. j. math. oxford. 20, 31-36, 1949.

[12] Kuipers, L. - Niederreiter, H. *Uniform Distribution of Sequences.* New York: Wiley, 1974.

[13] Mengue, J. *Uma coleção de resultados sobre números normais.* Dissertação de mestrado, UFRGS, 2008. (disponível em http://hdl.handle.net/10183/13094).

[14] Mengue, J. - Ripoll, C. "*A normalidade da Constante de Champernowne b-nária"*. RMU. 38/39, 79-92, 2005

[15] Postnikov, A. G. "*Ergodic problems in the theory of congruences and of diophantine approximations*" (Russo), Trudy Mat. Inst. Steklov. 82 (1966); Engl. trad., Proc. Steklov Inst. Math. 82, Americ. Math. Society, Province, R.I., 1967.

[16] Rauzy, G. "*Nombres normaux et processus deterministes*". Acta Arithmetica. 29, 211-225, 1976.

[17] Renyi, A. "*Representations for real numbers and their ergodic properties*". Acta Math. Acad. Sci. Hung. 8, 477-493, 1957.

[18] Schmidt, W. M. *"On normal numbers"*. Pacifc J. Math. 10, 661-672, 1960.

[19] Shidlovskii, A. B. *Transcendental numbers*. Berlin: Walter de Gruyter, 1989.

[20] Shunji, I. - Shiokawa I. "A construction of $\beta-$normal sequences". J. Math. Soc. Japan. 27, 20-23, 1975.

[21] Sierpinski, W. *"Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Borel sue les nombres absolutment normaux et détermination effective d'un tel nombre."* Bull. Soc. Math. France 45, 125-144, 1917.