

# INTRODUÇÃO AS MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS LINEARES, MORFOLÓGICAS E FUZZY

**Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita**

Universidade Estadual de Londrina, Departamento de Matemática - CCE

E-mail: valle@uel.br

**Resumo** – Memórias associativas são modelos inspirados na habilidade do cérebro humano de recordar por associação. Aqui, uma representação parcial ou aproximada de um item memorizado pode ser usado para recordar o item completo. Por exemplo, podemos recordar um poema ouvindo as primeiras palavras como dica inicial. Outro exemplo seria lembrar de uma pessoa especial sentindo um certo perfume.

Esse mini-curso, direcionado para alunos de graduação em matemática e áreas afins, tem como objetivo mostrar como a matemática pode ser usada para modelar nossa habilidade de armazenar e recordar informação por associação. Especificamente, serão apresentados e exploradas as semelhanças e diferenças entre as memórias associativas lineares, morfológicas e *fuzzy*.

## 1 INTRODUÇÃO

Iniciamos o mini-curso esclarecendo o que é uma memória. Simplificadamente, uma memória é um sistema que possui três funções ou etapas [7]:

1. Registro – processo pelo qual a informação é armazenada;
2. Preservação – para garantir que a informação permanece intacta;
3. Recordação – processo pelo qual uma informação é recuperada.

Existem diversos tipos de memória. Por exemplo, quando escrevemos (Etapa 1 - Registro) número de um telefone num papel, estamos usando o papel como memória. Posteriormente, se não perdermos o papel (Etapa 2 - Preservação), poderemos ler (Etapa 3 - Recordação) e ligar para este número.

Sempre que registramos uma informação na memória, precisamos de uma chave ou algo que permita recuperar o conteúdo armazenado. Por exemplo, quando deixamos uma bolsa num guarda-volumes, pegamos um ticket indicando o compartimento onde ela ficará. O ticket fornece apenas o endereço onde a entidade (bolsa) está. Em outras palavras, o ticket é a chave que nos fornece acesso a bolsa. Note que este endereço, ou chave, não possui nenhuma relação com o conteúdo armazenado. Este tipo de memória é muito usado nos computadores digitais (memória RAM ou ROM). Ele é eficiente em muitos casos, entretanto, possui uma séria limitação: O que acontecerá se perdermos o endereço ou a chave de acesso?

Se perdemos o pequeno ticket, teremos que usar um procedimento diferente para recuperar a bolsa. Provavelmente procuraremos o responsável e passaremos informações parciais, mas suficientes, sobre a bolsa e seu conteúdo. É comum encontrarmos bolsas semelhantes, mas o conteúdo certamente será diferente. Uma descrição parcial do conteúdo da bolsa pode ser suficiente para que o

responsável possa identificá-la e concordar em devolve-la. Neste exemplo, a chave ou endereço é uma descrição parcial do que tem na bolsa. Em outras palavras, a chave ou endereço é o próprio conteúdo armazenado! Esse tipo de memória é chamada memória autoassociativa ou memória endereçada por conteúdo; um caso particular das memórias associativas.

Uma memória associativa poderia recuperar um item armazenado a partir de informações parciais. Por exemplo, se armazenamos na memória o informações do mini-curso “Introdução as Memórias Associativas Lineares, Morfológicas e *Fuzzy*, por Marcos Eduardo Valle”, a chave “Memórias Associativas + Marcos” poderia ser suficiente para recuperarmos a informação completa. Além disso, uma memória associativa ideal poderia trabalhar com ruídos (ou erros) e recuperar esta mesma informação mesmo a partir de entradas incorretas como “Memórias Aborrativas + Marcio”. Nos computadores digitais, apenas formas relativamente simples de memória associativa tem sido implementadas em hardware. A maioria dos recursos para tolerância a ruído no acesso da informação são implementados via software [18]. Esta é uma das razões para o estudo das memórias associativas.

As memórias associativas encontram aplicações em vários ramos da ciência. Por exemplo, Zhang *et. al.* utilizaram um modelo de memória associativa para reconhecimento e classificação de padrões [54,55]. A metodologia para classificação de padrões baseada em memórias associativas também foi aplicada em problemas de detecção de falha em motores e segurança de rede [27,52]. Hopfield mostrou que seu modelo de memória associativa pode ser usado para resolver problemas de otimização, como por exemplo, o problema do caixeiro viajante [17]. As memórias associativas morfológicas discutidas neste mini-curso foram aplicadas em problemas de localização de faces, auto-localização, análise de imagens hiperespectrais e visão computacional [14,32,39]. As memórias associativas *fuzzy* foram aplicadas em modelo de previsão de séries temporais e identificação de locutor independente do texto [12,40,42].

O termo memória associativa tem suas origens na psicologia pois o cérebro humano pode ser visto como uma memória associativa. Ele associa o item a ser lembrado com um fragmento da recordação. Por exemplo, ouvindo um trecho de uma música podemos lembrar da canção inteira, ou sentido um certo perfume podemos associar o cheiro a uma pessoa especial. Não só o cérebro humano, mas moscas de fruta ou lesmas de jardim também possuem memórias associativas. Na verdade, qualquer sistema nervoso relativamente simples apresenta uma memória associativa [7]. Isso sugere que a habilidade de criar associações é natural – praticamente espontânea – em qualquer sistema neural. Portanto, uma fonte de inspirações para os estudos das memórias associativas encontra-se nos estudos do funcionamento de um sistema nervoso, em particular, do cérebro humano [15,21,44]. Contudo, devido as limitações de tempo, nesse mini-curso não discutiremos as motivações biológicas dos modelos de memórias associativas e nos concentraremos apenas na descrições matemáticas.

## 1.1 Conceitos Básicos de Memórias Associativas

Uma memória associativa (AMs, acrônimo do termo inglês *associative memories*) é um modelo inspirado na forma com que o cérebro humano armazena e recorda informações por associação [2,4,15,21,30]. Estes modelos são projetados para armazenar um conjunto finito de associações  $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, p\}$ , em que  $\mathbf{x}^\xi \subseteq \mathcal{X}$  e  $\mathbf{y}^\xi \in \mathcal{Y}$ , chamado conjunto das memórias fundamentais. Cada par  $(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  é chamado memória fundamental. Os conjuntos  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  englobam todos os possíveis itens memorizados. Por exemplo,  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  poderiam representar, respectivamente, um conjunto de perfumes e um conjunto de pessoas. Em termos matemáticos, uma memória associativa corresponde a uma aplicação  $\mathcal{M} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  tal que  $\mathcal{M}(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{y}^\xi$  para todo  $\xi = 1, \dots, p$ . O processo usado para determinar  $\mathcal{M}$  é chamado fase de armazenamento.

Uma memória associativa pode ser classificada como autoassociativa ou heteroassociativa. Tem-

se uma memória autoassociativa, também chamada memória endereçada por conteúdo, quando o conjunto das memórias fundamentais é da forma  $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{x}^\xi) : \xi = 1, \dots, p\}$ . Uma memória é dita heteroassociativa se  $\mathbf{y}^\xi$  for diferente de  $\mathbf{x}^\xi$ . Neste caso, o padrão de saída  $\mathbf{y}^\xi$  pode ter uma natureza completamente diferente do padrão de entrada  $\mathbf{x}^\xi$ . Por exemplo, uma memória heteroassociativa  $\mathcal{M}$  pode associar um perfume a uma pessoa.

Diz-se que uma memória associativa  $\mathcal{M}$  armazena corretamente o conjunto das memórias fundamentais se  $\mathcal{M}(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{y}^\xi$  para todo  $\xi = 1, \dots, p$ . Em particular, uma memória fundamental  $(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi)$  é armazenada corretamente se  $\mathcal{M}(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{y}^\xi$ . A capacidade absoluta de armazenamento refere-se ao número de pares de entrada e saída do conjunto das memórias fundamentais que foram armazenados corretamente.

Um problema muito comum na construção de uma memória associativa é a criação de memórias falsas ou espúrias. Uma memória espúria é um par de entrada e saída que foi armazenado na memória, mas não pertence ao conjunto das memórias fundamentais, i.e., o par foi armazenado involuntariamente na memória associativa.

Finalmente, espera-se que uma memória associativa também seja capaz de recordar um padrão memorizado mesmo após a apresentação de uma versão distorcida ou incompleta de um item armazenado. Em termos matemáticos, a aplicação  $\mathcal{M}$  deve possuir uma certa tolerância com respeito à ruído, ou seja, a igualdade  $\mathcal{M}(\tilde{\mathbf{x}}^\xi) = \mathbf{y}^\xi$  deve valer para versões ruidosas ou incompletas  $\tilde{\mathbf{x}}^\xi$  de  $\mathbf{x}^\xi$ . Note que o conjunto  $\mathcal{X}$  que contém todos os padrões de entrada  $\mathbf{x}$  deve ser equipado com uma certa medida de similaridade. Em geral,  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ , os conjuntos dos padrões de entrada e saída, são ambos espaços métricos.

## 2 MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS LINEARES

As memórias associativas lineares (LAMs, acrônimo do termo inglês *linear associative memories*) foram introduzidas em 1972 independentemente por Anderson, Kohonen e Nakano [1, 20, 28]. Do ponto de vista matemático, as LAMs podem ser vistas como os modelos mais simples de memórias associativas. Com efeito, suponha que os conjuntos de todos os padrões de entrada e saída sejam  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^m$  e que a aplicação  $\mathcal{M} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  que descreve a memória seja linear.

O problema de sintetizar uma LAM pode ser formulado como segue: Dado um conjunto de memórias fundamentais  $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, p\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , determine, se possível, uma aplicação linear  $\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $\mathcal{M}(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{y}^\xi$  para todo  $\xi = 1, \dots, p$ . Em vista da representação matricial de operadores lineares em espaços de dimensão finita [3], podemos escrever

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}, \quad (1)$$

para alguma matriz  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Sobretudo, o problema de sintetizar a LAM corresponde ao problema, aparentemente mais simples, de determinar uma matriz  $M$  tal que  $M\mathbf{x}^\xi = \mathbf{y}^\xi$  para todo  $\xi = 1, \dots, p$ . Existe na literatura basicamente duas estratégias, chamadas armazenamento por correlação e armazenamento por projeção, para determinar a matriz  $M$ .

### 2.1 Armazenamento por Correlação

A primeira estratégia desenvolvida para sintetizar uma memória associativa linear está baseada no chamado postulado de Hebb e resulta numa matriz semelhante a matriz de correlação usada em estatística [2, 20]. O postulado de Hebb pode ser formulado da seguinte forma no contexto das LAMs: Para que um padrão  $\mathbf{y}^\xi = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T \in \mathbb{R}^m$  seja recordado após a apresentação de  $\mathbf{x}^\xi = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ , o termo  $m_{ij}$ , que relaciona os elementos  $y_j^\xi$  e  $x_i^\xi$ , deve ser proporcional

a ambos  $y_i^\xi$  e  $x_j^\xi$ . Consequentemente, dado um conjunto finito de pares  $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, p\}$ , o armazenamento por correlação fornece a matriz  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  através da equação

$$m_{ij} = \sum_{\xi=1}^p y_i^\xi x_j^\xi, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Em termos matriciais, se definirmos  $X = [\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^p] \in \mathbb{R}^{n \times p}$  e  $Y = [\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^p] \in \mathbb{R}^{m \times p}$  como as matrizes cujas colunas são as memórias fundamentais, então (2) corresponde a

$$M = YX^T = [\mathbf{y}^1 \quad \mathbf{y}^2 \quad \dots \quad \mathbf{y}^p] \begin{bmatrix} (\mathbf{x}^1)^T \\ (\mathbf{x}^2)^T \\ \vdots \\ (\mathbf{x}^p)^T \end{bmatrix}, \quad (3)$$

em que  $(\mathbf{x}^\xi)^T$  denota o transposto do vetor  $\mathbf{x}^\xi$ .

**Exemplo 1.** Considere o seguinte conjunto de memórias fundamentais em  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4$ :

$$\left\{ \left( \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right\}. \quad (4)$$

Por (3), a matriz  $M \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$  da LAM com armazenamento por correlação é dada por:

$$M = YX^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 11 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ao apresentarmos como entrada da memória os padrões  $\mathbf{x}^1$  e  $\mathbf{x}^2$ , obtemos respectivamente os padrões:

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}^1) = M\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 11 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 14 \\ 30 \\ 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{y}^1,$$

e

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}^2) = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{y}^2.$$

Portanto, esse modelo de memória associativa não foi capaz de armazenar nenhuma das associações no conjunto das memórias fundamentais.

A LAM com armazenamento por correlação pode ser facilmente determinada, mas possui grande restrição na capacidade absoluta de armazenamento. Precisamente, suponha que um elemento do

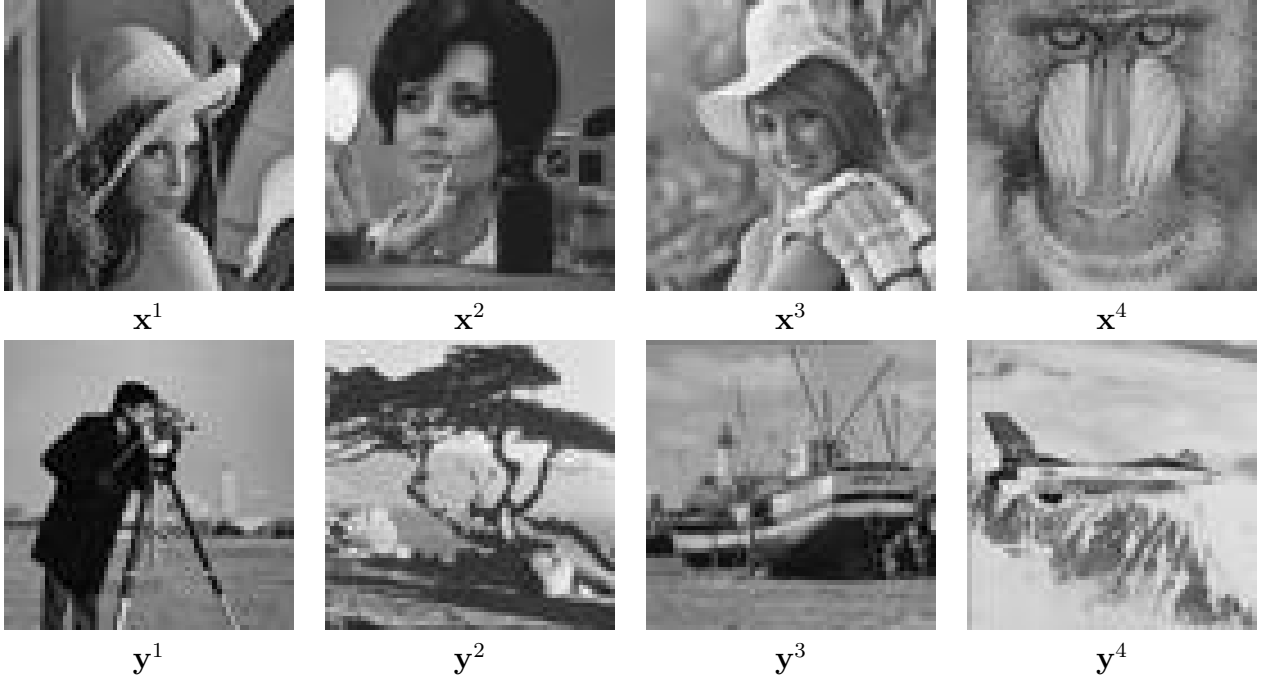


Figura 1: Imagens do conjunto das memórias fundamentais  $\{(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1), (\mathbf{x}^2, \mathbf{y}^2), \dots, (\mathbf{x}^4, \mathbf{y}^4)\}$ .

conjunto de memórias fundamentais  $\mathbf{x}^\eta$  é apresentado como entrada para a LAM. Substituindo em (1) a expressão em (3) obtemos

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}^\eta) = M\mathbf{x}^\eta = \langle \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^\eta \rangle \mathbf{y}^1 + \dots + \langle \mathbf{x}^\eta, \mathbf{x}^\eta \rangle \mathbf{y}^\eta + \dots + \langle \mathbf{x}^p, \mathbf{x}^\eta \rangle \mathbf{y}^p,$$

em que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno usual em  $\mathbb{R}^n$ . Logo, o padrão recordado pela LAM com armazenamento por correlação é dado por

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}^\eta\|_2^2 \mathbf{y}^\eta + \sum_{\xi \neq \eta}^p \langle \mathbf{x}^\xi, \mathbf{x}^\eta \rangle \mathbf{y}^\xi. \quad (5)$$

O primeiro termo do lado direito de (5) é proporcional ao padrão desejado  $\mathbf{y}^\eta$ , com constante de proporcionalidade  $\|\mathbf{x}^\eta\|_2^2 = \langle \mathbf{x}^\eta, \mathbf{x}^\eta \rangle = \sum_{j=1}^n (x_j^\eta)^2$ . Essa constante não contribuirá no padrão recordado se  $\|\mathbf{x}^\eta\|_2 = 1$ . O segundo termo do lado direito de (5) é um ruído, chamado interferência cruzada (cross-talk) entre o padrão  $\mathbf{x}^\eta$  e as demais padrões memorizados. Note que esse termo será zero se os vetores  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k$  forem ortogonais. Com isso podemos formular o seguinte teorema:

**Teorema 1.** *Dado um conjunto de memórias fundamentais  $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, p\}$ , com  $\mathbf{x}^\xi \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{y}^\xi \in \mathbb{R}^m$  para todo  $\xi = 1, \dots, p$ , defina a matriz  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  usando (3). Se os vetores  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^p$  forem ortonormais, então a memória associativa linear  $\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  dada por  $\mathcal{M}(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}$  armazena corretamente o conjunto das memórias fundamentais.*

Note que o Teorema 1 não impõe restrições nos vetores  $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^p$ . Contudo, a condição imposta sobre os vetores  $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p$  dificilmente é satisfeita na prática.

**Exemplo 2.** Considere as imagens com 256 tons de cinza apresentadas na Figura 1. Estas imagens foram convertidas em vetores coluna  $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^4 \in [0, 1]^{4096} \subseteq \mathbb{R}^{4096}$  e  $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^4 \in [0, 1]^{4096} \subseteq \mathbb{R}^{4096}$  e



Figura 2: Imagens recordadas pela LAM com armazenamento por correlação após apresentarmos como entrada as imagens  $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^4$  da Figura 1.

|            | $\text{PSNR}(\mathbf{y}^1, \mathcal{M}(\mathbf{x}^1))$ | $\text{PSNR}(\mathbf{y}^2, \mathcal{M}(\mathbf{x}^2))$ | $\text{PSNR}(\mathbf{y}^3, \mathcal{M}(\mathbf{x}^3))$ | $\text{PSNR}(\mathbf{y}^4, \mathcal{M}(\mathbf{x}^4))$ |
|------------|--|--|--|--|
| LAM        | 25.16  | 24.71  | 26.05  | 24.79  |
| OLAM       | 170.16   | 168.79   | 171.07   | 168.40   |
| MAM        | 53.58  | 34.43  | 44.18  | 31.09  |
| FAM $T_M$  | 22.70  | 23.32  | 23.35  | 27.35  |
| IFAM $T_M$ | 27.49  | 25.88  | 30.42  | 25.10  |
| IFAM $T_P$ | 32.95  | 27.85  | 33.20  | 27.77  |
| IFAM $T_L$ | 49.10  | 34.43  | 44.18  | 30.71  |

Tabela 1: Razão pico sinal-ruído produzido por memórias associativas quando os padrões originais  $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^4$  são apresentados como entrada.

armazenadas na memória associativa linear com armazenamento por correlação. Usando as memórias fundamentais como entrada, encontramos como resposta da LAM as imagens apresentados na Figura 2. Neste exemplo percebemos claramente o efeito da interferência cruzada discutido anteriormente. A razão pico sinal-ruído (PSNR, do termo inglês *peak signal-to-noise ratio*), dada pela equação

$$\text{PSNR}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 10 \log_{10} \left( \frac{m}{\sum_{i=1}^m (y_i - z_i)^2} \right), \quad (6)$$

para vetores  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_m]^T$  e  $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_m]^T$ , está apresentado na Tabela 1. Observe que o PSNR foi menor que 26.05, um valor baixo para uma memória associativa.

## 2.2 Armazenamento por Projeção

O armazenamento por correlação, apesar de ter uma motivação biológica, não apresenta bons resultados devido a interferência cruzada. Do ponto de vista matemático, essa estratégia de armazenamento não leva em conta (1), a equação que descreve a memória associativa linear. O armazenamento por projeção (no inglês, *projection recording*), proposto por Kohonen e Ruohonen [15, 21, 22], tem como objetivo determinar a melhor LAM no sentido dos quadrados mínimos. Especificamente, dado um conjunto de memórias fundamentais  $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, p\} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , o armazenamento por projeção fornece a LAM que minimiza a soma dos erros de recordação, ou seja, fornece a solução do problema:

$$\text{Determine } \mathcal{M} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ tal que } \sum_{\xi=1}^p \|\mathbf{y}^\xi - \mathcal{M}(\mathbf{x}^\xi)\|_2^2 \text{ é mínimo.} \quad (7)$$

Em vista do problema (7), uma memória associativa linear com armazenamento por projeção é chamada memória associativa linear ótima (OLAM, do inglês *optimal linear associative memory*).

Lembrado que  $\mathcal{M}(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}$  para alguma matriz  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , o problema (7) pode ser expresso de forma mais sucinta como

$$\min_M \sum_{\xi=1}^p \|\mathbf{y}^\xi - M\mathbf{x}^\xi\|_2^2, \quad (8)$$

ou ainda, denotando  $X = [\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p] \in \mathbb{R}^{n \times p}$  e  $Y = [\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^p] \in \mathbb{R}^{m \times p}$ , tem-se

$$\min_M \|Y - MX\|_F^2, \quad (9)$$

em que  $\|\cdot\|_F$  representa a norma de Frobenius e definida como segue para qualquer matriz  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ :

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2. \quad (10)$$

Apesar de expresso numa forma matricial, (9) é um problema de quadrados mínimos cuja solução é

$$M = YX^\dagger. \quad (11)$$

Aqui,  $X^\dagger$  denota a pseudo-inversa, também chamada inversa generalizada de Moore-Penrose, de  $X$  [13, 43]. Em termos geométricos,  $M$  corresponde a matriz de projeção no espaço gerado pelas memórias fundamentais  $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^p$ . Essa estratégia é chamada armazenamento por projeção em vista dessa observação.

De um modo geral, a pseudo-inversa de uma matriz pode ser expressa utilizando a chamada decomposição em valores singulares [13, 26, 43]. Porém, se o conjunto  $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^p\}$  for linearmente independente, ou seja, se  $X$  for uma matriz de posto completo, então a pseudo-inversa de  $X$  é dada por

$$X^\dagger = (X^T X)^{-1} X^T, \quad (12)$$

e, portanto, tem-se

$$M = Y(X^T X)^{-1} X^T. \quad (13)$$

**Exemplo 3.** Considere o seguinte conjunto de memórias fundamentais apresentados em (4). Como os padrões  $\mathbf{x}^1$  e  $\mathbf{x}^2$  são linearmente independentes, por (13), a matriz  $M \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$  da OLAM é

$$\begin{aligned} M = Y(X^T X)^{-1} X^T &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0.5 & -0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ao apresentarmos como entrada da memória os padrões  $\mathbf{x}^1$  e  $\mathbf{x}^2$ , obtemos os seguintes padrões:

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}^1) = M\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 2 & 0.5 & -0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{y}^1 \quad \text{e} \quad \mathcal{M}(\mathbf{x}^2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{y}^2.$$

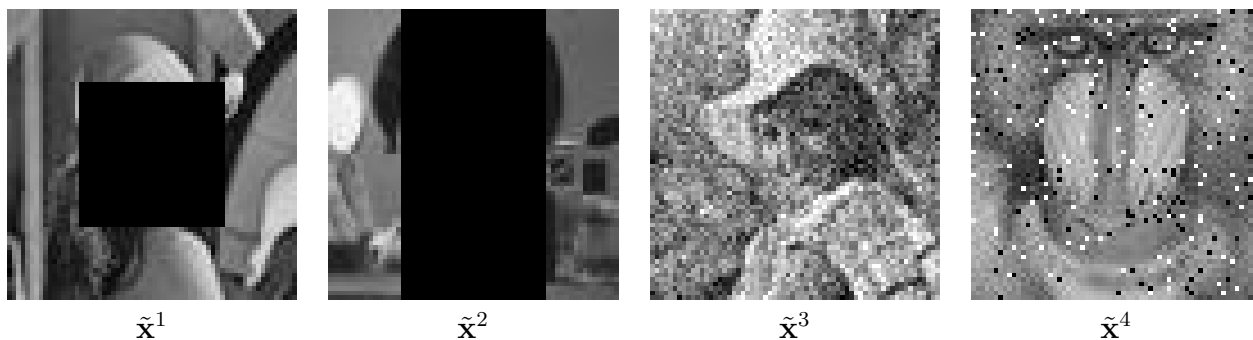


Figura 3: Imagens  $\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^4$  incompletas ou corrompidas com ruído Gaussiano ou Sal-e-Pimenta.

Portanto, essa memória associativa foi capaz de armazenar as duas associações do conjunto das memórias fundamentais.

No caso autoassociativo, tem-se  $Y = X$  e, independente da dimensão e do posto de  $X$ , a matriz identidade  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é tal que  $\|X - IX\|_F^2 = 0$ . Logo, o problema  $\min_M \|X - MX\|_F^2$  possui uma solução  $M$  que satisfaz  $\|X - MX\|_F^2 = 0$ , ou ainda,  $Mx^\xi = x^\xi$ , para todo  $\xi = 1, \dots, p$ . Em outras palavras, a LAM autoassociativa com armazenamento por projeção exibe uma capacidade absoluta de armazenamento ilimitada, ou seja, pode-se armazenar quantos padrões forem desejados nesses modelos. No caso heteroassociativo,  $\min_M \|Y - MX\|_F$  pode ser maior que zero e, portanto, não há garantias de sucesso na fase de armazenamento. Contudo, se  $X$  possui posto completo, por (13), conclui-se que a matriz  $M$  do armazenamento por projeção satisfaz  $MX = Y$ , ou seja, todas as associações do conjunto de memórias fundamentais são corretamente armazenadas. Por outro lado, se  $p > n$ , então o conjunto  $\{x^1, \dots, x^p\}$  certamente é linearmente dependente,  $X$  não terá posto completo. Nesse caso, dificilmente será possível armazenar corretamente as associações do conjunto das memórias fundamentais.

Finalmente, é importante ressaltar que a matriz  $M$  dada por (11) produz a melhor memória associativa linear. Em particular, o armazenamento por projeção generaliza o armazenamento por correlação no caso em que os padrões  $x^1, \dots, x^p$  são ortonormais. De fato, se  $\{x^1, \dots, x^p\}$  forem ortonormais, então vale  $X^T X = I$  e, conseqüentemente, (11) resulta em  $M = Y X^T$ , que é exatamente a matriz encontrada usando o armazenamento por correlação.

**Exemplo 4.** Considere novamente as imagens em tons de cinza apresentadas na Figura 1. No Exemplo 2 observamos que LAM com armazenamento por correlação não é capaz de armazenar corretamente os itens do conjunto das memórias fundamentais. Contudo, pode-se armazenar com sucesso estas memórias fundamentais na OLAM. De fato, após determinar a matriz  $M$  utilizando (13), apresentamos como entrada da OLAM os padrões originais  $x^1, \dots, x^4$  e obtivemos como resposta imagens visualmente iguais as memórias  $y^1, \dots, y^4$ . A Tabela 1 também apresenta o PSNR desse experimento. Observe que os valores encontrados são muito maiores que os valores produzidos pela LAM.

**Exemplo 5.** Nesse exemplo, vamos avaliar a tolerância a ruídos da OLAM. A Figura 3 apresenta versões ruidosas  $\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^4$ , geradas removendo partes consideráveis das imagens originais ou introduzindo ruído Gaussiano com média zero e variância 0,01 e ruído do tipo Sal-e-Pimenta com probabilidade 0,1. A Figura 4 apresenta os respectivos padrões recordados pela OLAM. O PSNR está apresentado na Tabela 2. Observe que, por um lado, o PSNR foi baixo para os padrões incompletos. Por outro lado, a OLAM apresentou uma boa tolerância com respeito ao ruído Gaussiano e





Figura 4: Imagens recordadas pela OLAM quando as imagens da Figura 3 são apresentadas como entrada.

|            | $\text{PSNR}(\mathbf{y}^1, \mathcal{M}(\tilde{\mathbf{x}}^1))$ | $\text{PSNR}(\mathbf{y}^2, \mathcal{M}(\tilde{\mathbf{x}}^2))$ | $\text{PSNR}(\mathbf{y}^3, \mathcal{M}(\tilde{\mathbf{x}}^3))$ | $\text{PSNR}(\mathbf{y}^4, \mathcal{M}(\tilde{\mathbf{x}}^4))$ |
|------------|--|--|--|--|
| OLAM       | 25.04  | 24.23  | 43.12  | 38.09  |
| MAM        | 53.58  | 34.43  | 23.00  | 21.51  |
| IFAM $T_L$ | 49.10  | 34.43  | 23.20  | 23.06  |

Tabela 2: Razão pico sinal-ruído produzido por memórias associativas quando as imagens corrompidas  $\tilde{\mathbf{x}}^1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}^4$  da Figura 3 são apresentados como entrada.

Sal-e-Pimenta. Essas observações podem ser confirmadas visualmente comparando as imagens nas Figuras 1 e 4.

### 3 MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS

Uma classe de memórias, chamadas memórias associativas morfológicas (MAMs, do termo inglês *morphological associative memories*), foi introduzida por Ritter e Sussner em meados de 1990 [34]. As MAMs são definidas em termos de operações matriciais não-lineares definidas numa sub-álgebra da álgebra de imagens [33,35,36], chamada álgebra minimax [9]. Na álgebra minimax, as operações de soma e multiplicação são substituídas por operações de reticulados. Especificamente, na álgebra linear, o produto usual de duas matrizes  $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$  e  $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$  é a matriz  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  cujos elementos são dados por

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il}b_{lj}. \quad (14)$$

Similarmente, na álgebra minimax define-se os produtos  $D = A \boxtimes B$  e  $E = A \boxdot B$ , chamados respectivamente produto máximo e produto mínimo, do seguinte modo:

$$d_{ij} = \max_{l=1:k} \{a_{il} + b_{lj}\} = \bigvee_{l=1}^k (a_{il} + b_{lj}), \quad (15)$$

e

$$e_{ij} = \min_{l=1:k} \{a_{il} + b_{lj}\} = \bigwedge_{l=1}^k (a_{il} + b_{lj}). \quad (16)$$

Observe a semelhança algébrica entre as equações (14) e ambos (15) e (16): o produto foi substituído pela soma e a soma foi substituída ou pela operação de máximo ou pela operação de mínimo.

Inspirados na memória associativa linear, podemos substituir o produto usual em (1) pelo produto máximo. Tal substituição resulta na memória associativa

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = M \boxtimes \mathbf{x}, \quad (17)$$

em que  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . O operador descrito em (17) corresponde a uma operação de dilatação da morfologia matemática, uma teoria usada no processamento e análise de imagens e sinais [16,37,38]. Daí o nome memória associativa morfológica. Dualmente, podemos definir uma memória associativa morfológica usando o produto mínimo no lugar do produto máximo em (17).

A técnica usada para o armazenamento de padrões na MAM descrita por (17) pode ser vista como uma versão minimax do armazenamento por correlação dado por (3). Precisamente, dado um conjunto finito de associações  $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, p\}$ , a matriz  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  em (17) é definida como

$$m_{ij} = \min_{\xi=1:p} \{y_i^\xi - x_j^\xi\} = \bigwedge_{\xi=1}^p (y_i^\xi - x_j^\xi). \quad (18)$$

Em termos matriciais, se denotarmos  $X = [\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p] \in \mathbb{R}^{n \times p}$  e  $Y = [\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^p] \in \mathbb{R}^{m \times p}$  como sendo as matrizes com as memórias fundamentais, então (18) corresponde a

$$M = Y \boxtimes (-X)^T = [\mathbf{y}^1 \ \dots \ \mathbf{y}^p] \boxtimes \begin{bmatrix} -(\mathbf{x}^1)^T \\ \vdots \\ -(\mathbf{x}^p)^T \end{bmatrix}. \quad (19)$$

**Exemplo 6.** Considere o conjunto de memórias fundamentais apresentados em (4). Por (19), a matriz  $M \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$  da MAM em (17) é

$$M = Y \boxtimes (-X)^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boxtimes \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que

$$M \boxtimes \mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boxtimes \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{y}^1 \quad \text{e} \quad M \boxtimes \mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{y}^2.$$

Portanto, assim como a OLAM, a MAM também foi capaz de armazenar os dois pares de associações no conjunto das memórias fundamentais.

Apesar da semelhança algébrica com o armazenamento por correlação, a estratégia dada por (19) é ótima no seguinte sentido:

**Teorema 2.** Dado um conjunto de memórias fundamentais  $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, p\} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , a matriz  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  dada por (18) satisfaz a seguinte equação:

$$M = \sup \{A \in \mathbb{R}^{m \times n} : A \boxtimes \mathbf{x}^\xi \leq \mathbf{y}^\xi\}. \quad (20)$$

*Demonstração.* Primeiramente, mostraremos que  $M \boxtimes \mathbf{x}^\xi \leq \mathbf{y}^\xi$ , para todo  $\xi = 1, \dots, p$ . Com efeito, para qualquer  $i \in \{1, \dots, m\}$  e para qualquer  $\xi \in \{1, \dots, p\}$ , vale

$$(M \boxtimes \mathbf{x}^\xi)_i = \bigvee_{j=1}^n (m_{ij} + x_j^\xi) = m_{ij^*} + x_{j^*}^\xi,$$

em que  $j^* \in \{1, \dots, n\}$  corresponde ao índice que fornece o máximo na última equação. Contudo, por (18), concluímos que

$$(M \boxtimes \mathbf{x}^\xi)_i = \left[ \bigwedge_{\eta=1}^p (y_i^\eta - x_{j^*}^\eta) \right] + x_{j^*}^\xi \leq [y_i^\xi - x_{j^*}^\xi] + x_{j^*}^\xi = y_i^\xi,$$

em vista da propriedade do mínimo.

Suponha agora que  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é tal que  $A \boxtimes \mathbf{x}^\xi \leq \mathbf{y}^\xi$ , para todo  $\xi = 1, \dots, p$ . Dessa forma, vale

$$\begin{aligned} & (A \boxtimes \mathbf{x}^\xi)_i \leq y_i^\xi, & \forall \xi = 1, \dots, p, \forall i = 1, \dots, m \\ \Leftrightarrow & \bigvee_j (a_{ij} + x_j^\xi) \leq y_i^\xi, & \forall \xi = 1, \dots, p, \forall i = 1, \dots, m \\ \Leftrightarrow & a_{ij} + x_j^\xi \leq y_i^\xi, & \forall \xi = 1, \dots, p, \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n \\ \Leftrightarrow & a_{ij} \leq y_i^\xi - x_j^\xi, & \forall \xi = 1, \dots, p, \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n \\ \Leftrightarrow & a_{ij} \leq \bigwedge_{\xi=1}^p (y_i^\xi - x_j^\xi), & \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n \\ \Leftrightarrow & a_{ij} \leq m_{ij}, & \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Consequentemente, temos que  $A \leq M$ . □

O Teorema 2 garante que  $M$ , fornecida pela versão minimax do armazenamento por correlação, é a maior matriz que satisfaz a inequação  $A \boxtimes \mathbf{x}^\xi \leq \mathbf{y}^\xi$  para todo  $\xi = 1, \dots, p$ . Como consequência, vale o seguinte resultado.

**Corolário 3.** *Se existe uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tal que  $A \boxtimes \mathbf{x}^\xi = \mathbf{y}^\xi$ , para todo  $\xi = 1, \dots, p$ , então a matriz  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  também satisfaz a equação  $M \boxtimes \mathbf{x}^\xi = \mathbf{y}^\xi$ , para todo  $\xi = 1, \dots, p$ .*

No caso autoassociativo, a MAM apresenta capacidade absoluta de armazenamento ilimitada, ou seja, pode-se armazenar quantos padrões forem desejados nesses modelos. Formalmente, vale o seguinte corolário:

**Corolário 4.** *Considere um conjunto autoassociativo de memórias fundamentais  $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{x}^\xi) : \xi = 1, \dots, p\}$ . Se  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é definida através de (18), então  $\mathcal{M}(\mathbf{x}^\xi) = M \boxtimes \mathbf{x}^\xi = \mathbf{x}^\xi$ , para todo  $\xi = 1, \dots, p$ .*

**Exemplo 7.** Considere novamente as imagens em tons de cinza apresentadas na Figura 1. Assim como a OLAM no Exemplo 4, visualmente, a MAM foi capaz de armazenar todos os itens no conjunto das memórias fundamentais. O PSNR desse experimento é apresentado na Tabela 1.

Posteriormente, foram apresentadas para a MAM as imagens corrompidas mostradas na Figura 3. A Figura 5 apresenta os respectivos padrões recordados pela memória associativa morfológica. Observe que a MAM apresentou um excelente desempenho para imagens incompletas mas não foi eficiente na remoção do ruído Gaussiano ou do tipo Sal-e-Pimenta. Com efeito, obtivemos o PSNR apresentado na Tabela 2.

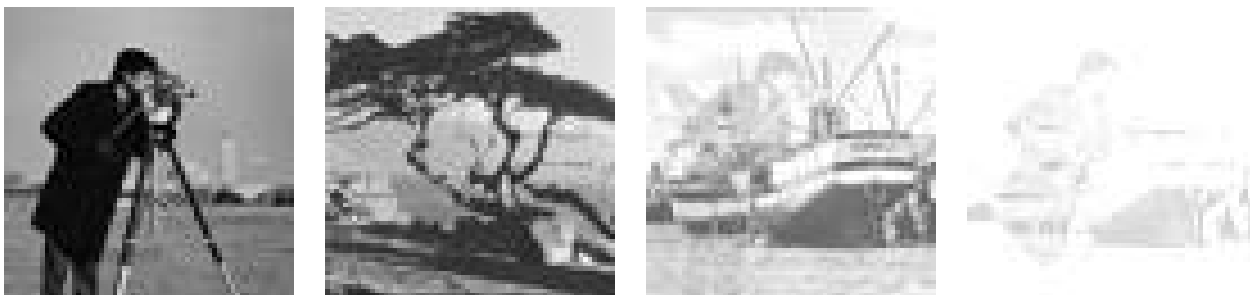


Figura 5: Imagens recordadas pela MAM quando as imagens da Figura 3 são apresentadas como entrada.

## 4 MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS FUZZY

No início dos anos 1990, uma outra classe de memórias associativas, chamadas memórias associativas *fuzzy* (FAMs, do termo inglês *fuzzy associative memories*), foram introduzidas por Kosko e desenvolvida posteriormente por diversos pesquisadores. Nessa seção, apresentaremos apenas os modelos de Kosko, as FAMs generalizadas de Chung e Lee [8] e as memórias associativas *fuzzy* implicativas (IFAMs, do termo inglês *implicative fuzzy associative memories*) introduzidas por Valle e Sussner [41, 51]. Antes, porém, apresentaremos uma breve revisão na teoria dos conjuntos *fuzzy*.

### 4.1 Alguns Conceitos Básicos da Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

A teoria dos conjuntos *fuzzy* foi introduzida por Zadeh em meados de 1960 e pode ser usada para modelar conceitos que não são bem definidos como, por exemplo, a noção de “pessoa jovem”, “erro pequeno”, etc. [19, 29, 31, 53]. Formalmente, um conjunto *fuzzy*, também chamado conjunto nebuloso ou conjunto difuso, é caracterizado por uma função  $x$  de um universo de discurso  $U$  no intervalo unitário  $[0, 1]$ . Note que um conjunto *fuzzy*  $x : U \rightarrow [0, 1]$  pode ser representado por um vetor coluna  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$  se  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  é um conjunto finito. Nesse caso,  $x_j = \mathbf{x}(u_j)$  para todo  $j = 1, \dots, n$ , e  $\mathbf{x}$  corresponde a um ponto no hipercubo  $[0, 1]^n$  [25]. Nesse minicurso, estaremos interessados apenas em conjuntos *fuzzy* tais que  $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$  e  $\mathbf{y} \in [0, 1]^m$ .

Muitas operações com conjuntos *fuzzy*, incluindo as operações de união e intersecção, são modeladas através de operadores da lógica *fuzzy*. Por simplicidade, apresentaremos aqui apenas os operadores lógicos necessários para o desenvolvimento das FAMs mencionadas no primeiro parágrafo dessa seção. O leitor interessado em maiores detalhes é convidado a consultar as referências [19, 29, 31].

Uma norma triangular, ou simplesmente *t*-norma, é uma aplicação crescente  $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que é associativa, comutativa, e satisfaz a condição de fronteira  $T(1, x) = x$  para todo  $x \in [0, 1]$  [11, 19, 29, 31]. Dizemos que uma *t*-norma é contínua se  $T$  é contínua em ambos argumentos. As seguintes aplicações são exemplos de *t*-normas contínuas:

$$T_M(x, y) = \min\{x, y\}, \quad (\text{mínimo}) \quad (21)$$

$$T_P(x, y) = xy, \quad (\text{produto}) \quad (22)$$

$$T_L(x, y) = \max\{0, x + y - 1\}. \quad (\text{Lukasiewicz}) \quad (23)$$

Uma *t*-norma generaliza o operador lógico “E”. Com feito, pode-se mostrar que qualquer *t*-norma satisfaz as equações  $T(0, 0) = T(1, 0) = T(0, 1) = 0$  e  $T(1, 1) = 1$ .

Uma operação matricial, semelhante ao produto máximo da álgebra minimax, pode ser definido combinando a operação de máximo com uma *t*-norma da seguinte forma [19, 31]: Dadas duas matrizes

$A \in [0, 1]^{m \times k}$  e  $B \in [0, 1]^{k \times n}$ , o produto max- $T$  de  $A$  e  $B$ , denotado por  $C = A \circ B$ , é definido através da seguinte equação:

$$c_{ij} = \max_{l=1:k} \{T(a_{il}, b_{lj})\} = \bigvee_{l=1}^k T(a_{il}, b_{lj}), \quad \text{para todo } i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, n. \quad (24)$$

Note que o produto max- $T$  definido em (24) também é análogo ao produto matricial usual com a soma substituída pelo máximo e o produto por uma t-norma. Um índice adicionado ao símbolo “o” será adicionado para especificar a t-norma adotada em 24.

Um operador  $I : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que é decrescente no primeiro argumento e crescente no segundo é chamado implicação *fuzzy* se  $I$  estende a implicação clássica em  $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$ , ou seja, se satisfaz as equações  $I(0, 0) = I(0, 1) = I(1, 1) = 1$  e  $I(1, 0) = 0$ . Alguns exemplos de implicações *fuzzy* são apresentadas abaixo [19, 31]:

$$I_M(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y, \\ y, & x > y, \end{cases} \quad (\text{Gödel}) \quad (25)$$

$$I_P(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y, \\ y/x, & x > y, \end{cases} \quad (\text{Goguen}) \quad (26)$$

$$I_L(x, y) = \min\{1, 1 - x + y\}, \quad (\text{Lukasiewicz}) \quad (27)$$

Dizemos que uma t-norma  $T$  e uma implicação *fuzzy*  $I$  formam uma adjunção se, e somente se, elas satisfazem a seguinte relação para todo  $x, y, z \in [0, 1]$  [10]:

$$T(x, z) \leq y \Leftrightarrow z \leq I(x, y). \quad (28)$$

Os pares  $(T_M, I_M)$ ,  $(T_P, I_P)$  e  $(T_L, I_L)$  são exemplos de operadores adjuntos.

Gostaríamos de observar que a noção de adjunção está fortemente relacionada ao conceito de conexão de Galois [5] e resíduo de um operador [6]. Pode-se mostrar que, se  $T$  e  $I$  formam uma adjunção, então a t-norma comuta com a operação de supremo em ambos argumentos, ou seja, vale

$$T(\sup X, z) = \sup_{x \in X} \{T(x, z)\} \quad \text{e} \quad T(z, \sup X) = \sup_{x \in X} \{T(z, x)\}, \quad (29)$$

para todo  $z \in X$  e  $X \subseteq [0, 1]$ . Reciprocamente, se  $T$  comuta com o supremo, então existe uma única implicação *fuzzy*  $I_T$  que forma uma adjunção com  $T$ . Além disso, essa implicação *fuzzy* pode ser obtida a partir da seguinte equação para todo  $x, y \in [0, 1]$ :

$$I_T(x, y) = \sup\{z \in [0, 1] : T(x, z) \leq y\}. \quad (30)$$

Finalmente, toda t-norm contínua comuta com o supremo. Portanto, existe uma única implicação *fuzzy*  $I_T$  tal que  $(T, I_T)$  forma uma adjunção. Por simplicidade, consideraremos apenas t-normas contínuas nesse minicurso.

## 4.2 Memórias Associativas Fuzzy Generalizadas

As primeiras FAMs, referidas como FAM max-min e FAM max-produto, foram introduzidas por Kosko no início dos anos 1990 [23–25]. Simplificadamente, as FAMs max-min e max-produto são definidas de forma análoga a LAM por correlação, mas em termos do produto max- $T$ , em que  $T$  é ou o mínimo ou o produto. Posteriormente, Chung e Lee generalizaram o modelo de Kosko

substituindo o mínimo e o produto por uma t-norma qualquer. Precisamente, dado um conjunto de memórias fundamentais  $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, p\}$ , defina a matriz  $M \in [0, 1]^{m \times n}$  através da equação

$$m_{ij} = \max_{\xi=1:p} \left\{ T \left( y_i^\xi, x_j^\xi \right) \right\} = \bigvee_{\xi=1}^p T(y_i^\xi, x_j^\xi), \quad (31)$$

ou, equivalentemente, pela equação

$$M = Y \circ X^T, \quad (32)$$

em que  $X = [\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^p] \in [0, 1]^{n \times p}$  e  $Y = [\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^p] \in [0, 1]^{m \times p}$ . A estratégia de armazenamento descrita pela equação (31), ou (32), é referida como estratégia de codificação correlação-t (em inglês, *correlation-t encoding scheme*). Finalmente, a FAM generalizada, ou simplesmente GFAM (do termo inglês *generalized fuzzy associative memory*), corresponde a aplicação  $\mathcal{M} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^m$  definida como segue para todo  $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$ :

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = M \circ \mathbf{x}. \quad (33)$$

**Exemplo 8.** Considere o seguinte conjunto de associações:

$$\left\{ \left( \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.2 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.9 \\ 1.0 \end{bmatrix} \right), \left( \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.5 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.9 \\ 0.8 \end{bmatrix} \right), \left( \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.4 \\ 0.9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.5 \\ 0.9 \end{bmatrix} \right) \right\}. \quad (34)$$

Por (32), a matriz  $M \in [0, 1]^{3 \times 3}$  da GFAM baseada na t-norma do mínimo satisfaz a equação:

$$M = Y \circ_M X^T = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.4 \\ 0.9 & 0.9 & 0.5 \\ 1.0 & 0.8 & 0.9 \end{bmatrix} \circ_M \begin{bmatrix} 1.0 & 0.2 & 1.0 \\ 1.0 & 0.5 & 0.8 \\ 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 & 0.8 \\ 0.9 & 0.5 & 0.9 \\ 1.0 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

Ao apresentarmos o conjunto *fuzzy*  $\mathbf{x}^1$  à memória associativa, obtemos como resposta

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}^1) = M \circ_M \mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 & 0.8 \\ 0.9 & 0.5 & 0.9 \\ 1.0 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix} \circ_M \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.2 \\ 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.9 \\ 1.0 \end{bmatrix} = \mathbf{y}^1.$$

Porém, ao apresentarmos os padrões  $\mathbf{x}^2$  e  $\mathbf{x}^3$ , obtemos

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}^2) = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.9 \\ 1.0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.9 \\ 0.8 \end{bmatrix} = \mathbf{y}^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{M}(\mathbf{x}^3) = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.9 \\ 0.9 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.5 \\ 0.9 \end{bmatrix} = \mathbf{y}^3.$$

Portanto, a FAM max-min não foi capaz de armazenar as associações  $(\mathbf{x}^2, \mathbf{y}^2)$  e  $(\mathbf{x}^3, \mathbf{y}^3)$ .

Na Seção 2, observamos que as LAMs com armazenamento por correlação apresentam um armazenamento perfeito das memórias fundamentais se os padrões  $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k$  forem ortonormais. Uma sentença similar pode ser formulada para as GFAMs, como revela o Teorema 5 abaixo cuja demonstração encontra-se em [8].

Uma “fuzzificação” direta dos conceitos de ortogonalidade e ortonormalidade levam as seguintes definições [8]. Um conjunto nebuloso  $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$  é normal se, e somente se,  $\bigvee_{j=1}^n x_j = 1$ , ou seja,  $\mathbf{x}^T \circ_T \mathbf{x} = 1$ . Os padrões nebulosos  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [0, 1]^n$  são ditos max-T ortogonais se, e somente se,  $\mathbf{x}^T \circ_T \mathbf{y} = 0$ , ou seja,  $T(x_j, y_j) = 0$  para todo  $j = 1, \dots, n$ . Consequentemente, um conjunto  $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k\}$  é dito max-T ortonormal se, e somente se,  $\mathbf{x}^\xi$  e  $\mathbf{x}^\eta$  forem max-T ortogonais para todo  $\xi \neq \eta$  e  $\mathbf{x}^\xi$  for um conjunto nebuloso normal para todo  $\xi = 1, \dots, k$ .

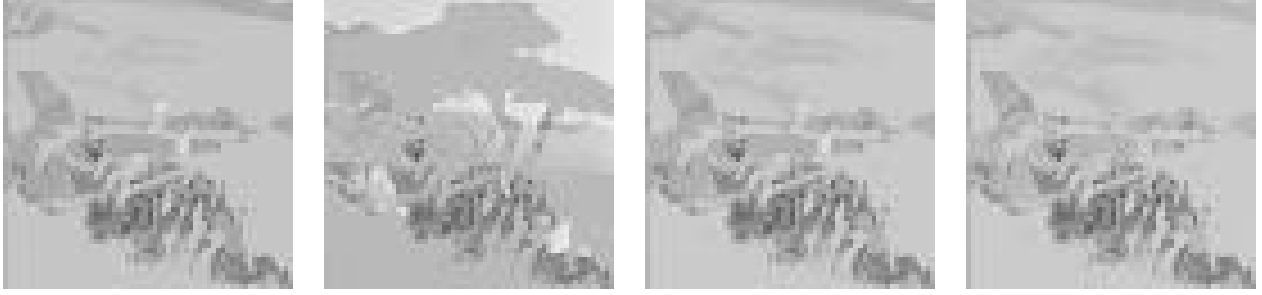


Figura 6: Imagens recordadas pela FAM max-min quando as imagens originais da Figura 1 são apresentadas como entrada.

**Teorema 5.** *Suponha que o conjunto das memórias fundamentais  $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, k\}$  seja armazenado numa GFAM através da estratégia de codificação correlação-t. Se o conjunto  $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k\}$  for max-T ortonormal, então  $\mathcal{M}(\mathbf{x}^\xi) = M \circ \mathbf{x}^\xi = \mathbf{y}^\xi$  para todo  $\xi = 1, \dots, k$ .*

Em particular, a GFAM de Lukasiewicz, ou seja, a GFAM baseada na t-norma de Lukasiewicz, é capaz de armazenar todas as memórias fundamentais se os padrões  $\mathbf{x}^\xi$ 's, além de normais, forem tais que  $0 \vee (\mathbf{x}_j^\xi + \mathbf{x}_j^\eta - 1) = 0$  para todo  $\xi \neq \eta$  e  $j = 1, \dots, n$ . Em outras palavras,  $\mathbf{y}^\xi = M \circ_L \mathbf{x}^\xi$  para todo  $\xi = 1, \dots, p$  se  $\mathbf{x}^\xi$  forem normais e  $\mathbf{x}_j^\xi + \mathbf{x}_j^\eta \leq 1$  para todo  $\xi \neq \eta$  e  $j = 1, \dots, n$ . Note que a condição  $\mathbf{x}_j^\xi + \mathbf{x}_j^\eta \leq 1$  vale, em particular, para padrões  $\mathbf{x}^\xi$ 's que satisfazem a condição  $\sum_{\xi=1}^k x_j^\xi = 1$  para todo  $j = 1, \dots, n$ .

**Exemplo 9.** Assim como a LAM, a FAM max-min também não foi capaz de armazenar as associações  $(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1), \dots, (\mathbf{x}^4, \mathbf{y}^4)$  da Figura 1. Com efeito, a Figura 6 apresenta as imagens recordadas e a Tabela 1 contém o PSNR quando os padrões originais  $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^4$  são apresentados como entrada. Note que, devido a interferência cruzada, ambos FAM max-min e LAM com armazenamento por correlação apresentaram baixos valores no PSNR.

### 4.3 Memórias Associativas Fuzzy Implicativas

As memórias associativas fuzzy implicativas (IFAMs, do termo inglês *implicative fuzzy associative memories*), introduzidas por Valle e Sussner, podem ser vistas como versões melhoradas das GFAMs. Com efeito, assim como no caso linear, a estratégia de armazenamento correlação-t não leva em conta a equação (33) que descreve a FAM. O armazenamento implicativo [41, 51], também chamado armazenamento por adjunção [44, 48], tem como objetivo determinar a melhor FAM num sentido semelhante ao Teorema 2 para as MAMs. Precisamente, dado um conjunto de memórias fundamentais  $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, p\} \in [0, 1]^n \times [0, 1]^m$ , o armazenamento implicativo fornece a maior FAM  $\mathcal{M} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^m$  descrita por (33) tal que  $\mathcal{M}(\mathbf{x}^\xi) \leq \mathbf{y}^\xi$  para todo  $\xi = 1, \dots, p$ .

Formalmente, a matriz  $M \in [0, 1]^{m \times n}$  da FAM descrita por  $\mathcal{M}(\mathbf{x}) = M \circ \mathbf{x}$  é definida através da equação:

$$M = \sup\{A \in [0, 1]^{m \times n} : A \circ \mathbf{x}^\xi \leq \mathbf{y}^\xi, \quad \forall \xi = 1, \dots, p\}. \quad (35)$$

A solução desse problema pode ser calculada de forma direta através do seguinte teorema:

**Teorema 6.** *Dado um conjunto de associações  $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, p\} \in [0, 1]^n \times [0, 1]^m$ , a matriz  $M \in [0, 1]^{m \times n}$  definida através da equação*

$$m_{ij} = \min_{\xi=1:p} \left\{ I_T(x_j^\xi, y_i^\xi) \right\} = \bigwedge_{\xi=1}^p I_T(x_j^\xi, y_i^\xi), \quad \text{para todo } i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, n, \quad (36)$$

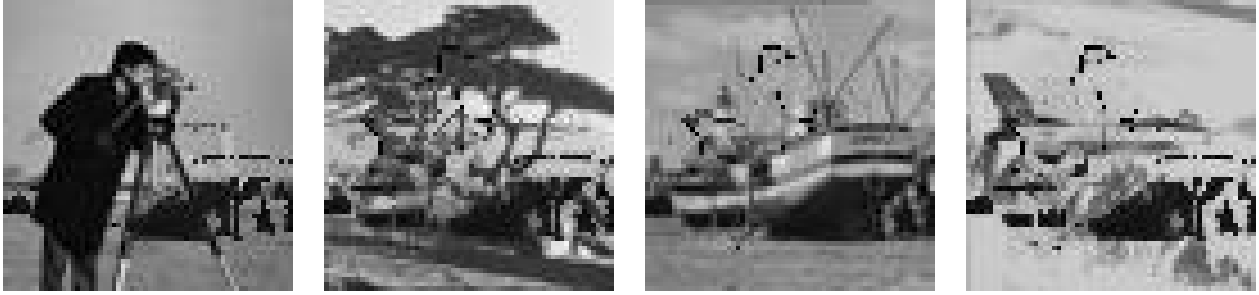


Figura 7: Imagens recordadas pela IFAM  $T_M$  quando as imagens da Figura 3 são apresentadas como entrada.

em que  $I_T$  denota a implicação que forma uma adjunção com a  $t$ -norma usada no produto  $\max$ - $T$ , é a solução de (35).

A demonstração desse fato é semelhante a demonstração do Teorema 2 e será omitida.

**Exemplo 10.** Considere as associações apresentadas em (34) e a IFAM definida em termos da  $t$ -norma do mínimo. Por (36), encontramos

$$\begin{aligned} m_{11} &= \min \{ I_M(x_1^1, y_1^1), I_M(x_1^2, y_1^2), I_M(x_1^3, y_1^3) \} \\ &= \min \{ I_M(1.0, 0.8), I_M(1.0, 0.8), I_M(0.1, 0.4) \} \\ &= \min \{ 0.8, 0.8, 1.0 \} = 0.8. \end{aligned}$$

e, de um modo geral, temos

$$M = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.0 & 0.4 \\ 0.9 & 1.0 & 0.5 \\ 0.8 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

Pode-se verificar que a IFAM, dada por  $\mathcal{M}(\mathbf{x}) = M \circ_M \mathbf{x}$  com  $M$  dada acima, é capaz de recordar todas as associações em (34).

**Exemplo 11.** Considere novamente as imagens em tons de cinza apresentadas na Figura 1. Essas imagens foram armazenadas na IFAM baseada na  $t$ -norma do mínimo  $T_M$  e, posteriormente, as imagens originais foram apresentadas como entrada para essa memória. A Figura 7 apresenta as imagens recordadas e a Tabela 1 apresenta o PSNR desse experimento. Observe que a IFAM  $T_M$  não foi capaz de armazenar as associações  $(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1), \dots, (\mathbf{x}^4, \mathbf{y}^4)$ .

**Exemplo 12.** De um modo análogo, as imagens em tons de cinza apresentadas na Figura 1 foram armazenadas nas IFAMs baseadas nas  $t$ -normas  $T_M$  (produto) e  $T_L$  (Lukasiewicz). Assim como a IFAM  $T_M$ , a IFAM baseada na  $t$ -norm  $T_P$  não foi capaz de armazenar as associações. Porém, visualmente, a IFAM  $T_L$  foi capaz de recordar as imagens originais  $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^4$ , conforme mostra a Figura 8. A Tabela 1 também apresenta o PSNR desse experimento.

Posteriormente, foram apresentadas para a IFAM  $T_L$  as imagens corrompidas mostradas na Figura 3. A Figura 9 apresenta os respectivos padrões recordados pela memória associativa *fuzzy*. Assim como a MAM, a IFAM  $T_L$  apresentou um excelente desempenho para imagens incompletas, mas não foi eficiente na remoção do ruído Gaussiano ou do tipo Sal-e-Pimenta. Com efeito, obtivemos o PSNR apresentado na Tabela 2. Note que a IFAM  $T_L$  apresentou um PSNR muito similar a MAM. Tal similaridade foi confirmada teoricamente estabelecendo uma relação entre a MAM e a IFAM  $T_L$  [41].



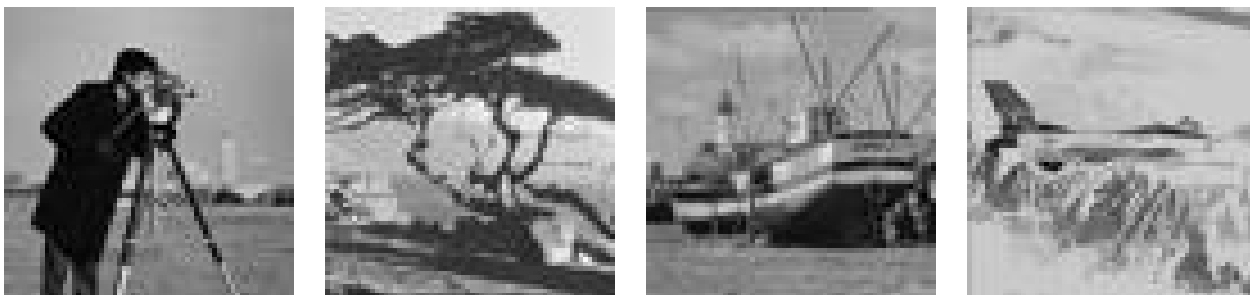


Figura 8: Imagens recordadas pela IFAM  $T_L$  quando as imagens originais da Figura 1 são apresentadas como entrada.

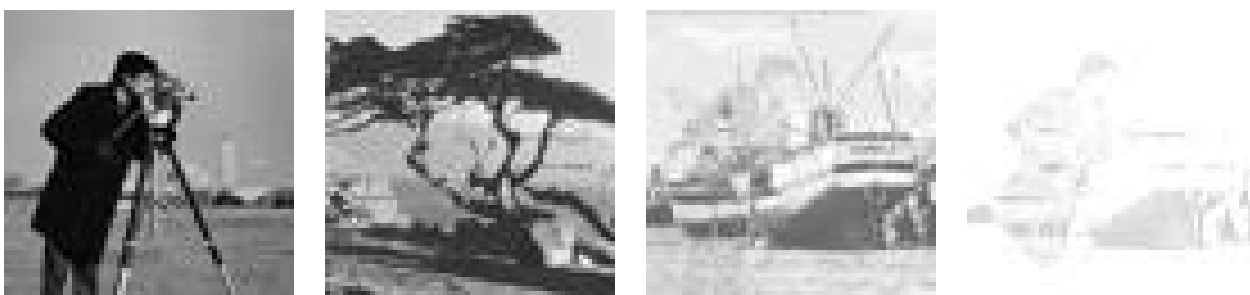


Figura 9: Imagens recordadas pela IFAM  $T_L$  quando as imagens da Figura 3 são apresentadas como entrada.

*Finalmente, como consequência direta de (35), vale o seguinte resultado:*

**Teorema 7.** *Considere um conjunto de memórias fundamentais  $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, p\}$ . Se existe  $A \in [0, 1]^{m \times n}$  tal que  $A \circ \mathbf{x}^\xi = \mathbf{y}^\xi$  para todo  $\xi = 1, \dots, p$ , então a matriz  $M \in [0, 1]^{m \times n}$ , solução de (35), também satisfaz a equação  $M \circ \mathbf{x}^\xi = \mathbf{y}^\xi$  para todo  $\xi = 1, \dots, p$ . No caso autassociativo, em particular, sempre vale  $\mathcal{M}(\mathbf{x}^\xi) = M \circ \mathbf{x}^\xi = \mathbf{x}^\xi$  para todo  $\xi = 1, \dots, p$ .*

O Teorema 7 mostra que as IFAMs sempre apresentam uma capacidade absoluta de armazenamento maior ou igual as GFAMs de Chung e Lee. Note também que esse teorema é análoga aos Corolários 3 e 4 da Seção 3. De fato, tanto as MAMs como as IFAMs podem ser vistas como casos particulares das chamadas memórias associativas em quantales (QAMs, do termo inglês quantale-based associative memories), que são definidas numa estrutura matemática chamada *quantales* [50]. Outras generalizações das IFAMs e das MAMs incluem as memórias associativas *fuzzy* morfológicas [44, 48, 49], as memórias associativas *fuzzy* implicativas finitas baseadas em permutações [45], as memórias associativas esparsas em reticulados [46, 47] e as memórias associativas *fuzzy* baseadas em medidas de inclusão [39].

## 5 CONCLUSÃO

Nesse minicurso, apresentamos brevemente as memórias associativas lineares, morfológicas e *fuzzy*. Especificamente, as memórias associativas lineares são descritas através de um produto matriz-vetor, em que a matriz é determinada através do armazenamento por correlação ou pelo armazenamento por projeção.

As memórias associativas morfológicas são baseadas em produtos matriciais não-lineares da álgebra minimax. Embora definidas de forma semelhante as memórias associativas lineares com armazena-

mento por correlação, essas memórias são ótimas num sentido semelhante as memórias associativas lineares com armazenamento por projeção.

Finalmente, as memórias associativas *fuzzy* são definidas em termos do produto  $\max\text{-}T$ . Duas classes de memórias *fuzzy* foram apresentadas nesse minicurso. A primeira é semelhante as memórias associativas lineares com armazenamento por correlação e são capazes de recordar corretamente os itens armazenados se uma certa condição de ortonormalidade for satisfeita. As memórias associativas *fuzzy* implicativas, por outro lado, podem ser vistas como ótimas num certo sentido e sempre apresentam uma capacidade de armazenamento maior que as memórias *fuzzy* generalizadas.

## Referências

- [1] ANDERSON, J. A simple neural network generating interactive memory. *Mathematical Biosciences* 14 (1972), 197–220.
- [2] ANDERSON, J. *An Introduction to Neural Networks*. MIT Press, MA, 1995.
- [3] APOSTOL, T. *Calculus: One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra*, 2 ed., vol. 1. John Wiley and Sons, 1967.
- [4] AUSTIN, J. Associative memory. In *Handbook of Neural Computation*, E. Fiesler and R. Beale, Eds. Oxford University Press, 1997, pp. F1.4:1–F1.4:7.
- [5] BIRKHOFF, G. *Lattice Theory*, 3 ed. American Mathematical Society, Providence, 1993.
- [6] BLYTH, T., AND JANOWITZ, M. *Residuation Theory*. Pergamon Press, Oxford, 1972.
- [7] BRUNAK, S., AND LAUTRUP, B. *Neural Networks: Computers with Intuition*. World Scientific, 1990.
- [8] CHUNG, F., AND LEE, T. On fuzzy associative memory with multiple-rule storage capacity. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 4, 3 (1996), 375–384.
- [9] CUNINGHAME-GREEN, R. *Minimax Algebra: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 166. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [10] DENG, T., AND HEIJMANS, H. Grey-scale morphology based on fuzzy logic. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 16, 2 (2002), 155–171.
- [11] DUBOIS, D., AND PRADE, H. *Fuzzy sets and systems: theory and applications*. Academic Press, New York, 1980.
- [12] ESMI, E. L., SUSSNER, P., VALLE, M. E., SAKURAY, F., AND BARROS, L. Fuzzy associative memories based on subethood and similarity measures with applications to speaker identification. In *Lecture Notes in Computer Science: International Conference on Hybrid Artificial Intelligence Systems (HAIS 2012)*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, Germany, 2012, pp. 479–490.
- [13] GOLUB, G., AND VAN LOAN, C. *Matrix Computations*, 3th ed. John Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1996.

- [14] GRAÑA, M., GALLEGO, J., TORREALDEA, F. J., AND D'ANJOU, A. On the application of associative morphological memories to hyperspectral image analysis. *Lecture Notes in Computer Science* 2687 (2003), 567–574.
- [15] HASSOUN, M. H., Ed. *Associative Neural Memories: Theory and Implementation*. Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- [16] HEIJMANS, H. *Morphological Image Operators*. Academic Press, New York, NY, 1994.
- [17] HOPFIELD, J., AND TANK, D. Neural computation of decisions in optimization problems. *Biological Cybernetics* 52 (1985), 141–152.
- [18] HOPFIELD, J. J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 79 (Apr. 1982), 2554–2558.
- [19] KLIR, G. J., AND YUAN, B. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NY, 1995.
- [20] KOHONEN, T. Correlation matrix memory. *IEEE Transactions on Computers* C-21 (1972), 353–359.
- [21] KOHONEN, T. *Self-organization and associative memory*, 3rd edition ed. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1989.
- [22] KOHONEN, T., AND RUOHONEN, M. Representation of associated data by computers. *IEEE Transactions on Computers* C-22 (1973), 701–702.
- [23] KONG, S.-G., AND KOSKO, B. Adaptive fuzzy systems for backing up a truck-and-trailer. *IEEE Transactions on Neural Networks* 3, 2 (1992), 211–223.
- [24] KOSKO, B. *Fuzzy Engineering*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1992.
- [25] KOSKO, B. *Neural Networks and Fuzzy Systems: A Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.
- [26] LIMA, E. L. *Álgebra Linear*, 3 ed. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, RJ, 1998.
- [27] MARCANTONIO, A., DARKEN, C., KUHN, G. M., SANTOSO, I., HANSON, S. J., AND PETSCHKE, T. A neural network autoassociator for induction motor failure prediction. In *Adv. Neural Inf. Process. Syst.* (1996), vol. 8, pp. 924–930.
- [28] NAKANO, K. Associatron: A model of associative memory. *IEEE Trans. on Systems, Man, Cybernetics* SMC-2 (1972), 380–388.
- [29] NGUYEN, H. T., AND WALKER, E. A. *A First Course in Fuzzy Logic*, 2 ed. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2000.
- [30] PAO, Y. H. *Adaptive Pattern Recognition and Neural Networks*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.

- [31] PEDRYCZ, W., AND GOMIDE, F. *Fuzzy Systems Engineering: Toward Human-Centric Computing*. Wiley-IEEE Press, New York, 2007.
- [32] RADUCANU, B., GRAÑA, M., AND ALBIZURI, X. F. Morphological scale spaces and associative morphological memories: Results on robustness and practical applications. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 19, 2 (2003), 113–131.
- [33] RITTER, G. X. Image algebra. Unpublished manuscript. Available at: <http://www.cise.ufl.edu/jnw/CVAIIA/>, 1997.
- [34] RITTER, G. X., SUSSNER, P., AND DE LEON, J. L. D. Morphological associative memories. *IEEE Transactions on Neural Networks* 9, 2 (1998), 281–293.
- [35] RITTER, G. X., AND WILSON, J. N. *Handbook of Computer Vision Algorithms in Image Algebra*, 2 ed. CRC Press, Boca Raton, 2001.
- [36] RITTER, G. X., WILSON, J. N., AND DAVIDSON, J. L. Image algebra: An overview. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 49, 3 (Mar. 1990), 297–331.
- [37] SERRA, J. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, 1982.
- [38] SOILLE, P. *Morphological Image Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1999.
- [39] SUSSNER, P., ESMI, E. L., VILLAVERDE, I., AND GRAÑA, M. The Kosko subethood fuzzy associative memory (KS-FAM): Mathematical background and applications in computer vision. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 42, 2–3 (Feb. 2012), 134–149.
- [40] SUSSNER, P., MIYASAKI, R., AND VALLE, M. E. An introduction to parameterized IFAM models with applications in prediction. In *Proceedings of the 2009 IFSA World Congress and 2009 EUSFLAT Conference* (Lisbon, Portugal, July 2009), pp. 247–252.
- [41] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Implicative fuzzy associative memories. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 14, 6 (2006), 793–807.
- [42] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Recall of patterns using morphological and certain fuzzy morphological associative memories. In *Proceedings of the IEEE World Conference on Computational Intelligence 2006* (Vancouver, Canada, 2006), pp. 209–216.
- [43] TREFETHEN, L. N., AND BAU III, D. *Numerical Linear Algebra*. SIAM Publications, Philadelphia, PA, 1997.
- [44] VALLE, M. E. *Fundamentals and Applications of Fuzzy Morphological Associative Memories*. PhD thesis, State University of Campinas, 2007. In Portuguese.
- [45] VALLE, M. E. Permutation-based finite implicative fuzzy associative memories. *Information Sciences* 180, 21 (Nov. 2010), 4136–4152.
- [46] VALLE, M. E., AND GRANDE VICENTE, D. M. Some experimental results on sparsely connected autoassociative morphological memories for the reconstruction of color images corrupted by either impulsive or gaussian noise. In *Proceedings of the IEEE International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN 2011)* (San Jose, CA, USA, Aug. 2011), pp. 275–282.

- [47] VALLE, M. E., AND GRANDE VICENTE, D. M. Sparsely connected autoassociative lattice memories with an application for the reconstruction of color images. *Accepted for Publication in Journal of Mathematical Imaging and Vision* (2011).
- [48] VALLE, M. E., AND SUSSNER, P. A general framework for fuzzy morphological associative memories. *Fuzzy Sets and Systems* 159, 7 (2008), 747–768.
- [49] VALLE, M. E., AND SUSSNER, P. Storage and recall capabilities of fuzzy morphological associative memories with adjunction-based learning. *Neural Networks* 24, 1 (Jan. 2011), 75–90.
- [50] VALLE, M. E., SUSSNER, P., AND ESMI, E. L. Spherical cielab qams: Associative memories based on the cielab system and quantales for the storage of color images. In *Lecture Notes in Computer Science: International Conference on Hybrid Artificial Intelligence Systems (HAIS 2012)*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, Germany, 2012, pp. 467–478.
- [51] VALLE, M. E., SUSSNER, P., AND GOMIDE, F. Introduction to implicative fuzzy associative memories. In *Proceedings of the IEEE International Joint Conference on Neural Networks* (Budapest, Hungary, 2004), pp. 925–931.
- [52] YEUNG, D., AND CHOW, C. Parzen window network intrusion detectors. In *Int. Conf. Pattern Recognit.* (2002), pp. 385–388.
- [53] ZADEH, L. A. Fuzzy sets. *Information and Control* 8, 3 (1965), 338–353.
- [54] ZHANG, B.-L., ZHANG, H., AND GE, S. S. Face recognition by applying wavelet subband representation and kernel associative memory. *IEEE Transactions on Neural Networks* 15, 1 (Jan. 2004), 166–177.
- [55] ZHANG, H., HUANG, W., HUANG, Z., AND ZHANG, B. A kernel autoassociator approach to pattern classification. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B* 35, 3 (June 2005), 593–606.