2º Colóquio de Matemática da Região Sul

24 a 28 de Abril 2012 UEL - Londrina/PR

# O LEMA LOCAL DE LOVÁSZ:

# DO MÉTODO MÁGICO DE ËRDOS À TEORIA DOS GASES DE REDE

RODRIGO BISSACOT - IME USP

Londrina, 24 a 28 de abril de 2012.

# Prefácio

Este texto é uma tentativa de divulgar para os alunos que iniciam seus estudos na matemática uma bela (e inesperada) conexão entre duas áreas da Matemática que estão crescendo no Brasil, mas que ainda não são tão populares quanto outras: Combinatória e Mecânica Estatística Rigorosa. Parte destas notas escrevi ainda quando fiz meu doutorado na UFMG sob a supervisão dos professores Aldo Procacci (UFMG) e Roberto Fernández (Ultrecht University), na época este último ainda trabalhando na Université de Rouen. As demais partes são frutos de outras três ocasiões onde ministrei este minicurso exatamente nos mesmos moldes de agora: três aulas de 2 horas cada. Isto aconteceu nos programas de verão nas universidades de Viçosa (UFV), Unicamp e de Brasília (Unb), ocasiões nas quais fui convidado pelos professores Maurício Barros Corrêa Júnior (UFV), Eduardo Garibaldi (Unicamp) e Leandro Cioletti (Unb).

O texto está longe de ser autocontido e provavelmente no futuro surgirão outros além dos já existentes sobre o tema. Talvez o principal atrativo deste minicurso seja justamente chamar a atenção do estudante para o quão frutífero pode ser o hábito de ir a seminários, conversar com seus colegas de outras áreas e estar atento a possíveis ligações ainda não exploradas entre diferentes tópicos da Matemática.

Agradeço às comissões científica e local pela oportunidade de ministrar este minicurso e igualmente sou agradecido às agências de fomento que estão financiando o II Colóquio de Matemática da Região Sul.

Por fim, agradeço à minha esposa Pita por me ajudar com a edição do texto.

Paraná, abril de 2012,

Rodrigo Bissacot[1]

[1]rodrigo.bissacot@gmail.com

# Introdução

*"This course could be called The Probabilistic Method or The Erdös Method or, my favorite, Erdös Magic"* - Joel Spencer (na descrição de seu curso de Grafos Aleatórios na New York University em 2012).

A frase acima descreve bem o atual status que o *Método Probabilístico* obteve dentro da Teoria Combinatória. A palavra Mágica não é usada na frase somente porque foi Paul Erdös quem popularizou a abordagem, mas pelo poder que este conjunto de técnicas e ideias acabou exibindo quando aplicado aos mais variados problemas.

Paul Erdös foi um dos mais prolíficos matemáticos de todos os tempos e o sucesso do Método Probabilístico em geral é creditado a ele devido aos vários trabalhos que publicou de 1947 em diante utilizando este método, veja por exemplo [18, 19, 20, 21]. De fato, um dos primeiros trabalhos de que se tem notícia onde tal método foi utilizado, foi escrito por Szele em [39] enquanto estudava uma questão sobre caminhos hamiltonianos. O surgimento do nome *Método de Erdös* é devido à popularização obtida pelos seus numerosos artigos nesta abordagem. Talvez o próprio Erdös ficasse surpreso com o dicionário preciso que existe nos dias de hoje entre resultados em Combinatória e Física Estatística. Explicar esta ligação surpreendente é um dos objetivos deste texto.

A ponte entre os dois mundos se dá através de um teorema chamado *Lema Local de Lovász*. Curiosamente tal lema apareceu pela primeira vez no artigo [21] onde Erdös é coautor apesar do nome deste não aparecer no Lema. No texto seguiremos a tradição dos artigos de Combinatória citando somente o nome de László Lovász.

Mas afinal, o que significa resolver um problema usando o Método Probabilístico e o Lema de Lovász?

A abordagem é a seguinte: para assegurar a existência de determinado objeto (um grafo com determinadas propriedades pré-estabelecidas, por exemplo) constrói-se um espaço de probabilidade adequado ao problema onde nosso objeto de interesse tem probabilidade positiva de ocorrer. Nesta situação, em particular, tal objeto obrigatoriamente existe mesmo que não saibamos exatamente como construí-lo.

Apesar da ideia parecer ingênua a aplicabilidade desta técnica é enorme e é vasta a literatura com resultados obtidos pelo próprio Erdös e por muitos outros matemáticos usando essa poderosa ferramenta. Mais recentemente o livro [3] que contém muitas aplicações mostrando as diferentes maneiras de se aplicar o Método Probabilístico.

Quando aplicamos este método em um problema isso pode ser feito de várias maneiras, entre elas: Método do Primeiro Momento, Método do Segundo Momento, Concentração via Martingais, argumentos de contagem, Lema local de Lovász etc. É nesta última abordagem que nos concentraremos. Modelar um problema para utilizar o *Lema Local de Lovász* significa encontrar uma coleção finita $A_1, A_2, ..., A_n$ de *eventos ruins* os quais codificam o que não queremos no objeto de interesse de tal forma que, ao mostrarmos que com probabilidade positiva nenhum destes eventos ocorre ($\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n A_i) > 0$), provamos que há probabilidade positiva de ocorrer as condições que desejávamos inicialmente. Como sabemos que um evento com probabilidade positiva nunca é vazio, existe pelo menos um objeto satisfazendo as condições procuradas.

O que o Lema de Lovász nos fornece são valores reais positivos $r_1, r_2, ..., r_n$ que nos dirão o quão grande podem ser as probabilidades dos eventos ruins no problema em questão, ou seja, o Lema de Lovász é um resultado que estabelece, sob determinadas hipóteses, para $r_i's$ adequados, se tivermos $\mathbb{P}(A_1) \leq r_1$, $\mathbb{P}(A_2) \leq r_2$,..., $\mathbb{P}(A_n) \leq r_n$ então $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n A_i) > 0$.

O surpreendente é que o que descrevemos acima está intimamente ligado à Teoria dos Gases na rede. A primeira prova de um resultado deste tipo é do próprio Paul Erdös e de Lásló Lovász em 1973 [20]. Em 1977, Joel Spencer [34] publica uma versão mais geral do teorema de Erdös e Lovász, versão esta a mais popular desde então usada em centenas de artigos. Na formulação de Spencer os $r_i's$ são escritos em função da dependência entre os eventos ruins. Em 1985, Shearer [32] publica um artigo com uma coleção de desigualdades algébricas envolvendo as probabilidades dos eventos ruins e as dependências entre eles, as desigualdades caracterizam completamente quando temos $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n A_i) > 0$. Apesar do teorema de Shearer não ser usado quando aplicamos o Lema de Lovász em um determinado problema, ele fornece uma caracterização da região onde o lema será, de fato, eficaz.

Alheio a tudo isso, em 1996, o famoso Físico-Matemático Roland Dobrushin obtém um novo e melhor critério para a convergência da série da Pressão do Gás de Rede (de fato ele prova para um gás bem mais geral) que melhora levemente o Critério de Kotecký-Preiss (1985) [28] (melhor até então) através de uma prova bem mais elementar do que as anteriores, baseada apenas no princípio da indução, e também prova o Critério de Kotecký-Preiss desta forma [16, 17]. Obter um critério melhor para a convergência de uma série equivale a obter números positivos $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ tais que na região $\mathbb{C}^n$ definida por $|w_1| \leq \rho_1, |w_2| \leq \rho_2, ..., |w_n| \leq \rho_n$ a série da Pressão (*Série de Mayer*) é convergente.

O milagre que ocorre aqui é que os valores $r_1, r_2, ..., r_n$ da versão do Lema de Lovász obtida por Spencer em 1977 coincidem com os valores $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ obtidos por Dobrushin em 1996! Sendo as expressões algébricas obtidas por ambos idênticas a menos de uma mudança de variáveis elementar. Tudo isso ficou adormecido até 2005 quando Alex Scott e Alan Sokal publicam um trabalho [35] esclarecendo tal fato até então invisível para os pesquisadores de ambas as áreas.

O trabalho é publicado quase na íntegra novamente em outra revista voltada ao especialistas em Combinatória em 2006 [36] para que o fato fosse amplamente divulgado na comunidade que mais usa o Lema de Lovász. Depois disso um comentário comum entre os pesquisadores de ambas áreas é que os resultados eram equivalentes, o critério de Dobrushin e o Lema Local de Lovász.

Em 2007, Roberto Fernández e Aldo Procacci publicam um novo critério [22] para a convergência da série de Mayer. O argumento é puramente combinatório e a abordagem permite estabelecer uma hierarquia explícita entre todos os critério já conhecidos. Não é imediato que há algo para estudarmos de posse de um novo critério depois do histórico descrito até aqui. No entanto, o artigo de Scott e Sokal, além de chamar a atenção para a equivalência entre o Critério de Dobrushin e o Lema Local de Lovász, mostram também, com a ajuda do resultado de Shearer, que a região onde a Pressão é analítica coincide com a região onde o Lema de Lovász é eficaz, independente de qualquer critério. Isto significa que toda vez que é provado para algum gás de rede que a Pressão é analítica numa determinada região, na mesma região um Lema de Lovász será eficaz.

De posse deste novo critério, obtivemos em 2011 uma nova versão do Lema de Lovász [6] que já foi aplicada em alguns exemplos [9, 29] mas, dado que são centenas de problemas já atacados com este lema, ainda não está claro o ganho desta nova versão perante a anterior.

Sendo assim, neste texto explicaremos (omitindo algumas provas mais técnicas que podem ser facilmente encontradas nas referências) a ligação entre as duas teorias. Estudaremos o Lema Local de Lovász e suas versões através de exemplos elementares e levaremos o aluno até a fronteira do que se sabe sobre este lema, explorando essa bonita propriedade da Teoria Combinatória de que é possível introduzirmos estudantes que iniciam seus estudos em Matemática em problemas considerados atuais de pesquisa.

Organização do texto:

- Capítulo 1. Noções e alguns resultados sobre Combinatória, Grafos e Probabilidade.

- Capítulo 2. O Método Probabilístico e o Lema Local de Lovász.

- Capítulo 3. O Gás de Rede.

- Capítulo 4. Os Teoremas de Shearer, Scott-Sokal e a ligação entre as duas teorias.

- Capítulo 5. Um novo lema e exemplos.

Organização das aulas:

Aula 1 - O Método Probabilístico e o Lema Local de Lovász.

Aula 2 - O Gás de Rede e Critérios de Convergência para a Série de Mayer.

Aula 3 - O Dicionário entre as duas teorias e o a nova versão do Lema de Lovász.

A proposta inicial é de que nas aulas 1 e 2 não seja apontado como é feita a ligação entre os dois assuntos, de forma que o estudante tenha a sensação de descoberta na aula 3, quando será explicado a conexão desvendada por Alex Scott e Alan Sokal.

# Sumário

# Capítulo 1

# Um pouco de Combinatória, Grafos e Probabilidade

Iniciamos o texto introduzindo conceitos e notações da Teoria dos Grafos e Combinatória.

**Definição 1.** *Um* **Grafo** *é um par ordenado $G = (V, E)$ onde $V$ é um conjunto que chamamos de conjunto dos* **vértices** *de $G$.*

*$E$ ainda, $E \subseteq \{\{a, b\} : a \neq b \text{ ; com } a \text{ e } b \text{ em } V\}$. Os elementos de $E$, conjunto de dois vértices distintos de $V$, são chamados de* **elos** *de $G$. O elo $\{a, b\}$ também é denotado por $ab$.*

**Exemplo 2.** *Na próxima figura do texto temos o grafo $G = K_5$ cujo conjunto de vértices é o conjunto finito $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e com conjunto de elos*

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}.$$

*Ou seja, cada vértice do grafo se liga a todos os demais. Quando isso acontece dizemos que o grafo é* `"completo"`*. Quando $V$ é finito diremos que o grafo é finito, do contrário, o grafo é dito infinito.*

A maioria dos grafos tratados neste texto são finitos.

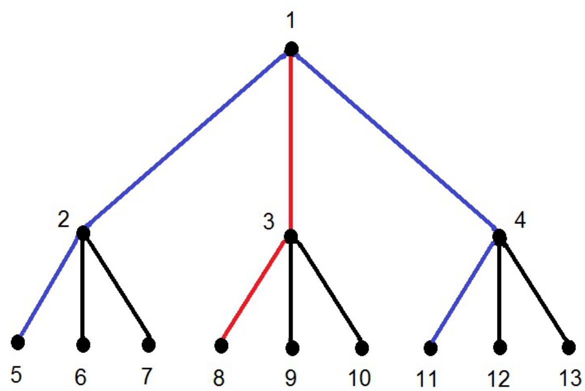
**Definição 3.** *Um* **subgrafo** *$G'$ de um grafo $G = (V, E)$ é um par ordenado $G' = (V', E')$ tal que $V' \subset V$ e $E' \subset E$.*

**Definição 4.** *Chamamos de* **caminho** *um subgrafo* $P = (V(P), E(P))$ *de um grafo* $G = (V, E)$ *tal que* $V(P) = \{x_0, x_1, ..., x_{k-1}, x_k\}$*, onde* $x_i \neq x_j$ *quando* $i \neq j$ *e* $0 \leq i, j \leq k-1$ *com* $E(P) = \{x_0x_1, x_1x_2, ..., x_{k-1}x_k\}$*. Note que o único par de vértices iguais que estamos permitindo é* $x_0 = x_k$*. Quando esta igualdade ocorrer diremos que o caminho é um* **ciclo***. Quando* $x_0 \neq x_k$ *diremos que* $P$ *é um* **caminho ligando os vértices** $x_0$ *e* $x_k$*.*

**Definição 5.** *Seja* $G$ *um grafo e* $P$ *um caminho em* $G$*. O* **comprimento do caminho** $P$ *é a quantidade de elos de* $P$*, ou seja, o comprimento de* $P$ *é* $|E(P)|$*.*

**Observação**: Seja $G = (V, E)$ um grafo e $P = (\{x_0\}, \emptyset)$ o subgrafo contendo apenas um vértice de $G$ e nenhum elo. Note que pela definição $P$ é um caminho (de fato é um ciclo) de comprimento zero.

**Definição 6.** *Seja* $G = (V, E)$ *um grafo,* $G$ *será dito* **conexo** *se para quaisquer dois vértices* $a$ *e* $b$ *de* $V$ *existir um caminho ligando os dois vértices* $a$ *e* $b$*.*




Árvore

**Definição 7.** *Seja* $G = (V, E)$ *um grafo,* $G$ *será dito uma* **árvore** *quando for conexo e não contiver ciclos entre seus subgrafos.*

**Exercício 1.** *Seja* $G = (V, E)$ *um grafo, mostre que a relação* $\mathfrak{R}$ *no conjunto dos vértices de G: "*`(a,b)` $\in \mathfrak{R}$ `se existe um caminho ligando os vértices a e b`*", é uma relação de equivalência em* $V \times V$*.*

**Definição 8.** *Seja* $G = (V, E)$*, os subgrafos induzidos pela relação de equivalência descrita no exercício anterior são chamados de* **componentes conexas** *do grafo* $G$*.*

**Definição 9.** *Seja* $G = (V, E)$ *um grafo e* $x \in V$*. Chamaremos de* **grau** *do vértice* $x$*, que denotaremos por* $d(x)$ *o número* $|\{y \in V : \{x, y\} \in E\}|$*. Ou seja, o grau de um vértice é o número de vértices que estão ligados a* $x$*.*

**Definição 10.** *Seja* $G = (V, E)$ *um grafo e* $x \in V$. *Diremos que um vértice* $z \in V$ *é* **vizinho** *de* $x$ *quando* $\{x, z\} \in E$.

**Definição 11.** *Dado um grafo* $G = (V, E)$ *dizemos que* $T \subseteq V$ *é* **independente** *em relação ao grafo* $G$ *se não existe elo de* $E$ *ligando pontos de* $T$.

**Notação:** O conjunto dos vizinhos de x, ou seja $\{y \in V : \{x, y\} \in E\}$ é chamado de **vizinhança de x** e denotado por $\Gamma(x)$. E ainda, $\Gamma^*(x) = \Gamma(x) \cup \{x\}$.

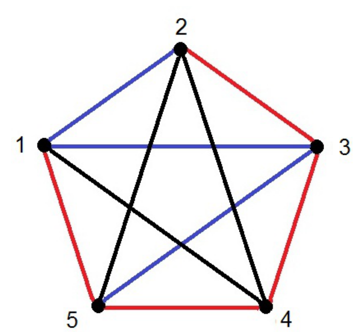
**Exercício 2.** *Seja* $G = (V, E)$ *um grafo com* $V$ *finito. Mostre que*

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2.|E|$$

**Exercício 3.** *Seja* $G = (V, E)$ *um grafo qualquer, com* $V$ *finito e* $|V| \geq 2$. *Mostre que existem pelo menos dois vértices* $x$ *e* $x'$ *tais que* $d(x) = d(x')$. *Dica: Use o Princípio da casa dos pombos.*

**Definição 12.** *Um grafo* $G = (V, E)$ *é dito* **bipartido** *quando existem* $V_1$ *e* $V_2$ *subconjuntos de* $V$ *formando uma partição de* $V$ *tais que não existem elos ligando dois vértices de* $V_1$ *e nem ligando vértices de* $V_2$. *Ou seja, se* $xv \in E$ *então* $x \in V_1$ *e* $y \in V_2$ *ou* $y \in V_1$ *e* $x \in V_2$.

**Definição 13.** *Dizemos que um grafo* $G = (V, E)$ *é* **regular** *quando todos os vértices do grafo tem o mesmo grau.*




$K_5$

**Definição 14.** *Dado um grafo $G = (V, E)$ chamamos de* **trilha** *uma sequência alternando vértices e elos de $G$ que começa e termina com vértices e que não contém nenhum elo repetido. Ou seja, uma trilha é uma sequência do tipo $\{x_1, e_1, x_2, e_2, x_3, ..., x_{k-1}, e_{k-1}, x_k\}$ onde $x_i's$ são vértices de $V$ e os $e_i's$ são elos de $E$ todos distintos, isto é, se $i \neq j$ então $e_i \neq e_j$.*

**Comentário**: Uma trilha pode passar pelo mesmo vértice várias vezes.

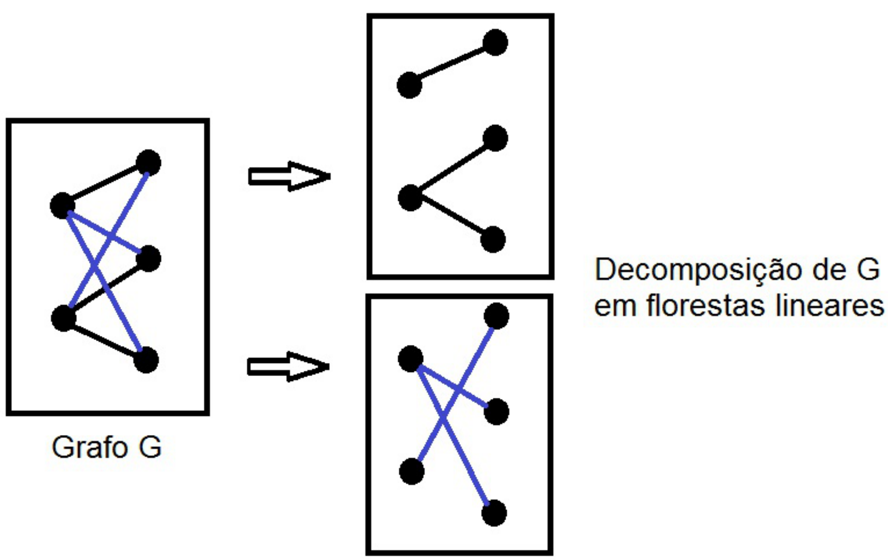
**Definição 15.** *Dado um grafo $G = (V, E)$ chamamos de* **emparelhamento**[1] *de $G$ um conjunto $M$ de elos dotado da seguinte propriedade: todo vértice de $G$ pertence a no máximo um elemento de $M$.*

**Definição 16.** *Dado um grafo $G = (V, E)$ chamamos de* **emparelhamento perfeito** *um emparelhamento cujos elos contém todos os vértices do grafo.*

### 1.0.1 Arvoricidade linear

**Definição 17.** *Uma* **floresta linear** *é um grafo em que cada componente conexa é um caminho.*

**Definição 18.** *A* **arvoricidade linear** *$la(G)$ de um grafo $G = (V, E)$ é o menor número de florestas lineares, subgrafos de $G$, tais que a união dos elos destes é o conjunto $E$.*




[1] Em inglês matching.

**Conjectura da Arvoricidade Linear**

Em 1980, Akiyama, Exoo e Harary conjecturaram que se $\Delta$ é o grau máximo do grafo então:

*A arvoricidade linear de um grafo simples finito $la(G)$ é sempre* $\left\lceil \dfrac{\Delta+1}{2} \right\rceil$ *ou* $\left\lceil \dfrac{\Delta}{2} \right\rceil$.

Tal conjectura já foi provada em alguns casos, por exemplo, para grafos planares. De fato, se sabe que para grafos planares $la(G)$ é igual a $\left\lceil \dfrac{\Delta}{2} \right\rceil$ para todo $\Delta \geq 10$, veja [11]. No caso de grafos regulares de grau $d$ a conjectura é a seguinte:(caso onde vamos nos concentrar)

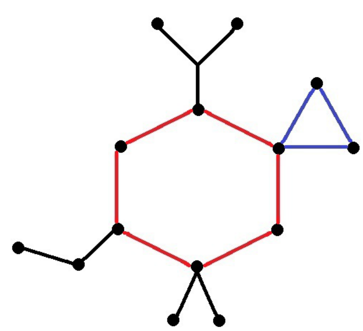
*A arvoricidade linear de qualquer grafo regular de grau $d$ é igual a* $\left\lceil \dfrac{d+1}{2} \right\rceil$.

Primeiramente observamos que qualquer grafo regular de grau $d$ com $n$ vértices tem $nd/2$ elos e que toda árvore linear tem no máximo $n-1$ elos. Então, para qualquer grafo regular de grau $d$ segue que:

$$la(G) \geq \frac{nd}{2(n-1)} > \frac{d}{2}.$$

Como $la(G)$ é um número inteiro, segue que $la(G) \geq \lceil (d+1)/2 \rceil$, isso mostra que a dificuldade de provar a conjectura está em mostrar que $la(G) \leq \lceil (d+1)/2 \rceil$. A conjectura já foi provada quando $d = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10$, ver [1, 2, 14, 24, 42]. Também se mostrou verdadeira para mais algumas classes de grafos com determinadas propriedades, por exemplo, veremos que é verdadeira para grafos com cintura suficientemente grande.

**Definição 19.** *Dado um grafo $G = (V, E)$, a* **cintura** *de $G$ é o tamanho do ciclo com menos elos que é subgrafo de $G$.*



Grafo de cintura g=3

Para provarmos a conjectura para grafos regulares de cintura grande vamos precisar do seguinte resultado de grafos:

**Teorema 20. (Hall-König-Egerváry)** *Seja $G$ um grafo finito bipartido $V(G) = V_1 \cup V_2$. Então $G$ contém um emparelhamento que cobre todos os vértices de $V_1$ se, e somente se,*

$$|\Gamma(A)| \geq |A| \tag{1.1}$$

*para todo $A \subseteq V_1$.*

*Prova*: Suponhamos que $|\Gamma(A)| \geq |A|$ para todo $A \subseteq V_1$. Quando $|V_1| = 1$ é evidente que $G$ contém um emparelhamento que cobre o vértice de $V_1$. A prova segue por indução em $|V_1|$.

Supomos agora que o teorema é válido para todo grafo com $1 \leq |V_1| < m$. Queremos mostrar que ele é válido quando $|V_1| = m$.

*Primeiro caso:* $|\Gamma(A)| \geq |A| + 1$ para todo $\emptyset \neq A \subsetneq V_1$.

Tomamos $ab \in E(G)$ e seja $H := G[V(G) - \{a, b\}]$.

Dado $A \subseteq V_1 - \{a\}$ temos que:

$$|\Gamma_H(A)| \geq |\Gamma(A)| - 1 \geq |A| + 1 - 1 = |A|.$$

Pela hipótese de indução, $H$ contém um emparelhamento $M \subseteq E(G)$ que cobre $V_1 - \{a\}$. Assim $M \cup \{ab\}$ é um emparelhamento que cobre $V_1$ em $G$.

*Segundo caso:* Existe $\emptyset \neq A \subsetneq V_1$ tal que $|\Gamma(A)| = |A|$.

Neste caso tomamos o seguinte grafo induzido $H := G[A \cup \Gamma(A)]$. Como $A \subsetneq V_1$, por hipótese de indução existe um emparelhamento $M$ em $H$ que cobre $A$.

O grafo $G' = G - H$ satisfaz a hipótese do teorema pois se existisse algum $S \subseteq V_1 - A$ tal que $|\Gamma_{G'}(S)| < |S|$ teríamos $|\Gamma(S \cup A)| < |S \cup A|$, o que não pode acontecer. Novamente por hipótese de indução temos que existe um emparelhamento $N$ em $G'$ que cobre $V_1 - A$, disto segue que $M \cup N$ é um emparelhamento em $G$ que cobre $V_1$. $\square$

Existem várias outras demonstrações deste resultado, por exemplo, [12] pág. 31.

**Exercício 4.** *Seja $G$ um grafo regular de grau $k > 0$ bipartido. Mostre que $G$ possui um emparelhamento perfeito.*

**Exercício 5.** *Seja $G$ um grafo regular de grau $k > 0$ bipartido. Mostre que $E(G)$ é união disjunta de $k$ emparelhamentos perfeitos.*

**Exercício 6.** *Seja $m \geq 1$ um número natural e $x_1, x_2, ..., x_m$ números complexos. Mostre que:*

$$\prod_{k=1}^{m}(1+x_k) = \sum_{T\subseteq[m]}\prod_{\ell\in T} x_\ell$$

Observação: Por convenção o produto de zero fatores é igual a 1. Ou seja $\prod_{\ell\in\emptyset} x_\ell = 1$.

**Exercício 7.** *Fixados $n_1, n_2, \ldots, n_k$ inteiros positivos tais que $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Mostre que o número de partições $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ de $[n]$ tais que*

$$|B_1| = n_1, \quad |B_2| = n_2, \quad \ldots, \quad |B_k| = n_k,$$

*é igual a*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

Apresentaremos agora um resultado bem conhecido em Combinatória que será usado na prova do teorema de Shearer.

**Notação:** Dados dois conjuntos $T$ e $Z$. O símbolo $\delta_{T,Z}$ assume o valor 1 quando $T = Z$ e zero caso contrário.

**Lema 21. (Princípio de Inclusão-Exclusão)**

*Seja $X$ um conjunto finito.*

*Considere o seguinte espaço vetorial real de funções $V = \{f : 2^X \to \mathbb{R}\}$ e a seguinte aplicação linear $\phi : V \to V$ definida por*

$$\phi f(T) = \sum_{Y:Y\supseteq T} f(Y). \tag{1.2}$$

*Então $\phi$ é inversível e*

$$\phi^{-1} f(T) = \sum_{Y:Y\supseteq T} (-1)^{|Y-T|} f(Y). \tag{1.3}$$

*Prova:* Seja $\psi : V \to V$ definida por

$$\psi f(T) = \sum_{Y:Y\supseteq T} (-1)^{|Y-T|} f(Y). \tag{1.4}$$

Então segue que

$$
\begin{aligned}
(\psi \circ \phi) f(T) &= \psi(\phi f(T)) = \sum_{Y: Y \supseteq T} (-1)^{|Y-T|} \phi f(Y) && (1.5)\\
&= \sum_{Y: Y \supseteq T} (-1)^{|Y-T|} \sum_{Z: Z \supseteq Y} f(Z) && (1.6)\\
&= \sum_{Z: Z \supseteq T} \sum_{\substack{Y:\\ T \subseteq Y \subseteq Z}} (-1)^{|Y-T|} f(Z) && (1.7)\\
&= \sum_{Z: Z \supseteq T} \delta_{T,Z} f(Z) = f(T). && (1.8)
\end{aligned}
$$

□

### 1.0.2 Espaços de Probabilidade

**Definição 22.** *Seja $\Omega$ um conjunto não-vazio e $\mathcal{P}(\Omega)$ o conjunto das partes de $\Omega$. Chamamos um subconjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ de* **$\sigma$-álgebra** *quando:*

*i)* $A \in \mathcal{A}$ *implica* $A^c = \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$,

*ii)* $A \in \mathcal{A}$ *e* $B \in \mathcal{A}$ *implica* $A \cup B \in \mathcal{A}$,

*iii)* $A_j \in \mathcal{A}$ *para* $j = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ *implica* $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

**Exercício 8.** *Prove que se $\mathcal{A}$ é uma $\sigma$-álgebra, então é fechada para intersecções enumeráveis, ou seja, se $A_j \in \mathcal{A}$ para $j = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ então $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.*

**Exemplo 23.** $\Omega = [n]$ *e* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Comentário: Apesar de simples, esta é uma das principais $\sigma$-álgebras deste texto.

Nomenclatura: Em geral, em textos de Probabilidade, os elementos de uma $\sigma$-álgebra são chamados de *eventos*. Por outro lado, o par $(\Omega, \mathcal{A})$ é chamado de *espaço mensurável* nos textos de Teoria da Medida em vez de espaços de eventos.

**Definição 24.** *Seja* $(\Omega, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e* $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ *satisfazendo:*

*i)* $\mathbb{P}(\mathcal{A}) \geq 0$,

*ii)* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

*iii) (σ-aditividade). Se* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *são disjuntos (isto é, mutuamente exclusivos), então*

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n),$$

*então* $\mathbb{P}$ *é chamada uma* **medida de probabilidade** *em* $\mathcal{A}$ *ou simplesmente uma* **probabilidade** *em* $\mathcal{A}$.

**Exemplo 25.** $\Omega = [n]$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ *e* $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{\#A}$, *para todo* $A \neq \varnothing$, $A \subseteq \Omega$ *e* $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

**Definição 26.** *Um* **espaço de probabilidade** *é uma tripla* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *onde:*

*i)* $\Omega$ *é um conjunto não-vazio,*

*ii)* $\mathcal{A}$ *é uma σ-álgebra de subconjuntos de* $\Omega$, *e*

*iii)* $\mathbb{P}$ *é uma probabilidade em* $\mathcal{A}$.

**Proposição 27.** *Em qualquer espaço de probabilidade* $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

*Prova:* Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a seguinte família de eventos $\Omega$: $A_1 = \Omega$ e $A_n = \emptyset$ para todo $n \geq 2$. Então, como a família é disjunta, pela propriedade *iii)* temos que

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\varnothing) + \mathbb{P}(\varnothing) + \mathbb{P}(\varnothing) ...$$

o que implica que obrigatoriamente $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$. □

A proposição anterior pode ser lida através da seguinte implicação:

$$A = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 0.$$

que é equivalente a seguinte implicação que será usada durante todo o texto:

$$\mathbb{P}(A) \neq 0 \Rightarrow A \neq \emptyset. \tag{1.9}$$

A implicação 1.9 nos diz que um conjunto $A$ que possui probabilidade positiva obrigatoriamente contém algum elemento e é este fato elementar que usaremos em todo o texto.

**Exercício 9.** *Construa um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que possua um evento $A$ não-vazio tal que $\mathbb{P}(A) = 0$.*

Comentário: O exercício acima nos lembra que um conjunto pode probabilidade zero ser ser vazio, ou seja, não valem as recíprocas das implicações acima.

**Exercício 10.** *Supondo $A \in \mathcal{A}$, mostre que:*

1. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
2. $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
3. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \mathbb{P}(A_1) \leq \mathbb{P}(A_2)$.
4. $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.
5. $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

**Definição 28.** *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Se $B \in \mathcal{A}$ e $\mathbb{P}(B) > 0$, então a* **probabilidade condicional de** $A$ **dado** $B$ *é definida por*

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \quad A \in \mathcal{A}.$$

**Exercício 11.** *Mostre que $\mathbb{P}(A^c \mid B) = 1 - \mathbb{P}(A \mid B)$.*

**Exercício 12.** *Fixado $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mathbb{P}(A) > 0$, mostre que a função definida por*

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

*é uma probabilidade.*

**Exercício 13.** *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Prove que:*

1. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A \mid B)$, *para todo* $A, B \in \mathcal{A}$.
2. $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$, *para todo* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, $n = 2, 3, \ldots$.
3. $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{A}_i | \bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{A}_j) = \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_i | \bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{A}_j))$

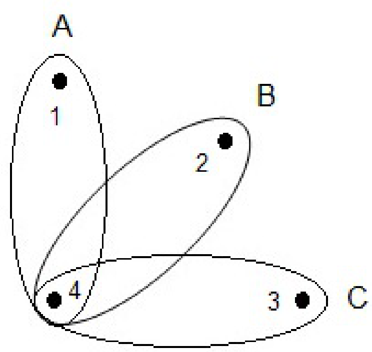
**Definição 29.** *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Os eventos aleatórios $A$ e $B$ são ditos* **independentes** *quando:*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

**Exercício 14.** *Se $A$ e $B$ são independentes, mostre que $A$ e $B^c$ também são independentes (e também $A^c$ e $B$, e ainda $A^c$ e $B^c$).*

**Definição 30.** *Seja $A$ um evento em um espaço de probabilidade e $(A_x)_{x\in X}$ uma família finita de eventos. Dizemos que $A$ é* **mutuamente independente** *da família finita $(A_x)_{x\in X}$ quando $A$ é independente de todos os conjuntos da forma $\bigcap_{x\in S} A_x$, com $S \subseteq X$.*

**Exemplo 31.** *Independência dois a dois não implica independência coletiva, ou seja, se eventos são 2 a 2 independentes pode ser que a família de eventos são seja mutuamente independente. Seja $\Omega$ um conjunto de quatro pontos, com os eventos $A, B, C$ assim definidos:*




*Seja $\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(2) = \mathbb{P}(3) = \mathbb{P}(4) = \frac{1}{4}$. Então, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$ e $\mathbb{P}(A\cap B) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A\cap C) = \mathbb{P}(B\cap C)$. Logo, $A, B, C$ são independentes 2 a 2, mas*

$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

O seguinte exercício também será usado na prova do Teorema de Shearer:

**Exercício 15.** *Seja $(A_i)_{i\in[n]}$ uma coleção de eventos em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ e seja $S \subseteq [n]$. Mostre que nestas condições $\mathbb{P}(\bigcap_{j\in S} \overline{B}_j) = \sum\limits_{T\subseteq S} (-1)^{|T|}\mathbb{P}(\bigcap\limits_{j\in T} B_j)$.*

Dica: Para cada $T \subseteq S$ defina $f(T) = \mathbb{P}(\bigcap\limits_{j\in T} B_j)$ e use o Princípio de Inclusão-Exclusão.

# Capítulo 2

# O Método Probabilístico e o Lema Local de Lovász

## 2.1 O Lema Local de Lovász

A menos que se fale o contrário, nesta seção $X$ denotará um conjunto finito e $G$ um grafo tal que $V(G) = X$.

**Problema**: Você possui uma coleção $(A_x)_{x \in X}$ de eventos ruins num determinado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ os quais deseja evitar. Dentro da filosofia do Método Probabilístico você quer descobrir condições, as mais gerais possíveis, de modo a garantir que com probabilidade positiva nenhum destes eventos ruins ocorre, ou seja, quer o mínimo de restrições possíveis para que

$$\mathbb{P}(\bigcap_{x \in X} \overline{A}_x) > 0, \tag{2.1}$$

onde $\overline{A}_x$ denota o complementar de $A_x$.

**Exemplo 32.** *Seja $(A_x)_{x \in X}$ uma família de eventos independentes em $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.*

Basta exigir que $\mathbb{P}(A_x) = p_x < 1, \forall\, x \in X$, pois neste caso:

$$\mathbb{P}(\bigcap_{x \in X} \overline{A}_x) = \prod_{x \in X} \mathbb{P}(\overline{A}_x) = \prod_{x \in X} (1 - p_x) > 0.$$

**Exemplo 33.** *Seja $(A_x)_{x\in X}$ uma família de eventos em $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tal que $\mathbb{P}(A_x) = p_x$ sobre a qual você não sabe quais são independentes.*

Como $\mathbb{P}(\bigcup_{x\in X} A_x) \leq \sum_{x\in X} \mathbb{P}(A_x) = \sum_{x\in X} p_x$, impondo que $\sum_{x\in X} p_x < 1$ obtemos o resultado. De fato,

$$\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) = \mathbb{P}(\overline{\bigcup_{x\in X} A_x}) = 1 - \mathbb{P}(\bigcup_{x\in X} A_x) \geq 1 - \sum_{x\in X} p_x > 0.$$

**Exemplo 34.** *Seja $(A_i)_{i\in[n]}$ uma família de eventos em $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tal que $\mathbb{P}(A_i) = p \ \forall\ i \in [n]$, ou seja, o mesmo exemplo anterior onde agora todos os eventos são equiprováveis.*

Como no exemplo anterior, basta tomar $n.p < 1$.

Os dois últimos exemplos não levam em conta a dependência entre os eventos. A idéia então é que, caso seja possível usar esta informação, obteremos maiores valores para as probabilidades $p_x$ de forma ainda a garantir $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) > 0$.

O primeiro resultado nesta direção foi obtido por Paul Erdös e László Lovász em 1973 [20], o qual continha a primeira versão do então chamado *Lema Local de Lovász*. Antes de enunciar o teorema precisamos de algumas definições:

**Definição 35.** *Dizemos que $G$ é um* **grafo de dependência** *para a família de eventos $(A_x)_{x\in X}$ em um espaço de probabilidade quando, para cada $x \in X$, $A_x$ é mutuamente independente da família $\{A_y : y \in X\backslash\Gamma^*(x)\}$.*

É importante ressaltar que o grafo de dependência não é único, basta observar que dado um grafo de dependência $G$ para uma família de eventos $(A_x)_{x\in X}$, qualquer outro grafo obtido a partir deste adicionando elos a $G$ será um grafo de dependência para a família. O resultado obtido por Erdös e Lovász pode então ser enunciado da seguinte forma:

**Teorema 36. (Erdös e Lovász)** *Seja $G$ um grafo de dependência para uma família de eventos $(A_x)_{x\in X}$ com grau máximo $\Delta$ e $\mathbb{P}(A_x) = p_x$. Suponha que $4p_x\Delta \leq 1$, para todo $x \in X$. Então, $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) > 0$.*

A prova do teorema é por indução, assim como a prova da versão mais geral obtida por Joel Spencer em 1977 [34] que apresentaremos agora. De fato, segundo o próprio Spencer, esta formulação da prova foi-lhe comunicada por Cecil Rousseau. Esta é a formulação mais popular hoje em dia e a mais geral no caso de grafos não orientados, que antecede nosso resultado o qual apresentaremos na seção seguinte.

O *Lema Local de Lovász* enunciado por Spencer foi:

**Teorema 37. (Lema Local de Lovász)** *Seja $G$ um grafo de dependência para a família de eventos $(A_x)_{x\in X}$ e suponha que existam $(r_x)_{x\in X}$ números em $[0,1)$ tais que, para cada $x$,*

$$\mathbb{P}(A_x) = p_x \leq r_x \prod_{y\in\Gamma(x)} (1-r_y). \tag{2.2}$$

*Então, $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) \geq \prod_{x\in X}(1-r_x) > 0$.*

*Prova:* Suponhamos que $|X| = n$, ou seja, $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Assim, não só nesta demonstração mas em várias outras, sem perda de generalidade, vamos supor que $X = [n] = \{1, 2, ..., n\}$ seguindo a tradição de vários artigos sobre este teorema.

**Afirmação:** Para qualquer que seja $i \in [n]$ e $S \subseteq [n]$ com $i \notin S$, temos que:

$$\mathbb{P}(A_i | \bigcap_{j\in S} \overline{A}_j) \leq r_i. \tag{2.3}$$

O teorema segue imediatamente da afirmação, para ver isso basta observar que pelo exercício **??**:

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{A}_i | \bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{A}_j) = \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_i | \bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{A}_j)) \geq \prod_{i=1}^{n} (1-r_i). \tag{2.4}$$

*Prova da afirmação*: Em dois casos é trivial, quando $S = \emptyset$ e quando $S \cap \Gamma(i) = \emptyset$. Nestes dois casos temos que $\mathbb{P}(A_i | \bigcap_{j\in S} \overline{A}_j) = \mathbb{P}(A_i)$ e por hipótese $\mathbb{P}(A_i) \leq r_i \prod_{j\in\Gamma(i)} (1-r_j) \leq r_i$.

Suponhamos agora que $S \cap \Gamma(i) \neq \emptyset$. Seja $S = S_1 \cup S_2$, onde $S_1 = S \cap \Gamma(i)$ e $S_2 = S \backslash S_1$.

A prova é por indução na cardinalidade do conjunto $S$. A base de indução é facilmente verificada pois a desigualdade é valida quando $S = \emptyset$. Suponhamos então que para qualquer $T \subset S$, $T \neq S$, a desigualdade (2.3) seja verdadeira.

Assim, se $S_1 = \{j_1, j_2, ..., j_\ell\}$, por hipótese de indução segue que

$$\mathbb{P}(A_{j_k} | \bigcap_{m=1}^{k-1} \overline{A}_{j_m} \cap \bigcap_{j\in S_2} \overline{A}_j) \leq r_{j_k}, \quad \forall \;\; 2 \leq k \leq \ell. \tag{2.5}$$

Quando $k = 1$ a desigualdade é novamente garantida pela hipótese de indução:

$$\mathbb{P}(A_{j_1} | \bigcap_{j\in S_2} \overline{A}_j) \leq r_{j_1}. \tag{2.6}$$

Assim como fizemos antes, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bigcap_{j_m \in S_1} \overline{A}_{j_m} | \bigcap_{j \in S_2} \overline{A}_j) &= \prod_{k=1}^{\ell} \mathbb{P}(\overline{A}_{j_k} | \bigcap_{m=1}^{k-1} \overline{A}_{j_m} \cap \bigcap_{j \in S_2} \overline{A}_j) \\
&= \prod_{k=1}^{\ell} (1 - \mathbb{P}(A_{j_k} | \bigcap_{m=1}^{k-1} \overline{A}_{j_m} \cap \bigcap_{j \in S_2} \overline{A}_j)) \\
&\geq \prod_{k=1}^{\ell} (1 - r_{j_k}) \geq \prod_{j \in \Gamma(i)} (1 - r_j), \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_i | \bigcap_{j \in S} \overline{A}_j) &= \mathbb{P}(A_i | \bigcap_{j_m \in S_1} \overline{A}_{j_m} \cap \bigcap_{j \in S_2} \overline{A}_j) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap \bigcap_{j_m \in S_1} \overline{A}_{j_m} | \bigcap_{j \in S_2} \overline{A}_j)}{\mathbb{P}(\bigcap_{j_m \in S_1} \overline{A}_{j_m} | \bigcap_{j \in S_2} \overline{A}_j)} \\
&\leq \frac{\mathbb{P}(A_i \cap \bigcap_{j_m \in S_1} \overline{A}_{j_m} | \bigcap_{j \in S_2} \overline{A}_j)}{\prod_{j \in \Gamma(i)} (1 - r_j)} \leq \frac{\mathbb{P}(A_i | \bigcap_{j \in S_2} \overline{A}_j)}{\prod_{j \in \Gamma(i)} (1 - r_j)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(A_i)}{\prod_{j \in \Gamma(i)} (1 - r_j)} \leq \frac{r_i \prod_{j \in \Gamma(i)} (1 - r_j)}{\prod_{j \in \Gamma(i)} (1 - r_j)} = r_i. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

□

Na penúltima igualdade usamos o fato de que $S_2$ é composto somente por vértices que não são adjacentes a $i$ e, sendo $G$ um grafo de dependência, $A_i$ é mutuamente independente da família $(A_j)_{\{j \in S_2\}}$. Salientamos que a demonstração usa fortemente a identidade $\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_i | \bigcap_{j \in S_2} \overline{A}_j)$, onde $S_2 \subseteq [n] \backslash \Gamma^*(i)$.

Esta última observação permite enfraquecer as hipóteses do teorema e nos leva à seguinte definição:

**Definição 38.** *Dizemos que $G$ é um* **grafo de dependência assimétrico**[1] *para a família de eventos $(A_x)_{x\in X}$ em um espaço de probabilidade quando, para cada $x \in X$,*

$$\mathbb{P}(A_x | \bigcap_{y\in Y} \overline{A}_y) \leq \mathbb{P}(A_x), \tag{2.9}$$

*para todo $Y \subseteq X \backslash \Gamma^*(x)$.*

**Observação 39.** *Todo grafo de dependência é em particular um grafo de dependência assimétrico.*

Este fato foi observado por Spencer e Erdös em 1991 [21], que perceberam a importância de trabalhar com grafos mais gerais. O novo conceito foi usado para uma nova aplicação do Lema Local de Lovász no estudo dos *Latin Transversals*. Veremos este exemplo no futuro, no qual será aplicado a nova versão do Lema de Lovász obtida por nós via o critério de convergência para a série de Mayer de Fernández-Procacci.

O resultado obtido por Spencer e Erdös é o seguinte:

**Teorema 40.** *Suponha que $G$ é um grafo de dependência assimétrico para a família de eventos $(A_x)_{x\in X}$ e suponha que existam $(r_x)_{x\in X}$ números em $[0,1)$ tais que, para cada $x$,*

$$\mathbb{P}(A_x) = p_x \leq r_x \prod_{y\in\Gamma(x)} (1 - r_y). \tag{2.10}$$

*Então, $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) \geq \prod_{x\in X}(1 - r_x) > 0$.*

*Prova:* Análoga à do teorema anterior, observando que a penúltima igualdade da demonstração é substituída pela desigualdade $\mathbb{P}(A_i | \bigcap_{j\in S_2} \overline{A}_j) \leq \mathbb{P}(A_i)$. □

Agora podemos enunciar a generalização natural do teorema obtido por Erdös e Lovász. Esta versão é chamada de *caso simétrico*, isto porque é muitas vezes enunciada no caso onde todos os eventos tem uma mesma probabilidade $p$ de ocorrerem ou tomando $p = \sup_{i\in[n]}\{\mathbb{P}(A_i) = p_i\}$.

Pela praticidade na verificação das hipóteses, esta versão do teorema é muitas vezes preferida pelos autores. Neste caso não é necessário ter uma informação mais refinada a respeito da estrutura do grafo de dependência, apenas o valor da probabilidade dos eventos (ou o supremo destas) e o grau máximo $\Delta$ do grafo de dependência.

**Teorema 41. (Lema Local de Lovász - caso simétrico)** *Seja $G$ um grafo de dependência para uma família de eventos $(A_i)_{i\in[n]}$ com grau máximo $\Delta$ e $\mathbb{P}(A_i) = p_i$. Suponha $p.(\Delta+1).e \leq 1$ e considere $p = \sup_{i\in[n]} p_i$. Então $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{A}_i) > 0$.*

[1] A nomenclatura usual em inglês para este tipo de grafo é *lopsidependency graph*.

*Prova:* Segue do Lema de Lovász usual, tomando $r_i = \frac{1}{\Delta+1}$ para todo $i \in [n]$. De fato, para ver isso precisamos verificar a hipótese do Lema de Lovász, ou seja, para cada $i \in [n]$ devemos ter:

$$\mathbb{P}(A_i) = p_i \leq r_i \prod_{j \in \Gamma(i)} (1 - r_j). \tag{2.11}$$

Mas como definimos $r_i = \frac{1}{\Delta+1}$, temos:

$$\begin{aligned} \prod_{j \in \Gamma(i)} (1 - r_j) &= \prod_{j \in \Gamma(i)} \left(1 - \frac{1}{\Delta + 1}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{\Delta + 1}\right)^{\Delta} \\ &= \left(\frac{\Delta}{\Delta + 1}\right)^{\Delta} = \left(\frac{\Delta + 1}{\Delta}\right)^{-\Delta} = \left(1 + \frac{1}{\Delta}\right)^{-\Delta} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Lembre que a seqüência $b_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ é crescente e converge para o número de Euler, portanto a seqüência $\frac{1}{b_k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k}$ é decrescente e converge para $\frac{1}{e}$.

Agora basta observar que, como por hipótese temos $p.(\Delta + 1).e \leq 1$, então para todo $i \in [n]$:

$$p_i \leq p \leq \frac{1}{(\Delta + 1)}.\frac{1}{e} \leq \frac{1}{(\Delta + 1)}.\left(1 + \frac{1}{\Delta}\right)^{-\Delta} = r_i \left(1 + \frac{1}{\Delta}\right)^{-\Delta} \leq r_i \prod_{j \in \Gamma(i)} (1 - r_j) \tag{2.13}$$

$\square$

Antes de entrarmos nos trabalhos de Shearer, Scott e Sokal, que nos ajudarão a entender a ligação entre o Lema de Lovász e a convergência da série de Mayer, cabe ressaltar que em 1996 Dobrushin [16, 17] chegou na mesma cota que Spencer aparentemente desconhecendo completamente os trabalhos de Spencer, Erdös e Lovász.

O fato até aqui parece milagroso. Porém, após expormos o resultado de Shearer [32] ficará claro que Scott e Sokal [35] perceberam que Shearer havia provado que a função partição não se anulava dentro do raio de convergência estipulado por Dobrushin.

Ao apresentar a condição exigida pelo Lema Local de Lovász para um pesquisador de Mecânica Estatística sem falar que se trata da hipótese do lema, se este desconhecesse o trabalho de Scott e Sokal provavelmente responderia que o enunciado se refere ao Critério de Dobrushin.

De fato, com uma fácil mudança de variáveis podemos colocar esta desigualdade na forma que usualmente encontramos a condição de Dobrushin nos trabalhos em Mecânica Estatística:

**Exercício 16.** *Sejam* $(\mu_x)_{x\in X}$ *números reais não-negativos definidos por* $\mu_x = \frac{r_x}{1-r_x}$ *onde* $0 \leq r_x < 1$, *ou seja,* $r_x = \frac{\mu_x}{1+\mu_x}$ $\forall\, x \in X$. *Mostre que as seguintes desigualdades são equivalentes:*

(Desigualdade do Lema de Lovász):

$$i)\ p_x \leq r_x \prod_{y\in\Gamma(x)} (1-r_y)$$

(Desigualdade do Critério de Dobrushin):

$$ii)\ p_x \leq \frac{\mu_x}{\displaystyle\prod_{y\in\Gamma^*(x)} (1+\mu_y)}.$$

E esta é a maneira que apresentaremos o Critério de Dobrushin no Capítulo sobre os critérios de convergência.

Outro ponto a ressaltar é que o Lema de Lovász não só fornece uma cota superior para uma região para as probabilidades $(p_x)_{x\in X}$ onde temos a garantia de que $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) > 0$, mas também nos fornece uma cota inferior para a probabilidade $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) \geq \prod_{x\in X}(1-p_x) > 0$. Esta cota inferior é válida dentro das hipóteses do Lema de Lovász, ou seja, dentro do polidisco de poli-raio proveniente do critério de Dobrushin.

**Aplicação:**

Agora daremos um exemplo de como podemos utilizar o Lema de Lovász, no último capítulo voltamos neste exemplo e trazemos outros onde aplicamos nossa nova versão do Lema. Centenas de outros exemplos podem ser encontrados na literatura ou em uma busca rápida na internet.

**Proposição 42.** *Seja* $G = (V, E)$ *um grafo tal que seus vértices tem grau máximo* $\Delta$ *e seja* $V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_n$ *uma partição do conjunto dos vértices* $V$ *em* $n$ *conjuntos dois a dois disjuntos. Suponhamos ainda que para cada conjunto* $V_i$ *tenhamos* $|V_i| \geq 2e\Delta$. *Então existe um conjunto independente* $W \subseteq V$ *de cardinalidade* $n$ *que contém exatamente um vértice de cada* $V_i$.

*Prova:* Sem perda de generalidade podemos assumir que para cada conjunto $V_i$ temos $|V_i| = k$, onde $k$ é a menor dentre as cardinalidades dos conjuntos $V_i$, $1 \leq i \leq n$. O caso geral segue deste usando o grafo induzido por $G$ em uma união de $n$ subconjuntos de cardinalidade $k$, cada um deles subconjunto de um dos $V_i$.

Escolhemos um conjunto $W$ de $n$ vértices como segue: em cada conjunto $V_i$ escolhemos, aleatoriamente e independentemente, um único vértice de acordo com a distribuição uniforme, isto é, em cada $V_i$ a probabilidade de um vértice ser escolhido é $1/k$.

Para cada elo $ab \in E$, seja $W_{ab}$ o evento "$W$ contém ambos os vértices $a$ e $b$". Então $\mathbb{P}(W_{ab}) = 0$, se $a$ e $b$ são elementos do mesmo $V_i$ e $\mathbb{P}(W_{ab}) = 1/k^2 = p$, se $a \in V_i$ e $b \in V_j$, com $i \neq j$. Note que, se os vértices $a$ e $b$ pertencem a $V_i \cup V_j$ temos que o evento $W_{ab}$ é mutuamente independente da família de eventos composta por todos os outros eventos $W_{cd}$ tais que nem $c$ e nem $d$ pertencem a $V_i \cup V_j$.

Assim, existe um grafo de dependência $H = (\{ab\}_{ab\in E(G)}, E(H))$ para a família de eventos $(W_{ab})_{ab\in E(G)}$ com grau máximo menor ou igual a $2k\Delta - 1$. Podemos tomar $H$ sendo o grafo de dependência para a família $(W_{ab})_{ab\in E(G)}$ com menor número de elos possível, ou seja, existirá um elo de $H$ entre dois elos de $G$ $ab$ e $cd$ se, e somente se, $W_{ab}$ e $W_{cd}$ forem dependentes.

Seja $\{a, b\} \subset V_i \cup V_j$. Pela definição do grafo $H$ temos que se $cd \in \Gamma_H(ab)$, então $c \in V_i \cup V_j$ ou $d \in V_i \cup V_j$, donde segue que $|\Gamma_H(ab)| \leq 2k\Delta - 1$. O valor $2k\Delta$ é obtido observando que cada vértice de $V_i$ está ligado a no máximo $\Delta$ vértices de $G$ e que $V_i$ possui $k$ vértices, isso que dizer que temos no máximo $k\Delta$ elos de $G$ incidentes em algum elemento de $V_i$. O mesmo é válido para $V_j$ totalizando no máximo $2k\Delta - 1$ elos $cd$ ligados (através de elos de $H$) ao elo $ab$. Subtraímos o (-1) descontando o próprio elo $ab$.

Pelo Lema de Lovász (caso simétrico), se $p.(2k\Delta - 1 + 1).e \leq 1$ então

$$\mathbb{P}(\bigcap_{ab\in E(G)} \overline{W}_{ab}) > 0. \tag{2.14}$$

Como o evento $\bigcap_{ab\in E(G)} \overline{W}_{ab}$ ter probabilidade positiva equivale à existência de conjunto $W$ procurado a proposição está provada já que $p = \frac{1}{k^2}$, $k = |V_i|$ e $p.2k\Delta.e \leq 1$ implicam $|V_i| \geq 2e\Delta$. $\square$

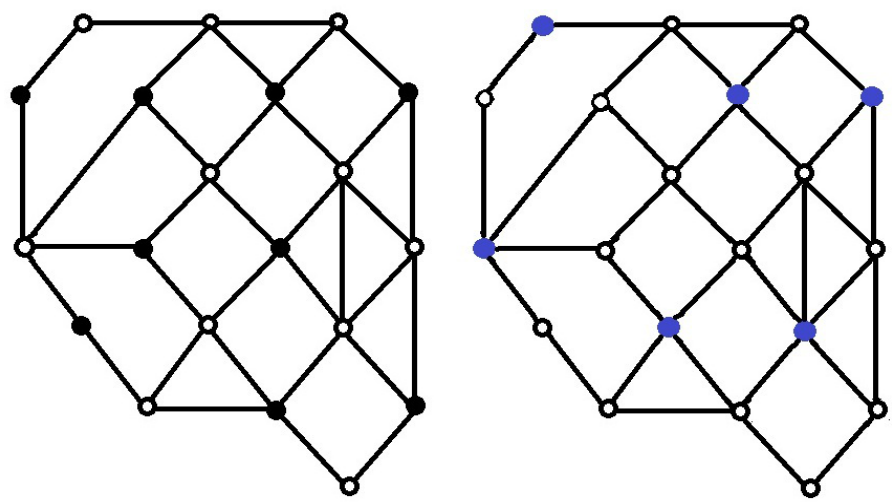
Mais adiante voltaremos no problema de encontrar conjunto de vértices independentes em grafos.

# Capítulo 3

# O Gás de rede

Um análogo abstrato dos modelos de gases em Mecânica Estatística que usam a formulação do ensemble grande canônico pode ser posto da seguinte forma:

Seja $X$ um conjunto finito que fará o papel do conjunto de posições onde as partículas ou seus centros de massa podem estar. O nome *gás de rede* se refere ao fato que, em geral, estes pontos estão dispostos em um ambiente espacial, por exemplo $\mathbb{Z}^2$ (chamado de rede nestes casos). Nestes exemplos existe a noção de distância e podemos refinar o modelo impondo, por exemplo, a *exclusão dos primeiros vizinhos*. Veja na figura abaixo dois exemplos de configurações permitidas num grafo com interação do tipo exclusão dos primeiros vizinhos:



O termo exclusão dos primeiros vizinhos é usado para designar o fato de que não é permitido (desconsiderando tais configurações) que duas posições vizinhas na rede estejam ocupadas simultaneamente.

Um caso bem simples é quando para cada um dos pontos de $X$ pode existir ou não uma partícula (no máximo uma), onde ainda supomos que a interação depende somente da distância entre elas e que as partículas estejam dispostas numa rede onde os pontos de $X$ são muito distantes de modo a não existir interação entre elas.

Vamos supor também que as *atividades* ou *fugacidades* das partículas são todas iguais a uma constante $w \in \mathbb{C}$. Nos modelos físicos esta quantidade contém informações da partícula[1].

Neste caso, a definimos a *função partição* grande canônica por:

$$\Xi(w) = (1+w)^{|X|} \tag{3.1}$$

Note que isso nada mais é do que a soma de todas as possibilidades (configurações) de existir ou não partícula em cada um dos pontos de $X$ onde cada configuração entra com um peso $w^{|S|}$, sendo $S$ o número de posições ocupadas por partículas na configuração.

Para introduzirmos interação entre as partículas usamos uma *função interação de pares*[2] *do tipo caroço duro auto-repulsiva* $W : X \times X \to \{0,1\}$, onde o adjetivo de auto-repulsivo se refere ao fato de que cada posição da rede só pode ter uma única partícula ($W(x,x) = 0 \ \forall\ x \in X$) e o nome *caroço duro*[3] traduz a propriedade de que os únicos possíveis valores que a interação pode assumir são 0 ou 1. A função partição pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Xi(w) = (1+w)^{|X|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\subseteq X^n} w^n \prod_{1\le i<j\le n} W(x_i,x_j) \tag{3.2}$$

A generalização natural deste modelo é quando consideramos atividades que não são todas iguais e é com ela que vamos trabalhar daqui pra frente.

Neste caso, temos um *vetor atividade* $\mathbf{w} = (w_x)_{x\in X} \in \mathbb{C}^X$. Note que agora estamos permitindo que exista interação entre as partículas dependendo de qual posição ocupam na rede via a função interação $W$. Podemos codificar os pares de posições onde partículas interagem umas com as outras introduzindo um grafo $G = (X, E(G))$ cujos elos são determinados pela interação $W$ e vice-versa, ou seja, se $x \neq y$ então $xy \in E(G)$ se, e somente se, $W(x,y) = 0$.

Desta forma, fica claro que fixar uma interação de pares $W$ com tais propriedades é o mesmo que fixar um grafo $G$ cujo conjunto de vértices é $X$. Exemplos deste tipo de modelo é

[1] Nos modelos mais realísticos a fugacidade é um número real, por exemplo $w = e^{\beta\mu}(\frac{2\pi m}{\beta\hbar^2})^{\frac{3}{2}}$ onde $\beta$ é o inverso da temperatura, $m$ é a massa da partícula, $\mu$ é o potencial químico [27] e $\hbar$ é a constante de Planck. No entanto permitiremos que esta variável assuma valores complexos.

[2] Não levamos em conta a interação de três ou mais partículas entre si.

[3] Em inglês: hard-core.

o gás de rede com uma interação onde as partículas interagem com os seus primeiros vizinhos determinados pelo grafo, ou os primeiros e segundos vizinhos, etc.

Assim, seguindo a notação de Scott e Sokal [35], a função partição $\Xi$ que é determinada pelo vetor atividade $\mathbf{w}$ e pela interação $W$, pode ser escrita na forma:

$$Z_W(\mathbf{w}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(x_1,\dots,x_n)\subseteq X^n} \left( \prod_{i=1}^{n} w_{x_i} \right) \prod_{1\leq i<j\leq n} W(x_i, x_j), \tag{3.3}$$

ou seja,

$$Z_W(\mathbf{w}) = \sum_{T\subseteq X} \left( \prod_{x\in T} w_x \right) \left( \prod_{\{x,y\}\subseteq T} W(x,y) \right). \tag{3.4}$$

Como o caso considerado aqui é o do gás com interação repulsiva do tipo caroço duro, dada $W$ construímos o grafo $G$ e, reciprocamente, dado $G$ podemos determinar os pares para os quais $W$ vale zero ou 1. Sendo assim podemos escrever a função partição em função do grafo $G$ construído a partir da interação. Em outras palavras, a função (3.4), de fato, pode ser escrita como:

$$Z_G(\mathbf{w}) = \sum_{\substack{T\subseteq X \\ T\in I(G)}} \prod_{x\in T} w_x \tag{3.5}$$

onde $I(G)$ detona a família de *subconjuntos independentes* em relação ao grafo $G$ do conjunto $X = V(G)$.

**Definição 43.** *Dado um grafo $G = (V, E)$ o* **polinômio de conjuntos independentes**[4] *de $G$ é dado por*

$$Z_G(\mathbf{w}) = \sum_{\substack{T\subseteq X \\ T\in I(G)}} \prod_{x\in T} w_x. \tag{3.6}$$

Geralmente, nos artigos de Combinatória e Teoria dos Grafos, ver por exemplo [10], o polinômio de conjuntos independentes é encontrado no caso mais restrito onde todas as atividades coincidem (tal como em nosso primeiro exemplo de gás onde as partículas não interagem), ou seja,

$$Z_G(w) = \sum_{\substack{T\subseteq X \\ T\in I(G)}} w^{|T|}, \tag{3.7}$$

no entanto, em geral, usaremos a verão mais geral de várias variáveis.

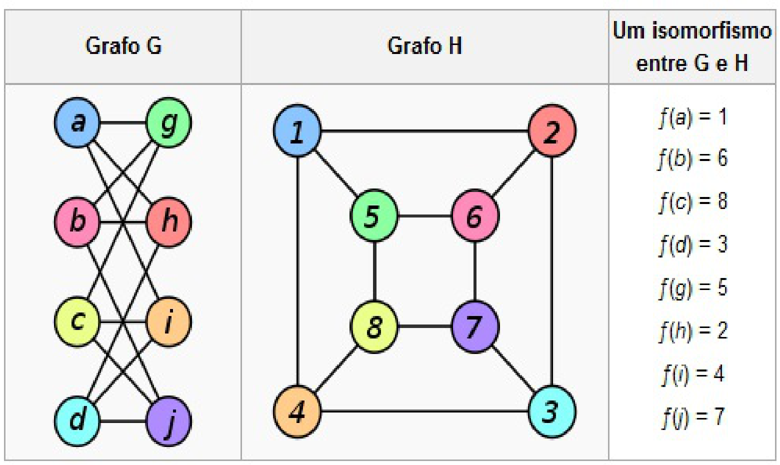
Assim, o polinômio de conjuntos independentes de um grafo $G = (X, E)$ é a função partição do gás com interação $W$ do tipo caroço duro construída a partir do conjunto de elos $E$.

[4] A nomenclatura em inglês é independent-set polynomial

O que veremos a seguir é que se nos restringirmos a um polidisco complexo onde a função partição não possui zeros, ou seja, se as probabilidades $\mathbf{p} = (p_x)_{x\in X}$ da família de eventos $(A_x)_{x\in X}$ estão neste polidisco, então o teorema de Shearer nos garante que $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) \geq Z_G(-\mathbf{p}) > 0$.

**Exercício 17.** *Suponha que $G$ seja um grafo finito de duas componentes conexas $G_1$ e $G_2$. Isso significa que $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ com $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, e ainda, se $E_1 = E(G_1)$ são os elos de $G$ que contém vértices de $V(G_1)$ e $E_2 = E(G_2)$ são os elos de $G$ que contém vértices de $V(G_2)$ obrigatoriamente tem-se $E(G_1) \cap E(G_2) = \emptyset$ e $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$ além do fato dos grafos $G_1$ e $G_2$ serem conexos. Mostre que neste caso do polinômio de conjuntos independentes de uma variável $w$ dado por $Z_G(w) = \sum_{\substack{T\subseteq X\\ T\in I(G)}} w^{|T|}$ se fatora da seguinte forma $Z_G(w) = Z_{G_1}(w).Z_{G_2}(w)$.*

É sempre natural em matemática nos questionarmos sobre invariantes de determinado objeto. Dois grafos dados $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ são `isomorfos` quando existe uma bijeção $\phi : V_1 \to V_2$ tal que $ab \in E_1$ se, e somente se, $\phi(a)\phi(b) \in E_2$. Neste caso, $\phi$ é dita um isomorfismo entre $G_1$ e $G_2$. Isso significa que, se renomearmos os vértices, o grafo é o mesmo. Note, conforme a figura abaixo, como a posição que desenhamos os vértices do grafo pode nos confundir a tal ponto de acharmos que não existe tal isomorfismo (figura extraída do Wikipedia):




É fácil ver que dois grafos isomorfos têm o mesmo polinômio de conjuntos independentes. A pergunta (para os que já estudaram grafos a resposta é imediata) é: se o polinômio de conjuntos independentes de um grafo é um invariante completo, ou seja, se dois grafos têm o mesmo polinômio de conjuntos independentes, eles necessariamente são isomorfos?

**Exercício 18.** *Exiba dois Grafos NÃO ISOMORFOS que possuem o mesmo polinômio de conjuntos independentes.*

## 3.1 A série de Mayer e sua convergência

Seja $X$ finito.

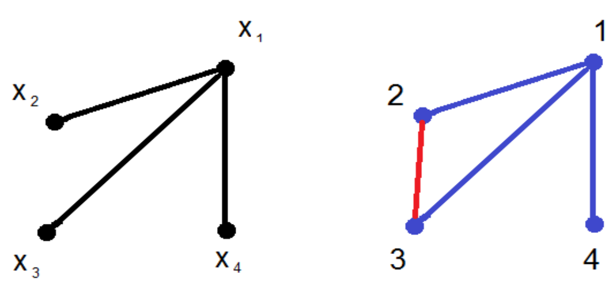
Como já vimos, a *função partição* grande canônica de um gás com interação $W$ do tipo caroço duro é dada por

$$\begin{aligned} Z_W(\mathbf{w}) = Z_G(\mathbf{w}) &= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in X^n} w_{x_1} w_{x_2} \cdots w_{x_n} \prod_{1\leq i<j\leq n} W(x_i,x_j) \\ &= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in X^n} w_{x_1} w_{x_2} \cdots w_{x_n} \prod_{1\leq i<j\leq n} [(W(x_i,x_j)-1)+1] \\ &= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in X^n} w_{x_1} w_{x_2} \cdots w_{x_n} \prod_{1\leq i<j\leq n} [(F(x_i,x_j)+1] \\ &= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in X^n} w_{x_1} w_{x_2} \cdots w_{x_n} \left( \sum_{g\in G_n} \prod_{\{i,j\}\in E(g)} F(x_i,x_j) \right) \end{aligned}$$

onde $F(x_i, x_j)$ é definido por $W(x_i, x_j) - 1$ para quaisquer $x_i, x_j$ em $X$ e $G_n$ denota o conjunto de todos os grafos $g$ cujo conjunto de vértices é $[n]$. Observe que na última igualdade usamos o exercício 6.

Note que, apesar de somarmos `todos` grafos cujo conjunto de vértices é $[n]$, vários deles não contribuem para a soma acima pois toda vez que duas posições $x_\ell$ e $x_k$ (vértices do grafo de interação) não forem "proibidas"pela interação $W$ de estarem ocupadas simultaneamente, teremos $W(x_\ell, x_k) = 1 \Leftrightarrow F(x_\ell, x_k) = 0$. Isso implica que $\prod_{\{i,j\}\in E(g)} F(x_i, x_j)$, para todo $g$ tal que $\{\ell, k\} \in E(g)$.

Nos grafos abaixo se os elos do grafo da esquerda $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ indicam os pares $\{x_\ell, x_k\}$ onde $W(x_\ell, x_k) = 1$ então o grafo $g \in G_4$ à direita não contribui para a soma.



**Definição 44.** *A Pressão do gás de rede (a volume finito $X$) é definida por*

$$P_X(\mathbf{w}) = \frac{1}{|X|}\log Z_G(\mathbf{w}). \tag{3.8}$$

De fato a definição difere da encontrada nos livros de Física-Estatística por um sinal e um fator de $\beta^{-1}$. Entretanto, isso não afetará em nada nossa análise dado que estamos buscando um polidisco $|w_1| \le \rho_1, |w_2| \le \rho_2, ..., |w_n| \le \rho_n$ em $\mathbb{C}^n$ onde $P_X$ seja analítica. Esse ponto de vista é adotado em vários livros que fazem um tratamento rigoroso da Mecânica Estatística, tais como [33]. É imediato ver que nesta análise também não influencia o fator $|X|^{-1}$, ou seja, para que a Pressão seja analítica em determinado polidisco basta controlarmos a série da função $\log Z_G(\mathbf{w})$.

Aqui cabe um comentário importante, muitos fenômenos físicos como transições de fase se manifestam no *limite termodinâmico*, ou seja, $X$ é tomado como um subconjunto de vértices de um grafo infinito ($\mathbb{Z}^2$ por exemplo) e fazemos $X$ tender ao conjunto infinito de vértices do grafo de maneira adequada (no sentido de van Hove, por exemplo). Ao tomarmos o Limite Termodinâmico, fazemos isso com o objetivo de controlar esta série uniformemente em relação ao volume $X$. A função limite é chamada de *Pressão* e entender as singularidades (uma das possíveis definições para Transição de Fase) desta função é uma das principais questões quando estudamos os gases a volume infinito.

Aqui não precisaremos nos preocuparmos com este limite pois nosso interesse é a conexão com o Lema de Lovász e, portanto, sempre estaremos a volume finito $X$.

Para prosseguirmos esse estudo dos gases a volume finito usaremos o seguinte resultado fundamental sobre série formais amplamente utilizado em Mecânica Estatística:

**Proposição 45. (Série de Mayer)**

$$\log Z_G(\boldsymbol{w}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(x_1,...,x_n)\in X^n} \phi^T(x_1,...,x_n) w_{x_1}\cdots w_{x_n} \tag{3.9}$$

*onde $\phi^T(x_1,...,x_n)$ são chamados de* `coeficientes de Ursell` *e são definidos da seguinte forma*

$$\phi^T(x_1,...,x_n) = \begin{cases} 1, & se\ n=1 \\ \displaystyle\sum_{\substack{g\in\mathcal{C}_n \\ E(g)\subset E(g(x_1,...,x_n))}} (-1)^{|E(g)|}, & se\ n\ge 2\ \ e\ g(x_1,...,x_n)\in\mathcal{C}_n \\ 0, & se\ n\ge 2\ \ e\ g(x_1,...,x_n)\notin\mathcal{C}_n \end{cases} \tag{3.10}$$

*onde $\mathcal{C}_n$ denota o conjunto dos grafos conexos com conjunto de vértices $[n] = \{1, 2, ..., n\}$ e, para cada n-upla $(x_1, ..., x_n) \in X^n$, o grafo $g(x_1, ..., x_n)$ é definido da seguinte forma: o conjunto de vértices é $[n]$ e $\{i, j\} \in E(g(x_1, ..., x_n))$ se, e somente se, $F(x_i, x_j) = -1 \Leftrightarrow W(x_i, x_j) = 0$.*

O que esta identidade nos diz é que o logaritmo elimina as parcelas referentes a grafos desconexos da função partição.

A equação (3.9) faz sentido apenas para $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ tal que a série formal no lado direito de (3.9) seja convergente.

*Prova:* Para provar (3.9), basta mostrar que:

$$Z_G(\boldsymbol{w}) = \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in X^n} \prod_{i=1}^{n} w_{x_i} \sum_{g\in\mathcal{C}_n} \prod_{\{i,j\}} F(x_i,x_j)\Big).$$

Vamos usar a seguinte Identidade:

$$\sum_{g\in G_n} \prod_{\{i,j\}\in E_g} F(x_i,x_j) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\{B_1,\dots,B_k\}\in\mathcal{P}(n)} \prod_{j=1}^{k} \phi^T(B_j),$$

onde

$$\phi^T(B_j) = \begin{cases} \sum_{g\in C_{B_j}} \prod_{\{i,j\}\in E_g} F(x_i,x_j), & \text{se} \quad |B_j| \geq 2 \\ 1, & \text{se} \quad |B_j| = 1 \end{cases}$$

e $\mathcal{P}(n)$ é o conjunto das partições de $[n]$.

Portanto,

$$\begin{aligned} Z_G(\boldsymbol{w}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in X^n} \prod_{i=1}^{n} w_{x_i} \sum_{g\in G_n} \prod_{\{i,j\}\in E_g} F(x_i,x_j) \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in X^n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\{B_1,\dots,B_k\}\in\mathcal{P}(n)} \prod_{j=1}^{k} \Big[\prod_{i\in B_j} w_{x_i}\phi^T(B_j)\Big] \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\{B_1,\dots,B_k\}\in\mathcal{P}(n)} \prod_{j=1}^{k} \Big( \sum_{(x_{i_1},\dots,x_{i_{|B_j|}})\in X^{|B_j|}} \prod_{i\in B_j} w_{x_i}\phi^T(B_j)\Big) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Agora, note que fixado $G$, o grafo de interação, a expressão

$$\sum_{(x_{i_1},\dots,x_{i_{|B_j|}})\in X^{|B_j|}} \prod_{i\in B_j} w_{x_i}\phi^T(B_j)$$

só depende de $|B_j| = n_j$. Assim, escreveremos:

$$\phi(n_j) = \sum_{(x_{i_1},\dots,x_{i_{n_j}})\in X^{n_j}} \prod_{i\in B_j} w_{x_i}\phi^T(B_j).$$

Por (3.11) e pelo exercício (15), temos

$$
\begin{aligned}
Z_G(\boldsymbol{w}) &= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\{B_1,\ldots,B_k\}\in\mathcal{P}(n)}\prod_{j=1}^{k}\phi(n_j)\\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_k)\\ n_1+\ldots+n_k=n\\ n_i\geq 1}}\prod_{j=1}^{k}\phi(n_j)\frac{n!}{n_1!\ldots n_k!}\\
&= 1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_k)\\ n_1+\ldots+n_k=n\\ n_i\geq 1}}\prod_{j=1}^{k}\phi(n_j)\frac{n!}{n_1!\ldots n_k!}\\
&= 1+\sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_k)\\ n_1+\ldots+n_k=n\\ n_i\geq 1}}\prod_{j=1}^{k}\frac{\phi(n_j)}{n_j!}.
\end{aligned}
$$

então,

$$
\begin{aligned}
Z_G(\boldsymbol{w}) &= 1+\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_k)\\ n_1+\ldots+n_k=n\\ n_i\geq 1}}\prod_{j=1}^{k}\frac{\phi(n_j)}{n_j!}\\
&= 1+\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\Big(\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{k}\frac{\phi(n_j)}{n_j!}\Big)\\
&= 1+\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(n)}{n!}\Big)^{k}\\
&= \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(n)}{n!}\Big).
\end{aligned}
$$

Assim, finalmente:

$$
\begin{aligned}
\log Z_G(\boldsymbol{w}) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(n)}{n!}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in X^n}\phi^T(x_1,\ldots,x_n)w_{x_1}\cdots w_{x_n}.
\end{aligned}
$$

□

Outras demonstrações deste fato poder ser encontradas em [31, 33, 38].

Uma grande quantidade de modelos (partículas no contínuo, por exemplo) com interação do tipo *esferas duras* e muitos outros podem ser escritos através de um gás discreto como esse que acabamos de ver, daí a importância deste formalismo. A Abordagem, resumidamente, é feita definindo novos objetos (contornos, subconjuntos finitos de um grafo, etc) que farão o papel das posições das partículas e depois definir quais destes objetos interagem entre si. Este gás (quando sequer definimos quem são exatamente os objetos que vão interagir ou não entre si) é chamado de *Gás de Polímeros Abstratos*. Veja [31, 33], por exemplo, para mais detalhes.

A partir daí, um caminho (o mais eficaz nos dias de hoje) de obter critérios para a convergência da série é fazer um estudo detalhado dos coeficientes de Ursell.

São conhecidos os seguintes critérios para a convergência desta série:

$$|w_x| \ \leq \ R_x = \frac{\mu_x}{\varphi_x(\boldsymbol{\mu})}; \ \mu_x \geq 0 \ \ \forall \ x \in X, \tag{3.12}$$

onde

$$\varphi_x(\mu) \ = \begin{cases} \exp\Big[\displaystyle\sum_{y\in\Gamma^*(x)} \mu_y\Big] & \text{(Koteck\'y-Preiss-1986)} \\ \displaystyle\prod_{y\in\Gamma^*(x)} \big(1+\mu_y\big) = \sum_{T\subseteq\Gamma^*_G(x)} \prod_{x\in T} \mu_x & \text{(Dobrushin-1996)} \\ Z_{\Gamma^*(x)}(\boldsymbol{\mu}) \qquad\quad = \displaystyle\sum_{\substack{T\subseteq\Gamma^*_G(x)\\ T\in I(G)}} \prod_{x\in T} \mu_x & \text{(Fern\'andez-Procacci-2007)} \end{cases} \tag{3.13}$$

Para uma prova deste fato veja [22, 5].

Evidentemente, como:

$$\exp\Big[\sum_{y\in\Gamma^*(x)} \mu_y\Big] \geq \prod_{y\in\Gamma^*(x)} \big(1+\mu_y\big) = \sum_{T\subseteq\Gamma^*_G(x)} \prod_{x\in T} \mu_x \geq \sum_{\substack{T\subseteq\Gamma^*_G(x)\\ T\in I(G)}} \prod_{x\in T} \mu_x,$$

então o critério de Fernández-Procacci é melhor do que o de Dobrushin que, por sua vez, é melhor que o de Kotecký-Preiss.

**Exercício 19.** *Seja $K_n$ o grafo completo de vértices $\{1, 2, \ldots, n\}$. Mostre que*

$$\sum_{g\in C_n} (-1)^{|g|} = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

*onde $C_n$ denota o conjunto de todos os subgrafos conexos de $K_n$.*

# Capítulo 4

# A ligação entre as duas teorias

O que veremos a seguir é que Shearer [32] mostrou (mesmo na época não se dado conta disso) em 1985 que o fato da Pressão do gás de rede ser analítica em um polidisco de poli-raio $(R_x)_{x\in X}$ implica que a função partição $Z_G(\mathbf{w})$ não se anula neste polidisco fechado e ainda temos que que $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) \geq Z_G(-\mathbf{p}) > 0$ se $p_x \leq R_x$ para todo $x \in X$. Scott e Sokal [35] perceberam o fato e esclareceram esta conexão somente em 2005.

Note que dentro do polidisco de poli-raio de Dobrushin $(R_x^{\mathrm{D}})_{x\in X}$, pelo que apresentamos até agora, temos a cota inferior $\prod_{x\in X}(1-p_x)$ para $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x)$, obtida por Spencer. Mostraremos agora a cota obtida por Shearer $Z_G(-\mathbf{p})$.

A relação entre estas cotas veremos mais tarde. Na verdade, dentro do polidisco $\{(w_x)_{x\in X} : |w_x| \leq R_x^{\mathrm{D}}\}$ proveniente do Critério de Dobrushin valem as seguintes desigualdades:

$$|Z_G(\mathbf{w})| \geq Z_G(-\mathbf{p}) \geq \prod_{x\in X}(1-p_x).$$

## 4.1 O Teorema de Shearer

**Teorema 46. (Shearer-1985)** *Seja $G$ um grafo de dependência para uma família de eventos $(A_x)_{x\in X}$ com $\mathbb{P}(A_x) = p_x$. Suponha que $P(S) = (-1)^{|S|} Z_G(-\mathbf{p}; S) \geq 0$, para todo $S \subseteq X$.*

*Então, $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) \geq Z_G(-\mathbf{p}) = P(\emptyset)$ e esta cota inferior é a melhor possível.*

*Prova* : Se $|X| = n$ então podemos assumir que $X = [n]$ e consideramos o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ onde $\Omega = \{0,1\}^n$ é o conjunto das sequências de zeros e uns e $\mathcal{P}(\Omega)$ é o conjunto das partes de $\Omega$.

Tome a seguinte família dos cilindros $(B_i)_{i\in[n]}$, onde $B_i = \{(a_1,...,a_n) \in \Omega : a_i = 1\}$ e a medida $\tilde{\mathbb{P}}$ é definida por

$$\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S} B_i) = \sum_{\substack{T: \\ S\subseteq T\subseteq[n]}} P(T) = \sum_{\substack{T: \\ S\subseteq T\subseteq[n]}} (-1)^{|T|} Z_G(-\mathbf{p};T),$$

onde, como antes

$$Z_G(\mathbf{p};S) = \sum_{\substack{S\subseteq T\subseteq[n]: \\ T\in I(G)}} \prod_{i\in T} p_i. \tag{4.1}$$

Aqui adotamos a convenção padrão de que a soma de zero parcelas é zero e o produto de zero fatores é 1.

O valor de $\tilde{\mathbb{P}}$ sobre a álgebra gerada pelos cilindros determina completamente a medida. Mostraremos agora que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \tilde{\mathbb{P}})$ é de fato um espaço de probabilidade.

Se $\emptyset \neq S \subseteq [n]$ não é um conjunto independente em relação a $G$, isto é, se existem dois vértices $i$ e $j$ em $S$ tais que $\{i,j\} \in E(G)$, então não existem conjuntos independentes em $I(G)$ que contém $S$. Isso implica que $Z_G(\mathbf{p};S)$ é uma soma de zero parcelas, que por convenção é zero.

Assim, quando o conjunto $\{i \in [n] : i \in S\}$ não é um conjunto independente para o grafo $G$, temos $\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S} B_i) = 0$.

Por outro lado, se $S \subseteq [n]$ é independente,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S} B_i) &= \sum_{\substack{T: \\ S\subseteq T\subseteq[n]}} P(T) = \sum_{\substack{T: \\ S\subseteq T\subseteq[n]}} (-1)^{|T|} Z_G(-\mathbf{p};T) \\
&= \sum_{\substack{T: \\ S\subseteq T\subseteq[n]}} (-1)^{|T|} \sum_{\substack{R: \\ S\subseteq T\subseteq R\subseteq[n] \\ R\in I(G)}} \prod_{i\in R}(-p_i) \\
&= \sum_{\substack{R: \\ S\subseteq R\subseteq[n] \\ R\in I(G)}} \prod_{i\in R} p_i \sum_{\substack{T: \\ S\subseteq T\subseteq R\subseteq[n]}} (-1)^{|R|-|T|} = \prod_{i\in S} p_i.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Quando $S = \emptyset$, $\bigcap_{i\in S} B_i = \{(a_1,...,a_n) \in \Omega : a_i = 1 \text{ se } i \in \emptyset\} = \Omega$. Então podemos definir diretamente $\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in\emptyset} B_i) = 1$ e isso está consistente com nossa convenção acima, isto é, está coerente com o produto de zero fatores resultar 1. Ou seja

$$\tilde{\mathbb{P}}(\Omega) = \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in\emptyset} B_i) = \prod_{i\in\emptyset} p_i = 1. \tag{4.3}$$

Nos resta mostrar que todas as seqüências tem medida maior ou igual a zero de ocorrerem e teremos mostrado que $\tilde{\mathbb{P}}$ é de fato uma probabilidade, em outras palavras, temos que verificar que, para todo $T \subseteq [n]$,

$$\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in T} B_i \cap \bigcap_{i\notin T} \overline{B}_i) \geq 0. \tag{4.4}$$

Por um lado temos que para todo $T \subseteq [n]$,

$$\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in T} B_i) = \sum_{\substack{S:\\ T\subseteq S\subseteq [n]}} \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S} B_i \cap \bigcap_{i\notin S} \overline{B}_i), \tag{4.5}$$

mas por definição

$$\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in T} B_i) = \sum_{\substack{S:\\ T\subseteq S\subseteq [n]}} P(S). \tag{4.6}$$

Pelo Princípio de Inclusão-Exclusão segue que

$$0 \leq P(T) = \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in T} B_i \cap \bigcap_{i\notin T} \overline{B}_i) = \sum_{\substack{S:\\ T\subseteq S\subseteq [n]}} (-1)^{|S|-|T|}\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S} B_i). \tag{4.7}$$

Assim, em particular,

$$P(\emptyset) = \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in [n]} \overline{B}_i) = Z_G(-\mathbf{p};\emptyset) = Z_G(-\mathbf{p}). \tag{4.8}$$

A última identidade esclarece o enunciado do teorema quanto à afirmação de que a cota inferior $Z_G(-\mathbf{p})$ é a melhor possível.

De fato, acabamos de construir um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \tilde{\mathbb{P}})$ e uma família de eventos $(B_i)_{i\in[n]}$ com $\tilde{\mathbb{P}}(B_i) = p_i$, tal que $G$ é um grafo de dependência para a família e $\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{B}_i) = Z_G(-\mathbf{p})$.

O teorema estará provado se conseguirmos mostrar que

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i\in [n]} \overline{A}_i) \geq \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in [n]} \overline{B}_i). \tag{4.9}$$

Como para todo $S \subseteq [n]$ temos que $\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S} \overline{B}_i) \geq \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{B}_i)$, a desigualdade (4.9) é óbvia se existe um conjunto $S \subseteq [n]$ tal que $\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S} \overline{B}_i) = 0$.

Consideramos então o caso interessante onde $\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S}\overline{B}_i) > 0$, para todo $S \subseteq [n]$.

**Afirmação 1:** A prova do teorema estará finalizada se provarmos que $S_1 \subseteq S_2$ implica que

$$\frac{\mathbb{P}(\bigcap_{i\in S_1}\overline{A}_i)}{\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S_1}\overline{B}_i)} \leq \frac{\mathbb{P}(\bigcap_{i\in S_2}\overline{A}_i)}{\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S_2}\overline{B}_i)}. \tag{4.10}$$

De fato, se isto for verdade, então

$$1 = \frac{\mathbb{P}(\bigcap_{i\in\emptyset}\overline{A}_i)}{\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in\emptyset}\overline{B}_i)} \leq \frac{\mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]}\overline{A}_i)}{\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in[n]}\overline{B}_i)}. \tag{4.11}$$

E ainda, é suficiente provar a Afirmação 1 para o caso onde $|S_2 - S_1| = 1$.

Para ver que basta provar para este caso suponha que este esteja provado e que $|S_2 - S_1| \geq 2$, se a desigualdade (4.10) é verdadeira quando $|S_2 - S_1| = 1$, então se $S_2 = S_1 \cup \{i_1, i_2, ..., i_k\}$ temos

$$\frac{\mathbb{P}(\bigcap_{i\in S_1}\overline{A}_i)}{\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S_1}\overline{B}_i)} \leq \frac{\mathbb{P}(\bigcap_{i\in S_1\cup\{i_1\}}\overline{A}_i)}{\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S_1\cup\{i_1\}}\overline{B}_i)} \leq ... \leq \frac{\mathbb{P}(\bigcap_{i\in S_1\cup\{i_1,i_2,...,i_k\}}\overline{A}_i)}{\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S_1\cup\{i_1,i_2,...,i_k\}}\overline{B}_i)}. \tag{4.12}$$

A prova da afirmação é por indução em $|S_2|$.

**Caso 1:** $|S_2| = 1$. Nesse caso,

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i\in S_2}\overline{A}_i) = \mathbb{P}(\overline{A}_i) = 1 - p_i = \tilde{\mathbb{P}}(\overline{B}_i) = \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S_2}\overline{B}_i). \tag{4.13}$$

**Caso 2:** Agora suponha que $|S_2| \geq 2$ e que a desigualdade (4.10) é verdadeira para qualquer subconjunto $S_2'$ tal que $|S_2'| < |S_2|$.

Tome $S_1$ com $S_2 = S_1 \cup \{i\}$ e defina:

$$T_1 = \{j \in S_1 : \{i,j\} \notin E(G)\} \qquad \text{e} \qquad T_2 = \{j \in S_1 : \{i,j\} \in E(G)\}$$

Então $S_1 = T_1 \cup T_2$ e pelo Lema (15) temos que:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{j\in S_2} \overline{B}_j) &= \sum_{T\subseteq S_2} (-1)^{|T|}\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{j\in T} B_j) \\
&= \sum_{\substack{T\subseteq S_1\cup\{i\}\\ T\in I(G)}} (-1)^{|T|} \prod_{j\in T} p_j \\
&= \sum_{\substack{T\subseteq S_1\\ T\in I(G)}} (-1)^{|T|} \prod_{j\in T} p_j + \sum_{\substack{T\subseteq T_1\cup\{i\}\\ T\in I(G)\\ i\in T}} (-1)^{|T|} \prod_{j\in T} p_j \\
&= \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{j\in S_1} \overline{B}_j) + (-p_i)\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{j\in T_1} \overline{B}_j). \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

Para $\mathbb{P}(\bigcap_{j\in S_2} \overline{A}_j)$ temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bigcap_{j\in S_2} \overline{A}_j) &= \mathbb{P}(\bigcap_{j\in S_1} \overline{A}_j) - \mathbb{P}(\bigcap_{j\in S_1} \overline{A}_j \cap A_i) \\
&\geq \mathbb{P}(\bigcap_{j\in S_1} \overline{A}_j) - \mathbb{P}(\bigcap_{j\in T_1} \overline{A}_j \cap A_i) \\
&= \mathbb{P}(\bigcap_{j\in S_1} \overline{A}_j) - p_i\mathbb{P}(\bigcap_{j\in T_1} \overline{A}_j), \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

onde a última identidade é conseqüência de $G$ ser um grafo de dependência para $(A_j)_{j\in[n]}$.

Para simplificar a notação renomeamos $\mathbb{P}(\bigcap_{j\in S} \overline{A}_j) := \alpha(S)$ e $\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{j\in S} \overline{B}_j) := B(S)$. Então, para concluir a prova basta mostrar que

$$\frac{\alpha(S_2)}{B(S_2)} \geq \frac{\alpha(S_1)}{B(S_1)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha(S_2)}{B(S_2)} - \frac{\alpha(S_1)}{B(S_1)} \geq 0. \qquad (4.16)$$

A desigualdade (4.15) e a igualdade (4.14) implicam, respectivamente, que

$$\alpha(S_2) \geq \alpha(S_1) - p_i\alpha(T_1) \ \text{ e } \ B(S_2) = B(S_1) - p_iB(T_1),$$

então,

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha(S_2)}{B(S_2)} - \frac{\alpha(S_1)}{B(S_1)} &\geq \frac{\alpha(S_1) - p_i\alpha(T_1)}{B(S_1) - p_iB(T_1)} - \frac{\alpha(S_1)}{B(S_1)} \\
&= \frac{p_i(B(T_1)\alpha(S_1) - \alpha(T_1)B(S_1))}{(B(S_1) - p_iB(T_1))B(S_1)} \\
&= \frac{p_iB(T_1)}{B(S_1) - p_iB(T_1)}.\left(\frac{\alpha(S_1)}{B(S_1)} - \frac{\alpha(T_1)}{B(T_1)}\right) \geq 0. \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade vem do fato que estamos no caso onde $B(T_1) = \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{j \in T_1} \overline{B}_j) > 0$ e por hipótese de indução, $\left(\frac{\alpha(S_1)}{B(S_1)} - \frac{\alpha(T_1)}{B(T_1)}\right) \geq 0$, pois $|S_1| < |S_2|$. $\square$

## 4.2 O Trabalho de Alex Scott e Alan Sokal

Para ajudar a entender o significado do resultado de Shearer enunciamos um Teorema de Scott e Sokal que prova uma série de equivalências entre afirmações sobre o gás de rede:

**Teorema 47. (Scott e Sokal-2005)** *Considere um gás de rede em $X$ com interação do tipo caroço duro auto repulsiva determinada pelos elos do grafo $G = (X, E)$ e seja $\mathbf{R} = (R_x)_{x \in X} \geq \mathbf{0}$.*

*Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

*(1)* $-\mathbf{R} = (-R_x)_{x\in X}$ *pertence a componente conexa do conjunto* $Z_G^{-1}(0, +\infty) \cap (-\infty, 0]^X$ *que contém o vetor nulo* $\mathbf{0}$.

*(2)* $Z_G(\mathbf{w}) > 0$, *para todo* $\mathbf{w}$ *satisfazendo* $-\mathbf{R} \leq \mathbf{w} \leq \mathbf{0}$.

*(3)* $Z_G(\mathbf{w}) \neq 0$, *para todo* $\mathbf{w}$ *satisfazendo* $|\mathbf{w}| \leq \mathbf{R}$.

*(4) A série de Taylor de* $\log Z_G(\mathbf{w})$ *em torno do vetor* $\mathbf{0}$ *é convergente em* $\mathbf{w} = -\mathbf{R}$.

*(5) A série de Taylor de* $\log Z_G(\mathbf{w})$ *é absolutamente convergente para* $|\mathbf{w}| \leq \mathbf{R}$.

*(6)* $Z_G(-\mathbf{R}\mathbf{1_S}) > 0$ *para todo* $S \subseteq X$, *onde* $(-\mathbf{R}\mathbf{1_S})_x = R_x$ *quando* $x \in S$ *e zero caso contrário.*

*(7)* $Z_G(-\mathbf{R}) > 0$ *e* $P(S) = (-1)^{|S|} Z_G(-\mathbf{R}; S) \geq 0$ *para todo* $S \subseteq X$, *onde*

$$Z_G(\mathbf{w}; S) = \sum_{\substack{T \in I(G) \\ S \subseteq T \subseteq X}} \prod_{x \in T} w_x. \tag{4.18}$$

*(8) Existe uma medida de probabilidade* $P$ *definida em* $2^X$ *tal que* $P(\emptyset) > 0$ *e para cada* $S \subseteq X$

$$\sum_{T: T \supseteq S} P(T) = \left( \prod_{x \in S} w_x \right) \left( \prod_{\{x,y\} \subseteq S} W(x, y) \right). \tag{4.19}$$

*Lembre que se* $x \neq y$ *então* $W(x, y) = 0$ *se, e somente se,* $xy \in E$.

*Existe uma única probabilidade* (chamada **Medida de Shearer**) *satisfazendo estas condições e esta é definida por*

$$P(S) = (-1)^{|S|} Z_G(-\mathbf{R}; S),$$

*para todo* $S \subseteq X$. *Em particular,* $P(\emptyset) = Z_G(-\mathbf{R}) > 0$.

*Prova:* Ver [35] página 17.

Na verdade boa parte deste teorema é válido para um gás mais geral: as 5 primeiras afirmações são equivalentes para qualquer gás com interação do tipo repulsiva $0 \leq W(x, y) \leq 1$, não necessariamente do tipo caroço duro. Para um estudo detalhado sobre a medida de Shearer veja [40, 41].

**Definição 48.** *Denotaremos por $R(G)$ o conjunto de todos os vetores $[0, +\infty)^X$ satisfazendo as condições do teorema (47).*

É feito um estudo sobre as diversas propriedades do conjunto $R(G)$ em [35], em particular temos:

**Proposição 49.** *Para qualquer gás de rede repulsivo $(0 \leq W(x, y) \leq 1)$ temos que:*

(a) $R(G)$ é um aberto de $[0, +\infty)^X$.

(b) Se $\mathbf{0} \leq \mathbf{R}' \leq \mathbf{R}$ e $\mathbf{R} \in R(G)$ então $\mathbf{R}' \in R(G)$.

(c) Se $\mathbf{R} \in \partial R(G)$ em $[0, +\infty)^X$ então $Z_G(-\mathbf{R}) = 0$.

*Prova:* O item (a) é imediato do item (1) do teorema (47), e o item (b) segue direto do item (3) do mesmo teorema. Para provar (c) lembre que $\partial R(G) = \overline{R(G)} \backslash R(G)$ e suponhamos por absurdo que $\mathbf{R} \in \partial R(G)$ e que $Z_G(-\mathbf{R}) > 0$. Note que já sabíamos que $Z_G(-\mathbf{R}) \geq 0$ pois $\mathbf{R} \in \overline{R(G)}$ e $Z_G$ é contínua e positiva quando restrita a $R(G)$. Então, $-\mathbf{R}$ pertence à componente conexa do conjunto $Z_G^{-1}(0, +\infty) \cap (-\infty, 0]^X$ que contém o vetor nulo $\mathbf{0}$. Para ver isso basta observar que o conjunto $-R(G) \cup \{-\mathbf{R}\}$ é conexo, onde $-R(G) = \{-\mathbf{p} : \mathbf{p} \in R(G)\}$. Assim teríamos que $\mathbf{R} \in R(G)$, absurdo. $\square$

**Corolário 50.** *Seja $G$ um grafo de dependência para uma família de eventos $(A_x)_{x \in X}$ com $\mathbb{P}(A_x) = p_x$. Suponha que $P(S) = (-1)^{|S|} Z_G(-\mathbf{p}; S) \geq 0$, para todo $S \subseteq X$ e que $Z_G(-\mathbf{p}; \emptyset) = Z_G(-\mathbf{p}) > 0$. Então, $\mathbb{P}(\bigcap_{x \in X} \overline{A}_x) > 0$.*

*Prova:* Imediata.

O Próximo resultado de fato é um subconjunto do teorema de Scott e Sokal mas vamos exibir a prova deste (que é relativamente elementar) devido a sua importância para a compreensão de como as duas teorias se ligam neste ponto, o que vamos garantir é que a convergência da série de Mayer de um gás com um grafo $G$ codificando a interação implica a eficiência do Lema de Lovász com grafo de dependência $G$.

**Teorema 51.** *Seja $G$ um grafo de dependência para uma família de eventos $(A_x)_{x\in X}$ com $\mathbb{P}(A_x) = p_x$. Suponha que a série de Taylor de $\log Z_G(\mathbf{w})$ é absolutamente convergente para $|\mathbf{w}| \le \mathbf{p}$. Então, $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) \ge Z_G(-\mathbf{p}) > 0$ .*

*Prova:* Imediata se observamos as equivalências do Teorema 47 e o resultado de Shearer acima. Porém, como exibiremos um novo lema garantindo que a probabilidade $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x)$ é positiva num polidisco que pode ser maior do que o estipulado pelo Lema de Lovász dependendo do grafo $G$ (usando justamente a convergência da série do logaritmo e o critério de Fernández e Procacci que sobrepõe o de Dobrushin), apresentaremos a prova deste teorema usando diretamente o resultado de Shearer. De fato, isso é reescrever parte das equivalências do teorema de Scott e Sokal, essa prova também é apresentada em [6].

Para demonstrar este teorema considere, para cada $\emptyset \neq S \subset X$,

$$\begin{aligned} P(S) &= \sum_{\substack{U:S\subseteq U\subseteq X\\ U\in I(G)}} (-1)^{|U|-|S|} \prod_{x\in U} p_x = \sum_{\substack{R\subseteq X\setminus(S\cup\Gamma_G(S))\\ R\in I(G)}} \prod_{x\in R}(-p_x)\prod_{y\in S} p_y \\ &= Z_G(-\mathbf{p}\mathbf{1}_{\mathbf{X}\setminus\mathbf{S}\cup\mathbf{\Gamma_G(S)}})\prod_{y\in S} p_y. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Note que quando $S$ não é independente, $S$ é uma soma de zero parcelas e portanto nula.

A restrição de $Z_G(\mathbf{w})$ ao conjunto $K_{\mathbf{p}} = \prod_{x\in X}[-p_x, p_x]$ é uma função polinomial real e portanto contínua e positiva em $K_p^+ = \prod_{x\in X}[0, p_x]$.

Como $\log Z_G(\mathbf{w})$ é absolutamente convergente no polidisco $|w_x| \le p_x$, a função partição $Z_G(\mathbf{w})$ não tem zeros no mesmo polidisco $|w_x| \le p_x$ e portanto $Z_G(\mathbf{w})$ não possui zeros em $K_p = \prod_{x\in X}[-p_x, p_x]$.

Disso concluímos que $Z_G(w)$ é positiva em todo ponto de $K_p$ pois, como nunca se anula e é contínua e definida em um conexo, se assumisse também valores negativos, obrigatoriamente se anularia em algum ponto de $K_p$.

Em particular $P(\emptyset) = Z_G(-p) > 0$ e ainda, como para todo $S \subset X$ temos que o conjunto $K_{p^{S^c}} = \prod_{x\in X}[-p_x^{S^c}, p_x^{S^c}]$ está contido em $K_p$, onde $p^{S^c} = \{p_x^{S^c}\}_{x\in X}$ e

$$p_x^{S^c} = (p.1_{X\setminus S\cup\Gamma_G(S)})_x = \begin{cases} 0 & x \in S \cup \Gamma_G(S) \\ p_x & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{4.21}$$

temos que $Z_G(w)$ é também positiva em $K_{p^{S^c}}$ e então $Z_G(-p\mathbf{1}_{\mathbf{X}\setminus\mathbf{S}\cup\mathbf{\Gamma_G(S)}}) \ge 0$.

Disto e da identidade (4.20) concluímos que $P(S) \ge 0$ para qualquer $S \subseteq X$ e $P(\emptyset) = Z_G(-p) > 0$. O resultado segue do teorema de Shearer. $\square$

Agora podemos provar o resultado fundamental obtido por Shearer que mostra que obter condições onde a conclusão do Lema de Lovász é válida é *equivalente* a obter condições para que a função partição (polinômio de conjuntos independentes) não se anule. Isso reduz o problema a conseguir o maior polidisco possível onde o logaritmo da função partição do gás de rede com interação do tipo caroço duro seja uma função analítica pelo Teorema 47. A prova de que é suficiente a analiticidade do logaritmo acabamos de dar na proposição acima.

É importante ressaltar que a validade da tese do Lema de Lovász não é equivalente a nenhum critério específico para a convergência, mas sim à convergência da série do logaritmo em si. Isso revela que da mesma forma que apresentaremos a seguir uma melhora do lema usando o novo critério de Fernández e Procacci, eventuais novos critérios que surjam para a convergência da série de Mayer obrigatoriamente irão melhorar a região onde o Lema de Lovász é eficiente, produzindo portanto um novo lema.

**Teorema 52.** *Pode-se aplicar o Lema Local de Lovász de modo a garantir que a probabilidade do evento* $\bigcap_{i\in[n]} \overline{A}_i$ *seja positiva, onde* $(A_i)_{i\in[n]}$ *é uma família* arbitrária *de eventos com* $\mathbb{P}(A_i) = p_i$ *e grafo de dependência* $G$ *se, e somente se,* $Z_G(-\mathbf{p}) > 0$ *e* $P(S) = (-1)^{|S|} Z_G(-\mathbf{p}; S) \geq 0$*, para todo* $S \subseteq [n]$*.*

*Prova:* A prova da ida faremos por contraposição.

Se $Z_G(-\mathbf{p}) = 0$ e $P(S) \geq 0$ para qualquer $S \subseteq [n]$, então é fácil ver que o lema de Lovász não é eficiente pois, pelo Teorema de Shearer é possível construir uma família de eventos cujo grafo de dependência é $G$, onde os eventos tem probabilidades $(p_i)_{i\in[n]}$ mas que $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{A}_i) = P(\emptyset) = Z_G(-\mathbf{p}) = 0$.

Suponhamos agora que não seja verdade que $P(S) = (-1)^{|S|} Z_G(-\mathbf{p}; S) \geq 0$, para todo $S \subseteq [n]$. Pelo Teorema 47 item (7), temos que $\mathbf{p} \notin R(G)$ e lembrando que $R(G)$ é um aberto conexo $[0, \infty)^n$ contendo o vetor nulo, segue do Teorema da Alfândega que qualquer caminho contínuo que tomarmos ligando $\mathbf{p}$ ao vetor nulo $\mathbf{0}$ certamente interceptará a fronteira de $R(G)$ em $[0, \infty)^n$. Portanto, existe um vetor $\mathbf{p}' \leq \mathbf{p}$ com $\mathbf{p}' \in \partial R(G)$ em $[0, \infty)^n$ e então, pela Proposição 49, segue que $Z_G(-\mathbf{p}') = 0$.

Temos que $P(S) = (-1)^{|S|} Z_G(-\mathbf{p}'; S) \geq 0$ para todo $S \subseteq [n]$, pois $\mathbf{p}' \in \partial R(G)$ e, para cada $S$ fixado a função que associa $\mathbf{q}$ ao número $(-1)^{|S|} Z_G(-\mathbf{q}; S)$ é contínua e não negativa em $R(G)$, portanto não negativa também na fronteira $\partial R(G)$.

Sabemos então, pelo Teorema 46, que é possível construir uma família de eventos $(B_i)_{i\in[n]}$ em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \tilde{\mathbb{P}})$ com $\tilde{\mathbb{P}}(B_i) = p'_i$, tal que $G$ é um grafo de dependência para a família $(B_i)_{i\in[n]}$ com $Z_G(-\mathbf{p}') = \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{B}_i) = 0$.

Construiremos um espaço de probabilidade e uma família de eventos $(A_i)_{i\in[n]}$ com $\mathbb{P}(A_i) = p_i$ tal que $G$ é um grafo de dependência para a família e $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{A}_i) = 0$. O caso trivial é quando algum dos $p'_i$ é 1 pois $p'_i \leq p_i$ e portanto, $\mathbb{P}(\overline{A}_i) = 0$, assim qualquer família $(A_i)_{i\in[n]}$ com $\mathbb{P}(A_i) = p_i$ satisfaz $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{A}_i) = 0$.

Assim vamos considerar o caso onde $p'_i < 1$, para todo $i \in [n]$.

Como no Teorema 46 consideramos o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ onde $\Omega = \{0,1\}^n$ é o conjunto das seqüências de zeros e uns e, $\mathcal{P}(\Omega)$ é o conjunto das partes de $\Omega$.

Tome a família dos cilindros $(B_i)_{i\in[n]}$, onde $B_i = \{(a_1, ..., a_n) \in \Omega : a_i = 1\}$ e a medida $\tilde{\mathbb{P}}$ construída no teorema.

Considere o espaço produto $(\Omega \times \Omega, \mathcal{P}(\Omega \times \Omega), \mathbb{P})$ com $\mathbb{P}$ definida por

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i\in S} B_i \times \bigcap_{j\in T} C_j) = \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S} B_i) \prod_{j\in T} \frac{p_j - p'_j}{1 - p'_j}, \tag{4.22}$$

onde, fazendo a identificação natural de $\Omega \times \Omega$ com $\{0,1\}^{2n}$, para quaisquer $S, T \subseteq [n]$ e $i \in [n]$:

$$C_i := \{(a_1, ..., a_{2n}) \in \Omega \times \Omega : a_{i+n} = 1\}$$

$$\bigcap_{i\in S} B_i \times \bigcap_{j\in T} C_j := \{(a_1, ..., a_{2n}) \in \Omega \times \Omega : a_i = 1 \text{ quando } i \in S \cup (n+T)\}$$

$$B_i := \{(a_1, ..., a_{2n}) \in \Omega \times \Omega : a_i = 1\}$$

Assim $(C_i)_{i\in[n]}$ é uma família independente de eventos e, definindo $A_i = B_i \cup C_i$ para cada $i \in [n]$, segue que $G$ é um grafo de dependência para a família $(A_i)_{i\in[n]}$ e ainda:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_i) &= \mathbb{P}(B_i \cup C_i) = \mathbb{P}(B_i) + \mathbb{P}(C_i) - \mathbb{P}(B_i \cap C_i) \\ &= p'_i + \frac{p_i - p'_i}{1 - p'_i} - p'_i.\frac{p_j - p'_i}{1 - p'_i} = p'_i + \frac{(1 - p'_i)(p_j - p'_i)}{1 - p'_i} = p_i. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Concluímos então que $G$ é um grafo de dependência para a família $(A_i)_{i\in[n]}$ com $\mathbb{P}(A_i) = p_i$ e

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{A}_i) = \mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{B_i \cup C_i}) = \mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{B_i} \cap \bigcap_{i\in[n]} \overline{C_i}) \leq \mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{B}_i) = \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{B}_i) = 0. \tag{4.24}$$

A volta segue diretamente do Corolário 50.

$\square$

## 4.3 A relação entre as cotas inferiores para $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{A}_i)$

Suponhamos que esteja fixado o grafo $G$ e consideramos famílias $(A_i)_{i\in[n]}$ de eventos em espaços de probabilidade tais que $G$ é um grafo de dependência para estas.

O Lema Local de Lovász, Teorema 37, nos fornece um polidisco (definido pela condição de Dobrushin) no qual é possível obter a cota inferior para $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{A}_i)$, a saber:

*Se existem $(r_x)_{x\in X}$ números em $[0,1)$ tais que, para cada $x$,*

$$\mathbb{P}(A_x) = p_x \leq r_x \prod_{y\in\Gamma(x)} (1-r_y). \tag{4.25}$$

*Então $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) \geq \prod_{x\in X}(1-r_x) > 0$.*

A maneira de Shearer garantir que $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{A}_i)$ é positiva é a mesma, é produzida uma cota inferior para a probabilidade, esta cota inferior por hipótese é positiva e o Lema de Lovász está provado. A diferença na abordagem de Shearer é que não é estipulado um poli-raio, exige-se que $P(S) = (-1)^{|S|} Z_G(-\mathbf{p}; S) \geq 0$ para todo $S \subseteq X$ e que $Z_G(-\mathbf{p}) > 0$, nestas hipóteses $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) \geq Z_G(-\mathbf{p}) = P(\emptyset) > 0$.

Como vimos no Teorema 47 as hipóteses exigidas por Shearer são equivalentes à analiticidade da função $\log Z_G(\mathbf{w})$ no polidisco $|\mathbf{w}| \leq \mathbf{p}$. Então agora basta lembrarmos que no polidisco definido pela condição (4.25) a função $\log Z_G(\mathbf{w})$ é analítica (Teorema **??**), ou seja, se vale (4.25) então pelo Teorema de Shearer também temos que $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) \geq Z_G(-\mathbf{p}) = P(\emptyset) > 0$.

Assim concluímos que se $p_x \leq r_x \prod_{y\in\Gamma(x)}(1-r_y)$ para todo $x \in X$, então são válidas as desigualdades:

$$\mathbb{P}(\textstyle\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) \geq \prod_{x\in X}(1-r_x) > 0 \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) \geq Z_G(-\mathbf{p}) > 0.$$

De fato, temos:

**Proposição 53.** *Seja $(A_i)_{i\in[n]}$ uma família de eventos com $\mathbb{P}(A_i) = p_i$ e grafo de dependência $G$. Se $p_i \leq r_i \prod_{j\in\Gamma(i)}(1-r_j)$ para qualquer $i \in [n]$ então*

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{A}_x) \geq Z_G(-\mathbf{p}) \geq \prod_{i\in[n]}(1-r_i) > 0 \tag{4.26}$$

*Prova:* A primeira desigualdade segue diretamente do fato de o polidisco proveniente da condição de Dobrushin estar contido na região onde valem as hipóteses do Teorema 46. Agora observe que na prova do Teorema 46 construímos uma família de eventos $(B_i)_{i\in[n]}$ com $\mathbb{P}(B_i) = p_i$ tal que $G$ é um grafo de dependência para esta e ainda $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{B}_i) = Z_G(-\mathbf{p})$. Aplicando o Lema Local de Lovász na família $(B_i)_{i\in[n]}$ obtemos $Z_G(-\mathbf{p}) \geq \prod_{i\in[n]}(1 - r_i) > 0$. $\square$

# Capítulo 5

# Um novo Lema e exemplos

## 5.1 O critério de Fernández-Procacci

Neste capítulo lembramos o critério de Fernández-Procacci já enunciado anteriormente o lema que fornece uma condição menos restritiva que o Lema Local de Lovász usual para garantirmos que a probabilidade da intersecção de uma família finita de eventos é não nula.

Seguindo a notação dos capítulos anteriores, seja $X$ um conjunto finito e $\{\mu_x\}_{x\in X}$ uma família de números não negativos e $G$ um grafo tal que $V(G) = X$.

Para cada $x \in X$ definimos a partição restrita aos vizinhos de $x$ por:

$$\varphi_x^{\mathrm{FP}}(\mu) = Z_{\Gamma^*(x)}(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{\substack{T \subset \Gamma^*_G(x) \\ T \in I(G)}} \prod_{x \in T} \mu_x$$

e a seguinte função auxiliar:

$$\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\mu) = \sum_{\substack{T \subset \Gamma_G(x) \\ T \in I(G)}} \prod_{x \in T} \mu_x. \tag{5.1}$$

Como a atividade $0 < \rho = \{\rho_x\}_{x\in X}$ fará o papel das probabilidades e estamos interessados na probabilidade de nenhum dos eventos ocorrerem, nos próximos enunciado para todo $x \in X$ estamos considerando $0 < \rho_x < 1$.

**Teorema 54.** *Suponhamos que existam $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_x\}_{x\in X}$ números reais em $[0, +\infty)$ tais que, para cada $x$:*

$$\rho_x \leq R_x^{\text{FP}} = \frac{\mu_x}{\varphi_x^{\text{FP}}(\mu)}. \tag{5.2}$$

*Então, no polidisco $\{|w_x| \leq \rho_x\}_{x\in X}$, temos*

$$Z_G(-|w|) \ \geq \ \prod_{x\in X} (1-\rho_x)^{\tilde{\varphi}_x^{\text{FP}}(\mu)}, \tag{5.3}$$

*onde $\tilde{\varphi}_x^{\text{FP}}(\mu)$ é a função dada em 5.1 que não depende de $\mu_x$ e satisfaz*

$$\varphi_x^{\text{FP}}(\mu) = \mu_x + \tilde{\varphi}_x^{\text{FP}}(\mu).$$

*Prova:* Veja [5, 6].

E agora podemos enunciar o principal resultado deste capítulo, nossa versão do Lema de Lovász:

**Teorema 55.** *Suponha que $G$ é um grafo de dependência para a família de eventos $(A_x)_{x\in X}$ em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ e que existem $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_x\}_{x\in X}$ números reais em $[0, +\infty)$ tais que, para cada $x \in X$, $\mathbb{P}(A_x) = p_x$ satisfaz:*

$$p_x \leq R_x^{\text{FP}} \equiv \frac{\mu_x}{\varphi_x^{\text{FP}}(\mu)} = \frac{\mu_x}{Z_{\Gamma^*(x)}(\boldsymbol{\mu})}. \tag{5.4}$$

*Então,*

$$\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) \geq Z_G(-\mathbf{p}) \ \geq \ \prod_{x\in X} (1-p_x)^{\tilde{\varphi}_x^{\text{FP}}(\mu)} \ > \ 0.$$

*Prova:* Conseqüência da combinação dos seguintes resultados: Teorema de Shearer 46; teorema 51, ou melhor, da prova deste teorema o qual mostra que a analiticidade do logaritmo da função partição implica nas hipóteses do teorema de Shearer; do critério de Fernández-Procacci (3.13) e do resultado anterior. □

**Comparação entre as cotas inferiores:**

Assim como no lema Lovász usual, onde mostramos que dentro do polidisco proveniente do Critério de Dobrushin $(R_x^D)_{x\in X}$, tínhamos a desigualdade $Z_G(-\mathbf{p}) \geq r_x \prod_{y\in\Gamma(x)}(1-r_y)$ e esta cota inferior era válida se $p_x \leq r_x \prod_{y\in\Gamma(x)}(1-r_y)$. Neste novo lema obtemos uma região maior onde a probabilidade de nenhum dos eventos ocorrer é positiva e a cota inferior obtida é $\prod_{x\in X}(1-p_x)^{\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\mu)}$.

Nossa nova cota será melhor do que a do Lema de Lovász usual se para cada $x \in X$ tivermos:

$$1 - r_x \;=\; \frac{1}{1+\mu_x} \;\leq\; (1-p_x)^{\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\mu)}$$

ou seja,

$$p_x \;\leq\; \overline{R}_x \;\equiv\; 1 - \left(\frac{1}{1+\mu_x}\right)^{1/\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\mu)}$$

**Lema 56.** *Para os poli-raios dos polidiscos onde o Lema de Lovász é eficiente (o usual e a nova versão) valem as seguintes desigualdades:*

$$R_x^{\mathrm{FP}} \;\geq\; \overline{R}_x \;\geq\; \tilde{R}_x^{\mathrm{FP}} \;\equiv\; \frac{\mu_x}{(1+\mu_x)\,\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\mu)} \;\geq\; R_x^{\mathrm{D}} \tag{5.5}$$

*Prova:* Lembremos que pela desigualdade de Bernoulli sabemos que $(1+a)^b \leq 1+ab$ se $a \geq -1$ e $0 \leq b \leq 1$. Fazendo $a = r_x$ e $b = 1/\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\mu)$ obtemos

$$\left(\frac{1}{1+\mu_x}\right)^{1/\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\mu)} = (1-r_x)^{1/\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\mu)} \leq 1 - \frac{r_x}{\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\mu)} \tag{5.6}$$

donde

$$\overline{R}_x = 1 - \left(\frac{1}{1+\mu_x}\right)^{1/\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\mu)} = 1 - (1-r_x)^{1/\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\mu)} \geq \frac{r_x}{\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\mu)} = \tilde{R}_x^{\mathrm{FP}} \tag{5.7}$$

Como $(1+\mu_x)\,\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\mu) \leq \varphi_x^{\mathrm{D}}(\mu)$ temos que $\tilde{R}_x^{\mathrm{FP}} \geq R_x^{\mathrm{D}}$. □

Vale a pena ressaltar que todas as desigualdades são estritas, menos no caso onde $\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\mu) = 1$, ou seja, $\mu_y = 0$ para todo $y \in \Gamma_G(x)$.

A conclusão é que melhoramos a cota inferior da probabilidade dentro do polidisco original de Dobrushin $\{p_x \leq R_x^{\mathrm{D}}\}$ e ainda numa região um pouco maior $\{p_x \leq \overline{R}_x\}$.

Igualmente como no caso do Lema de Lovász usual, o seguinte resultado é imediato:

**Teorema 57.** *Suponha que $G$ é um grafo de dependência assimétrico para a família de eventos $(A_x)_{x\in X}$ em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ e que existem $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_x\}_{x\in X}$ números reais em $[0, +\infty)$ tais que, para cada $x \in X$ temos que $\mathbb{P}(A_x) = p_x$ satisfaz:*

$$p_x \leq R_x^{\mathrm{FP}} \equiv \frac{\mu_x}{\varphi_x^{\mathrm{FP}}(\mu)} = \frac{\mu_x}{Z_{\Gamma^*(x)}(\boldsymbol{\mu})}. \tag{5.8}$$

*Então,*

$$\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) \geq Z_G(-\mathbf{p}) \ \geq \ \prod_{x\in X}(1-p_x)^{\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\mu)} \ > \ 0. \tag{5.9}$$

O Lema local de Lovász é usado em centenas de artigos de Combinatória, Teoria dos Grafos e outras áreas, a seguir aplicamos nossa versão em alguns exemplos para mostrar a melhora nas estimativas em relação a versão usual do lema. O capítulo 5 inteiro de [3] pode ser reescrito com esta nova versão do lema, refaremos alguns exemplos já citados no texto afim de esclarecer a diferença entre a aplicação de um e outro. Nossa versão do Lema de Lovász já foi utilizada nos artigos [6, 9, 29] e, assim como o Lema de Lovász usual, possui uma versão algorithmica [30].

O que fica evidente já no enunciado do teorema acima é que o critério de Fernández-Procacci utiliza mais informação do grafo de dependência permitindo assim que a variável $p_x$ (probabilidade do evento ruim) posso assumir maiores valores.

## 5.2 Exemplos

Aqui voltaremos em alguns exemplos para observarmos as diferenças entre o Lema de Lovász usualmente encontrado nos textos de Combinatória que é equivalente ao Critério de Dobrushin e nossa nova versão obtida via o critério de Fernández e Procacci.

Refazendo a Proposição 42 sobre conjuntos de vértices independentes de um grafo com grau máximo $\Delta$ obtemos:

**Proposição 58.** *Seja $G = (V, E)$ um grafo tal que seus vértices tem grau máximo $\Delta$ e seja $V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_n$ uma partição do conjunto dos vértices $V$ em $n$ conjuntos dois a dois disjuntos. Suponhamos ainda que para cada conjunto $V_i$ tenhamos $|V_i| \geq 4\Delta$. Então existe um conjunto independente $W \subseteq V$ de cardinalidade $n$ que contém exatamente um vértice de cada $V_i$.*

*Prova:* Usamos a modelagem já feita na Proposição 42 e o grafo de dependência lá construído. Assim, existe um grafo de dependência $H = ((ab)_{ab\in E(G)}, E(H))$ para a família de eventos $(W_{ab})_{ab\in E(G)}$ com grau máximo menor ou igual a $2k\Delta$. E ainda, para aplicar o teorema 55 usando o grafo de dependência $H$ precisamos calcular ou pelo menos dar uma cota superior para $Z_{\Gamma_H^*}(ab)$, onde $ab$ é um elo arbitrário de $G$.

Em vista disso, precisamos de uma cota superior para o número de pares de eventos $\{W_{cd}, W_{fg}\}$ independentes em $H$ tais que $cd$ e $fg$ que sejam adjacentes a $ab$ no grafo $H$. Claramente o número de pares não excede $k^2\Delta^2$, pois temos no máximo $k\Delta$ eventos $W_{cd}$ tais que $cd$ seja adjacente a $ab$ onde ou $c$ ou $d$ não pertence a $V_i \cup V_j$.

Não existem trincas $\{W_{cd}, W_{ef}, W_{gh}\}$ de eventos cujos respectivos elos $\{cd, ef, gh\}$ sejam adjacentes a $ab$ e independentes dois a dois em $H$. De fato, se $\{a, b\} \subset V_i \cup V_j$ já vimos que se $cd \in \Gamma_H(ab)$, então $c \in V_i \cup V_j$ ou $d \in V_i \cup V_j$, o mesmo vale para $ef$ e $gh$. Assim, cada um dos eventos do conjunto $\{W_{cd}, W_{ef}, W_{gh}\}$ deveria satisfazer as seguintes condições simultaneamente: cada um dos seus índices (elos de $G$) deveria ter pelo menos um vértice em $V_i \cup V_j$ e os eventos deveriam ser independentes dois a dois, o que é impossível. Assim:

$$Z_{\Gamma_H^*}(ab) \leq 1 + 2k\Delta\mu + k^2\Delta^2\mu^2 = (1 + k\Delta\mu)^2. \tag{5.10}$$

Para aplicar o Teorema 55 usando o grafo de dependência $H$, observamos que

$$f(\mu) = \frac{\mu}{Z_{\Gamma_H^*}(ab)} \geq \frac{\mu}{(1 + k\Delta\mu)^2}, \tag{5.11}$$

onde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_{ab})_{ab \in E(G)}$ é tal que $\mu_{ab} = \mu > 0$ para todo $ab \in E(G)$.

Como o lado direito da desigualdade acima assume seu valor máximo em $\mu_0 = \frac{1}{k\Delta}$, pelo Teorema 55, se $p \leq 1/4k\Delta \leq f(\mu_0)$ então a probabilidade de nenhum dos eventos da família $(W_{ab})_{ab \in E(G)}$ ocorrer é positiva.Isso conclui a prova, pois $p = 1/k^2$ e então $p \leq 1/4k\Delta$ se, e somente se, $k \geq 4\Delta$.

□

Como vimos em 42, se usássemos o Lema de Lovász original precisaríamos exigir que $|V_i| \geq 2e\Delta$ ao invés de $|V_i| \geq 4\Delta$.

Sobre este problema de encontrar o tamanho mínimo que devemos impor aos elementos da partição afim de garantirmos um conjunto independente de vértices cabe citar o fato de que é conhecida a constante optimal deste problema, ou seja, já provamos que o resultado funciona para $|V_i| \geq c.\Delta$ onde $c = 2.e$ e agora para $c = 4$(em particular para qualquer valor maior que este). Já era conhecido não ser possível (através de contra-exemplos) que $c$ não poderia ser menor que 2 e conjecturado por Reed que $c$ era o menor valor, a conjectura foi provada por Haxell em 2001 [25] usando outras técnicas e não é conhecida uma prova deste fato usando o método probabilístico.

**Proposição 59.** *Seja $G = (V, E)$ um grafo tal que seus vértices tem grau máximo $\Delta$ e seja $V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_n$ uma partição do conjunto dos vértices $V$ em $n$ conjuntos dois a dois disjuntos. Suponhamos ainda que para cada conjunto $V_i$ tenhamos $|V_i| \geq \frac{9\Delta}{\sqrt{8}}$. Então existe um conjunto de vértices $W \subseteq V$ de cardinalidade $n$ que contém exatamente um vértice de cada $V_i$ cujo o grau máximo do grafo induzido $\langle W \rangle$ é 1. Ou seja, $\langle W \rangle$ é formado por vértices isolados e elos independentes.*

*Prova*: A prova é muito semelhante a da proposição anterior. Assumimos que cada conjunto $V_i$ tem cardinalidade $k$, onde $k$ é a menor dentre as cardinalidades dos conjuntos $V_i$, $1 \leq i \leq n$.

Escolhemos um conjunto $W$ de $n$ vértices, um de cada conjunto $V_i$, aleatoriamente e independentemente segundo a distribuição uniforme em cada $V_i$.

Seja $T$ o conjunto de trincas de vértices $t = \{a, b, c\}$ de $G$ tais que o grafo induzido $\langle t \rangle$ contém pelo menos dois elos de $G$. Para cada $t \in T$ consideramos $W_t$ o evento "$W$ contém todos os vértices de $t$".

Assim, $\mathbb{P}(W_t) = p = 1/k^3$, se todos os três vértices de $t$ pertencem a diferentes $V_i$ e $\mathbb{P}(W_t) = 0$, caso contrário. Se $a \in V_i$, $b \in V_j$ e $c \in V_k$, então o evento $W_t$ é mutuamente independente da família de eventos composta por todos os outros eventos $W_{t'}$ tais que todos os vértices de $t' = \{a', b', c'\}$ não pertencem a $V_i \cup V_j \cup V_k$.

Então, existe um grafo de dependência $H = ((t)_{t \in T}, E(H))$ para a família de eventos $(W_t)_{t \in T}$ com grau máximo menor ou igual a $\frac{9k\Delta^2}{2}$. Podemos tomar $H$ sendo o grafo de dependência para a família $(W_t)_{t \in T}$ com menor número de elos possível, ou seja, existirá um elo de $H$ entre duas trincas $t$ e $t'$ se, e somente se, $W_t$ e $W_{t'}$ forem dependentes.

Seja $t = \{a, b, c\} \subset V_i \cup V_j \cup V_k$. Pela definição do grafo $H$ temos que se $t' \in \Gamma_H(t)$ então $a' \in V_i \cup V_j \cup V_k$ ou $b' \in V_i \cup V_j \cup V_k$ ou $c' \in V_i \cup V_j \cup V_k$, disto segue que $|\Gamma_H(t)| \leq \frac{9k\Delta^2}{2}$. O valor $\frac{9k\Delta^2}{2}$ é obtido observando que cada vértice de $V_i$ está ligado a no máximo $\Delta$ vértices de $G$ e que $V_i$ possui $k$ vértices. Isso totaliza $k\Delta$ elos incidentes em algum elemento de $V_i$, cada elo destes é adjacente a no máximo $(\Delta - 1)$ outros elos em cada um de seus vértices, resultando no máximo de $\frac{3k\Delta^2}{2}$ elementos $t' \in T$ tais que $t' \in \Gamma_H^*(t)$ e $t'$ possui pelo menos um vértice em $V_i$. O mesmo é válido para $V_j$ e $V_k$, donde segue que $|\Gamma_H^*(t)| \leq \frac{9k\Delta^2}{2}$. Na verdade, pode-se afirmar que $|\Gamma_H^*(t)| \leq \frac{9k\Delta.(\Delta-1)}{2}$ mas usaremos a cota mais grosseira.

Para aplicar o Teorema 55 usando o grafo de dependência $H$ temos que calcular, ou pelo menos dar uma cota superior para $Z_{\Gamma_H^*}(t)$ onde $t \in T$.

Fazendo uma análise parecida com a da proposição anterior temos que:

$$Z_{\Gamma_H^*}(t) \leq 1 + \frac{9}{2}k\Delta^2\mu + 3\left(\frac{3}{2}k\Delta^2\right)^2\mu^2 + \left(\frac{3}{2}k\Delta^2\right)^3\mu^3 = \left(1 + \frac{3}{2}k\Delta^2\mu\right)^3 \tag{5.12}$$

e, portanto

$$f(\mu) = \frac{\mu}{Z_{\Gamma_H^*}(t)} \geq \frac{\mu}{\left(1 + \frac{3}{2}k\Delta^2\mu\right)^3}, \tag{5.13}$$

onde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_t)_{t \in T}$ é tal que $\mu_t = \mu > 0$ para todo $t \in T$.

Derivando e igualando a zero a expressão do lado direito da desigualdade acima, o valor para o qual a expressão assume seu valor máximo é $\mu_0 = \frac{1}{3k\Delta^2}$.

Pelo Teorema 55, se $p \leq \frac{8}{81k\Delta^2} \leq f(\mu_0)$ então a probabilidade de nenhum dos eventos da família $(W_t)_{t \in T}$ ocorrer é positiva. Em particular, com probabilidade positiva nosso conjunto aleatório $W$ é tal que $\langle W \rangle$ é formado por vértices isolados e elos independentes, contendo um vértice de cada $V_i$.

Isso prova a proposição, pois $p = \frac{1}{k^3}$ e então $p \leq \frac{8}{81k\Delta^2}$ se, e somente se, $k \geq \frac{9\Delta}{\sqrt{8}} \cong 3,18\Delta$.

□

Em 1991 Filip Guldan [23] havia obtido o mesmo resultado usando o Lema de Lovász usual, a condição exigida por Guldan foi $k \geq \frac{7\Delta}{2}$.

**Voltando à Arvoricidade Linear:**

Agora podemos provar a conjectura da arvoricidade linear para grafos regulares com cintura suficientemente grande:

**Teorema 60.** *Seja $G$ um grafo regular de grau $d$. Suponhamos que $d$ seja par e que a cintura $g$ do grafo seja tal que $g \geq 8d$. Então,*

$$la(G) = \left\lceil \frac{d+1}{2} \right\rceil$$

*Prova:* Seja cada $P$ uma componente conexa de $G$.

Suponhamos que $V(P) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ e, como cada vértice de $P$ tem grau par pois $d$ é par, segue que $P$ é euleriano e, portanto, existe uma trilha fechada $C = (w_1, e_1, w_2, ..., w_{\ell-1}, e_\ell, w_\ell)$ que utiliza todos os elos de $P$; aqui $w_1 = w_\ell$, $\ell = |E(P)|$ e para todo $1 \leq i \leq \ell$, $e_i = \{w_i, w_{i+1}\}$.

A trilha naturalmente induz uma orientação nos elos de $P$ da seguinte forma, para cada trinca $(w_i, e_i, w_{i+1})$ na sequência alternada de vértices e elos presente em $C$, tomamos o elo orientado $(w_i, w_{i+1})$.

Consideramos o grafo bipartido $H$ onde $V(H) = A \cup B$, $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ tal que $\{a_i, b_j\} \in E(H)$ se, e somente se, $(v_i, v_j)$ é um elo orientado de $P$, de acordo com a orientação induzida por $C$. Como $P$ é d-regular, cada vértice $v$ de $P$ estará presente em $d$ elos orientados de $P$, metade deles na primeira coordenada e na outra metade $v$ estará na segunda coordenada.

Assim, $H$ é bipartido e $d/2$ regular. Portanto pelo exercício 5 existem $d/2$ emparelhamentos perfeitos disjuntos de $H$ ($M_i$, $1 \leq i \leq d/2$) tais que $E(H) = M_1 \cup M_2 \cup ... \cup M_{d/2}$.

Cada emparelhamento perfeito $M_i$ de $H$ corresponde a um subgrafo gerador de $P$ que é regular de grau 2 ou seja, um ciclo que passa por todos os vértices de $P$.

Concluimos então que cada componente conexa de $G$ pode ter seu conjunto de elos particionado em ciclos cujo o conjunto dos elos de cada ciclo são disjuntos dois a dois.

Aplicando este raciocínio acima a cada componente conexa de $G$ separadamente, segue que $E(G) = E(F_1) \cup E(F_2) \cup ... \cup E(F_{d/2})$ onde $E(F_i)$ é a união dos elos do subgrafo gerador em $G$ cujos elos são provenientes de todos os ciclos referentes ao emparelhamento $M_i$; cada componente conexa contribui com um ciclo. Assim, $F_i = C_{i_1} \cup C_{i_2} \cup ... \cup C_{i_r}$ onde $r$ é o número de componentes conexas de $G$ e os $C_{i_j}(1 \leq j \leq r)$ são ciclos em diferentes componentes conexas.

Por hipótese, temos que $|E(C_{i_j})| \geq 8d$ para qualquer ciclo $C_{i_j}$ e quaisquer $1 \leq i \leq d/2$, $1 \leq j \leq r$.

Seja $L$ o grafo de linhas de $G$, ou seja, $V(L) = E(G)$ e dois vértices de $L$ (elos de $G$) são adjacentes se, e somente se, os dois possuem um vértice de $G$ em comum. Como $G$ é d-regular, segue que $L$ é $(2d-2)$-regular.

A família $(V_{i_j})_{\substack{1 \leq i \leq d/2 \\ 1 \leq j \leq r}}$ de conjuntos de vértices de $L$, formada por elos dos ciclos $C_{i_j}$, ou seja $V_{i_j} = E(C_{i_j})$, satisfaz $|V_{i_j}| = |E(C_{i_j})| \geq 8d \geq 4(2d-2)$. Pela Proposição 58 segue que existe um conjunto de vértices independentes $M$ em $L$ contendo exatamente um vértice em cada $V_{i_j}$.

Desta forma $M$ é um emparelhamento em $G$ e $F_i - M = (C_{i_1} - M) \cup (C_{i_2} - M) \cup ... \cup (C_{i_r} - M)$ é uma floresta linear. Ou seja, os subgrafos $M, F_1 - M, F_2 - M, ..., F_{d/2} - M$ são $d/2 + 1$ florestas lineares que cobrem todos os elos de $G$, donde $la(G) \leq d/2 + 1 = \lceil (d+1)/2 \rceil$. □

**Comentário:** A prova do teorema anterior contém o conhecido resultado de Petersen que diz que todo grafo regular de grau par pode ser fatorado em subgrafos regulares de grau 2.

**Corolário 61.** *Seja $G$ um grafo regular de grau $d$, suponhamos que $d$ seja par e que a cintura $g$ do grafo seja tal que $g \geq 8d$. Então os elos de $G$ podem ser particionados em $d/2 + 1$ subgrafos de $G$, um emparelhamento perfeito e $d/2$ árvores lineares.*

**Teorema 62.** *Seja $G$ um grafo regular de grau $d$. Suponhamos que $d$ seja par e que a cintura $g$ do grafo seja tal que $g \geq \frac{9d}{\sqrt{2}}$. Então os elos de $G$ podem ser particionados em $d/2 + 1$ subgrafos de $G$, $d/2$ florestas lineares e uma floresta linear cujas componentes conexas são caminhos de comprimento* 1 *ou* 2*.*

*Prova:* Basta repetir a mesma demonstração do teorema anterior e ao invés de usar a Proposição 58, utilizar a 59.

**Teorema 63.** *Seja $G = (V, F)$ um grafo regular de grau $d$ onde $d$ é ímpar. Suponhamos que $G$ possua uma emparelhamento perfeito $F_0$ e que a cintura $g$ do grafo seja tal que $g \geq 16d$. Então:*

$$la(G) = \frac{d+1}{2}.$$

*Prova:* O grafo $G' = (V, F - F_0)$ é $d'$ regular, onde $d' = d - 1$ é par.

Como antes, sendo $d'$ par, $E(G') = E(F_1) \cup E(F_2) \cup ... \cup E(F_{d'/2})$, onde $E(F_i)$ é a união dos elos de um subgrafo gerador em $G'$, $F_i = C_{i_1} \cup C_{i_2} \cup ... \cup C_{i_r}$ onde $r$ é o número de componentes conexas de $G'$ e os $C_{i_j} (1 \leq j \leq r)$ são ciclos em diferentes componentes conexas.

Por hipótese, temos que $|E(C_{i_j})| \geq 16d$ para qualquer ciclo $C_{i_j}$ e quaisquer $1 \leq i \leq d'/2$, $1 \leq j \leq r$.

Tomamos agora o grafo $H = (F - F_0, E(H))$, onde $V(H) = F - F_0 = \bigcup\limits_{\substack{1 \leq j \leq r \\ 1 \leq i \leq d'/2}} E(C_{i_j})$ é o conjunto de vértices de $H$ e dois destes vértices são adjacentes em $H$ se, e somente se, os dois possuem um vértice de $G$ em comum com um mesmo elo de $F_0$. Como $G$ é d-regular segue que $L$ é $(4d - 6)$-regular.

A família $(V_{i_j})_{\substack{1 \leq i \leq d/2 \\ 1 \leq j \leq r}}$ de conjuntos de vértices de $H$ formada por elos dos ciclos $C_{i_j}$, ou seja $V_{i_j} = E(C_{i_j})$, satisfaz $|V_{i_j}| \geq 16d > 4(4d - 6)$. Pela Proposição 58 existe um conjunto de vértices independentes $M$ em $H$, contendo exatamente um vértice em cada $V_{i_j}$.

Assim, $M \cup F_0$ é uma floresta linear cujas componentes conexas tem comprimento 1 ou 3.

E ainda, $M$ é um emparelhamento em $G$ e $F_i - M = (C_{i_1} - M) \cup (C_{i_2} - M) \cup ... \cup (C_{i_r} - M)$ são florestas lineares para todo $i$. Ou seja, os subgrafos $M \cup F_0, F_1 - M, F_2 - M, ..., F_{d'/2} - M$ são $d'/2 + 1$ florestas lineares que cobrem todos os elos de $G$, donde $la(G) \leq d'/2 + 1 = (d-1)/2 + 1 = (d+1)/2$. □

Esse mesmo resultado havia sido provado por Alon [4] onde se exigia $g \geq 100d$ e foi melhorado para $g \geq 32d$ em [23].

Desta forma, mostramos que a conjectura da arvoricidade linear é válida para grafos regulares com cintura suficientemente grande $g \geq \frac{9d}{\sqrt{2}}$ quando $d$ é par e, para $g \geq 16d$ quando $d$ é ímpar, de forma que no caso ímpar exige-se que o grafo possua um subgrafo que é um emparelhamento perfeito.

Existe uma literatura razoável em Teoria dos Grafos tratando de grafos regulares com cintura grande, ver por exemplo, contando inclusive com uma famosa construção explícita (sem usar métodos probabilísticos) de uma família deste tipo de grafo, [13] pág. 112.

Para ver mais sobre a conjectura da Arvoricidade linear veja [3], pág. 73.

**Latin Transversal**

**Definição 64.** *Seja $A$ uma matriz $n \times n$ com entradas $a_{ij}$. Suponha que $a_{ij}$ são inteiros para todo $ij = 1, \dots, n$. Uma permutação $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\} : i \mapsto \sigma(i)$ é chamada Latin transversal de $A$ se as entradas $a_{i\sigma(i)}$ com $i = 1. \dots, n$ são todas distintas.*

**Proposição 65.** *Seja $A$ uma matriz $n \times n$ e $k \leq (n-1)/(256/27)$. Suponha que nenhum inteiro aparece em mais do que $k$ entradas de $A$. Então $A$ tem um Latin transversal.*

*Prova:* Seja $\sigma$ uma permutação de $\{1, 2, \dots, n\}$ escolhida aleatoriamente de acordo com distribuição uniforme. Denote por $T$ o conjunto de todas as quatro-uplas ordenadas $(i, j, i', j')$ tais que $i < i'$, $j \neq j'$ e $a_{ij} = a_{i'j'}$. Para cada $(i, j, i', j') \in T$, seja $A_{iji'j'}$ o evento que $\sigma(i) = j$ e $\sigma(i') = j'$.

Claramente, $A_{iji'j'}$ tem probabilidade $\frac{1}{n(n-1)}$ de ocorrer e qualquer permutação $\sigma$ tal que $A_{iji'j'}$ ocorre não é Latin transversal. Por isso, um Latin transversal de $A$ existe quando uma probabilidade não-nula de nenhum do eventos $A_{iji'j'}$ ocorrerem existe. Definimos, então, um grafo $G$ cujo conjunto de vértices é $T$, onde dois vértices $(i, j, i', j')$ e $(p, q, p', q')$ são adjacentes se, e somente se, $\{i, i'\} \cap \{p, p'\} \neq \emptyset$ ou $\{j, j'\} \cap \{q, q'\} \neq \emptyset$.

Esse grafo tem grau máximo menor do que $4nk$. De fato, para $(i, j, i', j')$ fixos, podemos escolher $(s, t)$ de $4n$ maneiras diferentes com $s \in \{i, i'\}$ ou $t \in \{j, j'\}$ para $(i, j, i', j')$ dados, e então, uma vez $(s, t)$ é escolhido, temos menos do que $k$ escolhas para $(s', t')$ diferente de $(s, t)$, tal que $a_{st} = a_{s't'}$, uma vez que, por hipótese, existem no máximo $k$ entradas de $A$ com o mesmo valor.

Assim, temos menos do que $4nk$ quatro-uplas $(s, t, s', t')$ tais que $s = i$ ou $s = i'$ ou $t = j$ ou $t = j'$, com $a_{st} = a_{s't'}$. Agora, para cada uma das quatro-uplas $(s, t, s', t')$, podemos associar as quatro-uplas $(p, q, p', q') = (s, t, s', t')$ se $s < s'$ ou as quatro-uplas $(p, q, p', q') = (s', t', s, t)$ se $s' < s$.

Não é difícil ver que $G$ é um grafo de dependência assimétrico para a família de eventos $A_{iji'j'}$, ou seja

$$\mathbb{P}(A_{iji'j'} | \bigcap_{(p,q,p',q') \in Y} \overline{A}_{pqp'q'}) \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

para quaisquer $(i, j, i', j') \in T$ e qualquer conjunto $Y$ dos membros de $T$ que não são adjacentes em $G$ para $(i, j, i', j')$. Portanto, podemos aplicar Teorema 40 para o grafo lopsidependency $G$ com o conjunto de vértices $T$ descritos acima. Tome $\mu_x = \mu > 0$, para todo $x \in T$, e observe que o conjunto de vértices em $\Gamma_G^*((i, j, i', j'))$ é, pela construção anterior, a união de 4 subconjuntos, cada um com cardinalidade máxima $nk$ tais que todos os vértices em cada um desses quatro subconjuntos são adjacentes. Logo, para tal grafo $G$,

$$Z_{\Gamma_G^*}((i,j,i',j'))(\mu) \leq (1+nk\mu)^4$$

e

$$\frac{\mu}{Z_{\Gamma_G^*}((i,j,i',j'))(\mu)} \geq \frac{\mu}{(1+nk\mu)^4} \equiv f(\mu).$$

Como o lado direito assume seu valor máximo em $\mu_0 = \frac{1}{3nk}$, podemos usar o Teorema 57 na região $p = \frac{1}{n(n-1)} \leq 27/256nk = f(\mu_0)$, o que é equivalente a dizer que $k \leq (n-1)/(256/27)$. $\square$

A mesma proposição com $4e$ em vez de $256/27$ é provada em [3] pág. 73, usando a versão do Lema Local de Lovász usual.

# Referências Bibliográficas


[1] Akiyama, J., Exoo, G. and Harary, F.: *Covering and paking in graphs III, cyclic and acyclic invariants.* Math. Slovaca **30**, 405-417 (1980).

[2] Akiyama, J., Exoo, G. and Harary, F.:*Covering and paking in graphs IV. Linear arboricity* Networks **11**, 69-72 (1981).

[3] Alon, N. and Spencer, *J.: The Probabilistic Method.* Third Edition. (New York, Wiley-Interscience), (2008).

[4] Alon, N.: *The Linear Arboricity of Graphs*. Israel Jour. Math. **62**, n°3. (1988).

[5] Bissacot, R.: *Técnicas para convergência da Expansão do Gás de Polímeros e uma aplicação ao Método Probabilístico*. Tese de Doutorado. UFMG, (2009).

[6] Bissacot, R.; Fernández, R.; Procacci A.; Scoppola, B.: *An Improvement of the Lovász Local Lemma via Cluster Expansion*. Combinatorics Probability and Computing, 20, issue 05, p. 709-719 (2011).

[7] Bollobás, B.: Modern Graph Theory. Springer-Verlag, (1998).

[8] Bollobás, B.: Random graphs. Vol. 73 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. (2001).

[9] Böttcher, J.; Kohayakawa, Y.; Procacci, A.: *Properly coloured copies and rainbow copies of large graphs with small maximum degree*. To appear in Random Structures and Algorithms, (2012).

[10] Chudnovsky, M. and Seymour, P.; *The roots of the independence polynomial of a clawfree graph Source*. Journal of Combinatorial Theory Series B. **97**, Issue 3 , 50-357, (2007).

[11] Cygan, M., Hou, J-F., Kowalik, Λ., Luzar, B. and Wu, J-L.; *A Planar Linear Arboricity Conjecture*. Journal of Graph Theory. **69**, Issue 4, 403-425, (2011).

[12] Diestel, R. Graph Theory. Springer Verlag. New York. (1980).

[13] Davidoff, G.; Sarnak, P. and Valette, A.: *Elementary Number Theory, Group Theory and Ramanujan Graphs.* Cambridge University Press, (2003).

[14] Enemoto, H. and Péroche, B. *The linear arboricity of some regular graphs.* J. Graph Theory **8** (1984) 309-324.

[15] Diniz, I. C.:*O Método Probabilístico e o Lema Local de Lovász.* Dissertação de Mestrado IME USP (2005).

[16] Dobrushin , R. L.: *Perturbation methods of the theory of Gibbsian fields.* in P. Bernard(editor). Lectures on Probability Theory and Statistics, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXIV - 1994. Lectures notes in Mathematics 1648, 1-66. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[17] Dobrushin, R.L.: *Estimates of semi-invariants for the Ising model at low temperatures.* In Topics in Statistical and Theoretical Physics, Amer. Math. Soc. Translations, Ser. 2, 177 (1996) 59-81.

[18] Erdös, P. *Some remarks on the theory of graphs*. Bull. Amer. Math. Soc. **53**, 292-294, (1947).

[19] Erdös, P. *On Problem in Graph Theory*. Math. Gazette. **47**, 220-223,(1963).

[20] Erdös, P. and Lovász, L.: *Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions, in Infinite and finite sets*. Vol. II, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, Vol. 10. (North-Holland, Amsterdam), (1975).

[21] Erdös, P and Spencer, J. *Lopsided Lov ´asz local lemma and latin transversal*. Discrete Apl. Math. **30**, 151-154, (1991).

[22] Fernandez, R.; Procacci A.: *Cluster expansion for abstract polymer models.New bounds from an old approach*. Communications in Mathematical Physics **274**, n.1, 123-140 (2007).

[23] Guldan, F.:*Note on linear arboricity of graphs with large girth*. Czechoslovak Mathematical Journal **41**, no. 3, pages 467-470 (1991).

[24] Guldan, F.:*The linear arboricity of 10-regular graphs*. Math. Slovaca **36**,225-228,(1986).

[25] Haxell, P. E. *A note on vertex list colouring*. Combinatorics, Probability and Computing. **10**, 345-347, (2001).

[26] James, R. B.:*Probabilidade: Um curso em nível intermediário.* 3° Edição. IMPA. Projeto Euclides, (2004).

[27] Kaplan, T. A.: *The Chemical Potential*. Journal of Statistical Physics **122**, n° 6, (2006).

[28] Kotecký, R. and Preiss, D. *Cluster expansion for abstract Polymer models*. Comm. Math. Phys. **103**, 491-498 (1986).

[29] Ndreca, S.; Procacci A.; Scoppola, B.: *Improved bounds on coloring of graphs*. To appear in European Journal of Combinatorics, (2012).

[30] Pegden, W. *An extension of the Moser-Tardos algorithmic local lemma*. http://arxiv.org/abs/1102.2853

[31] Procacci, A. Cluster expansion methods in rigorous Statistical Mechanics. www.mat.ufmg.br/ aldo/papers/book.pdf.

[32] Shearer, J. B.:*On a problem of Spencer*. Combinatorica **5**, 241-245, (1985).

[33] Simon, B.: The Statistical Mechanics of Lattice Gases. Princeton University Press(1993).

[34] Spencer, J.: *Asymptotic Lower Bounds for Ramsey Functions*. Discrete Mathematics **20**, 69-76, (1977).

[35] Scott, A.; Sokal, A.: *The repulsive lattice gas, the independent-set polynomial, and the Lovász local lemma*. J. Stat. Phys. **118**, no. 5-6, 1151–1261, (2005).

[36] Scott, A.; Sokal, A.: *On dependency graphs and the lattice gas*. Combinatorics Probability and Computing, **15**, 253-279, (2006).

[37] Stanley, R.P.: Enumerative combinatorics. Vol. 1, Vol. 49 da coleção Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press. (1997).

[38] Stanley, R.P.: Enumerative combinatorics. Vol. 2, Vol. 62 da coleção Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press. (1997).

[39] Szele, T.: *Kombinatorikai vizsgalatok az iranyitott teljes graffal kapcsolatban*. Mat. Fiz. Lapok **50** pp. 223–256,(1943). For a German translation see: T. Szele, Publ. Math. Debrecen, **13** pp. 145-168, (1966).

[40] Temmel, C.: *Properties and applications of Bernoulli random fields with strong dependency graphs*. PhD thesis, (2012).

[41] Temmel, C.: *Shearer's measure and stochastic domination of product measures*. http://arxiv.org/pdf/1105.1683v2.pdf (2011).

[42] Tomasta, P.: *Note on linear arboricity*. Math. Slovaca **32** (1982) 239-242.