

kreuzungsfrei, wenn keiner eine innere Ecke eines anderen enthält. Zwei a - b -Wege etwa sind genau dann kreuzungsfrei, wenn sie bis auf a und b disjunkt sind.

Ist G ein Graph, so nennen wir P einen G -Weg, wenn P den Graphen G nur in seinen Endecken x_0, x_k trifft und diese verschieden sind (also P nicht trivial). Insbesondere liegt die Kante eines G -Weges der Länge 1 nicht in G .

Ist $P = x_0 \dots x_{k-1}$ ein Weg und $k \geq 3$, so ist der Graph $C := P + x_{k-1}x_0$ ein Kreis. Auch einen Kreis bezeichnen wir häufig kurz durch seine (zyklische) Eckenfolge, im obigen Beispiel also etwa $C = x_0 \dots x_{k-1}x_0$. Die Länge eines Kreises ist wieder die Anzahl seiner Kanten, und den Kreis der Länge k bezeichnen wir mit C^k .

Die Länge eines kürzesten Kreises in (\subseteq) einem Graphen G ist die *Tailenweite* $g(G)$ von G , die Länge eines längsten Kreises der *Umfang*. (Beide Werte seien ∞ , wenn G keinen Kreis enthält.) Eine Kante von G , die zwei Ecken eines Kreises in G verbindet aber nicht selbst Kante des Kreises ist, ist eine *Sehne* dieses Kreises; ein Kreis in G ist also genau dann sehnenlos, wenn er als Teilgraph in G induziert ist.

Enthält G keinen Kreis, so sei die Tailenweite von G unendlich, sein Umfang jedoch null.

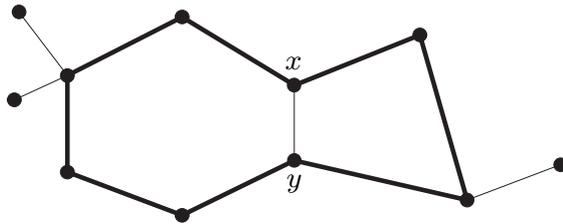


Abb. 0.3.3. Ein C^8 mit Sehne xy , und induzierte C^6, C^4

Hat G hohen Minimalgrad, so enthält G lange Wege und Kreise:⁴

Proposition 0.3.1. *Jeder Graph G enthält einen Weg der Länge $\delta(G)$ und einen Kreis der Länge mindestens $\delta(G) + 1$ (für $\delta(G) \geq 2$).*

Beweis. Es sei $x_0 \dots x_k$ ein längster Weg in G . Alle Nachbarn von x_k in G liegen dann auf diesem Weg (Abb. 0.3.4). Es folgt $k \geq d(x_k) \geq \delta(G)$. Ist $i < k$ minimal mit $x_i x_k \in E(G)$, so ist $x_i \dots x_k x_i$ ein Kreis der Länge mindestens $\delta(G) + 1$. \square

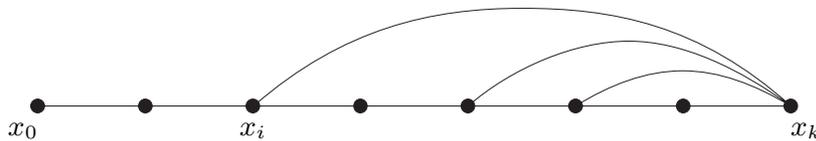


Abb. 0.3.4. Ein längster Weg $x_0 \dots x_k$, und die Nachbarn von x_k

⁴ Von trivialen Ausnahmen abgesehen, ist Proposition 0.3.1 durchaus nicht bestmöglich: siehe Übungen!

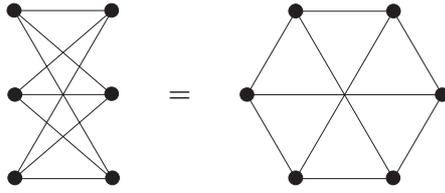


Abb. 0.6.2. Zwei Darstellungen des bipartiten Graphen $K_{3,3} = K_3^2$

das Oktaeder K_2^3 ; vergleiche diese Darstellung mit der aus Abb. 0.4.3!) Graphen der Form $K_{1,n}$ nennt man *Sterne*.

Offenbar kann ein bipartiter Graph keinen Kreis ungerader Länge enthalten. Diese Eigenschaft charakterisiert die bipartiten Graphen sogar:

Proposition 0.6.1. *Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.*

Beweis. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph ohne Kreise ungerader Länge; wir zeigen, daß G bipartit ist. Da ein Graph bipartit ist, wenn all seine Komponenten es sind, dürfen wir G als zusammenhängend voraussetzen. Es sei T ein Spannbaum von G und (v_1, \dots, v_n) eine Aufzählung von V , so daß $T_i := T[v_1, \dots, v_i]$ für alle i zusammenhängend ist (Proposition 0.4.1). Zu gegebenem $v \in V$ hat der eindeutig bestimmte Weg v_1Tv gerade oder ungerade Länge; dies definiert eine Partition von V in zwei Teile. Wir zeigen, daß diese Partition G als bipartit erweist.

Abbildung korrigiert

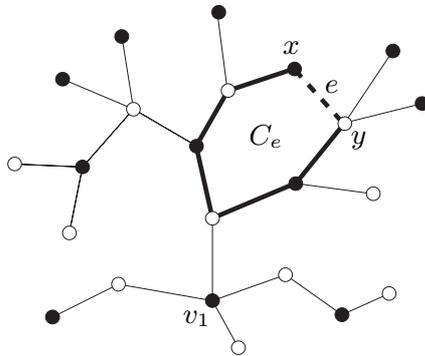


Abb. 0.6.3. Der Kreis C_e in $T + e$

Ist $v_i v_j$ mit $i < j$ eine beliebige Kante von T , so liegen v_i und v_j in verschiedenen Partitionsklassen: da T_i zusammenhängend ist, führt der Weg v_1Tv_j über v_i . Es bleibt zu zeigen, daß auch die Endecken einer jeden Kante aus $E \setminus E(T)$ in verschiedenen Partitionsklassen liegen. Ist $e = xy$ eine solche Kante, so liegen die Ecken des Weges xTy abwechselnd in den beiden Partitionsklassen. Da der Kreis $C_e := xTy + e$ (Abb. 0.6.3) nach Voraussetzung gerade ist, hat xTy eine gerade Anzahl von Ecken. Somit liegen x und y in der Tat in verschiedenen Partitionsklassen. \square

für den ad-hoc-Gebrauch, d.h. wir können von Wegen P_1, \dots, P_k sprechen, oder von Komponenten C_1 und C_2 .

Satz 0.4.2 ist von W. Mader, Existenz n -fach zusammenhängender Teilgraphen in Graphen genügend großer Kantendichte, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **37** (1972) 86–97; Satz 0.8.1 aus L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, *Comment. Acad. Sci. I. Petropolitanae* **8** (1736), 128–140.

Von dem weiten Gebiet der Algebraischen Graphentheorie vermittelt Abschnitt 0.9 kaum einen angemessenen Eindruck. Ein Klassiker hierzu ist N.L. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press 1974. Eine neuere umfassende Darstellung geben C.D. Godsil & G.F. Royle, *Algebraic Graph Theory* (in Vorbereitung). Auch das *Handbook of Combinatorics* (R.L. Graham, M. Grötschel & L. Lovász, Hrsg.), North-Holland 1995, enthält interessante Artikel über algebraische Methoden in der Graphentheorie. Die im Text verwendete Identität $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$ für beliebige Vektorräume V und Unterräume W findet man etwa in G. Fischer, *Lineare Algebra* (10. Auflage), Vieweg 1995 bewiesen (Kap. 6.1, oder Kor. 2.3.1(1) mit Satz 2.6.6).

2. Auflage: CUP 1993

Beweis. Es sei G ein beliebiger $2k$ -regulärer Graph ($k \geq 1$), oBdA zusammenhängend. Nach Satz 0.8.1 enthält G einen Eulerschen Kantenzug $v_0 e_0 \dots e_{k-1} v_k$, mit $v_k = v_0$. Wir ersetzen jetzt jede Ecke v durch ein Eckenpaar (v^-, v^+) und jede Kante $e_i = v_i v_{i+1}$ durch die Kante $v_i^+ v_{i+1}^-$ (Abb. 1.1.5). Der entstandene bipartite Graph ist k -regulär und hat somit nach Korollar 1.1.4 einen 1-Faktor. Identifizieren wir in diesem 1-Faktor jedes Eckenpaar (v^-, v^+) wieder zur ursprünglichen Ecke v , so erhalten wir einen 2-Faktor in G . \square

$e_{\ell-1}, v_\ell$

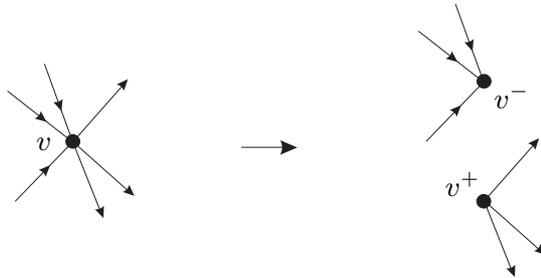


Abb. 1.1.5. Die Eckenpartung im Beweis von Korollar 1.1.5

1.2 Paarungen in allgemeinen Graphen

Für einen Graphen G bezeichne \mathcal{C}_G die Menge seiner Komponenten, und $q(G)$ die Anzahl der Komponenten ungerader Ordnung. Hat G einen 1-Faktor, so gilt offenbar

$$q(G - S) \leq |S| \quad \text{für alle } S \subseteq V(G).$$

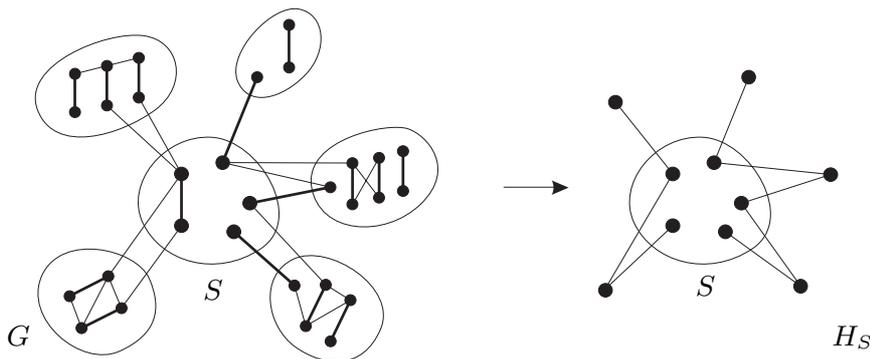


Abb. 1.2.1. Die Tutte-Bedingung $q(G - S) \leq |S|$ für $q = 3$, und der kontrahierte Graph H_S

In den Komponenten von $G - S$ sind nicht alle Kanten eingezeichnet.

Daß auch die Umkehrung dieser Implikation gilt, ist ein weiterer klassischer Satz der Graphentheorie:

von $P_1 v_1$. Damit ist $\mathcal{P}' := \{P_1 v, P_2, \dots, P_m\}$ eine Wegüberdeckung von $G' := G - v_1$ (Abb. 1.3.1). Wir zeigen zunächst, daß \mathcal{P}' mit dieser Eigenschaft $<$ -minimal ist.

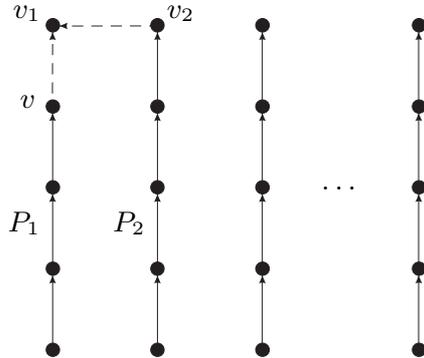


Abb. 1.3.1. Die Wegüberdeckung \mathcal{P}' von G'

Angenommen, $\mathcal{P}'' < \mathcal{P}'$ sei eine weitere Wegüberdeckung von G' . Endet ein Weg $P \in \mathcal{P}''$ in v , so ersetzen wir P in \mathcal{P}'' durch $P v v_1$ und erhalten so eine kleinere Wegüberdeckung von G als \mathcal{P} , mit Widerspruch zur Minimalität von \mathcal{P} . Endet ein Weg $P \in \mathcal{P}''$ in v_2 (aber keiner in v), so ersetzen wir P in \mathcal{P}'' durch $P v_2 v_1$ und erhalten erneut einen Widerspruch zur Minimalität von \mathcal{P} . Es gilt also $\{\text{ter}(P) \mid P \in \mathcal{P}''\} \subseteq \{v_3, \dots, v_m\}$, und insbesondere ist $|\mathcal{P}''| \leq |\mathcal{P}| - 2$. Die Menge \mathcal{P}'' vermehrt um den trivialen Weg $\{v_1\}$ überdeckt dann G und widerspricht der Minimalität von \mathcal{P} .

\mathcal{P}' ist also minimal, wie behauptet. Nach Induktionsannahme hat $\{V(P) \mid P \in \mathcal{P}'\}$ ein Repräsentantensystem aus unabhängigen Ecken. Dies ist auch ein Repräsentantensystem für \mathcal{P} , und somit ist (*) bewiesen. \square

Als Korollar zu Satz 1.3.1 erhalten wir ein klassisches Resultat der Ordnungstheorie. Eine Teilmenge A einer Halbordnung (P, \leq) ist eine *Kette* in P , wenn je zwei Elemente von A in P vergleichbar sind; A ist eine *Antikette*, wenn die Elemente von A paarweise unvergleichbar sind.

Korollar 1.3.2. (Dilworth 1950)

In jeder endlichen Halbordnung (P, \leq) ist die geringste Anzahl von Ketten, die ganz P überdecken, gleich der größten Mächtigkeit einer Antikette in G .

in P

Beweis. Ist A eine Antikette maximaler Mächtigkeit in P , so ist P offenbar nicht durch weniger als $|A|$ Ketten überdeckbar. Daß $|A|$ Ketten zur Überdeckung von P ausreichen, folgt aus Satz 1.3.1, angewendet auf den gerichteten Graphen mit Eckenmenge P und Kantenmenge $\{(x, y) \mid x < y\}$. \square

Beweis. Es sei H der Graph auf $V[\mathcal{P}] \cup \{x_0, \dots, x_n\}$, dessen Kantenmenge die symmetrische Differenz von $E[\mathcal{P}]$ mit $\{e_0, \dots, e_{n-1}\}$ ist. Betrachten wir eine beliebige Ecke $v \in H$. Ist $v \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, so gilt $d_H(v) = 1$. Anderenfalls ist $d_H(v) \in \{0, 2\}$. Für jede der $|\mathcal{P}| + 1$ Ecken $a \in (A \cap V[\mathcal{P}]) \cup \{x_0\}$ ist daher die a enthaltende Komponente von H ein Weg, etwa $P = v_0 \dots v_k$, der in a beginnt und in A oder in B endet. Unter Benutzung der Bedingungen (i) und (iii) oben zeigt man leicht mit Induktion nach $i = 0, \dots, k - 1$, daß P jede seiner Kanten $e = v_i v_{i+1}$ auch im Sinne von \mathcal{P} bzw. von W vorwärts durchläuft. (Formal: ist $e \in P'$ mit $P' \in \mathcal{P}$, so gilt $v_i \in P' \overset{\circ}{v}_{i+1}$; ist $e = e_j \in W$, so ist $v_i = x_j$ und $v_{i+1} = x_{j+1}$.) Somit kann P nur in B enden, ist also ein A - B -Weg. Insgesamt haben wir $|\mathcal{P}| + 1$ disjunkte solche Wege P , wie gewünscht. \square

OBdA sei $x_0 \notin B$

Zweiter Beweis von Satz 2.3.1. Es sei \mathcal{P} eine Menge möglichst vieler disjunkter A - B -Wege in G . Sofern nicht anders angegeben, bezieht sich "alternierend" im folgenden stets auf \mathcal{P} . Wir setzen

$$A_1 := V[\mathcal{P}] \cap A \quad \text{und} \quad A_2 := A \setminus A_1,$$

sowie

$$B_1 := V[\mathcal{P}] \cap B \quad \text{und} \quad B_2 := B \setminus B_1.$$

Für jeden Weg $P \in \mathcal{P}$ sei x_P die letzte Ecke von P , die auf einem in A_2 beginnenden alternierenden Kantenzug ohne innere Ecken in $A_2 \cup B_2$ liegt; existiert keine solche Ecke, so sei x_P die erste Ecke von P . Offenbar hat

$$X := \{x_P \mid P \in \mathcal{P}\}$$

die Mächtigkeit $|\mathcal{P}|$; es reicht daher zu zeigen, daß X die Mengen A und B in G trennt.

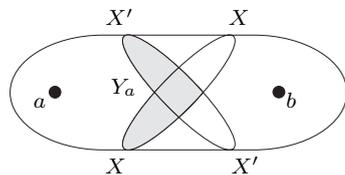
Es sei Q ein beliebiger A - B -Weg; wir zeigen, daß Q die Menge X trifft. Angenommen nicht. Wegen der Maximalität von $|\mathcal{P}|$ ist $V(Q) \cap V[\mathcal{P}] \neq \emptyset$. Da der in Q enthaltene A - $V[\mathcal{P}]$ -Weg trivialerweise ein alternierender Kantenzug ist, trifft Q auch die Eckenmenge $V[\mathcal{P}']$ von

$$\mathcal{P}' := \{Px_P \mid P \in \mathcal{P}\};$$

es sei y die letzte Ecke von Q in $V[\mathcal{P}']$. Weiter sei P der y enthaltende Weg aus \mathcal{P} und $x := x_P$. Schließlich sei W ein alternierender Kantenzug von A_2 nach x ohne innere Ecken in $A_2 \cup B_2$, wie in der Definition von x_P . Da Q nach Annahme X und damit x vermeidet, ist $y \in P\overset{\circ}{x}$, und $W \cup xPyQ$ ist ein Kantenzug von A_2 nach B ohne innere Ecken in $A_2 \cup B_2$ (Abb. 2.3.4). Ist dieser Kantenzug alternierend und endet

$$Y_b := (X \cap C'_b) \cup (X \cap X') \cup (X' \cap C_b)$$

die Ecken a und b trennen (siehe Abbildung).



3. (Fortsetzung der vorigen Übung)

Sind Y_a und Y_b minimal als a von b trennende Eckenmengen, wenn X und X' es sind? Sind $|Y_a|$ und $|Y_b|$ minimal für a von b trennende Eckenmengen, wenn $|X|$ und $|X'|$ es sind?

X und X' sollen als trennende Eckenmengen insgesamt minimal sein, nicht nur bezüglich der Trennung gegebener Ecken a und b .

- 4.⁺ Es seien G ein Graph, $a, b \in G$ zwei verschiedene Ecken, und $X, X' \subseteq V(G) \setminus \{a, b\}$ zwei minimale a von b in G trennende Eckenmengen. Die Menge X treffe mindestens zwei Komponenten von $G - X'$. Zeige, daß X' alle Komponenten von $G - X$ trifft, und daß X alle Komponenten von $G - X'$ trifft.
- 5.⁻ Beweise die elementaren Aussagen über Blöcke am Anfang von Abschnitt 2.1.
6. Zeige, daß der Block-Graph eines zusammenhängenden Graphen stets ein Baum ist.
7. Zeige ohne den Satz von Menger, daß in einem 2-zusammenhängenden Graphen je zwei Ecken auf einem gemeinsamen Kreis liegen.
8. Für Kanten e, e' eines Graphen G gelte $e \sim e'$ genau dann, wenn $e = e'$ ist oder e und e' auf einem gemeinsamen Kreis in G liegen. Zeige, daß \sim eine Äquivalenzrelation auf $E(G)$ ist, deren Äquivalenzklassen gerade die Kantenmengen der nicht trivialen Blöcke von G sind.
9. Zeige, daß für jede Kante e eines 2-zusammenhängenden Graphen $G \neq K^3$ entweder $G - e$ oder G/e wiederum 2-zusammenhängend ist.
10. (i) Zeige, daß jeder kubische 3-kantenzusammenhängende Graph auch 3-zusammenhängend ist.
(ii) Zeige, daß ein Graph genau dann kubisch und 3-zusammenhängend ist, wenn man ihn iterativ aus einem K^4 durch die folgende Operation konstruieren kann: die Unterteilung zweier Kanten durch je eine Ecke und Verbinden der beiden neuen Ecken durch eine neue Kante.
- 11.⁻ Zeige, daß der Satz von Menger äquivalent ist zur folgenden Aussage: in einem Graphen G gibt es zu zwei Eckenmengen A, B stets eine Menge \mathcal{P} disjunkter A - B -Wege und eine Eckenmenge $X = \{x_P \mid P \in \mathcal{P}\}$ mit $x_P \in P$ für alle $P \in \mathcal{P}$, so daß X die Mengen A und B in G trennt.
12. Führe den Beweis von Korollar 2.3.4 (ii) genau durch.

Unser erster Äquivalenzbegriff ist vielleicht der natürlichste. Anschaulich möchten wir den Isomorphismus σ "topologisch" nennen, wenn er induziert wird durch einen Homöomorphismus der Ebene auf sich selbst. Um den Außengebieten von G und G' keine Sonderrolle zukommen zu lassen, gehen wir einen Umweg über unseren in Abschnitt 3.1 fest gewählten Homöomorphismus $\pi: S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$: wir nennen σ einen *topologischen Isomorphismus* der ebenen Graphen G und G' , wenn es einen Homöomorphismus $\varphi: S^2 \rightarrow S^2$ gibt, so daß $\psi := \pi \circ \varphi \circ \pi^{-1}$ auf $V \cup E$ gerade σ induziert. (Formal: auf V soll ψ mit σ übereinstimmen, und jede ebene Kante $e \in G$ soll ψ auf die ebene Kante $\sigma(e) \in G'$ abbilden.)

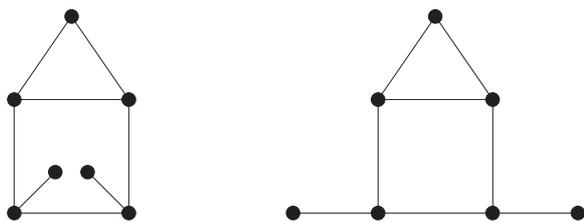


Abb. 3.3.1. Zwei topologisch nicht isomorphe Zeichnungen des gleichen Graphen

Proposition 3.3.1. Zu jedem Gebiet f eines ebenen Graphen G gibt es einen zu G topologisch isomorphen ebenen Graphen G' , so daß das f entsprechende Gebiet von G' sein Außengebiet ist.

Beweis. Wähle φ als eine Drehung von S^2 , die einen Punkt aus $\pi^{-1}(f)$ auf $(0, 0, 1)$ abbildet. \square

Die Bedeutung des Wortes "entsprechend" in Proposition 3.3.1 beruht auf der – hier nicht bewiesenen – Tatsache, daß der einem topologischen Isomorphismus zugrundeliegende Homöomorphismus $\psi = \pi \circ \varphi \circ \pi^{-1}$ auch die Gebiete von G homöomorph auf die Gebiete von G' abbildet⁴ und damit in natürlicher Weise die gegebene Bijektion $\sigma: V \cup E \rightarrow V' \cup E'$ durch eine Bijektion $F \rightarrow F'$ ergänzt. Diese Bijektion, die wir wiederum mit σ bezeichnen, erhält überdies die Inzidenz der Gebiete mit ihren Rändern: für jedes Gebiet f von G ist $\sigma(G[f])$ der Rand von $\sigma(f)$ in G' .

Diese Eigenschaft erheben wir zur Definition unseres zweiten Äquivalenzbegriffs für ebene Graphen: wir nennen unseren gegebenen Isomorphismus $\sigma: V \cup E \rightarrow V' \cup E'$ der abstrakten Graphen G und G' einen *kombinatorischen Isomorphismus* der ebenen Graphen G und G' , wenn er sich zu einer Bijektion $V \cup E \cup F \rightarrow V' \cup E' \cup F'$ fortsetzen läßt, die

⁴ ... jedenfalls fast: ist eines der beiden Gebiete Außengebiet, so mag dem Homöomorphismus ein Punktepaar fehlen; die gewünschte Bijektion $\sigma: F \rightarrow F'$ ist dennoch eindeutig bestimmt. (Wie?)

Die Kanten von $\psi(G)$ sind damit i.a. noch nicht stückweise gerade. Das läßt sich zwar erreichen, doch muß man dann φ nachbessern – z.B. so, wie im Beweis von Satz 3.3.2 (ii).

diese Segmente seien entsprechend ihrer Lage in D in zyklischer Ordnung als s_1, \dots, s_5 nummeriert. Ist v_i der Nachbar von v mit $s_i \subseteq vv_i$, so sei oBdA $c(v_i) = i$. Wir zeigen zunächst, daß jeder v_1 - v_3 -Weg $P \subseteq H$ die Ecken v_2 und v_4 in H trennt. (Abb. 4.1.1)

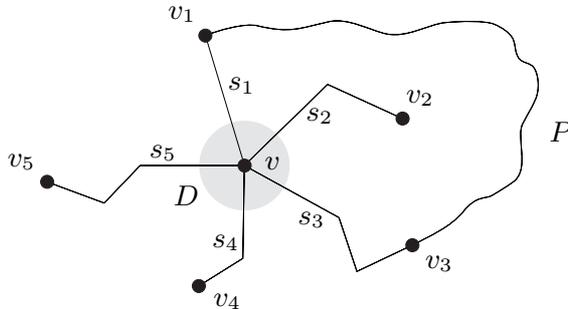


Abb. 4.1.1. Zum Beweis des Fünffarbensatzes

Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn der Kreis $C := vv_1Pv_3v$ die Ecken v_2 und v_4 in G trennt. Hierzu wiederum reicht es zu zeigen, daß v_2 und v_4 in verschiedenen Gebieten von C liegen. Betrachten wir zunächst die beiden Gebiete D', D'' von $D \setminus (s_1 \cup s_3)$. Das eine dieser Gebiete trifft s_2 , das andere s_4 ; es sei etwa $x_2 \in D' \cap s_2$ und $x_4 \in D'' \cap s_4$. Wegen $s_1 \cup s_3 \subseteq C$ sind D' und D'' jeweils ganz in einem Gebiet von C enthalten. Diese Gebiete sind verschieden: sonst trüfe ganz D nur ein Gebiet von C , im Widerspruch zur Tatsache, daß v auf dem Rand der beiden Gebiete von C liegt (Satz 3.1.1). Mit x_2 und x_4 liegen aber auch v_2 und v_4 in verschiedenen Gebieten von C , wie behauptet.

Wegen $C \cap D \subseteq s_1 \cup s_3$

Für $i, j \in \{1, \dots, 5\}$ sei $H_{i,j}$ der von den mit i und j gefärbten Ecken induzierte Untergraph von H , also $H_{i,j} := H[c^{-1}(\{i, j\})]$. Ist C_1 die Komponente von $H_{1,3}$, die v_1 enthält, so ist auch $v_3 \in C_1$: anderenfalls vertauschten wir an allen Ecken von C_1 die Farben 1 und 3 und erhielten so eine 5-Färbung von H , in der v_1 und v_3 beide mit 3 gefärbt wären; wir könnten dann v mit 1 färben. $H_{1,3}$ enthält also einen v_1 - v_3 -Weg P , der wie oben v_2 und v_4 in H trennt. Insbesondere liegen v_2 und v_4 dann in verschiedenen Komponenten von $H_{2,4}$, denn $P \cap H_{2,4} = \emptyset$. In einer dieser Komponenten können wir die Farben 2 und 4 vertauschen und dann v mit der freigewordenen Farbe färben. \square

Als Hintergrund zum Vier- und Fünffarbensatz zitieren wir noch ein bekanntes Resultat:

Satz 4.1.3. (Grötzsch 1959)

Jeder ebene Graph, der kein Dreieck enthält, ist 3-färbbar.

Wie wir gesehen haben, hat ein Graph G hoher chromatischer Zahl auch hohen Maximalgrad, nämlich mindestens $\chi(G) - 1$. Was sonst können wir über die Gestalt eines Graphen mit hoher chromatischer Zahl sagen?

Ein einfacher möglicher Grund für $\chi(G) \geq k$ ist das Vorhandensein eines K^k als Teilgraphen von G . Dies ist eine lokale Eigenschaft von G , vereinbar – etwa bei Hinzufügung vieler isolierter Ecken – mit beliebig niedrigen Werten der Invarianten κ , δ und ε . Wir können aus $\chi(G) \geq k$ also nicht auf Werte dieser Invarianten für G selbst schließen.

Folgt aus $\chi(G) \geq k$ dann zumindest lokal die Existenz eines besonders dichten Teilgraphen von G , vielleicht gar eines K^k ? Nach Korollar 4.2.3 hat G jedenfalls einen Teilgraphen H mit $\delta(H) \geq k - 1$, und daher nach Satz 0.4.2 einen Teilgraphen H' mit $\kappa(H') \geq \frac{1}{4}(k - 1)$.

$$\lfloor \frac{1}{4}(k - 1) \rfloor$$

Selbst diese Teilgraphen sind jedoch weit davon entfernt, ihrerseits einen spezifischen Graphen hoher chromatischer Zahl zu enthalten (wie etwa einen K^k), einen konkreten Teilgraphen also, der allein verantwortlich wäre für die hohe chromatische Zahl von G . Tatsächlich folgt aus $\chi(G) \geq k$ nicht nur nicht die Existenz eines K^k in G , oder auch eines K^r für ein mit k wachsendes r : es folgt noch nicht einmal die Existenz eines Dreiecks (Übung).

Doch damit nicht genug. Wie wir in Kapitel 9 sehen werden, braucht G noch nicht einmal kurze Kreise zu enthalten: es gibt Graphen beliebig hoher chromatischer Zahl und gleichzeitig beliebig hoher Taillenweite! Somit gibt es auch für jeden konkreten Graphen H , der nicht gerade ein Wald ist, zu jedem k einen Graphen G mit $\chi(G) \geq k$ und $H \not\subseteq G$. (Daß G andererseits bei hinreichend großem $\chi(G)$ jeden vorgegebenen Wald enthält, folgt wiederum aus Korollar 4.2.3.) Hohe chromatische Zahl ist also nicht, wie man nach unseren ersten Betrachtungen hätte vermuten können, notwendig eine lokale Dichteigenschaft, sondern kann als ein rein globales Phänomen auftreten: hat ein Graph hohe Taillenweite, so sieht er lokal um jede Ecke herum aus wie ein Baum, ist dort also jeweils 2-färbbar!

Aus welchen Eigenschaften eines Graphen G können wir umgekehrt auf eine hohe chromatische Zahl von G schließen? Welche Möglichkeiten eines einfachen Nachweises gibt es, daß ein Graph nicht mit weniger als k Farben färbbar ist? Gegen hohe Werte globaler Invarianten wie Zusammenhang oder Durchschnittsgrad ist die chromatische Zahl weitgehend immun: die vollständig bipartiten Graphen $K_{n,n}$ etwa zeigen, daß wir aus großem κ , δ oder ε nicht auf großes χ schließen können.

Insofern ist es interessant, daß es ein einfaches – wenn auch nicht immer kurzes – Verfahren gibt, jeden Graphen G mit $\chi(G) \geq k$ schrittweise aus vollständigen Graphen K^k zu gewinnen. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ definieren wir dazu die Klasse der *k-konstruierbaren* Graphen rekursiv wie folgt:

- (i) Jeder K^k ist *k-konstruierbar*.

Es sei H'_2 eine isomorphe Kopie von H_2 , die x und $H_2 - H_1$ enthält und sonst zu G disjunkt ist; der Isomorphismus $v \mapsto v'$ von H_2 nach H'_2 sei auf $H_2 \cap H'_2$ die Identität. Dann gilt $H_1 \cap H'_2 = \{x\}$, und nach (iii) ist

$$H := (H_1 \cup H'_2) - xy_1 - xy'_2 + y_1y'_2$$

k -konstruierbar. Wir identifizieren in H nun nacheinander jede Ecke $v' \in H'_2 - G$ mit ihrer Partnerecke v ; da jeweils $vv' \notin E(H)$ gilt, ist jede solche Identifikation ein Konstruktionsschritt des Typs (ii). Am Ende dieses Prozesses erhalten wir den Graphen

$$(H_1 \cup H_2) - xy_1 - xy_2 + y_1y_2 \subseteq G;$$

dies ist der gesuchte k -konstruierbare Teilgraph von G . □

4.3 Kantenfärbungen

Für jeden Graphen G ist offenbar $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. Für bipartite Graphen gilt hier sogar Gleichheit:

Proposition 4.3.1. (König 1916)

Für jeden bipartiten Graphen G gilt $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Beweis. Wir verwenden Induktion nach $\|G\|$. Für $\|G\| = 0$ ist die Behauptung wahr. Es sei nun G mit $\|G\| \geq 1$ gegeben, $\Delta := \Delta(G)$, und die Behauptung sei wahr für Graphen mit weniger Kanten. Wir wählen eine Kante $xy \in G$ und eine Kantenfärbung $E(G - xy) \rightarrow \{1, \dots, \Delta\}$. Kanten der Farbe α bezeichnen wir als α -Kanten.

In $G - xy$ haben x und y jeweils höchstens $\Delta - 1$ inzidente Kanten. Wir können daher $\alpha, \beta \in \{1, \dots, \Delta\}$ finden, so daß x mit keiner α -Kante inzidiert und y mit keiner β -Kante. Können wir überdies $\alpha = \beta$ wählen, so färben wir xy mit dieser Farbe und erhalten so unsere gewünschte Δ -Kantenfärbung von G .

Wir nehmen daher an, daß $\alpha \neq \beta$ ist und x mit einer β -Kante inzidiert. Wir setzen diese Kante zu einem maximalen Kantenzug W fort, dessen Kanten abwechselnd mit β und α gefärbt sind. W enthält keine Ecke zweimal (warum?) und ist daher ein Weg. Weiter kann W nicht in y enden: nach Wahl von β wäre die letzte Kante von W dann mit α gefärbt, d.h. W hätte gerade Länge und $W + xy$ wäre ein Kreis ungerader Länge in G (vgl. Proposition 0.6.1). Wir färben nun alle Kanten in W um, indem wir die Farben α und β auf W vertauschen. Nach Wahl von α und aufgrund der Maximalität von W sind auch nach der Umfärbung in ganz $G - xy$ keine gleichfarbigen Kanten benachbart.

natürlich kann y auch keine innere Ecke von W sein

- 21.⁺ Zeige, daß es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ einen k -chromatischen Graphen gibt, der kein Dreieck enthält.

(Tip: Induktion nach k ; beim Induktionsschritt $k \rightarrow k + 1$ konstruiere einen $(k + 1)$ -chromatischen dreiecksfreien Graphen aus der disjunkten Vereinigung entsprechender Graphen für $1, \dots, k$.)

22. Finde einen 2-färbbaren Graphen, der nicht 2-listenfärbbar ist.

(Tip: $K_{n,n}$.)

- 23.⁻ Zeige (ohne Satz 4.4.2), daß jeder ebene Graph 6-listenfärbbar ist.

24. Finde eine Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\text{ch}'(G) \leq f(\chi'(G))$ für alle Graphen G .

25. Eine *Totalfärbung* eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung auf $V \cup E$, die benachbarten oder inzidenten Elementen verschiedene Werte zuweist. Das kleinste k , für das G eine Totalfärbung mit k Farben zuläßt, bezeichnen wir mit $\chi''(G)$.

(i) Finde eine in $\Delta(G)$ ausgedrückte obere Schranke für $\chi''(G)$.

(ii) Zeige, daß die Gültigkeit der Listenfärbungsvermutung $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 3$ zur Folge hätte.

- 26.⁺ Beweise den Satz von Richardson, daß jeder gerichtete Graph ohne gerichtete Kreise ungerader Länge einen Kern besitzt.

(Tip: Eine Menge S von Ecken eines gerichteten Graphen D sei ein *Schwamm*, wenn D für jede Ecke $v \in D - S$ einen gerichteten Weg von v nach S enthält. Gibt es zusätzlich in D keinen gerichteten Weg zwischen zwei Ecken von S , so heiße S ein *Schwämmchen*. Zeige zunächst, daß jeder Schwamm ein Schwämmchen enthält. Definiere dann induktiv eine Partition von $V(D)$ in "Schichten" S_0, \dots, S_n , so daß S_i für gerade i ein geeignetes Schwämmchen in $D_i := D - (S_0 \cup \dots \cup S_{i-1})$ ist und für ungerade i aus den Ecken von D_i besteht, die eine Kante nach S_{i-1} schicken. Zeige, daß die geraden Schichten zusammen einen Kern von D bilden, wenn D keinen gerichteten Kreis ungerader Länge enthält.)

- 27.⁺ Zeige, daß jeder bipartite plättbare Graph 3-listenfärbbar ist.

(Tip: Verwende die vorige Übung und Lemma 4.4.3. Suche die gewünschte Orientierung schrittweise: hat eine gegebene Orientierung noch Ecken v mit $d^+(v) \geq 3$, so ändere die Richtung der Kanten entlang eines Weges von v zu einer geeigneten Ecke w . Zum Beweis, daß w existiert, bestimme zunächst mit Hilfe der Eulerformel den höchstmöglichen Durchschnittsgrad eines bipartiten paaren Graphen.)

eines bipartiten plättbaren

- 28.⁻ Zeige, daß Perfektion weder hinsichtlich des Löschens von Kanten noch hinsichtlich der Kantenkontraktion abgeschlossen ist.

29. Zeige, daß ein Graph genau dann perfekt ist, wenn zu jedem Untergraphen H eine Partition von $V(H)$ in unabhängige Mengen und ein vollständiger Teilgraph $K \subseteq H$ existieren, so daß K aus jeder Partitionsmenge (genau) eine Ecke enthält.

Algorithmus auf eine geschickte Eckenaufzählung angewendet wird, stammt von L. Lovász (1973).

Jensen & Toft und Urquhart zeigten 1996 unabhängig voneinander, daß die Graphen mit chromatischer Zahl $\geq k$ nicht nur alle einen k -konstruierbaren Teilgraphen haben (wie im Satz von Hajós), sondern sogar alle selbst k -konstruierbar sind. Ansätze, eine hohe chromatische Zahl mit algebraischen Mitteln nachzuweisen, wurden von Kleitman & Lovász (1982) und von Alon & Tarsi (1992) entwickelt; siehe den unten zitierten Artikel von Alon.

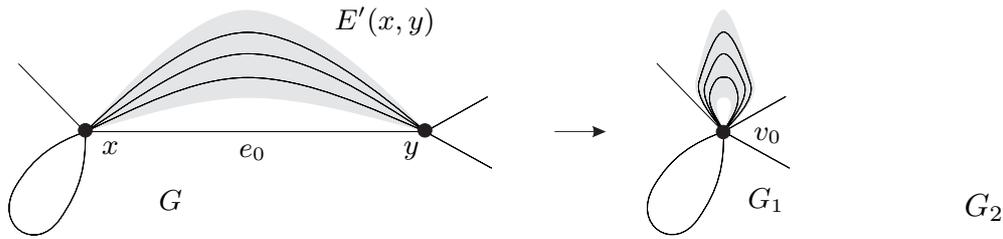
Listenfärbungen wurden zuerst 1976 von Vizing betrachtet. Vizing bewies damals unter anderem die Listenversion des Satzes von Brooks; einen kürzeren Beweis geben A.V. Kostochka, M. Stiebitz und B. Wirth, The colour theorems of Brooks and Gallai, Manuskript 1995. M. Voigt (1993) konstruierte einen ebenen Graphen, der nicht 4-listenfärbbar ist; Thomassens Listenversion des Fünffarbensatzes ist somit bestmöglich.

Sowohl die Listenfärbungsvermutung als auch Galvins Beweis des bipartiten Falls gelten allgemeiner für Multigraphen. Unser Beweis von Satz 4.4.4 folgt Galvins Originalarbeit; eine etwas kompaktere Fassung, in der die gerichteten Kantengraphen und ihre Kerne nicht explizit auftreten sondern in das Hauptargument integriert sind, gibt Slivnik in *Combinatorics, Probability and Computing* **6** (1996), 1–4.

Einen Überblick über Resultate, Techniken und offene Probleme aus dem Bereich der Listenfärbungen gibt N. Alon, Restricted colorings of graphs, in (K. Walker, Hrsg.): *Surveys in Combinatorics*, LMS Lecture Notes **187**, Cambridge University Press 1993. Dort findet sich auch eine Beweis von Satz 4.4.1. Kahn (1994) zeigte, daß die Listenfärbungsvermutung asymptotisch richtig ist: für jedes $\epsilon > 0$ gilt $ch'(G) \leq (1 + \epsilon)\Delta(G)$ für alle Graphen G mit hinreichend großem $\Delta(G)$.

Proposition 4.5.1 stammt von Dirac (1961). Unser Beweis von Satz 4.5.3, dem *Perfect Graph Theorem*, folgt dem Übersichtsartikel von L. Lovász, Perfect graphs, in (L.W. Beineke und R.J. Wilson, Hrsg.): *Selected Topics in Graph Theory 2*, Academic Press 1983. Kurz nach seinem Beweis durch Lovász wurde der Satz unabhängig auch von Fulkerson bewiesen. Eine leicht lesbare Einführung in perfekte Graphen samt Anwendungen gibt M.C. Golumbic, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press 1980.

Combinatorics, Probability and Computing **5** (1996), 91–94

Abb. 5.3.1. Kontraktion der Kante e_0

mit $f \mapsto g$, so liegt $f(\vec{e})$ für alle $\vec{e} \in \vec{E}' \setminus \vec{E}'(y, x)$ bereits fest, als $f(\vec{e}) = g(\vec{e})$; durch (F1) ist dann auch $f(\vec{e}) = -f(\vec{e})$ für alle $\vec{e} \in \vec{E}'(y, x)$ bestimmt. Unsere Abbildung $f \mapsto g$ ist also genau dann bijektiv, wenn wir zu gegebenem g auch die verbleibenden Werte $f(\vec{e}_0)$ und $f(\vec{e}_0)$ stets auf genau eine Weise so definieren können, daß f in \vec{e}_0 und \vec{e}_0 die Bedingung (F1) und in x und y die Bedingung (F2) erfüllt (und somit ein Rundfluß aus F_2 ist).

Dies ist in der Tat der Fall. Da nämlich g in v_0 der Bedingung (F2) genügt, gilt mit $V' := V \setminus \{x, y\}$ für die bereits festliegenden f -Werte

$$f(x, V') + f(y, V') = g(v_0, V') = 0. \quad (2)$$

Mit

$$h := \sum_{\vec{e} \in \vec{E}'(x, y)} f(\vec{e}) \quad \left(= \sum_{e \in E'(x, y)} g(e, v_0, v_0) \right)$$

ist nun

$$f(x, V) = f(\vec{e}_0) + h + f(x, V')$$

und

$$f(y, V) = f(\vec{e}_0) - h + f(y, V').$$

Wegen (2) wird f daher genau dann (F1) und (F2) erfüllen, wenn wir

$$f(\vec{e}_0) := -f(x, V') - h \quad (= f(y, V') - h)$$

und $f(\vec{e}_0) := -f(\vec{e}_0)$ setzen. \square

Das Polynom P aus Satz 5.3.1 nennt man das *Flußpolynom* von G .

Korollar 5.3.2. Sind H und H' zwei endliche abelsche Gruppen gleicher Mächtigkeit, so hat G genau dann einen H -Fluß, wenn G einen H' -Fluß hat. \square

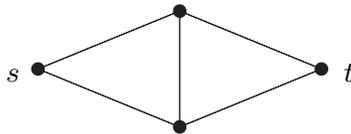
$\bar{1}$ um \bar{C} herum (formal: ein \mathbb{Z}_3 -Rundfluß auf G mit $g(\bar{e}_2) = \bar{1}$ und $g^{-1}(\bar{0}) = \bar{E} \setminus (\bar{C} \cup \bar{C})$). Wir setzen dann $f_{i-1} := f_i + g$. Nach Wahl der Richtungen \bar{e}_1 und \bar{e}_2 ist f_{i-1} auf beiden Kanten nicht null. Da f_{i-1} auf ganz $\bar{E}' \cup \bigcup_{j>i} \bar{F}_j$ mit f_i übereinstimmt und (2) für i gilt, gilt (2) somit wiederum auch für $i-1$.

Mit f_0 erhalten wir schließlich einen \mathbb{Z}_3 -Rundfluß auf G , der nirgends null ist außer möglicherweise auf Kanten der Teilgraphen H_i , $i = 0, \dots, n$. Durch Komposition mit der Abbildung $\bar{h} \mapsto \bar{2}\bar{h}$ von \mathbb{Z}_3 nach \mathbb{Z}_6 ($h \in \{1, 2\}$) wird f_0 zu einem \mathbb{Z}_6 -Rundfluß f auf G mit Werten in $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ für alle Kanten, die in einem H_i liegen, und mit Werten in $\{\bar{2}, \bar{4}\}$ für alle anderen Kanten. Addieren wir zu f einen 2-Fluß auf H_i für jedes i (formal: einen \mathbb{Z}_6 -Rundfluß auf G mit Werten in $\{\bar{1}, -\bar{1}\}$ auf den Kanten von H_i und $\bar{0}$ sonst; solche Flüsse existieren nach Proposition 5.4.1), so erhalten wir einen \mathbb{Z}_6 -Rundfluß auf G , der nirgends null ist. Nach Satz 5.5.3 hat G damit einen 6-Fluß, wie behauptet. \square

Satz 5.3.3

Übungen

1. $\bar{}$ Beweise Proposition 5.2.1 mit Induktion nach $|S|$.
2. (i) $\bar{}$ Finde zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Kapazitätsfunktion für das abgebildete Netzwerk, bei der der Algorithmus aus dem Beweis des *max-flow min-cut theorem* bei ungünstiger Wahl der den Fluß erhöhenden Wege W mehr als n solcher Wege konstruiert.



(ii) $\bar{}$ Zeige, daß bei der Wahl stets *kürzester* den Fluß erhöhender Wege W die Anzahl der Iterationen (d.h. der konstruierten Wege) durch eine Funktion in der Ecken- oder Kantenzahl des Netzwerks beschränkbar ist, und finde eine solche Schranke.

3. Leite aus dem *max-flow min-cut theorem* den Satz von Menger (2.3.4) her.
(Tip: Die Kantenversion ist einfach. Für die Eckenversion spalte jede Ecke x in zwei Ecken x^-, x^+ auf und definiere die Kanten des neuen Graphen und ihre Kapazitäten so, daß positiver Fluß durch die neue Kante $x^- x^+$ ein Stückchen Weg in G durch x beschreibt.)
4. $\bar{}$ Es sei f ein H -Rundfluß auf G und $g: H \rightarrow H'$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, daß $g \circ f$ ein H' -Rundfluß auf G ist. Ist $g \circ f$ auch ein H' -Fluß, wenn f ein H -Fluß ist?

Wegen (2) ist

$$f(|G_1|) \leq f(4m) = \frac{1}{2}m^2 - \frac{5}{6}m < \binom{m}{2},$$

und mit (3) folgt $G_1 \in \mathcal{H}$.

Ist H ein beliebiger Graph in \mathcal{H} , so ist auch jeder Graph, der aus H durch eine der folgenden drei Operationen gewonnen wird, in \mathcal{H} :

- (i) Streichung einer Kante, falls $\|H\| \geq m|H| + f(|H|) - \binom{m}{2} + 1$;
- (ii) Streichung einer Ecke vom Grad $\leq \frac{7}{6}m$;
- (iii) Kontraktion einer Kante $xy \in H$, für die x und y höchstens $\frac{7}{6}m - 1$ gemeinsame Nachbarn in H haben.

Bei G_1 beginnend, wenden wir nun schrittweise solange jeweils eine dieser Operationen an, bis keine mehr anwendbar ist; den erhaltenen Graphen aus \mathcal{H} bezeichnen wir mit H_0 .

Wegen

$$\|K^m\| = m|K^m| - m - \binom{m}{2}$$

und

$$f(m) = -\frac{5}{6}m > -m$$

gilt $K^m \notin \mathcal{H}$, d.h. \mathcal{H} enthält keinen Graphen mit m Ecken. Es folgt $|H_0| > m$, und insbesondere $H_0 \neq \emptyset$. Es sei $x_1 \in H_0$ eine Ecke minimalen Grades, und

$$H_1 := H_0[\{x_1\} \cup N_{H_0}(x_1)].$$

Wir werden zeigen, daß der Minimalgrad von $H := H_1$ so groß ist wie im Satz behauptet.

Zunächst gilt

$$\delta(H_1) > \frac{7}{6}m; \quad (4)$$

da nämlich H_0 hinsichtlich (ii) und (iii) minimal ist, ist $N_{H_0}(x_1) \neq \emptyset$, und jede Ecke $y \neq x_1$ in H_1 hat mehr als $\frac{7}{6}m - 1$ gemeinsame Nachbarn mit x_1 (und damit mehr als $\frac{7}{6}m$ Nachbarn in H_1 insgesamt). Um aus (4) wie gewünscht eine Ungleichung der Form

$$d(x_1) > \frac{7}{6}m$$

$$2\delta(H_1) \geq |H_1| + \alpha m$$

zu gewinnen, brauchen wir eine Abschätzung von $|H_1|$ der Form $|H_1| \leq \beta m$. Da H_0 in \mathcal{H} liegt aber hinsichtlich (i) minimal ist, gilt

$$\begin{aligned} \|H_0\| &< m|H_0| + \left(\frac{1}{6}m|H_0| - \frac{1}{6}m^2 - \frac{5}{6}m\right) - \binom{m}{2} + 1 \\ &= \frac{7}{6}m|H_0| - \frac{4}{6}m^2 - \frac{1}{3}m + 1 \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \frac{7}{6}m|H_0| - \frac{4}{6}m^2, \end{aligned} \quad (5)$$

ist ohnehin nur die andere Richtung nötig. Diese zeigen wir mit Induktion nach $|G'|$.

Sei also G gegeben, kantenmaximal ohne K^4 -Minor. Ist $|G| = 3$, so ist G selbst ein Dreieck. Zum Induktionsschritt sei jetzt $|G| \geq 4$. Dann ist G nicht vollständig; es sei X eine trennende Eckenmenge in G kleinster Mächtigkeit. Wegen der Minimalität von X hat jede Ecke aus X in jeder Komponente von $G - X$ einen Nachbarn; dies werden wir im folgenden wiederholt benutzen. Es seien C_1, C_2 zwei fest gewählte Komponenten von $G - X$.

Da jede C_1 - C_2 -Kante e in einem $TK^4 \subseteq G + e$ liegt, ein TK^4 aber nicht durch eine einzige Kante trennbar ist, ist X nicht leer. Ähnlich folgt, daß X nicht aus einer einzigen Ecke x bestehen kann. Eine zwei Nachbarn $y_1 \in C_1$ und $y_2 \in C_2$ von x verbindende Kante $e = y_1y_2$ läge sonst nämlich in einem $TK^4 =: K \subseteq G + e$, der durch $\{e, x\}$ getrennt würde. Wie kann K in G liegen? Da in einem TK^e keine zwei Verzweigungsecken durch eine andere Ecke und eine Kante trennbar sind, kann eins der C_i , sagen wir C_2 , nur innere Ecken eines Weges $P \subseteq K$ enthalten, der einer Kante des K zugrundeliegenden K^4 entspricht. Ersetzen wir xPy_2y_1 durch die Kante $xy_1 \in G$, so erhalten wir einen TK^4 in G mit Widerspruch.

TK^4

Wir nehmen nun $|X| = 2$ an, etwa $X = \{x, y\}$. Wir zeigen zunächst, daß G die Kante xy enthält. Gilt dies nicht, so enthält $G' := G + xy$ wie oben einen $TK^4 =: K$ mit $xy \in K$. Kein TK^4 wird jedoch durch zwei benachbarte Ecken getrennt, und so liegen oBdA alle Ecken von K in $V(C_1) \cup X$. Ersetzung der Kante xy in K durch einen Weg durch C_2 ergibt einen TK^4 in G , mit Widerspruch.

Wegen $xy \in G$ ist nun für jede Komponente C von $G - X$ auch der Graph $G[C \cup X]$ kantenmaximal ohne K^4 -Minor. Jede zusätzliche Kante darin läßt nämlich in G einen TK^4 entstehen. Bis auf höchstens einen Teilweg einer unterteilten Kante liegt dieser TK^4 ganz in $G[C' \cup X]$ für eine Komponente C' von $G - X$, und wir können dann diesen Teilweg durch die Kante xy ersetzen. Ist $C' \neq C$, so erhalten wir $TK^4 \subseteq G$ mit Widerspruch; ist $C' = C$, so erhalten wir $TK^4 \subseteq G[C \cup X]$ wie behauptet. All die Graphen $G[C \cup X]$ sind nach Induktionsannahme also wie angegeben konstruierbar, und wegen $G[X] = K^2$ folgt dies dann auch für G .

Es bleibt zu zeigen, daß $|X|$ nicht größer als 2 sein kann. Angenommen, x_1, x_2, x_3 seien verschiedene Ecken in X . Da jedes x_i sowohl in C_1 als auch in C_2 einen Nachbarn hat, enthält G drei kreuzungsfreie Wege P_1, P_2, P_3 zwischen zwei Ecken $v_1 \in C_1$ und $v_2 \in C_2$, mit $x_i \in P_i$ ($i = 1, 2, 3$). Da G nicht durch weniger als $|X| \geq 3$ Ecken trennbar ist, ist $G - \{v_1, v_2\}$ zusammenhängend und enthält somit einen (kürzesten) Weg P zwischen zwei verschiedenen \dot{P}_i . Dann ist $P \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 = TK^4$, mit Widerspruch. \square

Korollar 6.4.2. *Jeder kantenmaximale Graph G ohne K^4 -Minor hat $2|G| - 3$ Kanten. Insbesondere ist jeder kantenmaximale Graph auch extremal.*

Beweis. Induktion nach $|G|$. □

Korollar 6.4.3. *Die Hadwiger-Vermutung ist wahr für $r = 4$.*

Beweis. Entsteht G aus G_1 und G_2 durch Zusammenkleben entlang eines vollständigen Graphen, so ist $\chi(G) = \max \{ \chi(G_1), \chi(G_2) \}$ (siehe den Beweis von Proposition 4.5.2). Aus Satz 6.4.1 folgt daher mit Induktion nach $|G|$, daß alle kantenmaximalen (und somit alle) Graphen ohne K^4 -Minor 3-färbbar sind. □

Der Beweis der Hadwiger-Vermutung für $r = 5$ läßt sich mit Hilfe des Vierfarbensatzes aus einem ähnlichen – wenn auch wesentlich größeren – Struktursatz für die Graphen ohne K^5 -Minor herleiten. Der Beweis dieses Satzes gleicht von der Art her dem von Satz 6.4.1, ist jedoch etwas komplizierter und wesentlich länger. Wir zitieren den Satz daher ohne Beweis:

Satz 6.4.4. (Wagner 1937)

Jeder kantenmaximale Graph ohne K^5 -Minor ist rekursiv durch Zusammenkleben entlang von Dreiecken und K^2 s konstruierbar aus 4-zusammenhängenden ebenen Dreiecksgraphen und Kopien des Graphen W (Abb. 6.4.1).

der Ordnung ≥ 4
und K^4 s

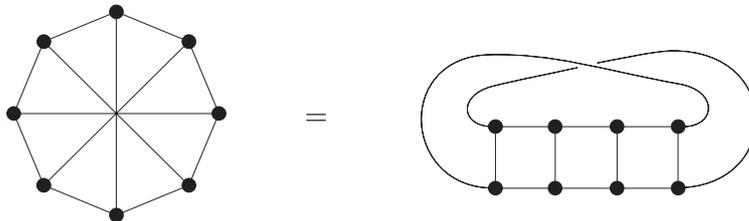


Abb. 6.4.1. Zwei Darstellungen des Graphen W aus Satz 6.4.4

Mit Korollar 3.2.8 errechnet man aus Satz 6.4.4 leicht die höchstmögliche Kantenzahl eines Graphen ohne K^5 -Minor:

Korollar 6.4.5. *Ein Graph mit n Ecken und ohne K^5 -Minor hat höchstens $3n - 6$ Kanten.* □

Wie man leicht sieht, ist $\chi(W) = 3$. Nehmen wir mit dem Vierfarbensatz an, daß alle ebenen Dreiecksgraphen 4-färbbar sind, so erhalten wir analog zu Korollar 6.4.3:

Korollar 6.4.6. *Die Hadwiger-Vermutung ist wahr für $r = 5$.* □

15. Führe die Hadwiger-Vermutung für r auf die Hadwiger-Vermutung für $r + 1$ zurück.
16. Beweise die Hadwiger-Vermutung für $r = 4$ direkt, ohne Benutzung von Satz 6.4.1.
(Tip: Zeige mit Induktion nach $|G|$, daß sich in einem Graphen $G \not\cong K^4$ jede 3-Färbung eines Kreises auf ganz G fortsetzen läßt.)
17. Beweise die Hadwiger-Vermutung für Kantengraphen.
(Tip: Führe die Aussage auf kritisch k -chromatische Graphen zurück und verwende den Satz von Vizing.)
18. Ein Graph G heißt *Minoren-kritisch* mit einer gegebenen Eigenschaft, wenn G selbst die Eigenschaft hat, aber kein Minor $H \neq G$ von G . Zeige, daß die Hadwiger-Vermutung äquivalent ist zu jeder der folgenden beiden Aussagen:
 - (i) für jedes $r \in \mathbb{N}$ ist jeder Minoren-kritisch nicht $(r - 1)$ -färbbare Graph ein K^r ;
 - (ii) für jedes $r \in \mathbb{N}$ hat jeder Minoren-kritisch nicht $(r - 1)$ -färbbare Graph ein unzusammenhängendes Komplement.
19. Zeige, daß jeder wie in Satz 6.4.1 konstruierte Graph kantenmaximal ohne K^4 -Minor ist.
20. Beweise die Implikation $\delta(G) \geq 3 \Rightarrow G \supseteq TK^4$.
(Tip: Satz 6.4.1.)
21. Ein Multigraph heißt *series-parallel*, wenn er rekursiv aus einem K^2 konstruiert werden kann durch folgende Schritte: (i) Verdoppelung einer Kante; (ii) Unterteilung einer Kante. Zeige, daß ein 2-zusammenhängender Multigraph genau dann *series-parallel* ist, wenn er keinen (topologischen) K^4 -Minor enthält.
(Tip: Zur Rückrichtung verwende Induktion und betrachte einen Kreis $C \subseteq G$. Wie liegen dessen Teile $C[x]$ für $x \in G - C$ zueinander?)
22. Beweise Korollar 6.4.5.
23. Charakterisiere die Graphen mit n Ecken und mehr als $3n - 6$ Kanten, die keinen $TK_{3,3}$ enthalten. Bestimme insbesondere $\text{ex}(n, TK_{3,3})$.
(Tip: Nach einem Satz von Wagner sind alle kantenmaximalen Graphen ohne $K_{3,3}$ -Minor rekursiv aus maximal plättbaren Graphen und Exemplaren von K^5 konstruierbar, durch Zusammenkleben entlang von K^2 s.)
24. Nach einem Satz von Pelikán enthält jeder Graph mit Minimalgrad ≥ 4 eine Unterteilung eines K^5 : eines K^5 , von dem eine Kante gelöscht wurde. Beweise mit Hilfe dieses Satzes die Abschwächung von Satz 6.4.8, daß jeder Graph mit $n \geq 5$ Ecken und mindestens $4n - 10$ Kanten einen TK^5 enthält.
(Tip: Zeige mit Induktion nach $|G|$, daß aus $\|G\| \geq 4n - 10$ für jede Ecke $x \in G$ die Existenz eines $TK^4 \subseteq G$ folgt, in dem x keine Verzweigungsecke ist.)

$C[x]$ ist der Untergraph von C induziert durch die Ecken mit einem Nachbarn in der x enthaltenden Komponente von $G - C$.

TK^5

oder ohne $K_{3,3}$ -Minor – in der Hoffnung, durch einen entsprechenden Struktursatz vielleicht die Graphen in der einen oder der anderen dieser beiden Klassen (und damit insbesondere die plättbaren Graphen) als vierfärbbar zu erweisen. Wagners Struktursatz für die Graphen ohne K^5 -Minor (Satz 6.4.4) war das Ergebnis seiner Bemühungen, der Ansatz also gescheitert: im Gegensatz zu seinem Struktursatz für die Graphen ohne K^4 -Minor (Satz 6.4.1), der an Genauigkeit keinen Wunsch offenläßt, beschreibt Satz 6.4.4 die Struktur der Graphen ohne K^5 -Minor zwar auch wunderschön – aber eben nur *modulo* der Struktur der in ihm als weiterhin ungeknackte Nuß enthaltenen plättbaren Graphen! Zu Einzelheiten der Wagnerschen Struktursätze für die Graphen ohne K^5 - bzw. $K_{3,3}$ -Minor, und zu weiteren Sätzen dieses Typs, siehe R. Diestel, *Graph Decompositions*, Oxford 1990.

Trotz seines Scheiterns im Hinblick auf das Vierfarbenproblem hatte Wagners Satz 6.4.4 Folgen wie kaum ein anderer Satz der Graphentheorie: er inspirierte Hadwiger zu seiner Vermutung, und Robertson & Seymour zu ihrer Minorentheorie mittels Baumzerlegungen (Kapitel 10)! Wagner selbst reagierte 1964 auf Hadwigers Vermutung mit dem Beweis, daß immerhin eine Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ existiert mit der Eigenschaft, daß jeder Graph mit chromatischer Zahl mindestens $f(r)$ einen K^r -Minor hat (siehe Übungen). Dieser Satz und sein Analogon für topologische Minoren wiederum inspirierten die in den Abschnitten 6.2 und 6.3 behandelte Frage nach dem geringsten Durchschnittsgrad, der dies erzwingt.

Die tiefsten Ideen zur Lösung dieses Problempaars stammen ohne Zweifel aus einer Reihe von Arbeiten Ende der sechziger Jahre von Mader. Unser Beweis von Lemma 6.2.3 stellt einige Kerngedanken dieser Arbeiten absichtlich ausführlich dar; Maders eigene Beweise, und erst recht der von Bollobás und Thomason gegebene Beweis des Lemmas, verpacken diese mittlerweile so knapp und elegant, daß die zugrundeliegenden Ideen nur noch zu erahnen sind. Insgesamt folgen wir im Beweis von Satz 6.2.1 B. Bollobás & A.G. Thomason, Topological subgraphs (Manuskript 1994), ohne jedoch Wert auf die Größe der Konstante c zu legen. Diese wurde mit $c = 1/2$ nahezu bestmöglich bestimmt von J. Komlós & E. Szemerédi, Topological cliques in graphs II, Manuskript 1995.

Der Beweis von Satz 6.2.4 wird demnächst erscheinen in A.D. Scott, Induced trees in graphs of large chromatic number, *J. Graph Theory* (1996). Der Satz von Kostochka (englische Fassung in A.V. Kostochka, Lower bounds of the Hadwiger number of graphs by their average degree, *Combinatorica* 4 (1984), 307–316) wurde unabhängig auch bewiesen von A.G. Thomason, An extremal function for contractions of graphs, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 95 (1984), 261–265. Satz 6.3.2 stammt aus C. Thomassen, Paths, Circuits and Subdivisions, *J. Graph Theory* 3 (1988), 97–131, einem Übersichtsartikel zum Thema dieses Kapitels.

Der in den Übungen angedeutete Beweis der Hadwiger-Vermutung für $r = 4$ findet sich bereits in Hadwigers Originalarbeit von 1943. Analog zur Hadwiger-Vermutung bestand eine zeitlang die Vermutung von Hajós, daß jeder Graph der chromatischen Zahl $\geq r$ einen K^r auch als topologischen Minor enthalten müsse. Diese Vermutung wurde von Catlin 1979 widerlegt; etwas später bewiesen Erdős und Fajtlowicz sogar, daß die Hajós-Vermutung für fast alle Graphen (siehe Kap. 9) falsch ist.

etwa $c = 1/2$

unabhängig

Der Übersichtsartikel von Thomassen steht nicht im JGT sondern in L.W. Beineke & R.J. Wilson (Hrsg.), *Selected Topics in Graph Theory 3*, Academic Press 1988.

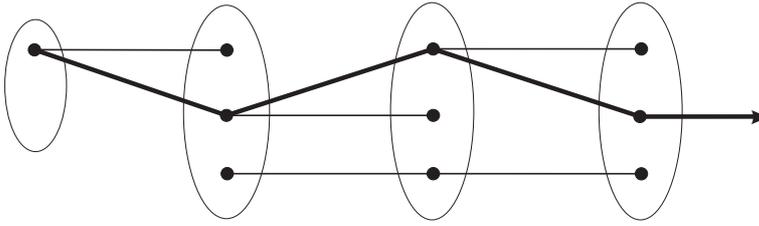


Abb. 7.1.2. Königs Unendlichkeitslemma

Beweis. Es sei \mathcal{P} die Menge aller in V_0 endenden Wege der Form $v f(v) f(f(v)) \dots$. Wir definieren unseren unendlichen Weg $v_0 v_1 \dots$ induktiv. Gleichzeitig mit der Folge v_0, v_1, \dots seiner Ecken konstruieren wir eine Folge $\mathcal{P}_0 \supseteq \mathcal{P}_1 \supseteq \dots$ unendlicher Teilmengen von \mathcal{P} , so daß für alle n jeder Weg aus \mathcal{P}_n mit dem Teilweg $v_n \dots v_0$ endet.

Offenbar ist \mathcal{P} unendlich. Da V_0 endlich ist und jeder Weg aus \mathcal{P} in V_0 endet, liegt eine Ecke $v_0 \in V_0$ auf unendlich vielen nicht trivialen Wegen aus \mathcal{P} ; es sei \mathcal{P}_0 die Menge dieser in v_0 endenden Wege.

Für $n \geq 1$ seien nun v_0, \dots, v_{n-1} und $\mathcal{P}_{n-1} \subseteq \mathcal{P}$ bereits so gewählt, daß $v_{n-1} \dots v_0 \not\subseteq P$ gilt für alle $P \in \mathcal{P}_{n-1}$ und \mathcal{P}_{n-1} unendlich ist. Da jeder Weg aus \mathcal{P}_{n-1} (genau) eine Ecke aus V_n enthält, gibt es wie oben eine Ecke $v_n \in V_n$, die auf unendlich vielen der Wege aus \mathcal{P}_{n-1} liegt; die Menge dieser mit $v_n \dots v_0$ endenden Wege nennen wir \mathcal{P}_n .

Da die Mengen \mathcal{P}_n trotz ihres Abnehmens stets unendlich bleiben, können wir diese Konstruktion für alle $n \in \mathbb{N}$ durchführen. Da v_n jeweils zu v_{n+1} benachbart ist, definiert die Folge v_0, v_1, \dots in der Tat einen unendlichen Weg in G . □

Satz 7.1.4. Zu $k, c, r \geq 1$ existiert stets ein $n \geq k$ mit der Eigenschaft, daß jede n -elementige Menge X bei jeder c -Färbung von $[X]^k$ eine einfarbige r -elementige Teilmenge hat.

Beweis. Wie in der Mengenlehre üblich, bezeichne $n \in \mathbb{N}$ (auch) die Menge $\{0, \dots, n-1\}$. Angenommen, die Behauptung sei falsch für gewisse k, c, r . Dann gibt es zu jedem $n \geq k$ eine n -elementige Menge, oBdA die Menge n , und eine c -Färbung $[n]^k \rightarrow c$, so daß n keine einfarbige r -elementige Teilmenge hat. Solche Färbungen nennen wir *schlechte Färbungen*; nach Annahme hat also jedes $n \geq k$ eine schlechte c -Färbung. Wir werden eine schlechte c -Färbung g von $[\mathbb{N}]^k$ definieren (d.h. eine Färbung, für die \mathbb{N} keine einfarbige r -elementige Teilmenge hat), im Widerspruch zu Satz 7.1.2.

Für jedes $n \geq k$ sei $V_n \neq \emptyset$ die Menge aller schlechten Färbungen von $[n]^k$. Jede Färbung $g \in V_{n+1}$ induziert durch Restriktion auf $[n]^k$ eine Färbung $f(g) \in V_n$. Nach dem Unendlichkeitslemma gibt es eine unendliche Folge g_k, g_{k+1}, \dots schlechter Färbungen $g_n \in V_n$ mit $f(g_{n+1}) = g_n$ für alle $n \geq k$. Da für jedes $m \geq k$ alle Färbungen g_n mit $n \geq m$ auf $[m]^k$ übereinstimmen, ist für jedes $Y \in [\mathbb{N}]^k$ der Wert $g_n(Y)$ für

die im Innern unendlich vieler Wege

c -Färbungen

Färbung ($2 \times$)
 c -Färbung

alle $n > \max Y$ gleich. Definieren wir $g(Y)$ als diesen gemeinsamen Wert $g_n(Y)$, so ist g eine schlechte Färbung von $[\mathbb{N}]^k$: jede r -elementige Teilmenge $S \in \mathbb{N}$ ist in einem hinreichend großen n enthalten, und da g auf $[n]^k$ mit der schlechten Färbung g_n übereinstimmt, kann S nicht einfarbig sein. \square

$$S \subseteq \mathbb{N}$$

Die kleinste zu k, c, r gehörige Zahl n aus Satz 7.1.4, die *Ramseyzahl* dieser Parameter, bezeichnen wir mit $R(k, c, r)$.

7.2 Ramseyzahlen von Graphen

Der Satz von Ramsey läßt sich wie folgt umformulieren: ist $H = K^r$ gegeben und G ein Graph mit hinreichend vielen Ecken, so enthält entweder G selbst oder sein Komplement \overline{G} eine Kopie von H als Teilgraphen. Gilt die entsprechende Aussage auch für nicht vollständige Graphen H ? Selbstverständlich: wegen $H \subseteq K^{|H|}$ folgt sie sofort aus dem obigen Spezialfall.

Fragen wir jedoch nach dem *kleinstmöglichen* n , so daß jeder Graph G mit n Ecken die genannte Eigenschaft hat – dies ist die *Ramseyzahl* $R(H)$ von H – so wird die Frage interessant: je weniger Kanten H hat, desto eher wird H in G oder in \overline{G} einbettbar sein, und um so geringer sollte $R(H)$ ausfallen. Zu erwarten ist also, daß für magere Graphen H die Ramseyzahl von H weit unter der Ramseyzahl von $|H|$ liegt.

Etwas allgemeiner bezeichne $R(H_1, H_2)$ die kleinste natürliche Zahl n , so daß für jeden Graphen G auf n Ecken entweder $H_1 \subseteq G$ oder $H_2 \subseteq \overline{G}$ gilt. Der genaue Wert von $R(H_1, H_2)$ ist für die meisten Graphen H_1, H_2 nur in ausgesprochen schlechter Näherung bekannt. Interessant dabei ist, daß die besten bekannten unteren Schranken nicht selten durch Zufallsgraphen erreicht werden (siehe etwa Proposition 9.1.3), anstatt durch explizite Konstruktionen großer Graphen G mit $H_1 \not\subseteq G$ und $H_2 \not\subseteq \overline{G}$.

Die folgende Proposition gehört zu den wenigen Fällen, in denen Ramseyzahlen für eine größere Klasse von Graphen explizit bekannt sind:

Proposition 7.2.1. *Es seien $s, t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, und T ein beliebiger Baum mit t Ecken. Dann ist $R(T, K^s) = (s-1)(t-1) + 1$.*

Beweis. Die disjunkte Vereinigung von $s-1$ Graphen K^{t-1} enthält keine Kopie von T , und das Komplement dieses Graphen, der vollständig $(s-1)$ -partite Graph K_{t-1}^{s-1} , enthält keinen K^s -Teilgraphen. Damit ist $R(T, K^s) \geq (s-1)(t-1) + 1$ gezeigt.

Umgekehrt sei nun G ein beliebiger Graph mit $n = (s-1)(t-1) + 1$ Ecken, dessen Komplement keinen K^s enthält. Dann ist $s > 1$, und

Wegen seines hübschen Beweises bringen wir noch einen Satz über die Anzahl von Graphen G , die minimal sind mit der Eigenschaft, daß G bei jeder 2-Kantenfärbung eine einfarbige Kopie eines vorgegebenen Graphen H enthält – einen zu H isomorphen Teilgraphen also, dessen Kanten alle die gleiche Farbe tragen. Solche Graphen G nennen wir *Ramsey-minimal* für H .

Proposition 7.2.3. *Ist F ein Wald aber keine Vereinigung von Sternen, so gibt es unendlich viele für F Ramsey-minimale Graphen.*

Beweis. Es sei $|F| =: r$. Wir zeigen, daß es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen für F Ramsey-minimalen Graphen mit mindestens n Ecken gibt.

Dazu borgen wir zunächst die Aussage von Satz 9.2.2 aus Kapitel 9, nach der es einen Graphen G mit chromatischer Zahl $\chi(G) > r^2$ und Tailleweite $g(G) > n$ gibt. Färben wir die Kanten von G mit grün und rot, so kann nicht sowohl der grüne als auch der rote Teilgraph eine Eckenfärbung mit höchstens r Farben haben (im Sinne von Kapitel 4): sonst färbten wir die Ecken von G mit dem kartesischen Produkt aus diesen Färbungen und hätten einen Widerspruch zu $\chi(G) > r^2$. Es sei also $G' \subseteq G$ einfarbig mit $\chi(G') > r$. Nach Korollar 4.2.3 hat G' einen Untergraphen vom Minimalgrad $\geq r$, und dieser enthält nach Korollar 0.5.4 eine Kopie von F .

Wir wählen nun einen für F Ramsey-minimalen Teilgraphen G^* von G . Offenbar ist G^* selbst kein Wald: jeder Wald hat nämlich eine 2-Kantenfärbung, bezüglich derer er keinen einfarbigen Weg der Länge 3 enthält, und somit erst recht keine einfarbige Kopie von F . Unser Graph G^* enthält also einen Kreis, und wegen $G^* \subseteq G$ beträgt dessen Länge mindestens $g(G) > n$. Insbesondere ist $|G^*| > n$, wie gewünscht. \square

keine disjunkte Vereinigung von Sternen und/oder isolierten Ecken

7.3 Ramsey induziert

Der Satz von Ramsey läßt sich auch wie folgt umformulieren. Zu jedem Graphen $H = K^r$ existiert ein Graph $G = K^n$ mit der folgenden Eigenschaft: wie immer wir die Kantenmenge von G mit zwei Farben färben, wir werden stets eine einfarbige Kopie von H in G finden (d.h. einen zu H isomorphen Teilgraphen, dessen Kanten alle die gleiche Farbe tragen). Wie bereits bemerkt, folgt dies wegen $H \subseteq K^{|H|}$ auch für nicht notwendig vollständige Graphen H und G sofort aus dem Satz von Ramsey selbst.

Verlangen wir jedoch, daß die einfarbige Kopie von H in G *induziert* sein soll, also ein Untergraph von G , so wird das Problem plötzlich hochgradig nicht-trivial. Gefordert ist jetzt kein “Aussonderungsbeweis”, sondern eine Konstruktion: die Konstruktion eines Graphen G , der für

Wir beweisen die folgende formale Verschärfung von Satz 7.3.1:

Zu je zwei Graphen H_1, H_2 gibt es einen Graphen $G = G(H_1, H_2)$ mit der Eigenschaft, daß G zu jeder Färbung seiner Kanten mit den Farben 1 und 2 entweder einen H_1 der Farbe 1 oder einen H_2 der Farbe 2 als Untergraphen enthält. (*)

Diese formale Verschärfung des Satzes ermöglicht einen Induktionsbeweis über $|H_1| + |H_2|$, wie folgt.

Ist H_1 oder H_2 kantenlos, so gilt (*) mit jedem hinreichend großen G . Sowohl H_1 also auch H_2 habe daher eine Kante (und insbesondere ≥ 2 Ecken), und (*) gelte für alle Paare (H'_1, H'_2) mit kleinerer Eckensumme $|H'_1| + |H'_2|$.

Für jedes der beiden $i = 1, 2$ wählen wir beliebig eine nicht isolierte Ecke $x_i \in H_i$ und setzen $H'_i := H_i - x_i$. Weiter sei $H''_i \subseteq H'_i$ der von den Nachbarn von x_i in H_i induzierte Untergraph.

Zum Induktionsschritt werden wir eine Folge G^0, \dots, G^n disjunkter Graphen konstruieren; der Graph G^n wird unser gesuchter Ramseygraph $G(H_1, H_2)$ sein. Zusammen mit den Graphen G^i werden wir Eckenmengen $V^i \subseteq V(G^i)$ und eine Abbildung

$$f: V^1 \cup \dots \cup V^n \rightarrow V^0 \cup \dots \cup V^{n-1}$$

definieren, mit

$$f(V^i) = V^{i-1} \quad (1)$$

für alle $i \geq 1$. Schreiben wir $f^i := f \circ \dots \circ f$ für die i -fache Hintereinanderausführung von f (wo immer diese definiert ist) und f^0 für die Identitätsabbildung auf $V^0 = V(G^0)$, so gilt dann $f^i(v) \in V^0$ für alle $v \in V^i$ und alle $i \geq 0$. Wir nennen $f^i(v)$ den *Ursprung* von v .

Die Untergraphen $G^i[V^i]$ werden die Struktur von G^0 im folgenden Sinne widerspiegeln:

Ecken in V^i verschiedenen Ursprungs sind genau dann benachbart, wenn ihre Ursprünge in G^0 benachbart sind. (2)

Technisch gesehen werden wir die Aussagen (1) und (2) für unseren Beweis nicht weiter verwenden. Sie sollen jedoch helfen, sich die Graphen G^i vorzustellen: jedes G^i (genauer: jedes $G^i[V^i]$; es wird noch einige Ecken $x \in G^i - V^i$ geben) ist im wesentlichen eine aufgeblähte Kopie von G^0 – in der jede Ecke $w \in G^0$ ersetzt ist durch die Menge aller Ecken aus V^i mit Ursprung w – und die Abbildung f verbindet zwischen den verschiedenen G^i die Ecken gleichen Ursprungs.

Nach Induktionsannahme gibt es Ramseygraphen

$$G_1 := G(H_1, H'_2) \quad \text{und} \quad G_2 := G(H'_1, H_2).$$

kantenlosen G

genau ein H_j fest gewählt.) Wir setzen dann

$$V(G^0) := \left\{ (i, j) \mid i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, \binom{n}{r} \right\}$$

$$E(G^0) := \bigcup_{j=1}^{\binom{n}{r}} \{ (i, j)(i', j) \mid ii' \in E(H_j) \}.$$

Die Idee des Beweises ist nun die folgende. Wir betten G^0 auf so viele Weisen induziert in einen großen Graphen G ein, daß bei jeder 2-Kantenfärbung von G für mindestens eines dieser $G^0 \subseteq G$ die Farben seiner Kanten nur davon abhängen, in welchen beiden Zeilen ihre Endecken liegen. Die Projektion dieses G^0 auf $\{1, \dots, n\}$ (durch Kontraktion seiner Zeilen) definiert dann eine 2-Kantenfärbung von K , und nach Wahl von $n = |K|$ ist eines der $H_j \subseteq K$ einfarbig. Dieses H_j liegt dann auch einfarbig in der j -ten Spalte unseres G^0 , ist also auch Untergraph von G .

Wie finden wir einen solchen Graphen G ? Im Prinzip durch iterierte Anwendung von Lemma 7.3.3, einmal für jeden der $m := \binom{n}{2}$ bipartiten Graphen $G^0[V_i^0 \cup V_{i'}^0]$, wobei

$$V_i^0 := \left\{ (i, j) \mid j = 1, \dots, \binom{n}{r} \right\}$$

die i -te Zeile von G^0 ist ($i = 1, \dots, n$). Formal definieren wir induktiv eine Folge G^0, \dots, G^m von n -partiten Graphen G^k und setzen am Ende $G := G^m$.

Dazu sei e_1, \dots, e_m eine Aufzählung der Kanten von K . Angenommen, G^k sei für ein $k < m$ bereits definiert als ein n -partiter Graph mit Eckenmengen V_1^k, \dots, V_n^k . Es sei $e_{k+1} =: i_1 i_2$, und P sei der von G^k induzierte bipartite Graph mit Eckenmengen $V_{i_1}^k$ und $V_{i_2}^k$. Nach Lemma 7.3.3 hat P einen bipartiten Ramseygraphen $P' = (W_1, W_2, F)$. Wir möchten $G^{k+1} \supseteq P'$ so definieren, daß wir jede (einfarbige) Einbettung $P \rightarrow P'$ zu einer Einbettung $G^k \rightarrow G^{k+1}$ fortsetzen können. Dazu sei $\{\varphi_1, \dots, \varphi_q\}$ die Menge aller Einbettungen von P in P' . Wir setzen

$$V(G^{k+1}) := V_1^{k+1} \cup \dots \cup V_n^{k+1},$$

wobei

$$V_i^{k+1} := \begin{cases} W_1 & \text{für } i = i_1; \\ W_2 & \text{für } i = i_2; \\ \bigcup_{p=1}^q (V_i^k \times \{p\}) & \text{für } i \notin \{i_1, i_2\}. \end{cases}$$

(Für $i \neq i_1, i_2$ besteht V_i^{k+1} also aus q disjunkten Kopien von V_i^k .) Die Kantenmenge von G^{k+1} definieren wir nun so, daß die natürlichen Fortsetzungen der φ_p auf ganz $V(G^{k+1})$ (also mit $V_i^k \rightarrow (V_i^k \times \{p\})$) für

in G^k

ganz $V(G^k)$

zwar besonders anschaulich, jedoch nur in dem Fall, daß die gesamte Struktur, die die betrachtete Eigenschaft haben soll, abzählbar ist. Im überabzählbaren Fall verpackt man den gleichen Schluß etwas anders, etwa mit Hilfe des Satzes von Tychonov aus der allgemeinen Topologie, daß Produkte kompakter Räume kompakt sind (daher die Bezeichnung “Kompaktheitsschluß”). Dies ist explizit dargestellt bei Bollobás (s.o.), Kapitel 6, Satz 10, und bei Graham, Rothschild & Spencer, Kapitel 1, Satz 4.

Die obere Schranke für die Ramseyzahlen von Graphen beschränkten Maximalgrades, Satz 7.2.2, stammt aus V. Chvátal, V. Rödl, E. Szemerédi & W.T. Trotter, The Ramsey number of a graph with bounded maximum degree, *J. Combin. Theory B* **34** (1983), 239–243. Unser Beweis folgt dem Übersichtsartikel von J. Komlós & M. Simonovits, Szemerédi’s Regularity Lemma and its applications in graph theory, in *Paul Erdős is 80*, Proc. Colloq. Math. Soc. János Bolyai (1994). Die Aussage des Satzes ist eine Abschwächung einer Vermutung von Burr und Erdős (1975), daß sogar die Graphen mit beschränktem *Durchschnittsgrad* lineare Ramseyzahlen haben: zu jedem $d \in \mathbb{N}$, so die Vermutung, gibt es eine Konstante c mit $R(H) \leq c|H|$ für alle Graphen H mit $d(H) \leq d$. Weitere verifizierte Abschwächungen dieser Vermutung sind die entsprechende Aussage für plättbare Graphen (Chen & Schelp 1993) und, allgemeiner, für Graphen ohne topologischen K^r -Minor für festes r (Rödl & Thomas 1996). Literaturhinweise finden sich bei Nešetřil (s.o.).

Unser erster Beweis von Satz 7.3.1 basiert auf W. Deuber, A generalization of Ramsey’s theorem, in (A. Hajnal et al., Hrsg.): *Infinite and finite sets*, North-Holland 1975. Der gleiche Band erhält auch den Beweis von Erdős, Hajnal und Pósa. Rödl bewies den Satz in seiner Diplomarbeit 1973 an der Prager Karlsuniversität. Unser zweiter Beweis des Satzes, in dem auch die Cliquenzahl des gegebenen Graphen H bewahrt wird, ist von J. Nešetřil & V. Rödl, The Ramsey property for graphs with forbidden complete subgraphs, *J. Combin. Theory B* **20** (1976), 243–249.

Die beiden Sätze aus Abschnitt 7.4 sind aus B. Oporowski, J. Oxley & R. Thomas, Typical subgraphs of 3- and 4-connected graphs, *J. Combin. Theory B* **57** (1993), 239–257.

mit $d(H') \leq d$ für alle
 $H' \subseteq H$

J. Nešetřil & V. Rödl,
A short proof of the
existence of restricted
Ramsey graphs by means
of a partite construction,
Combinatorica **1** (1981),
199–202.

und $v_i^- := v_{i-1}$ seinen *linken* Nachbarn. Entsprechend liegt die Kante v^-v *links* von der Ecke v und die Kante vv^+ *rechts* von ihr, etc.

Einen Weg $P = v_i v_{i+1} \dots v_{j-1} v_j$ in C mit $V(P) \cap X_2 = \{v_i, v_j\}$ nennen wir ein *Intervall* mit *linkem Rand* v_i und *rechtem Rand* v_j . Wir nehmen dabei $v_i \neq v_j$ an; unser Kreis C ist also die Vereinigung von $|X_2| = 2|\mathcal{P}_2|$ Intervallen. Wie üblich schreiben wir $P =: [v_i, v_j]$ und setzen $(v_i, v_j) := \overset{\circ}{P}$ sowie $[v_i, v_j] := P\overset{\circ}{v}_j$ und $(v_i, v_j] := \overset{\circ}{v}_i P$. Für Intervalle $[u, v]$ und $[v, w]$ mit gemeinsamem Rand v liegt $[u, v]$ *links* von $[v, w]$ und $[v, w]$ *rechts* von $[u, v]$. Das eindeutig bestimmte Intervall $[v, w]$ mit $x^* \in (v, w]$ bezeichnen wir als I^* , den Weg aus \mathcal{P}_2 mit Fuß w als P^* .

Zur Konstruktion von W fassen wir \tilde{G} in natürlicher Weise als Multigraphen M auf X_2 auf: die Kanten von M seien die Intervalle von C (mit ihren Rändern als inzidenten Ecken) und die Wege aus \mathcal{P}_2 (mit ihren Füßen als inzidenten Ecken). Nach (4) ist M kubisch, und so können wir Lemma 8.3.3 mit $e := I^*$ und $f := P^*$ anwenden. Das Lemma liefert uns einen geschlossenen Kantenzug W in \tilde{G} , der I^* und jeden Weg aus \mathcal{P}_2 genau einmal durchläuft, und jede Ecke aus X_2 genau zweimal. Weiter enthält W den Weg $I^* \cup P^*$ als Teilweg. Die beiden mit x^* inzidenten Kanten dieses Weges liegen in G ; in diesem Sinne erfüllt W also bereits die Bedingung (*).

Wir wollen jetzt W so umgestalten, daß W auch jede Ecke von C genau einmal durchläuft. Für die spätere Einbeziehung der Wege aus \mathcal{P}_1 treffen wir dabei bereits Vorsorge: wir definieren gleichzeitig eine auf X_1 injektive Abbildung $v \mapsto e(v)$, die jeder Ecke $v \in X_1$ eine Kante $e(v)$ von W mit der folgenden Eigenschaft zuordnet:

Die Ecke v ist entweder durch $e(v)$ überbrückt oder mit $e(v)$ inzident. Im ersten Fall ist $e(v) = v^-v^+$; im zweiten Fall ist $e(v) \in C$ und $e(v) \neq vx^$.* (**)

(Die Zusatzaussage für den "ersten Fall" dient nur der Klarheit: nach (5) ist v in \tilde{G} nur zu v^- und v^+ benachbart und kann daher ohnehin durch keine andere Kante als v^-v^+ überbrückt werden.)

Diese Abbildung werden wir auf ganz $V(C) \setminus X_2$ definieren, also auf einer Obermenge von X_1 (vgl. (4)). Zur Injektivität werden wir lediglich darauf achten müssen, daß wir keine Kante $vw \in C$ gleichzeitig als $e(v)$ und als $e(w)$ wählen. Wegen $|X_1| \geq 2$ im für die Injektivität relevanten Fall und $\mathcal{P}_2 \neq \emptyset$ haben wir nämlich $|C - y^*| \geq |X_1| + 2|\mathcal{P}_2| \geq 4$, also $|C| \geq 5$; somit kann nach (5) keine Kante von G^2 gleichzeitig zwei verschiedene Ecken von C überbrücken oder eine Ecke von C überbrücken und selbst auf C liegen.

Für unsere Korrektur von W auf den Ecken von C betrachten wir die Intervalle von C einzeln. Da W jedes Intervall mindestens einmal

*siehe Beweis von
Lemma 8.3.3*

durchläuft aber jede Ecke aus X_2 nur genau zweimal, ist jedes Intervall I von einem der folgenden drei Typen:

- Typ 1: W durchläuft I genau einmal;
- Typ 2: W durchläuft I genau zweimal, und zwar hin und zurück direkt hintereinander (formal: W enthält ein Tripel (e, x, e) mit $x \in X_2$ und $e \in E(I)$);
- Typ 3: W durchläuft I genau zweimal, aber nicht direkt hintereinander (d.h. W enthält kein Tripel wie oben).

Nach Wahl von W ist I^* vom ersten Typ. Die Ecke x aus der Definition eines Intervalls vom Typ 2 nennen wir die *Kehrecke* dieses Intervalls. Da $I^* \cup P^*$ ein Teilweg von W ist und W auch P^* nur einmal durchläuft, gilt:

(6) *Das Intervall rechts von I^* ist vom zweiten Typ und hat seine Kehrecke am linken Rand.*

Betrachten wir nun ein festes Intervall $I = [x_1, x_2]$. Es sei y_1 der Nachbar von x_1 und y_2 der Nachbar von x_2 auf einem Weg aus \mathcal{P}_2 . Das Intervall links von I bezeichnen wir mit I^- .

Ist I vom ersten Typ, so lassen wir W auf I unverändert. Ist $I \neq I^*$, so wählen wir zu jedem $v \in \overset{\circ}{I}$ als $e(v)$ die Kante links von v . Wegen (6) ist $I^- \neq I^*$, und insbesondere $x_1 \neq x^*$. Unsere Wahl der Kanten $e(v)$ genügt somit der Bedingung (**). Ist $I = I^*$, so sei $e(v)$ für alle $v \in (x_1, x^*] \cap \overset{\circ}{I}$ die Kante links von v , und für alle $v \in (x^*, x_2)$ die Kante rechts von v . Auch diese Wahlen von $e(v)$ vertragen sich mit (**).

Nun sei I vom zweiten Typ. Wir nehmen zuerst an, daß x_2 die Kehrecke von I ist. Dann enthält W (möglicherweise in umgekehrter Reihenfolge) den Kantenzug $y_1x_1Ix_2Ix_1I^-$. Wir wenden nun Lemma 8.3.2 (i) mit $P := y_1x_1I\overset{\circ}{x}_2$ an und ersetzen die Kante y_1x_1 durch den y_1x_1 -Weg Q des Lemmas (Abb. 8.3.5). Nach Aussage des Lemmas gilt

$y_1x_1Ix_2Ix_1 \subseteq W$

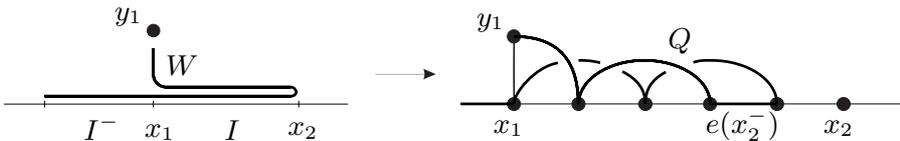


Abb. 8.3.5. Umgestaltung von W auf einem Intervall zweiten Typs

$V(\overset{\circ}{Q}) = V(P) \setminus \{y_1, x_1\} = V(\overset{\circ}{I})$. Die Ecken $v \in (x_1, x_2^-)$ werden durch eine Kante von Q überbrückt, und wir wählen diese Kante als $e(v)$. Als $e(x_2^-)$ wählen wir die Kante links von x_2^- (es sei denn, $x_2^- = x_1$); auch diese Kante liegt nach dem Lemma auf Q . Nach (6) ist sie nicht mit x^* inzident (da nach Annahme x_2 die Kehrecke von I ist) und erfüllt somit (**). Den Fall, daß x_1 die Kehrecke von I ist, behandeln wir ganz

analog: wir ersetzen die Kante y_2x_2 mit Lemma 8.3.2 (i) durch einen y_2x_2 -Weg Q mit $V(\overset{\circ}{Q}) = V(\overset{\circ}{I})$, wählen als $e(v)$ für $v \in (x_1^+, x_2)$ eine v überbrückende Kante von Q , und wählen als $e(x_1^+)$ die Kante rechts von x_1^+ .

ersetzen $y_2x_2Ix_1Ix_2 \subseteq W$

Schließlich sei I vom dritten Typ. Da W die Kante y_1x_1 genau einmal und Ecke x_1 nur zweimal durchläuft, enthält W die Teilwege y_1x_1I und $I^- \cup I$, und I^- ist vom ersten Typ. Nach (6) ist jedoch $I^- \neq I^*$. Bei der Definition der Kanten $e(v)$ für $v \in \overset{\circ}{I}^-$ trat die rechteste Kante $x_1^-x_1$ von I^- somit nicht als Bild auf; wir werden diese Kante jetzt ersetzen können. Ebenfalls benötigen werden wir die Kante y_1x_1 . Kanten dieser Form haben wir nur bei der Behandlung von Intervallen zweiten Typs ersetzt; da I^- vom ersten Typ ist, steht uns somit auch diese Kante zur Verfügung.

Da x_2 nur zweimal von W durchlaufen wird, muß W anschließend an einen seiner beiden Teilwege y_1x_1I und $x_1^-x_1I$ die Kante x_2y_2 enthalten. Die Startecke dieses Weges (y_1 oder x_1^-) fassen wir als die Ecke u in Lemma 8.3.2 (ii) auf, die andere Ecke aus $\{y_1, x_1^-\}$ als v_0 ; weiter sei $v_k := x_2$ und $w := y_2$. Das Lemma erlaubt uns dann, diese beiden Teilwege von W zwischen $\{y_1, x_1^-\}$ und $\{x_2, y_2\}$ durch disjunkte Wege in G^2 zu ersetzen (Abb. 8.3.6), und weist jeder Ecke $v \in \overset{\circ}{I}$ eine sie überbrückende Kante $e(v)$ auf einem dieser Wege zu.

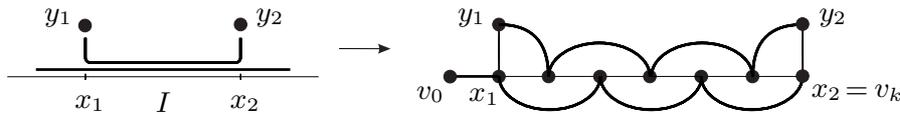


Abb. 8.3.6. Umgestaltung zum Typ 3: der Fall $u = y_1$ und k ungerade

Wir wollen nun prüfen, daß W nach Abschluß all dieser Änderungen jede Ecke von \tilde{G} genau einmal enthält. Für die Ecken der Wege aus \mathcal{P}_2 ist dies trivial, da W jeden solchen Weg genau einmal durchläuft. Auch die Ecken im Innern von Intervallen auf C sind jetzt genau einmal in W enthalten. Wie aber steht es um die Ecken in X_2 ?

Es sei $x \in X_2$ gegeben und y sein Nachbar auf einem Weg aus \mathcal{P}_2 . Das Intervall I mit $yxI \subseteq W$ bezeichnen wir als I_1 , das andere Intervall mit Rand x als I_2 . Ist I_1 vom Typ 1, so ist I_2 vom Typ 2 mit Kehrecke x . Bei der Betrachtung von W auf I_1 wurde x somit erhalten, bei der Bereinigung von W auf I_2 wurde es ausgespart; damit liegt x jetzt noch genau einmal auf W . Ist I_1 vom Typ 2, so ist x nicht seine Kehrecke, und I_2 ist vom Typ 1. Der mit yx beginnende und dann I_1 hin- und zurücklaufende Teilkantenzug von W wurde durch einen $y-x$ -Weg ersetzt. An diesen Weg schließt sich in W jetzt das unverändert gebliebene Intervall I_2 an, d.h. auch in diesem Fall enthält W die Ecke x noch genau einmal. Ist schließlich I_1 vom Typ 3, so war x in einem

mit $yxI \subseteq W$
für das alte W

Dieses Ereignis $H \subseteq G$ ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten A_e über alle Kanten e von H , also $P[H \subseteq G] = p^\ell$. Im Unterschied hierzu beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß H ein Untergraph von G ist, $p^\ell q^{\binom{k}{2} - \ell}$: die $\binom{k}{2} - \ell$ in H fehlenden Kanten müssen ja jetzt auch in G fehlen, und sie tun dies jeweils unabhängig mit der Wahrscheinlichkeit q .

Die Wahrscheinlichkeit P_H , daß G einen zu H isomorphen Untergraphen hat, ist im allgemeinen schwieriger zu berechnen: da die möglichen Kopien von H auf Teilmengen von V einander überlappen, sind die Ereignisse, daß sie als Untergraphen in G auftreten, nicht unabhängig. Die Summe (über alle $U \in [V]^k$) der einzelnen Wahrscheinlichkeiten $P[H \simeq G[U]]$ ist jedoch stets eine obere Schranke für P_H , da P_H ja nur das Maß der Vereinigung all dieser Ereignisse ist. Ist beispielsweise $H = \overline{K^k}$, so erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit, daß G eine isomorphe Kopie von H zum Untergraphen hat, die folgende triviale Abschätzung:

Proposition 9.1.2. *Für jedes $k \geq 2$ gilt für die Wahrscheinlichkeit, daß $G \in \mathcal{G}(n, p)$ eine unabhängige Eckenmenge der Mächtigkeit k enthält,*

$$P[\alpha(G) \geq k] \leq \binom{n}{k} q^{\binom{k}{2}}.$$

Beweis. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine fest gewählte Eckenmenge $U \in [V]^k$ in G unabhängig ist, beträgt $q^{\binom{k}{2}}$. Die Behauptung folgt somit aus der Tatsache, daß es nur $\binom{n}{k}$ solche Mengen U gibt. \square

Analog zu Proposition 9.1.2 gilt für die Wahrscheinlichkeit, daß $G \in \mathcal{G}(n, p)$ einen K^k enthält,

$$P[\omega(G) \geq k] \leq \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}}.$$

Ist nun n klein genug (bei festem k), daß die Wahrscheinlichkeiten $P[\alpha(G) \geq k]$ und $P[\omega(G) \geq k]$ beide kleiner als $\frac{1}{2}$ sind, so ist das Maß dieser beiden Ereignisse zusammen immer noch kleiner als 1. Mit anderen Worten: in \mathcal{G} gibt es Graphen, die weder einen K^k noch einen $\overline{K^k}$ als Untergraphen enthalten – d.h. n ist eine untere Schranke für die Ramseyzahl von k !

Wie die folgende Proposition zeigt, ist diese Schranke größenordnungsmäßig gar nicht so schlecht (vgl. Satz 7.1.1):

Proposition 9.1.3. *Ist $r \geq 3$ und R die Ramseyzahl von r , so gilt*

$$R > 2^{r/2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses

die darin auftretenden Quantoren nur auf Ecken des Graphen beziehen, nicht auf Mengen oder Folgen von Ecken,⁵ so ist die Eigenschaft oder ihr Komplement häufig die direkte Konsequenz einer Eigenschaft $\mathcal{P}_{i,j}$ und gilt daher für fast alle oder fast keinen Graphen $G \in \mathcal{G}(n,p)$. (Siehe die Übungen für weitere Beispiele.)

stets

Als letztes Beispiel einer Eigenschaft fast aller Graphen für festes p zeigen wir noch, daß fast jeder Graph eine erstaunlich hohe chromatische Zahl hat – relativ nahe am theoretischen Maximum, seiner Eckenzahl:

Proposition 9.3.4. *Für konstantes $p \notin \{0, 1\}$ und jedes $\epsilon > 0$ hat fast jeder Graph $G \in \mathcal{G}(n, p)$ eine chromatische Zahl*

$$\chi(G) > \frac{\log(1/q)}{2 + \epsilon} \cdot \frac{n}{\log n}.$$

Beweis. Nach Proposition 9.1.2 gilt für jedes feste n und $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} P[\alpha \geq k] &\leq \binom{n}{k} q^{\binom{k}{2}} \\ &\leq n^k q^{\binom{k}{2}} \\ &= q^{k \frac{\log n}{\log q} + \frac{1}{2} k(k-1)} \\ &= q^{\frac{k}{2} \left(-\frac{2 \log n}{\log(1/q)} + k - 1 \right)}. \end{aligned}$$

Für

$$k := (2 + \epsilon) \frac{\log n}{\log(1/q)}$$

geht der Exponent dieses Ausdrucks mit n gegen unendlich, der Ausdruck selbst also gegen null. Die Farbklassen fast aller $G \in \mathcal{G}(n, p)$ enthalten somit bei jeder Färbung alle weniger als k Ecken, d.h. es sind mehr als

$$\frac{n}{k} = \frac{\log(1/q)}{2 + \epsilon} \cdot \frac{n}{\log n}$$

Farben zur Färbung von G nötig. \square

Nach einem bemerkenswerten Satz von Bollobás ist Proposition 9.3.4 scharf im folgenden Sinne: ersetzen wir ϵ durch $-\epsilon$, so verwandelt sich die angegebene untere Schranke für die chromatische Zahl von G in eine obere Schranke!

⁵ Genauer: ist die Eigenschaft gegeben durch einen Satz erster Ordnung in der formalen Sprache der Graphentheorie

Schwellenfunktion haben! Im nächsten Abschnitt werden wir eine grundlegende Methode kennenlernen, wie man Schwellenfunktionen berechnen kann.

9.4 Schwellenfunktionen und zweite Momente

Betrachten wir einmal eine Grapheneigenschaft der Form

$$\mathcal{G} = \{ G \mid X(G) > 0 \},$$

wobei $X \geq 0$ eine Zufallsgröße auf $\mathcal{G}(n, p)$ ist. Viele Eigenschaften lassen sich auf natürliche Weise so formulieren:⁶ daß G zusammenhängend ist, ist beispielsweise äquivalent zu $X(G) > 0$ wenn X die Anzahl der Spannbäume in G bezeichnet.

Wie könnte man beweisen, daß \mathcal{G} eine Schwellenfunktion t besitzt? Jeder solche Beweis hat zwei Teile: daß für kleines p (verglichen mit t) fast kein $G \in \mathcal{G}(n, p)$ die Eigenschaft \mathcal{G} hat, und daß für großes p fast jedes G die Eigenschaft \mathcal{G} hat. Da $X \geq 0$ ist, können wir uns beim ersten Teil des Beweises auf die Markov-Ungleichung stützen und statt der Wahrscheinlichkeit $P[X > 0]$ den Erwartungswert $E(X)$ nach oben abschätzen: ist $E(X)$ klein, so kann $X(G) > 0$ nur für wenige $G \in \mathcal{G}(n, p)$ groß sein, d.h. nur wenige – und im günstigen Fall eben fast keine – Graphen aus $\mathcal{G}(n, p)$ liegen in \mathcal{G} . Wie der Beweis von Lemma 9.1.5 exemplarisch zeigt, ist die Berechnung eines Erwartungswertes zudem meist einfacher als die Berechnung einer Wahrscheinlichkeit: ohne uns um Dinge wie die Unabhängigkeit oder Unvereinbarkeit von Ereignissen zu scheren, können wir die Erwartungswerte einzelner Zufallsgrößen – z.B. charakteristischer Zufallsgrößen – einfach addieren, um den Erwartungswert ihrer Summe zu berechnen.

Beim zweiten Teil des Beweises liegen die Dinge anders. Um zu zeigen, daß $P[X > 0]$ groß ist, reicht es nicht, einfach $E(X)$ nach unten abzuschätzen: $E(X)$ kann auch dann groß werden, wenn X auf einem Teil von $\mathcal{G}(n, p)$, sagen wir der Hälfte, sehr groß ist und sonst null.⁷ Um $P[X > 0] \rightarrow 1$ zu beweisen, müssen wir daher zeigen, daß dies nicht der Fall ist, daß also X nicht zu oft zu stark von seinem Mittelwert abweicht.

Genau hierzu dient das folgende elementare Hilfsmittel aus der Wahrscheinlichkeitstheorie. Wie üblich schreiben wir

$$\mu := E(X)$$

*jedenfalls wenn X
ganzzahlig ist, und damit
 $X > 0$ gleichbedeutend zu
 $X \geq 1$*

⁶ ... und alle auf unnatürliche Weise – wie?

⁷ Für p zwischen $1/n$ und $(\log n)/n$ beispielsweise hat fast jedes $G \in \mathcal{G}(n, p)$ eine isolierte Ecke (und insbesondere keinen Spannbaum), aber die mittlere Anzahl von Spannbäumen in G geht für wachsendes n gegen unendlich! Siehe Übungen.

10.1 Wohlquasiordnung

Eine reflexive und transitive Relation nennt man eine *Quasiordnung*. Eine Quasiordnung \leq auf einer Menge X ist eine *Wohlquasiordnung* (und die Elemente von X sind durch \leq *wohlquasiangeordnet*), wenn für jede unendliche Folge x_0, x_1, \dots in X Indizes $i < j$ existieren mit $x_i \leq x_j$. Ein solches Paar (x_i, x_j) nennt man ein *gutes Paar*, und eine unendliche Folge, die ein gutes Paar enthält, ist eine *gute Folge*. (Die Quasiordnung \leq auf X ist also genau dann eine Wohlquasiordnung, wenn jede unendliche Folge in X bezüglich \leq gut ist.) Eine unendliche Folge, die nicht gut ist, heißt *schlecht*.

Proposition 10.1.1. *Eine Quasiordnung \leq auf einer Menge X ist genau dann eine Wohlquasiordnung, wenn es in X bezüglich \leq weder eine unendliche Antikette noch eine unendliche absteigende Folge $x_0 > x_1 > \dots$ gibt.*

Beweis. Die Vorwärtsrichtung ist trivial, da jede absteigende Folge und jede Folge paarweise unvergleichbarer Elemente schlecht ist. Zur Rückrichtung sei x_0, x_1, \dots eine beliebige unendliche Folge in X . Es sei K der vollständige Graph auf $\{x_0, x_1, \dots\}$. Wir färben die Kanten $x_i x_j$ ($i < j$) von K mit drei Farben: grün wenn $x_i \leq x_j$ gilt, rot wenn $x_i > x_j$ gilt, und gelb wenn x_i und x_j unvergleichbar sind. Nach dem Satz von Ramsey (7.1.2) enthält K einen unendlichen Untergraphen, dessen Kanten alle die gleiche Farbe tragen. Gibt es in X weder eine unendliche Antikette noch eine unendliche absteigende Folge, so kann diese Farbe weder gelb noch rot sein. Die Farbe ist also grün, und somit enthält x_0, x_1, \dots eine unendliche Teilfolge, in der jedes Paar gut ist. Insbesondere ist die Folge $x_0, x_1 \dots$ selbst gut. \square

auf $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$
die Kanten ij

Beim Beweis der Rückrichtung von Proposition 10.1.1 haben wir mehr bewiesen als nötig: es hätte gereicht, ein einziges gutes Paar in x_0, x_1, \dots zu finden, und wir haben eine unendliche aufsteigende Teilfolge gefunden. Entsprechend haben wir das folgende Korollar:

Korollar 10.1.2. *Ist X wohlquasiangeordnet, so enthält jede unendliche Folge in X eine unendliche aufsteigende Teilfolge.* \square

Das folgende Lemma und die Idee seines Beweises sind grundlegend in der Theorie der Wohlquasiordnungen. Es sei X eine Menge und \leq eine Quasiordnung auf X . Für endliche Teilmengen $A, B \subseteq X$ setzen wir $A \leq B$, wenn es eine injektive Abbildung $f: A \rightarrow B$ gibt mit $a \leq f(a)$ für alle $a \in A$. Offenbar bezeichnet \leq damit eine Quasiordnung auch auf der Menge $[X]^{<\omega}$ aller endlichen Teilmengen von X .

Lemma 10.1.3. *Mit X ist auch $[X]^{<\omega}$ durch \leq wohlquasiangeordnet.*

Übungen

- 1.⁻ Auf einer Menge X sei eine Quasiordnung \leq definiert. Zwei Elemente $x, y \in X$ seien *äquivalent*, wenn sowohl $x \leq y$ als auch $y \leq x$ gilt. Zeige, daß dies in der Tat eine Äquivalenzrelation auf X ist, und daß \leq auf der Menge der Äquivalenzklassen eine Halbordnung induziert.
2. Auf einer Menge A sei eine Quasiordnung \leq definiert, in der jede absteigende Kette $a_0 > a_1 > \dots$ endlich ist. Für Teilmengen $X \subseteq A$ setze

$$\text{Forb}(X) := \{ a \in A \mid a \not\leq x \text{ für alle } x \in X \}.$$

Zeige, daß A genau dann eine Wohlquasiordnung ist, wenn jede unter \geq abgeschlossene Teilmenge B (d.h. jedes $B \subseteq A$ mit $x \leq y \in B \Rightarrow x \in B$) die Form $B = \text{Forb}(X)$ für ein endliches $X \subseteq A$ hat.

3. Finde eine Menge A mit Quasiordnung \leq ohne unendliche Antikette, in der *nicht* jede unter \geq abgeschlossene Teilmenge B die Form $B = \text{Forb}(X)$ hat. (Bezeichnungen wie in der vorigen Übung.)
4. Beweise Proposition 10.1.1 und Korollar 10.1.2 direkt, ohne den Satz von Ramsey zu benutzen.
5. Für zwei Teilmengen A, B einer Menge X mit Halbordnung \leq gelte $A \leq' B$, wenn eine *ordnungserhaltende* Injektion $f: A \rightarrow B$ mit $a \leq f(a)$ für alle $a \in A$ existiert. Gilt Lemma 10.1.3 entsprechend auch mit \leq' ?
- 6.⁻ Zeige, daß die im Text definierte Relation \leq zwischen Wurzelbäumen in der Tat eine Quasiordnung ist.
7. Zeige, daß die endlichen Bäume durch die Teilgraphenrelation nicht wohlquasi geordnet sind.
8. Im letzten Schritt des Beweises vom Satz von Kruskal wird bei der topologischen Einbettung von T_m in T_n die Wurzel von T_m auf die Wurzel von T_n abgebildet. Nehmen wir induktiv an, daß auch bei der Einbettung der Bäume aus A_m in die Bäume aus A_n stets Wurzeln auf Wurzeln abgebildet werden, so erhalten wir ganz analog zum Beweis von Kruskal einen Beweis, daß die endlichen Wurzelbäume durch die Teilgraphenrelation (bei Abbildung von Wurzeln auf Wurzeln) wohlquasi geordnet sind. Wo liegt der Fehler?
9. Zeige, daß die endlichen Graphen durch die topologische Minorenrelation nicht wohlquasi geordnet sind.
(Tip: Eckengrade.)
- 10.⁺ Ist die Klasse $\{ G \mid G \not\supseteq P^k \}$ durch die Teilgraphenrelation wohlquasi geordnet?
11. Zeige, daß ein Graph $G \neq \overline{K^n}$ genau dann die Baumweite 1 hat, wenn er ein Wald ist.

... mit endlichem X