MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

SOBRE APROXIMACIÓN EN CIERTOS ESPACIOS DE FUNCIONES ANALÍTICAS

JOSÉ MARÍA ALMIRA, NAIRA DEL TORO Y FRANCISCO PÉREZ-ACOSTA

A Chicho, que nos dio mucho más de lo que podríamos devolver

Abstract. The main goal of this paper is to study some elementary properties of polynomial and rational approximation in the setting of approximation spaces of analytic functions defined on compact subsets of the complex plane. Concretely, we are interested in convergence of Faber series and existence of best rational approximation in the norm of these spaces. For the proofs, we will need to introduce an embedding result, and a certain discretization technique.

1. Introducción

Sea $\mathbf{K} \subset \mathbb{C}$ un subconjunto compacto del plano complejo y supongamos que $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbf{K}$ es conexo. Entonces, gracias al teorema de Mergelyan (ver [9]) podemos afirmar que toda función continua en $\mathbf{K}$ y analítica en $\overset{\circ}{\mathbf{K}}$ es uniformemente aproximable por polinomios sobre $\mathbf{K}$. Sin embargo, de la misma forma que el Teorema de Weierstrass no proporciona información sobre la velocidad de convergencia a cero de los errores de mejor aproximación polinómica en $\mathbf{C}[\mathbf{0},\mathbf{1}]$, tampoco el teorema de Mergelyan dice nada a propósito de la velocidad de convergencia (a cero) de los errores de mejor aproximación polinómica en $\mathbf{A}(\mathbf{K}) := \mathbf{H}(\overset{\circ}{\mathbf{K}}) \cap \mathbf{C}(\mathbf{K})$. En este contexto tiene, pues, sentido estudiar los espacios de aproximación

$$\mathbf{A}_q^s(\mathbf{K}) := \{f \in \mathbf{A}(\mathbf{K}) : \{E_n(f)_{\mathbf{K}}\}_{n=0}^{\infty} \in l_q(\{(n+2)^{s-1/q}\})\}.$$

Por ejemplo, podríamos preguntarnos qué propiedades de suavidad poseen los elementos de $\mathbf{A}_q^s(\mathbf{K})$. Es claro que $\mathbf{A}_q^s(\mathbf{K})$ es un espacio de Banach continuamente inmerso en $\mathbf{A}(\mathbf{K})$, si se le dota de la norma

$$\|f\|_{\mathbf{A}_q^s(\mathbf{K})} = \left\| \{(n+2)^{s-1/q} E_n(f)_{\mathbf{K}}\}_{n=-1}^{\infty} \right\|_{l_q},$$

donde $E_{-1}(f)_{\mathbf{K}} := \|f\|_{\mathbf{L}_\infty(\mathbf{K})}$. Para demostrarlo, basta tener en cuenta que se trata de un caso particular de la Proposición 1 que aparece en el artículo de Piestch [14]. Además, si $\mathbf{K}$ contiene un número infinito de puntos, entonces $\mathbf{A}_q^s(\mathbf{K}) \neq \mathbf{A}(\mathbf{K})$, ya que las normas $\|f\|_{\mathbf{A}_q^s(\mathbf{K})}$ y $\|f\|_{\mathbf{A}(\mathbf{K})} := \|f\|_{\mathbf{K}}$ no son equivalentes. Si $\mathbf{K}$ contiene

2000 *Mathematics Subject Classification.* 41A10, 41A20, 41A50.
Key words and phrases. Faber series, best rational approximation, approximation spaces.
Trabajo parcialmente subvencionado por «Aproximación y Métodos Numéricos», PB94 y FQM0178.

sólo un número finito de puntos, entonces claramente $\mathbf{A}(\mathbf{K}) = \mathbf{C}(\mathbf{K}) = \mathbf{A}_q^s(\mathbf{K})$; pues $E_n(f)_{\mathbf{K}} = 0$ para toda función f y todo $n > m = \#\mathbf{K}$.

En este artículo vamos a encontrar algunas clases de funciones analíticas que están inmersas en $\mathbf{A}_q^s(\mathbf{K})$, y vamos a demostrar algunos resultados de aproximación polinómica y racional en $\mathbf{A}_q^s(\mathbf{K})$.

A diferencia del caso real, cuando consideramos el problema de aproximación con polinomios de una variable compleja en compactos de $\mathbb{C}$, no es posible encontrar teoremas directos e inversos completamente satisfactorios en el sentido de que produzcan una caracterización completa de los espacios de aproximación $\mathbf{A}_q^s(\mathbf{K})$. En lo que sigue, vamos a suponer que $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{D}}$ para cierto dominio de Jordan $\mathbf{D}$.

Dedicamos el resto de esta sección a introducir algunos conceptos y propiedades de interés en Teoría de Aproximación Compleja que serán usados posteriormente. En particular, definimos las series de Faber y probamos la inmersión $\mathbf{H}(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$ para todo q y s y para todo dominio de Jordan $\mathbf{D} \subset \mathbb{C}$, donde $\mathbf{H}(\overline{\mathbf{D}})$ denota el espacio vectorial de las funciones holomorfas en algún entorno abierto de $\overline{\mathbf{D}}$. También introducimos el concepto de cuasidisco y demostramos que cualquier curva de Jordan diferenciable es una curva cuasiconforme.

1.0.1. Series de Faber. Sea $\mathbf{D}$ un dominio de Jordan y sea $\mathcal{C} = \partial\mathbf{D}$ su frontera. Denotamos por $\mathcal{C}_R$ la curva de nivel correspondiente a $R > 1$,

$$\mathcal{C}_R = \{\Phi(z) : |z| = R\}$$

donde Φ es la aplicación de Riemann $\Phi : \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \to \mathbf{Ext}(\mathcal{C})$ normalizada en el infinito por $\Phi(\infty) = \infty, \Phi'(\infty) > 0$. Los polinomios de Faber (ver [9, pp. 42–57]) se definen entonces como $F_n(z) =$ la parte polinómica del desarrollo de Laurent de $[\Phi(z)]^n$, $n \in \mathbb{N}$. Para cada $f \in \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$ podemos definir entonces una serie formal (la serie de Faber de f)

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n \tag{1}$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} f(\Psi(w)) w^{-(n+1)} dw \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots) \tag{2}$$

y $\Psi = \Phi^{-1} : \mathbf{Ext}(\mathbf{D}) \to \mathbf{Ext}(\mathbb{D})$ es la inversa de Φ. Denotamos por $\mathcal{F}_n(f)$ la n-ésima suma parcial de la serie de Faber asociada a f.

Las series de Faber son una herramienta clásica para la aproximación de funciones analíticas. Son la generalización más natural ([4], [19]) que conocemos del desarrollo de Taylor para el estudio de funciones analíticas en dominios de Jordan acotados. Faber (ver [7], [8]) introdujo dichos desarrollos, y los usó para demostrar la fórmula

$$\limsup_{n\to\infty} \left[E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}}\right]^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R(f)}, \tag{3}$$

donde f se supone analítica en algún entorno de $\overline{\mathbf{D}}$ y

$$1 < R(f) := \sup\{r : f \in \mathbf{H}(\mathbf{Int}(C_r))\}.$$

Se sigue de (3) la siguiente proposición:

Proposición 1. *Sea* $\mathbf{D}$ *un dominio de Jordan. Entonces*

$$\mathbf{H}(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$$

para todo q, s.

Demostración. Sea $f \in \mathbf{H}(\overline{\mathbf{D}})$. Entonces $R(f) > 1$ y (3) implica que $E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} = \mathbf{O}(n^{-k})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto concluye la demostración. □

1.0.2. Curvas cuasiconformes. La teoría de aproximación sobre dominios de Jordan depende fuertemente de la geometría de los dominios ya que los aproximantes que se consideran buenos (como la suma parcial n-ésima de la serie de Faber de una función) están dados en términos de la restricción a $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ de la aplicación de Riemann asociada al dominio de Jordan, de modo que si la aplicación de Riemann tiene un buen comportamiento en la frontera del dominio, las propiedades de aproximación son buenas. Ahora bien, en el estudio del comportamiento frontera de homeomorfismos, las curvas cuasiconformes son de gran interés [16]. Por tanto, las curvas cuasiconformes son interesantes para la teoría de aproximación compleja.

Existen varias definiciones de aplicaciones cuasiconformes y curvas cuasiconformes. Por ejemplo, la definición analítica de aplicación cuasiconforme es la siguiente (ver [17]): por una aplicación τ-cuasiconforme de un dominio $\mathbf{D} \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ sobre otro dominio $\mathbf{D}' \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ entendemos un homeomorfismo $h : \mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ tal que:

- h, junto con su inversa, conserva la orientación.
- $h \in \mathbf{W}^1_{1,\mathrm{loc}}(\mathbf{D} \setminus \{\infty, h^{-1}(\infty)\})$.
- $|h_{\overline{z}}| \leq k|h_z|$ en casi todo punto de $\mathbf{D}$, donde $k = \frac{\tau-1}{\tau+1}$.

Por una curva cuasiconforme o cuasicírculo, entendemos la imagen de una circunferencia bajo alguna aplicación que es τ-cuasiconforme de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ para algún $\tau > 0$. Existe una caracterización geométrica de las curvas cuasiconformes, contenida en el siguiente Teorema (ver [16, p. 107]):

Teorema 2 (Teorema del Cuasicírculo)**.** *Sea* $\mathcal{C}$ *una curva de Jordan en* $\mathbb{C}$ *y supongamos que* f *aplica* $\mathbb{D}$ *conformemente sobre* $\mathbf{Int}(\mathcal{C})$*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\mathbf{diam}(\mathcal{C}(z,w)) \leq M|z-w|$ *para todo* $z, w \in \mathcal{C}$ *y una cierta constante* M *(donde* $\mathcal{C}(z,w)$ *denota el arco de menor longitud de* $\mathcal{C}$ *de* z *a* w *y* $\mathbf{diam}(\mathcal{K}) = \max\{|z-w| : z, w \in \mathcal{K}\}$*).*

(b) Si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{T}$ *y* $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_2|$ *entonces* $|f(z_1) - f(z_2)| \leq M|f(z_2) - f(z_3)|$ *(recuérdese que, por el teorema de Caratheodory, toda aplicación conforme del disco unidad a un dominio de Jordan posee una extensión continua hasta el borde del disco unidad,* $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$*).*

(c) f *tiene una extensión cuasiconforme a* $\mathbb{C}$*.*

(d) Existe una aplicación cuasiconforme de $\mathbb{C}$ *a* $\mathbb{C}$ *que aplica* $\mathbb{T}$ *sobre* $\mathcal{C}$*.*

Sea $\mathbf{D}$ un dominio de Jordan y $\mathcal{C} = \partial\mathbf{D}$ su borde. Decimos que $\mathcal{C}$ satisface una c-condición [9] si

$$\Delta(z,w) < c\,|z-w| \ \text{ para todo } z, w \in \mathcal{C}, \tag{4}$$

donde $\Delta(z,w)$ denota la longitud del menor arco de $\mathcal{C}$ de z a w. Decimos que $\mathcal{C}$ es cuasi-suave[1] si es rectificable y satisface (4) para cierta constante $c>0$. Es claro que cualquier curva cuasi-suave debe ser una curva cuasiconforme.

Decimos que $\mathcal{C}$ es suave si es de clase $C^{(1)}$ y admite una parametrización arco $\alpha:[0,L]\to\mathcal{C}$ (i.e., $\|\alpha'(t)\|=1$ para todo $t\in[0,L]$ y $\alpha(t)=\alpha(s)$ si y solo si $t=s$ o $\{t,s\}=\{0,L\}$).

A continuación, vamos a demostrar que cualquier curva de Jordan suave es cuasi-suave[2] (y, por tanto, cuasiconforme).

Proposición 3. *Cualquier curva de Jordan suave es también una curva de Jordan cuasi-suave.*

Demostración. Sea $\alpha:[0,L]\to\mathcal{C}$ la parametrización arco de $\mathcal{C}$. Afirmamos que

$$G(t,s)=\begin{cases}\frac{|\alpha(t)-\alpha(s)|}{\Delta(\alpha(t),\alpha(s))} & \text{si } \Delta(\alpha(t),\alpha(s))\neq 0,\\ 1 & \text{si } \Delta(\alpha(t),\alpha(s))=0,\end{cases}$$

es una función continua y $|G(t,s)|\neq 0$ para todo $(t,s)\in[0,L]\times[0,L]$ (siendo esto último obvio).

Para probarlo, primero observamos que es posible extender la parametrización α a una función periódica $\beta:\mathbb{R}\to\mathcal{C}$ de periodo L simplemente tomando $\beta(nL+t)=\alpha(t)$ para todo $n\in\mathbb{Z}$ y $0\le t\le L$. Es claro que β es una función $C^{(1)}$ y $\|\beta'\|\equiv 1$. Ahora,

$$\Delta(\alpha(t),\alpha(s))=\min\{|t-s|\,,L-\max\{t,s\}+\min\{t,s\}\}$$

y $\Delta(\alpha(t),\alpha(s))=0$ si y sólo si $t=s$ o $\{t,s\}=\{0,L\}$. Supongamos que $0\le t<s\le L$ y $\Delta(\alpha(t),\alpha(s))\neq|t-s|$. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{|\alpha(t)-\alpha(s)|}{\Delta(\alpha(t),\alpha(s))}&=\frac{|\beta(t)-\beta(s)|}{L-s+t}=\frac{|\beta(L+t)-\beta(s)|}{L-s+t}\\&=\frac{|\beta(s+(L+t-s))-\beta(s)|}{L-s+t}\to|\beta'(s)|=1,\text{ si } t\to s-L\end{aligned}$$

de modo que G es continua (los otros casos son completamente análogos),

$$\frac{1}{c}=\min_{(t,s)\in[0,L]\times[0,L]}|G(t,s)|>0,$$

con lo que concluimos la demostración. □

[1] También se dice que $\mathcal{C}$ es una curva arco-cuerda o que es una curva de Laurentiev (ver [16, p. 96]).

[2] Estamos convencidos de que este resultado debe existir en la literatura sobre la materia. Es más, deben existir resultados mucho más potentes, pero nosotros sólo vamos a necesitar en este artículo tratar con curvas de Jordan suaves. Es por ello que hemos realizado la demostración de este caso, ya que no requiere argumentos especialmente complejos.

2. Aproximación polinómica y racional en $\mathbf{A}^s_q(\overline{\mathbf{D}})$

Vamos ahora a estudiar algunas cuestiones sobre aproximación polinómica y racional en $\mathbf{A}^s_q(\overline{\mathbf{D}})$. En una primera subsección, demostramos un teorema de inmersión que generaliza la inmersión $\mathbf{H}(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}^s_q(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$ a las clases de funciones definidas por

$$\mathbf{A}^k(\overline{\mathbf{D}}) = \{f : f, f', f'', \ldots, f^{(k)} \in \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})\}$$

y

$$\mathbf{Lip}(\gamma, \overline{\mathbf{D}}) = \left\{ f : f, f', f'', \ldots, f^{(k)} \in \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}}) \text{ y } \sup_{z,w \in \partial\mathbf{D}} \frac{\left|f^{(k)}(z) - f^{(k)}(w)\right|}{|z-w|^{\nu}} < \infty \right\}$$

donde $\gamma = k + \nu$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq \nu < 1$ y la frontera del domino de Jordan $\mathbf{D}$ se supone diferenciable de clase al menos $C^{(2)}$. La base teórica de nuestro resultado es un teorema directo para aproximación polinómica sobre cuasidiscos, debido a Belyi (ver [2]).

En la segunda subsección se introduce una técnica de discretización que se utiliza en la siguiente subsección para probar la proximinalidad de las funciones racionales en $\mathbf{A}^s_q(\overline{\mathbf{D}})$ para todo dominio de Jordan $\mathbf{D}$.

En la cuarta subsección se demuestran algunos resultados sobre convergencia para aproximación polinómica con series de Faber en la norma de $\mathbf{A}^s_q(\overline{\mathbf{D}})$.

2.1. El teorema de Inmersión. Supongamos que $\mathcal{C}$ es una curva de Jordan y $\mathcal{C}_R$ es la curva de nivel asociada a $R > 1$,

$$\mathcal{C}_R = \{\Phi(z) : |z| = R\},$$

donde Φ es la aplicación conforme $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \to \mathbf{Ext}(\mathcal{C})$ normalizada en el infinito por $\Phi(\infty) = \infty, \Phi'(\infty) > 0$. Entonces definimos las funciones

$$d_R(z) = d(z, \mathcal{C}_R) \quad \text{para todo } z \in \mathcal{C}.$$

La misma notación se usa si $\mathcal{C}$ es cuasiconforme y Φ es el homeomorfismo cuasiconforme que aplica $\mathcal{C}$ sobre $\partial\mathbb{D}$. El teorema de Belyi afirma (ver [2, p. 316, Theorem 10]):

Teorema 4 (Belyi, 1977)**.** *Sea* $\mathbf{D}$ *un dominio cuasiconforme acotado en el plano complejo. Si* $f \in \mathbf{A}^k(\overline{\mathbf{D}})$ $(k > 0)$*, entonces para todo entero positivo* n *existe un polinomio algebraico* $P_n(z)$ *de grado* $\leq n$ *y constantes* $M(j, k, \overline{\mathbf{D}})$ *que dependen sólo de* $\overline{\mathbf{D}}$*,* k *y* $j = 0, 1, \ldots, n$*, tales que*

$$|f(z) - P_n(z)| \leq M(j, k, \overline{\mathbf{D}})(d_{1+\frac{1}{n}}(z))^{k-j} w(f^{(k)}, d_{1+\frac{1}{n}}(z)) \tag{5}$$

para todo $z \in \mathcal{C} = \partial\mathbf{D}$*, donde* $w(f, \cdot)$ *denota el módulo de continuidad de la función* f*.*

Estamos interesados en tomar la norma del supremo del primer miembro de (5) de modo que es bastante natural definir $\delta_n := \sup_{z \in \mathcal{C}} d_{1+\frac{1}{n}}(z)$. Es claro que $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente y $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$.

Corolario 5. *En las condiciones del Teorema anterior, se tiene que*

$$E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} \leq M(k, \overline{\mathbf{D}})\delta_n^k w(f^{(k)}, \delta_n)$$

para todo $f \in \mathbf{A}^k(\overline{\mathbf{D}})$.

Teorema 6. *Supongamos que* $\mathbf{D}$ *es un dominio de Jordan cuasiconforme y* $\delta_n = \mathbf{O}(n^{-\alpha})$ *para cierto* $\alpha > 0$. *Entonces*

$$\mathbf{A}^k(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$$

para todo $k > \frac{s}{\alpha}$ *y*

$$\mathbf{Lip}(\gamma, \overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$$

para todo $\gamma > \frac{s}{\alpha}$. *Además, las inclusiones son estrictas y continuas.*

Demostración. Sólo probamos las inmersiones $\mathbf{A}^k(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$, para todo $k > \frac{s}{\alpha}$, ya que los otros casos tienen demostraciones similares.

Sean $1 \leq q \leq \infty$ y $s > 0$ fijados y supongamos que $\delta_n = \mathbf{O}(n^{-\alpha})$ para cierto $\alpha > 0$. Entonces $\delta_n^k = \mathbf{O}(n^{-\alpha k})$ y, por tanto, se satisface la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
\|f\|^q_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})} - \|f\|^q_{\mathbf{L}_\infty(\overline{\mathbf{D}})} &= \left\| \left\{ (n+2)^{s-\frac{1}{q}} E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} \right\}_{n=0}^{\infty} \right\|_{l_q}^q \\
&\leq \Bigg(\left\| \left\{ (n+2)^{s-\frac{1}{q}} E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} \right\}_{n=0}^{k-1} \right\|_{l_q} \\
&\qquad + M(k, \overline{\mathbf{D}}) \left\| \left\{ (n+2)^{s-\frac{1}{q}} \delta_n^k w(f^{(k)}, \delta_n) \right\}_{n=k}^{\infty} \right\|_{l_q} \Bigg)^q \\
&\leq \Bigg(\left\| \left\{ (n+2)^{s-\frac{1}{q}} \right\}_{n=0}^{k-1} \right\|_{l_q} \|f\|_{\mathbf{L}_\infty(\overline{\mathbf{D}})} \\
&\qquad + CM(k, \overline{\mathbf{D}}) \left\| f^{(k)} \right\|_{\mathbf{L}_\infty(\overline{\mathbf{D}})} \left\| \left\{ (n+2)^{s-\frac{1}{q}-\alpha k} \right\}_{n=0}^{\infty} \right\|_{l_q} \Bigg)^q < \infty
\end{aligned}$$

(donde hemos usado que $w(f^{(k)}, t) \leq 2 \left\| f^{(k)} \right\|_{\mathbf{L}_\infty(\overline{\mathbf{D}})}$ para todo $t \geq 0$ y que

$$\left\| \left\{ (n+2)^{s-\frac{1}{q}-\alpha k} \right\}_{n=0}^{\infty} \right\|_{l_q} < \infty$$

siempre que $k > \frac{s}{\alpha}$) para todo $f \in \mathbf{A}^k(\overline{\mathbf{D}})$. Se sigue que $\mathbf{A}^k(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$. Además, es claro que si $\{f_n\} \to f$ en $\mathbf{A}^k(\overline{\mathbf{D}})$ entonces

$$\|f_n - f\|_{\mathbf{L}_\infty(\overline{\mathbf{D}})} \to 0 \quad \text{y} \quad \left\| (f_n - f)^{(k)} \right\|_{\mathbf{L}_\infty(\overline{\mathbf{D}})} \to 0.$$

Por tanto, $\|f_n - f\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})} \to 0$ y la inclusión $\mathbf{A}^k(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$ es continua.

Por otra parte, $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}}) \neq \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$ ya que, gracias a un resultado clásico debido a Bersntein (ver [21]), existen funciones $f \in \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$ tales que

$$E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} = \begin{cases} (n+2)^{-s+\frac{1}{q}} & \text{si } s - \frac{1}{q} > 0, \\ (n+2)^{-\frac{s}{2}} & \text{si } 0 < s \leq \frac{1}{q}, \end{cases}$$

y por tanto $\|f\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})} = \infty$. □

Nos interesa ahora conocer condiciones sobre el dominio $\mathbf{D}$ que garanticen que $\delta_n = \mathbf{O}(n^{-\alpha})$ para algún $\alpha > 0$. En este sentido, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 7. *Supongamos que la aplicación conforme $\Phi : \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbf{D}}$ posee una extensión holomorfa $\Phi : \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}(0,\varepsilon) \to \Omega$. Entonces $\delta_n = \mathbf{O}(n^{-1})$.*

Demostración. Sea $z \in \partial\mathbb{D}$ y sea $2 \geq R > 1$. Entonces $Rz \in \partial\mathbb{D}(0,R)$, $\Phi(z) \in \mathcal{C}$, $\Phi(Rz) \in \mathcal{C}_R$ y

$$|\Phi(z) - \Phi(Rz)| = \left| \int_z^{Rz} \Phi'(\xi)\, d\xi \right| \leq (R-1) \|\Phi'\|_{\mathbf{L}_\infty(\overline{A(\mathbf{0};1,2)})},$$

donde $\overline{A(\mathbf{0};r,R)}$ denota la corona abierta de centro $\mathbf{0}$ (el origen de coordenadas) y radios inferior y superior r y R, respectivamente. Por tanto,

$$\delta_n \leq \sup_{z\in\partial\mathbb{D}} \left| \Phi(z) - \Phi\Big(\Big(1+\frac{1}{n}\Big)z\Big) \right| \leq \frac{1}{n} \|\Phi'\|_{\mathbf{L}_\infty(\overline{A(\mathbf{0};1,2)})} = \mathbf{O}(n^{-1})$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Nota. Una condición suficiente para que $\Phi : \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbf{D}}$ admita una extensión holomorfa al interior del disco unidad $\mathbb{D}$ es que la frontera $\mathcal{C} = \partial\mathbf{D}$ sea analítica.

Nota. Sea $\Phi : \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbf{D}}$ una aplicación conforme que no posee ninguna extensión holomorfa hasta el interior de $\mathbb{D}$. Entonces la aplicación conforme $\Phi_t : \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \to \mathbf{Ext}(\mathcal{C}_{1+t})$ definida por $\Phi_t(z) = \Phi((1+t)z)$ posee una extensión holomorfa hasta $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}(0, \frac{1}{1+t})$ para todo $t > 0$.

Corolario 8. *$C^{(k)}(\overline{\mathbb{D}}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbb{D}}) \subset \mathbf{A}(\overline{\mathbb{D}})$ y $C^{(k)}(\overline{\mathbf{E}_R}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{E}_R}) \subset \mathbf{A}(\overline{\mathbf{E}_R})$, para todo $k > s$, donde $\mathbf{E}_R$ es el interior de la elipse de centro $\mathbf{0}$ y semiejes $\frac{1}{2}(R+R^{-1})$ y $\frac{1}{2}(R-R^{-1})$.*

Demostración. Las aplicaciones conformes están respectivamente dadas por $\Phi(z) = z$ y $\Psi(z) = \frac{1}{2}(Rz + \frac{1}{Rz})$ así que en este caso $\delta_n = c\frac{1}{n}$ para cierta constante c. □

A pesar de que el Teorema 7 es muy natural, tener una extensión holomorfa hasta el interior de $\mathbb{D}$ supone una restricción muy fuerte sobre la aplicación de Riemann Φ. Por tanto, nos gustaría disponer de hipótesis no tan restrictivas a la hora de garantizar que $\delta_n = \mathbf{O}(n^{-1})$. Para probar nuestro teorema, usamos el siguiente resultado clásico de la teoría de funciones de variable compleja (ver [3, pp. 413–433]):

Teorema 9. *Se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

(a) ***(P. Painlevé)*** *Sean Ω_1, Ω_2 dos abiertos acotados con fronteras regulares de clase $\mathbf{C}^{(\infty)}$ y $h : \Omega_1 \to \Omega_2$ un biholomorfismo. Entonces h y h^{-1} poseen extensiones $\mathbf{C}^{(\infty)}$ hasta la frontera.*

(b) Existe un resultado análogo si sólo asumimos fronteras regulares de clase $\mathbf{C}^{(k)}$, pero los biholomosfismos sólo admiten extensiones $\mathbf{C}^{(k-1)}$.

Ahora podemos probar el siguiente

Teorema 10. *Supongamos que el dominio de Jordan* $\mathbf{D}$ *posee frontera de clase al menos* $\mathbf{C}^{(2)}$. *Entonces* $\delta_n = \mathbf{O}(n^{-1})$.

Demostración. Utilizamos el Teorema 9 con $\Omega_1 = A(0;1,2)$, la corona de centro el origen de coordenadas y radios inferior y superior 1 y 2 respectivamente, $\Omega_2 = \Phi(A(\mathbf{0};1,2)) = \mathbf{Int}(\mathcal{C}_R) \cap \mathbf{Ext}(\mathcal{C})$, y $h = \Phi_{|\Omega_1}$. Entonces $h = u + iv$ admite una extensión $\overline{h} = \overline{u} + i\overline{v}$ que es diferenciable en $\overline{A(\mathbf{0};1,2)}$ y

$$\sup_{w \in A(\mathbf{0};1,2)} |\Phi'(w)| = \sup_{w \in A(\mathbf{0};1,2)} \left(\overline{u}_x^2 + \overline{v}_x^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \max_{w \in \overline{A(\mathbf{0};1,2)}} \left(\overline{u}_x^2 + \overline{v}_x^2\right)^{\frac{1}{2}} = M < \infty.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} |\Phi(z) - \Phi(Rz)| &= \lim_{t \to 0^+} |\Phi((1+t)z) - \Phi(Rz)| = \lim_{t \to 0^+} \left| \int_{Rz}^{(1+t)z} \Phi'(w)dw \right| \\ &\leq \lim_{t \to 0^+} |1 + t - R|\, M = R - 1 \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$, y la prueba se sigue como en el Teorema 7. □

Teorema 11 (Inmersión)**.** *Supongamos que el dominio de Jordan* $\mathbf{D}$ *tiene frontera de clase al menos* $\mathbf{C}^{(2)}$. *Entonces*

$$\mathbf{A}^k(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$$

para todo $k > s$ *y*

$$\mathbf{Lip}(\gamma, \overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$$

para todo $\gamma > s$. *Además, las inclusiones son estrictas y continuas.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 3 que nuestro dominio de Jordan es cuasiconforme y del Teorema 10 que $\delta_n = \mathbf{O}(n^{-1})$. Por tanto, podemos aplicar el Teorema 6 para concluir la demostración. □

Podemos decir un poco más:

Teorema 12. *Supongamos que* $\min_{z \in \partial \mathbf{D}} d_n(z) \sim \frac{1}{n}$. *Entonces,* $\mathbf{Lip}(s, \overline{\mathbf{D}})$ *no está contenido en* $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$. *En particular, esto es cierto para* $\mathbf{D} =$ *el interior de una elipse.*

Demostración. Existe un teorema de Tamrazov (ver [20]) que afirma que si

$$|f(z) - p_n(z)| \leq M d_n(z)^s, \; z \in \partial \mathbf{D}, \; n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

para cierta sucesión de polinomios $\{p_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, entonces $f \in \mathbf{Lip}(s, \overline{\mathbf{D}})$. Además, un conocido resultado de Bernstein garantiza que existen funciones $f \in \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$ tales que

$$E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} = \left[\min_{z \in \partial \mathbf{D}} d_n(z) \right]^s, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Tómese una función que verifique (7). Entonces es claro que también satisface (6), así que $f \in \mathbf{Lip}(s, \overline{\mathbf{D}})$. Ahora, nuestra hipótesis sobre $d_n(z)$ y (7) implican que $f \notin \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$. □

Ahora estamos en posición de probar la proximinalidad de las funciones racionales en $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$ para dominios de Jordan. Lo haremos en dos pasos: el primer paso consiste en la discretización del problema y el segundo es el estudio de las sucesiones minimizantes.

2.2. Discretización sobre dominios complejos. El objetivo fundamental de esta sección es demostrar que si $\mathbf{D}$ es un dominio acotado entonces la norma en $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$ puede ser aproximada por las normas $\|\cdot\|_{\mathbf{A}_q^s(\mathbf{K}_n)}$ para ciertos subconjuntos compactos $\mathbf{K}_n \subset \mathbf{D}$. Usamos la siguiente notación: $P_t(f)_{\mathbf{K}}$ denota la mejor aproximación de f con polinomios de grado $\leq t$ sobre $\mathbf{K}$ con la norma $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_\infty(\mathbf{K})}$ y, para el caso especial, $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{D}}$, escribimos $P_t(f) = P_t(f)_{\overline{\mathbf{D}}}$ (ver [18] para la demostración de la unicidad de la mejor aproximación polinómica sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$). Para cada subconjunto compacto $\mathbf{K} \subset \mathbf{D}$, escribimos $|\mathbf{K}| = \sup_{x \in \partial \mathbf{D}} d(x, \mathbf{K})$. Finalmente, supondremos que $\mathbf{K}_0 \subset \mathbf{K}_1 \subset \cdots \subset \mathbf{K}_n \subset \mathbf{D}$ es una sucesión de subconjuntos compactos de $\mathbf{D}$ tal que $\mathbf{D} = \cup_{n=0}^{\infty} \mathbf{K}_n$ (i.e., una exhaución de $\mathbf{D}$). Es claro que $\lim_{n\to\infty} |\mathbf{K}_n| = 0$.

Lema 1. *$P_t(f)$ es un punto de acumulación de la sucesión $\{P_t(f)_{\mathbf{K}_n}\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbf{L}_\infty(\overline{\mathbf{D}})$.*

Demostración. Sea $\mathbf{K} \subset \mathbf{D}$ un subconjunto compacto de $\mathbf{D}$. Entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{K} \subset \mathbf{K}_n$ para todo $n \geq n_0$. Por tanto

$$\begin{aligned} \|P_t(f)_{\mathbf{K}_n}\|_{L_\infty(K)} &\leq \|P_t(f)_{\mathbf{K}_n}\|_{L_\infty(\mathbf{K}_n)} \\ &\leq \|f\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} + E_t(f)_{\overline{\mathbf{D}}} \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$, de modo que existe un $M = M(\mathbf{K}) < \infty$ tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_t(f)_{\mathbf{K}_n}\|_{L_\infty(\mathbf{K})} \leq M(\mathbf{K}).$$

El teorema de Montel implica que existe una subsucesión $\left\{P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}}\right\}_{j=1}^{\infty}$ que es convergente en $H(\mathbf{D})$. Pero $P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}} \in \Pi_t$ para todo j, y Π_t es de dimensión finita. Por tanto $\left\{P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}}\right\}_{j=1}^{\infty}$ también converge cuando se trata como subconjunto de $L_\infty(\overline{\mathbf{D}})$ y su límite también pertenece a Π_t. Supongamos que

$$\left\|P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}} - P\right\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} \to 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|f-P\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} &= \lim_{j\to\infty} \|f-P\|_{L_\infty(\mathbf{K}_{n_j})} \\ &\leq \lim_{j\to\infty} \left[\left\|f - P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}}\right\|_{L_\infty(\mathbf{K}_{n_j})} + \left\|P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}} - P\right\|_{L_\infty(\mathbf{K}_{n_j})}\right] \\ &= \lim_{j\to\infty} \left[E_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}} + \left\|P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}} - P\right\|_{L_\infty(\mathbf{K}_{n_j})}\right] \\ &\leq E_t(f)_{\overline{\mathbf{D}}} + \lim_{j\to\infty} \left\|P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}} - P\right\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} = E_t(f)_{\overline{\mathbf{D}}} \end{aligned}$$

Por tanto $\|f-P\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} = E_t(f)_{\overline{\mathbf{D}}}$ y $P = P_t(f)$. □

Lema 2. $\lim_{n\to\infty} E_t(f)_{\mathbf{K}_n} = E_t(f)_{\overline{\mathbf{D}}}$.

Demostración. Basta probar que $\lim_{n\to\infty} E_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}} = E_t(f)_{\overline{\mathbf{D}}}$ para cierta sucesión de números naturales $\{n_j\} \uparrow \infty$, ya que $\{E_t(f)_{\mathbf{K}_n}\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada no decreciente.

Gracias al Lema 1, podemos escribir

$$\left\| P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}} - P_t(f) \right\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} \to 0.$$

Por otra parte, el principio del módulo máximo implica que

$$E_t(f)_{\overline{\mathbf{D}}} = |f(x) - P_t(f)(x)|$$

para cierto $x \in \partial\mathbf{D}$, de modo que

$$\begin{aligned}
E_t(f)_{\overline{\mathbf{D}}} - E_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}} &= |f(x) - P_t(f)(x)| - \left\| f - P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}} \right\|_{L_\infty(\mathbf{K}_{n_j})} \\
&\leq |f(x) - P_t(f)(x)| - \left| f(y) - P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}}(y) \right| \qquad \text{para todo } y \in \mathbf{K}_{n_j} \\
&\leq |f(x) - f(y)| + |P_t(f)(y) - P_t(f)(x)| + \left| P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}}(y) - P_t(f)(y) \right| \\
&\leq w(f, |\mathbf{K}_{n_j}|) + w(P_t(f), |\mathbf{K}_{n_j}|) + \left\| P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}} - P_t(f) \right\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})}
\end{aligned}$$

converge a cero para $j \to \infty$. □

Proposición 13. $\|f\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})} = \lim_{t\to\infty} \|f\|_{\mathbf{A}_q^s(\mathbf{K}_t)}$ *para todo* $f \in \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})} - \|f\|_{\mathbf{A}_q^s(\mathbf{K}_t)} &= \|f\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} - \|f\|_{L_\infty((\mathbf{K}_t)} \\
&\quad + \left\| \left\{ (n+2)^{s-\frac{1}{q}} E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} \right\}_{n=0}^{\infty} \right\|_{l_q} - \left\| \left\{ (n+2)^{s-\frac{1}{q}} E_n(f)_{\mathbf{K}_t} \right\}_{n=0}^{\infty} \right\|_{l_q}
\end{aligned}$$

y es claro que $\|f\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} - \|f\|_{L_\infty(\mathbf{K}_t)} \to 0$. Por tanto, debemos probar que

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \left\{ (n+2)^{s-\frac{1}{q}} E_n(f)_{\mathbf{K}_t} \right\}_{n=0}^{\infty} \right\|_{l_q} = \left\| \left\{ (n+2)^{s-\frac{1}{q}} E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} \right\}_{n=0}^{\infty} \right\|_{l_q}.$$

Obsérvese que $\mathbf{K}_t \subset \mathbf{D}$ implica $E_n(f)_{\mathbf{K}_t} \leq E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}}$ para todo n, de modo que $0 \leq E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}}^q - E_n(f)_{\mathbf{K}_t}^q \leq E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}}^q$ para todo n. Por tanto

$$\begin{aligned}
&\left\| \left\{ (n+2)^{s-\frac{1}{q}} E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} \right\}_{n=0}^{\infty} \right\|_{l_q}^q - \left\| \left\{ (n+2)^{s-\frac{1}{q}} E_n(f)_{\mathbf{K}_t} \right\}_{n=0}^{\infty} \right\|_{l_q}^q \\
&\qquad = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)^{sq-1} \left[E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}}^q - E_n(f)_{\mathbf{K}_t}^q \right] \\
&\qquad \leq \sum_{n=0}^{m} (n+2)^{sq-1} \left[E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}}^q - E_n(f)_{\mathbf{K}_t}^q \right] + \sum_{n=0}^{m} (n+2)^{sq-1} E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}}^q
\end{aligned}$$

para todo m. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=0}^{m}(n+2)^{sq-1}E_n(f)^q_{\overline{\mathbf{D}}} < \varepsilon$, ya que $\|f\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})} < \infty$. Por otra parte, el Lema 2 implica que para cualquier entero m fijado de antemano,

$$\lim_{t\to\infty}\left[\sum_{n=0}^{m}(n+2)^{sq-1}\left[E_n(f)^q_{\overline{\mathbf{D}}} - E_n(f)^q_{\mathbf{K}_t}\right]\right] = 0,$$

con lo que se concluye la demostración. □

2.3. Proximinalidad de las funciones racionales.

Teorema 14 (Proximinalidad de las funciones racionales)**.** *Sea* $\mathbf{D}$ *un dominio de Jordan. Entonces* $R_m^n(\overline{\mathbf{D}}) = \{\frac{a}{b} : a \in \Pi_n, b \in \Pi_m, \frac{a}{b}$ *no posee polos en* $\overline{\mathbf{D}}\}$ *es un subconjunto proximinal de* $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$ *para todo* s, q.

Demostración. La idea básica para la demostración es el Teorema 11, la Proposición 13 y el hecho de que todos los dominios en $\mathbb{C}$ admiten una exhaución regular [3, p. 400], de modo que podemos suponer que $\mathbf{D} = \bigcup_{n=0}^{\infty}\mathbf{D}_n$, donde $\mathbf{K}_n = \overline{\mathbf{D}_n}$ es compacto, $\mathbf{D}_n$ es Jordan, tiene borde regular de clase al menos $C^{(2)}$ y $\overline{\mathbf{D}_n} \subset \mathbf{D}_{n+1}$ para todo n. Por tanto $\mathbf{H}(\mathbf{D}) \subset C^{(k)}(\overline{\mathbf{D}_n}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}_n})$ para todo $k > s$, y las inclusiones son continuas.

Sea $f \in \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$. Sea $\delta = \inf_{\frac{a}{b}\in R_m^n(\overline{D})}\left\|f - \frac{a}{b}\right\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})}$ y sea $\left\{\frac{a_k}{b_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión minimizante (i.e., $\delta = \lim_{k\to\infty}\left\|f - \frac{a_k}{b_k}\right\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})}$) y supongamos sin pérdida de generalidad que $\|b_k\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\left\|\frac{a_k}{b_k}\right\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})} \leq \|f\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})} + \left\|f - \frac{a_k}{b_k}\right\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})} \leq M$$

para cierta constante $M < \infty$ y para todo $k \in \mathbb{N}$. Por tanto

$$\left\|\frac{a_k}{b_k}\right\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} \leq \left\|\frac{a_k}{b_k}\right\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})} \leq M$$

y, por el teorema de Montel, existe una subsucesión $\left\{\frac{a_{k_s}}{b_{k_s}}\right\}_{s=1}^{\infty}$ que converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de D a una función holomorfa $g \in \mathbf{H}(\mathbf{D})$.

Por otra parte, tenemos que $\|b_k\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} = 1$ para todo k y

$$\|a_k\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} \leq \left\|\frac{a_k}{b_k}\right\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})}\|b_k\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} \leq M$$

y $a_k, b_k \in \Pi_{\max\{n,m\}}$, que es finito dimensional. Por tanto podemos suponer que la subsucesión $\left\{\frac{a_{k_s}}{b_{k_s}}\right\}_{s=1}^{\infty}$ es tal que para ciertos polinomios $a \in \Pi_n$ y $b \in \Pi_m$ se tiene que $\lim_{s\to\infty}\|a_{k_s} - a\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} = \lim_{s\to\infty}\|b_{k_s} - b\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} = 0$. Se sigue que $g = \frac{a}{b}$.

Afirmamos que g no tiene polos en $\overline{\mathbf{D}}$. Ciertamente, si $z_0 \in \overline{\mathbf{D}}$ es un polo de g entonces existe algún $z_1 \in \mathbf{D}$ para el que $|g(z_1)| > M + 1$. Por tanto

$$\left|g(z_1) - \frac{a_{k_s}(z_1)}{b_{k_s}(z_1)}\right| \geq \left||g(z_1)| - \left|\frac{a_{k_s}(z_1)}{b_{k_s}(z_1)}\right|\right| > 1$$

para todo $s \in \mathbb{N}$, lo que entra en contradicción con $\frac{a_{k_s}}{b_{k_s}} \to g$ en $\mathbf{H}(\mathbf{D})$.

De la inmersión $\mathbf{H}(\mathbf{D}) \subset \mathbf{A}^k(\overline{\mathbf{D}_n}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}_n})$ se sigue que

$$\lim_{s\to\infty} \left\| \frac{a_{k_s}}{b_{k_s}} - g \right\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}_n})} = 0.$$

Por tanto

$$\left| \|f-g\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}_n})} - \left\| f - \frac{a_{k_s}}{b_{k_s}} \right\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}_n})} \right| \leq \left\| \frac{a_{k_s}}{b_{k_s}} - g \right\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}_n})} \to 0$$

y la Proposición 13 implica que

$$\begin{aligned} \|f-g\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})} &= \lim_{n\to\infty} \|f-g\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}_n})} \\ &= \lim_{n\to\infty} \lim_{s\to\infty} \left\| f - \frac{a_{k_s}}{b_{k_s}} \right\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}_n})} \leq \lim_{n\to\infty} \lim_{s\to\infty} \left\| f - \frac{a_{k_s}}{b_{k_s}} \right\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}_n})} = \delta. \end{aligned}$$

□

2.4. Resultados sobre convergencia. El objetivo fundamental de esta sección es observar que, aunque la topología de los espacios de Besov es más fuerte que la topología de $\mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$ (la convergencia en $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$ obviamente conlleva la convergencia en $\mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$ ya que la inclusión $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}}) \hookrightarrow \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$ es continua), el estudio de la convergencia en norma para aproximantes clásicos en las nuevas normas $\|\cdot\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})}$ se sigue en gran medida de los resultados clásicos. (La idea clave es que las aproximaciones polinómicas que son near-best en $\mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$ también lo son en $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$). Fijamos nuestra atención sobre la convergencia en norma de las series de Faber, aunque podríamos haber elegido cualquier otra sucesión de aproximantes polinómicos near-best, para obtener resultados análogos.

Con respecto a la convergencia de las series de Faber, se conocen los siguientes resultados: Lesley, Vinge y Warschawski [13] probaron que la desigualdad

$$\|f - \mathcal{F}_n(f)\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} \leq [A(\log n)^2 + B] E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} \tag{8}$$

es válida sobre dominios de Jordan cuasi-suaves. Kovari y Pommerenke [12] demostraron la desigualdad

$$\|f - \mathcal{F}_n(f)\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} \leq A(\log n) E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} \tag{9}$$

para dominios de Jordan frontera de rotación acotada y la desigualdad

$$\|f - \mathcal{F}_n(f)\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} \leq A n^\alpha E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} \tag{10}$$

para cualquier domino de Jordan y ciertas constantes universales A, α. Además, demostraron que se puede tomar $\alpha \in (0.138, 0.5)$.

Dada β una sucesión de números reales positivos (arbitraria), podemos definir los espacios de aproximación generalizados

$$\mathbf{A}_q^\beta(\overline{\mathbf{D}}) = \{f \in \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}}) : \|f\|_{\mathbf{A}_q^\beta(\overline{\mathbf{D}})} := \|f\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} + \|\{b_n E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}}\}_{n=0}^\infty\|_{l_\infty} < \infty\}.$$

Es, además, claro que dichos espacios son Banach (ver [1]). Ahora es fácil demostrar el siguiente

Teorema 15. *Sean $\beta = \{b_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^+$ y $1 < q < \infty$ arbitrariamente elegidos y sea $\mathbf{D}$ un dominio de Jordan acotado. Entonces*

(a) Si $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k<n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} n^{\alpha} E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} = 0$ y $f \in \mathbf{A}_q^{\beta}(\overline{\mathbf{D}})$, entonces $\mathcal{F}_n(f)$ converge a f en la norma de $\mathbf{A}_q^{\beta}(\overline{\mathbf{D}})$

(b) Si $\mathcal{C} = \partial\mathbf{D}$ es de rotación acotada y $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k<n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} (\log n) E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} = 0$, $f \in \mathbf{A}_q^{\beta}(\overline{\mathbf{D}})$, entonces $\mathcal{F}_n(f)$ converge a f en la norma de $\mathbf{A}_q^{\beta}(\overline{\mathbf{D}})$.

(c) Si $\mathcal{C} = \partial\mathbf{D}$ satisface una c-condición y $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k<n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} (\log n)^2 E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} = 0$, $f \in \mathbf{A}_q^{\beta}(\overline{\mathbf{D}})$, entonces $\mathcal{F}_n(f)$ converge a f en la norma de $\mathbf{A}_q^{\beta}(\overline{\mathbf{D}})$.

Demostración. Sólo probamos la primera afirmación (la segunda y la tercera poseen demostraciones análogas). Tenemos que demostrar que $\|f - \mathcal{F}_n(f)\|_{\mathbf{A}_q^{\beta}(\overline{\mathbf{D}})} = \|f - \mathcal{F}_n(f)\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} + \|\{b_k E_k(f - \mathcal{F}_n(f))_{\overline{\mathbf{D}}}\}_{k=0}^{\infty}\|_{l_q}$ converge a cero siempre que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k<n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} (\log n) E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} = 0. \tag{11}$$

Pero $\{c_n = \left(\sum_{k<n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión no decreciente de números reales, de modo que si se satisface (11) entonces $\lim_{n\to\infty} (\log n) E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \|f - \mathcal{F}_n(f)\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} = 0$.

Definamos $\mathcal{A}_n = \{a_k^{(n)}\}$, y $\mathcal{B}_n = \{b_k^{(n)}\}$, donde

$$a_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n, \\ E_k(f)_{\overline{\mathbf{D}}} & \text{si } k \geq n, \end{cases}$$

$$b_k^{(n)} = \begin{cases} E_k(f - \mathcal{F}_n(f))_{\overline{\mathbf{D}}} & \text{si } k < n, \\ 0 & \text{si } k \geq n. \end{cases}$$

Entonces $\|\{b_k E_k(f - \mathcal{F}_n(f))_{\overline{\mathbf{D}}}\}_{k=0}^{\infty}\|_{l_q} = \|\mathcal{A}_n + \mathcal{B} \leq \|\mathcal{A}_n\|_{l_q} + \|\mathcal{B}_n\|_{l_q}$. Es claro que si $f \in \mathbf{A}_q^{\beta}(\overline{\mathbf{D}})$ entonces $\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{A}_n\|_{l_q} = 0$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}_n\|_{l_q} &= \left(\sum_{k<n} b_k^q E_n(f - \mathcal{F}_n(f))_{\overline{\mathbf{D}}}^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{k<n} b_k^q \, \|f - \mathcal{F}_n(f)\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})}^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k<n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} (3 + \log n) E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} \end{aligned}$$

y $\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{B}_n\|_{l_q} = 0$ siempre que se verifique (11). □

Corolario 16. *$\mathcal{F}_n(f)$ converge a f en la norma de $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$ para todo $f \in \mathbf{H}(\overline{\mathbf{D}})$ y para todo dominio de Jordan $\mathbf{D}$.*

Demostración. Para el espacio de Besov $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$ tenemos $b_k = (k+2)^{s-\frac{1}{q}}$. Por tanto

$$\left(\sum_{k<n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k<n} (k+2)^{sq-1}\right)^{\frac{1}{q}} \sim ((n+1)^{sq})^{\frac{1}{q}} = (n+1)^s$$

y

$$\left(\sum_{k<n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} n^{\alpha} \sim (n+1)^s \, E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} n^{\alpha}.$$

Tómese $\gamma > s + \alpha$. Entonces existe una constante $A = A(\gamma) > 0$ tal que $E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} \leq An^{\gamma}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto

$$(n+1)^s E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} n^{\alpha} \leq A \left(\frac{n+1}{n}\right)^s \frac{1}{n^{\gamma - s}} \tag{12}$$

que tiende a cero para $n \to \infty$. □

Corolario 17. *Sea* $\mathbf{D}$ *un dominio de Jordan con borde regular de clase al menos* $C^{(2)}$*. Entonces para todo* $\varepsilon > 0$ *y para todo* $f \in \mathbf{Lip}(s+\varepsilon, \overline{\mathbf{D}})$*,* $\mathcal{F}_n(f)$ *converge a* f *en la norma de* $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$*.*

Demostración. Si $f \in \mathbf{Lip}(s+\varepsilon, \overline{\mathbf{D}})$ y $\mathbf{D}$ es un dominio de Jordan con borde regular de clase al menos $C^{(2)}$, entonces $E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} \leq An^{s+\varepsilon}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, $\mathbf{D}$ posee un borde de rotación acotada ya que es regular. Por tanto se satisface la fórmula (9). El Corolario se sigue puesto que podemos cambiar el factor n^{α} por $\log n$ y la constante γ por $s + \varepsilon$ en (12). □

Agradecimientos

El Prof. J. J. Guadalupe facilitó gran parte de la bibliografía utilizada. En particular, los artículos [4], [7], [8], [10], [11], [12], [15] sobre series de Faber (algunos de los cuales son de difícil acceso), y el libro [16]. Este trabajo está dedicado a su memoria.

Referencias

[1] J. M. Almira, *Teoría de aproximación en espacios de aproximación*, Tesis Doctoral, Univ. de La Laguna, 1999.

[2] V. I. Belyi, Conformal Mappings and approximation of analytic functions in domains with quasiconformal boundary, *Mat. Sb. (N.S.)* **102(144)** (1977), 331–361. Traducción al inglés: *Math. USSR-Sb.* **31** (1977), 289–317.

[3] C. A. Berenstein y R. Gay, *Complex variables*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics **125**, 1991.

[4] J. H. Curtiss, Faber polynomials and the Faber series, *Amer. Math. Monthly* **78** (1971), 577–596.

[5] R. A. DeVore y G. G. Lorentz, *Constructive approximation*, Springer-Verlag, 1993.

[6] V. K. Dzjadyck, On the theory of approximation of functions on closed sets of the complex plane (apropos of a certain problem of S. M. Nikolskii), *Ukrainian Math. J.* **24** (1972), 1–13.

[7] G. Faber, Über polynomische Entwiclungen, *Math. Ann.* **57** (1903), 398–408.

[8] G. Faber, Über Tschebysheffche Polynome, *J. Reine Angew. Math.* **150** (1920), 79–106.

[9] D. Gaier, *Lectures on complex approximation*, Birkhäuser, 1987.

[10] D. S. Jerison y C. E. Kening, Hardy spaces, A_{∞} and singular integrals on chord-arc domains, *Math. Scand.* **50** (1982), 221–247.

[11] T. Kovary, On the order of polynomial approximation for closed Jordan domains, *J. Approx. Theory* **5** (1972), 362–373.

[12] T. Kovary y Ch. Pommerenke, On Faber polynomials and Faber expansions, *Math. Zeitschr.* **99** (1967), 193–206.

[13] F. D. Lesley, V. S. Vinge y S. E. Warschawski, Approximation by Faber polynomials for a class of Jordan domains, *Math. Zeitschr.* **138** (1974), 225–237.

[14] A. Pietsch, Approximation spaces, *J. Approx. Theory* **32** (1981), 115–134.

[15] Ch. Pommerenke, Boundary behavior of Conformal Mappings, en *Aspects of contemporary complex analysis* (Proc. NATO Adv. Study Inst., Durham 1979, D. A Brannan y J. G. Clunie, eds.), Academic Press (1980), 313–331.

[16] Ch. Pommerenke, *Boundary behavior of conformal maps*, Springer-Verlag, 1991.

[17] H. Renelt, *Elliptic systems and quasiconformal mappings*, Pure and Applied Mathematics, John-Wiley and Sons, 1988.

[18] T. J. Rivlin, Best approximation by polynomials in the complex plane, en *Approximation Theory III* (Proc. Conf., Univ. Texas, Austin 1980, E. W. Cheney, ed.), Academic Press (1980), 75–86.

[19] P. K. Suetin, *Series of Faber polynomials*, Analytical Methods and Special Functions **1**, Gordon and Breach, 1998.

[20] P. M. Tamrazov, A solid inverse problem of polynomial approximation of functions on a regular compactum, *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.* **37** (1973), 148–164. Traducción al inglés: *Math. USSR-Izv.* **7** (1973), 145–162.

[21] A. F. Timan, *Theory of approximation of functions of a real variable*, Dover, 1994.

[22] M. Zinsmeister, *Domaines de Lavrentiev*, Publications Mathématiques d'Orsay **85-3**, Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 1985.

Departamento de Matemáticas, E.U.P. de Linares, Universidad de Jaén, C/ Alfonso X el Sabio 28, 23700 Linares (Jaén), Spain
Correo electrónico: `jmalmira@ujaen.es, ndeltoro@ujaen.es`

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad de La Laguna, C/ Astrofísico Fco. Sánchez s/n, 38206 La Laguna (Tenerife), Spain
Correo electrónico: `fcoperez@ull.es`