MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

ECUACIONES INTEGRALES DOBLES CON FUNCIONES DE BESSEL DE DISTINTO ORDEN

ÓSCAR CIAURRI Y JUAN L. VARONA

Chicho, te echamos de menos

Abstract. We study dual integral equations associated with Hankel transforms of different order, that is, dual integral equations of Titchmarsh's type with Bessel functions of different order. We reformulate these equations giving a better description in terms of continuous operators on L^p spaces, and we solve them in these spaces. The solution is given as a series $\sum_{k=0}^{\infty} a_k J_{\mu+2k+1}$ which converges in the L^p-norm, where J_ν denotes the Bessel function of order ν.

1. Introducción

En algunas aplicaciones relacionadas con el potencial, el electromagnetismo o la teoría de la radiación acústica aparecen ciertas ecuaciones integrales en las que la función incógnita satisface una condición sobre una parte del intervalo $(0,\infty)$ y otra diferente sobre el resto. Este tipo de ecuaciones son conocidas como ecuaciones integrales dobles. Un caso importante son las denominadas ecuaciones integrales dobles de tipo Titchmarsh:

$$(1)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty t^\beta f(t) J_\alpha(xt)\,dt = g(x), & \text{si } 0<x<1,\\ \displaystyle\int_0^\infty f(t) J_\eta(xt)\,dt = 0, & \text{si } x>1, \end{cases}$$

donde J_α y J_η denotan las funciones de Bessel de orden α y η, g es una función dada y f es la función incógnita.

Estas ecuaciones son más conocidas en el caso $\alpha=\eta$. Existen diversos métodos para resolverlas, pero la mayoría de ellos son formales. Por ejemplo, podemos encontrar su solución utilizando transformadas de Mellin o algún otro tipo de transformadas integrales. También podemos reducirlas a ecuaciones integrales de tipo Fredholm. Habitualmente, estos métodos nos permiten obtener la función f mediante una expresión integral; pueden verse en [17, pág. 337], [15, § 12, pág. 65], [7, § 5.11] y [4, pág. 76]. Otro procedimiento consiste en utilizar series de la forma $\sum_{k=0}^{\infty} a_k J_{\mu+2k+1}$; véase a este respecto [19] y [20], el primero de ellos con una amplia

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 45F10; Secondary 42C10.
Key words and phrases. Dual integral equations, Bessel functions, Fourier series, Hankel transform.
La investigación de ambos autores está subvencionada por el proyecto BFM2000-0206-C04-03 de la DGI y la ayuda API-01/B38 de la UR.

bibliografía, pero el estudio que se realiza en ambos trabajos es puramente formal. Por esta razón, y siguiendo con el caso $\alpha = \eta$, los autores, junto a J. J. Guadalupe (Chicho) y M. Pérez, nos planteamos rigorizar el uso de estas series en la resolución de las ecuaciones integrales dobles de tipo Titchmarsh (véase [2]). Aquí continuamos con este objetivo en un contexto más general, sin exigir $\alpha = \eta$.

Esta generalización también ha sido analizada por algunos autores. Por ejemplo, la utilización de operadores de Erdélyi-Köber conduce a una expresión integral para la función f solución de (1). A este respecto, véanse [12], [10, § 2.1.7] y [5, § 9.7]; pero el estudio que se hace en ellos es, de nuevo, formal (lo cual es, además, reconocido explícitamente). Podemos consultar otros métodos, así como problemas relacionados, y abundantes referencias, en [10, Cap. 2] y [5, Cap. 9]. A ese respecto, destacaremos únicamente que en [5, § 9.8] se efectúa un estudio riguroso de existencia y unicidad de solución de una ecuación análoga a (1) en espacios de distribuciones.

Pero volvamos a nuestro objetivo de resolver (1) sin exigir $\alpha = \eta$. Procediendo como en [2], reformularemos la ecuación (1) para obtener una descripción de la misma en términos de operadores definidos sobre ciertos espacios L^p. En estos espacios, resolveremos la ecuación reformulada, identificando la solución como una serie de funciones de Bessel convergente en L^p. Por otra parte, el método usado aquí para encontrar la solución es algo más sencillo que el de [2]. Esta diferencia radica en que, ahora, la solución se busca en el espacio L^p con peso $x^{\alpha+\beta}$ (en [2], el peso era x^α); esto nos permite aplicar (7) y, como consecuencia, se utilizan menos operadores para comprobar la convergencia de las series que aparecen.

Es de destacar que la solución que se obtiene (Teorema 4.1) no depende de η. Más que el hecho en sí, lo que sorprende a los autores es que esto no ha sido observado en ninguno de los trabajos previos (antes citados) que han analizado este tipo de ecuaciones. Y más, teniendo en cuenta que eran métodos formales.

Este artículo está organizado del siguiente modo: En la Sección 2 reescribiremos la ecuación integral doble de una manera más conveniente, y analizaremos el comportamiento de algunos operadores relacionados con ella. La Sección 3 describe algunas propiedades de interés de las funciones de Bessel y los polinomios de Jacobi, así como de las correspondientes series de Fourier que generan. Por último, en la Sección 4 presentamos una solución de la ecuación integral doble.

A lo largo de estas páginas utilizaremos C para denotar una constante independiente de f, y de posibles variables involucradas, que puede asumir distintos valores en diferentes situaciones.

Dada una función g definida sobre $[0,1]$, la extensión dada por $g(x) = 0$ para cada $x > 1$ la denotaremos, con un pequeño abuso de notación, $\chi_{[0,1]}g$. Así, de manera indistinta, $\chi_{[0,1]}$ será tanto la función característica del intervalo $[0,1]$ como un operador que extiende funciones definidas en $[0,1]$ a funciones sobre $[0,\infty)$.

2. La ecuación doble

Definimos, para $\mu > -1$, la transformada de Hankel de orden μ, $\mathcal{H}_\mu$, como el operador integral que a cada función adecuada f le asocia

$$\mathcal{H}_\mu(f,x) = \frac{x^{-\mu/2}}{2}\int_0^\infty f(t)J_\mu(\sqrt{xt})t^{\mu/2}\,dt, \quad x > 0.$$

El operador $\mathcal{H}_\mu$ es un isomorfismo de la clase de Schwartz

$$S^+ = \{f \in C^\infty((0,\infty)) : \forall k, j \geq 0,\ |t^k f^{(j)}(t)| < C_{k,j}\}$$

en sí mismo. Además, sobre este espacio, $\mathcal{H}_\mu^2$ es el operador identidad. Y, por otra parte, S^+ es denso en cada $L^p([0,\infty), x^\mu\,dx)$, $1 < p < \infty$. La transformada de Hankel puede extenderse a un operador acotado de $L^p([0,\infty), x^\mu\,dx)$ en $L^{p'}([0,\infty), x^\mu\,dx)$, con $\mu \geq -1/2$, $1 \leq p \leq 2$ y $1/p + 1/p' = 1$; es decir

$$\|\mathcal{H}_\mu f\|_{L^{p'}([0,\infty),x^\mu\,dx)} \leq C\|f\|_{L^p([0,\infty),x^\mu\,dx)}, \quad f \in L^p([0,\infty), x^\mu\,dx)$$

(véanse [3] y [16]).

Denotaremos por M_μ el multiplicador de la transformada de Hankel asociado con $\chi_{[0,1]}$; esto es, el operador dado por $\mathcal{H}_\mu(M_\mu f) = \chi_{[0,1]}\mathcal{H}_\mu$. Sobre el espacio S^+, dicha definición es equivalente a

$$M_\mu f = \mathcal{H}_\mu(\chi_{[0,1]}\mathcal{H}_\mu f).$$

De esta forma (y teniendo en cuenta que $\mathcal{H}_\mu^2 = \mathrm{Id}$), una manera alternativa de expresar que $\mathcal{H}_\mu f$ está soportada en $[0,1]$ es decir que $M_\mu f = f$.

Haciendo uso de estos operadores reformularemos la ecuación integral doble. En primer lugar, con un simple cambio de notación podemos escribir (1) como

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{x^{-\alpha/2}}{2}\displaystyle\int_0^\infty t^\beta f(t)J_\alpha(\sqrt{xt})t^{\alpha/2}\,dt = g(x), & \text{si } 0 < x < 1, \\ \dfrac{x^{-\eta/2}}{2}\displaystyle\int_0^\infty f(t)J_\eta(\sqrt{xt})t^{\eta/2}\,dt = 0, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

La segunda ecuación en (2) nos está diciendo que $\mathrm{sop}(\mathcal{H}_\eta f) \subseteq [0,1]$; en otras palabras, $M_\eta f = f$, siempre que el operador M_η esté bien definido para la función f.

La primera ecuación en (2) puede entenderse como

$$\mathcal{H}_\alpha(t^\beta f)\chi_{[0,1]} = \chi_{[0,1]}g.$$

Usando que, bajo ciertas circunstancias, $\mathcal{H}_\alpha$ es un operador inversible, se obtiene la ecuación

$$M_\alpha(t^\beta f, x) = \mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]}g, x).$$

Por conveniencia multiplicaremos ambos lados por el factor $x^{-\beta}$, para tener

$$x^{-\beta}M_\alpha(t^\beta f, x) = x^{-\beta}\mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]}g, x).$$

Reuniendo lo anterior, nuestro interés se centrará en resolver, sobre los espacios $L^p([0,\infty), x^{\alpha+\beta}\,dx)$, con $\alpha + \beta > -1$, la que denominaremos ecuación doble;

$$(3) \qquad \begin{cases} x^{-\beta}M_\alpha(t^\beta f, x) = x^{-\beta}\mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]}g, x), \\ M_\eta(f,x) = f(x), \end{cases}$$

con $g \in L^p([0,1], x^\nu\, dx)$.

En los espacios $L^p([0,\infty), x^{\alpha+\beta}\, dx)$ será posible construir una solución en forma de serie de funciones de Bessel utilizando (7). De este modo no necesitaremos usar los operadores que construimos en [2].

En un sentido estricto, (2) y (3) no son exactamente equivalentes si no exigimos que las funciones pertenezcan a un espacio L^p conveniente. Sin embargo, es interesante notar que, para cualquier aplicación física práctica, la interpretación de una ecuación integral doble y su solución como en (2) es equivalente a su interpretación como en (3).

Finalmente, considerando los operadores $M_{\alpha,\beta}$ y $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$, dados por

$$\begin{aligned} M_{\alpha,\beta}(f,x) &= x^{-\beta} M_\alpha(t^\beta f, x), \\ \mathcal{H}_{\alpha,\beta}(g,x) &= x^{-\beta}\mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]} g, x), \end{aligned}$$

podemos reescribir la ecuación (3) como

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{\alpha,\beta} f = \mathcal{H}_{\alpha,\beta} g, \\ M_\eta f = f. \end{array} \right. \tag{4}$$

Estos operadores están bien definidos, por ejemplo, si $f \in S^+$ y $g \in C^\infty([0,1])$. Veremos ahora que $M_{\alpha,\beta}$ y M_η son acotados en la norma de $L^p([0,\infty), x^{\alpha+\beta}\, dx)$, bajo ciertas condiciones sobre α, β, η y p. Como es usual, este hecho nos permite extenderlos como operadores acotados a todo el espacio $L^p([0,\infty), x^{\alpha+\beta}\, dx)$. Más adelante, y de manera similar, extenderemos $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ como un operador acotado de $L^p([0,1], x^\nu\, dx)$ en $L^p([0,\infty), x^{\alpha+\beta}\, dx)$.

Proposición 2.1. *Sea $\alpha, \eta \geq -1/2$, $\alpha+\beta > -1$ y $1 < p < \infty$. Entonces,*

$$\|M_{\alpha,\beta} f\|_{L^p([0,\infty),x^{\alpha+\beta}\,dx)} \leq C \|f\|_{L^p([0,\infty),x^{\alpha+\beta}\,dx)} \iff \left| \frac{\alpha+\beta+1}{p} - \frac{\alpha+1}{2} - \beta \right| < \frac{1}{4}$$

y

$$\|M_\eta f\|_{L^p([0,\infty),x^{\alpha+\beta}\,dx)} \leq C \|f\|_{L^p([0,\infty),x^{\alpha+\beta}\,dx)} \iff \left| \frac{\alpha+\beta+1}{p} - \frac{\eta+1}{2} \right| < \frac{1}{4}.$$

Demostración. Ambas equivalencias son casos particulares de la más general

$$\|M_\mu f\|_{L^p([0,\infty),x^{\lambda}\,dx)} \leq C \|f\|_{L^p([0,\infty),x^{\lambda}\,dx)} \iff \left| \frac{\lambda+1}{p} - \frac{\mu+1}{2} \right| < \frac{1}{4},$$

válida para $\mu \geq -1/2$ y $\lambda > -1$. En realidad se trata de una versión con pesos radiales del resultado de Herz (véase [8]) relativo a la acotación de M_μ.

Veamos un esquema de la demostración. Para una función $f \in S^+$, aplicando el teorema de Fubini a $M_\mu f = \mathcal{H}_\mu(\chi_{[0,1]}\mathcal{H}_\mu f)$, y usando la fórmula de von Lommel

$$\int_0^1 J_\mu(yx) J_\mu(yt) y\, dy = \frac{1}{x^2-t^2}(x J_{\mu+1}(x) J_\mu(t) - t J_\mu(x) J_{\mu+1}(t)),$$

obtenemos

$$\begin{aligned} M_\mu(f,x) &= \tfrac{1}{2}x^{-\mu/2+1/2}J_{\mu+1}(x^{1/2})H(t^{\mu/2}J_\mu(t^{1/2})f(t),x) \\ &\quad - \tfrac{1}{2}x^{-\mu/2}J_\mu(x^{1/2})H(t^{\mu/2+1/2}J_{\mu+1}(t^{1/2})f(t),x) \\ &= W_1(f,x) - W_2(f,x), \end{aligned}$$

donde H denota la transformada de Hilbert $H(f,x) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{x-t}\,dt$. Ahora, teniendo en cuenta que, para $p \in (1,\infty)$,

$$\|Hf\|_{L^p([0,\infty),x^\tau\,dx)} \le C\|f\|_{L^p([0,\infty),x^\tau\,dx)} \iff -1 < \tau < p-1$$

y la estimación $|J_\mu(x)| \le Cx^{-1/2}$, que se verifica para $\mu \ge -1/2$, tendremos que

$$-\frac{3}{4} < \frac{\lambda+1}{p} - \frac{\mu+1}{2} < \frac{1}{4} \implies \|W_1 f\|_{L^p([0,\infty),x^\lambda\,dx)} \le C\|f\|_{L^p([0,\infty),x^\lambda\,dx)},$$
$$-\frac{1}{4} < \frac{\lambda+1}{p} - \frac{\mu+1}{2} < \frac{3}{4} \implies \|W_2 f\|_{L^p([0,\infty),x^\lambda\,dx)} \le C\|f\|_{L^p([0,\infty),x^\lambda\,dx)}.$$

Por lo tanto, si $\left|\frac{\lambda+1}{p} - \frac{\mu+1}{2}\right| < \frac{1}{4}$, el operador $M_\mu f$ es acotado en $L^p([0,\infty),x^\lambda\,dx)$.

Veamos ahora el recíproco. Como consecuencia de los resultados clásicos de interpolación, para probar que $\left|\frac{\lambda+1}{p} - \frac{\mu+1}{2}\right| < \frac{1}{4}$ es una condición necesaria bastará ver que no hay acotación de M_μ para los valores de p tales que $\left|\frac{\lambda+1}{p} - \frac{\mu+1}{2}\right| = \frac{1}{4}$. Sea p_1 tal que $\frac{\lambda+1}{p_1} - \frac{\mu+1}{2} = \frac{1}{4}$. Si $p_1 < 1$, no hay nada que probar, pues una de las hipótesis es $1 < p < \infty$; en otro caso, es claro que, para este valor de p, el operador W_2 es acotado. Sin embargo, usando estimaciones apropiadas cerca de infinito para las funciones de Bessel, y con una elección adecuada de f, se prueba que W_1 no es acotado para $p = p_1$. El caso en el que $\frac{\lambda+1}{p} - \frac{\mu+1}{2} = -\frac{1}{4}$ es análogo. □

Procederemos ahora a extender $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ a un operador acotado de $L^p([0,1],x^\nu\,dx)$ en $L^p([0,\infty),x^{\alpha+\beta}\,dx)$. A fin de obtener la acotación correspondiente haremos uso del siguiente resultado relativo a la transformada de Hankel debido a Rooney ([9] y [14], con un cambio de variable):

Teorema 2.2 (Rooney). *Sean $\alpha > -1$, $1 < r \le s < \infty$ y*

$$\max\left\{\frac{1}{r}, 1-\frac{1}{s}\right\} \le \omega < \alpha + \tfrac{3}{2}.$$

Entonces,

$$\left(\int_0^\infty |x^{-\omega/2+\alpha/2+3/4}\mathcal{H}_\alpha(h,x)|^s\,\frac{dx}{x}\right)^{1/s} \le C\left(\int_0^\infty |x^{\omega/2+\alpha/2+1/4}h(x)|^r\,\frac{dx}{x}\right)^{1/r}.$$

En la siguiente proposición obtenemos la acotación que usaremos para $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$:

Proposición 2.3. *Sea $\alpha > -1$ y $1 < p < \infty$ verificando*

$$\max\left\{(2\alpha+2\beta+1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right), (2\alpha+2\beta+3)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)\right\} \le \beta < \frac{\alpha+\beta+1}{p}$$

y

$$\frac{\alpha+\beta+\nu+2}{p} \le \alpha+\beta+1. \tag{5}$$

Entonces,

$$\|\mathcal{H}_{\alpha,\beta} g\|_{L^p([0,\infty),x^{\alpha+\beta}\,dx)} \le C\|g\|_{L^p([0,1],x^\nu\,dx)}.$$

Demostración. Tomando $\omega = 2\beta+\alpha+\frac{3}{2}-\frac{2(\alpha+\beta+1)}{p}$ tendremos

$$\begin{aligned}\|\mathcal{H}_{\alpha,\beta} g\|_{L^p([0,\infty),x^{\alpha+\beta}\,dx)} &= \|x^{-\beta+(\alpha+\beta+1)/p}\mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]}g)\|_{L^p([0,\infty),\frac{dx}{x})} \\ &= \|x^{-\omega/2+\alpha/2+3/4}\mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]}g)\|_{L^p([0,\infty),\frac{dx}{x})}.\end{aligned}$$

Elijamos ahora $r = s = p$ en el Teorema 2.2, y observemos que (respectivamente, referido a las desigualdades)

$$\begin{aligned}\max\left\{(2\alpha+2\beta+1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right),(2\alpha+2\beta+3)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)\right\} \le \beta < \frac{\alpha+\beta+1}{p} \\ \iff \max\left\{1-\frac{1}{p},\frac{1}{p}\right\} \le \omega < \alpha+\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Así, podemos concluir

$$\begin{aligned}\|\mathcal{H}_{\alpha,\beta} g\|_{L^p([0,\infty),x^\alpha\,dx)} &\le C\|x^{\omega/2+\alpha/2+1/4}\chi_{[0,1]}g\|_{L^p([0,\infty),\frac{dx}{x})} \\ &= C\|x^{\beta+\alpha+1-(\alpha+\beta+\nu+2)/p}\chi_{[0,1]}g\|_{L^p([0,\infty),x^\nu\,dx)} \\ &\le C\|g\|_{L^p([0,1],x^\nu\,dx)},\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de $\beta+\alpha+1-(\alpha+\beta+\nu+2)/p \ge 0$, es decir, (5). □

Con esto, la ecuación doble (4) es un problema bien propuesto en el siguiente sentido: dada $g \in L^p([0,1],x^\nu\,dx)$, ¿existe alguna solución $f \in L^p([0,\infty),x^{\alpha+\beta}\,dx)$?

3. Funciones de Bessel y polinomios de Jacobi

Funciones de Bessel y series de Fourier-Neumann. Para $\mu > -1$, la expresión

$$\int_0^\infty J_{\mu+2n+1}(x)J_{\mu+2m+1}(x)\,\frac{dx}{x} = \frac{\delta_{n,m}}{2(\mu+2n+1)}, \quad n,m = 0,1,2,\dots$$

(véase [22, Cap. XIII, págs. 404 y 405] o [13, Cap. X, pág. 162]) da lugar a un sistema ortonormal, $\{j_n^\mu\}_{n\ge0}$, en $L^2([0,\infty),x^\mu\,dx)$, constituido por las funciones

$$j_n^\mu(x) = \sqrt{\mu+2n+1}\,J_{\mu+2n+1}(\sqrt{x})\,x^{-\mu/2-1/2}. \tag{6}$$

Para funciones adecuadas f definidas en $[0,\infty)$, su serie de Fourier con respecto a $\{j_n^\mu\}_{n\ge0}$ es el desarrollo

$$f \sim \sum_{k=0}^\infty a_k(f)j_k^\mu, \qquad a_k(f) = \int_0^\infty f(t)j_k^\mu(t)t^\mu\,dt.$$

Estas series son un caso particular de las del tipo $\sum_{k\ge0} a_k J_{\mu+k}$, que habitualmente son conocidas como series de Neumann; así, nos referiremos a ellas como series de

Fourier-Neumann. Tomaremos el operador suma parcial n-ésima, $S_n f$, de la serie de Fourier-Neumann como

$$S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(f) j_k^{\mu}(x).$$

En [21], uno de los autores realiza el estudio de la convergencia en $L^p([0,\infty), x^\mu\,dx)$ de las series de Fourier-Neumann. En concreto, prueba que, si $\mu \geq -1/2$ y p satisface

$$\text{máx}\left\{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|, (\mu+1)\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|\right\} < \frac{1}{4},$$

entonces

$$S_n f \to f, \text{ en } L^p([0,\infty), x^\mu\,dx), \ \forall f \in B_{p,\mu},$$

donde

$$B_{p,\mu} = \overline{\operatorname{span}\{j_n^{\mu}\}},$$

con la clausura en $L^p([0,\infty), x^\mu\,dx)$. Además, para ese rango de p, se identifica $B_{p,\mu} = E_{p,\mu}$, siendo

$$E_{p,\mu} = \{f \in L^p([0,\infty), x^\mu\,dx) : M_\mu f = f\} = M_\mu(L^p([0,\infty), x^\mu\,dx)).$$

En [1], y bajo las hipótesis anteriores sobre μ y p, se prueba que la serie de Fourier-Neumann es convergente para cada función $f \in L^p([0,\infty), x^\mu\,dx)$. Lo que ocurre es que, si $f \notin E_{p,\mu}$, la serie converge hacia $M_\mu f$ (para ello, basta observar que $M_\mu f \in E_{p,\mu}$ y que $a_k(f) = a_k(M_\mu f)$, lo cual es fácil de comprobar utilizando el teorema de Fubini). En concreto, se tiene que

$$S_n f \to M_\mu f, \text{ en } L^p([0,\infty), x^\mu\,dx), \quad \forall f \in L^p([0,\infty), x^\mu\,dx). \tag{7}$$

Este resultado es fundamental en el análisis que aquí se efectúa. Nos permite encontrar la solución de la ecuación integral doble de una manera más sencilla que en [2], sin tener que estudiar la acotación de varios de los operadores que allí aparecen.

Polinomios de Jacobi y series de Fourier-Jacobi. Dados $\alpha, \beta > -1$, los polinomios de Jacobi $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n\geq 0}$ de orden α, β (ver [4, Cap. X] y [18, Cap. VI]) forman un sistema ortonormal en el intervalo $[-1,1]$ con respecto al peso $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Un simple cambio de variable nos permite ver que el sistema $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x)\}_{n\geq 0}$ es ortogonal en $[0,1]$ respecto al peso $x^\alpha(1-x)^\beta$. De un modo más preciso, se verifica que

$$\int_0^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x) P_m^{(\alpha,\beta)}(1-2x) x^\alpha (1-x)^\beta\,dx = h_n^{(\alpha,\beta)} \delta_{n,m}, \quad n,m = 0,1,2\dots,$$

donde

$$h_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)\,n!}.$$

De este modo, considerando

$$p_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (h_n^{(\alpha,\beta)})^{-1/2} P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x), \quad n = 0,1,2,\dots \tag{8}$$

tendremos un sistema ortonormal en $[0,1]$ con respecto al peso $x^\alpha(1-x)^\beta$. Para una función apropiada g, definida en $[0,1]$, su serie de Fourier, que denominaremos serie de Fourier-Jacobi, es el desarrollo

$$g \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k(g) p_k^{(\alpha,\beta)}, \qquad b_k(g) = \int_0^1 g(t) p_k^{(\alpha,\beta)}(t) t^\alpha (1-t)^\beta \, dt.$$

Llamaremos $s_n g$ al operador suma parcial n-ésima con respecto al sistema ortonormal $\{p_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n\geq 0}$; es decir,

$$s_n(g,x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(g) p_k^{(\alpha,\beta)}(x).$$

La convergencia en media para las series de Fourier-Jacobi ha sido ampliamente tratada en la literatura matemática (véanse, por ejemplo, [6] y [11]). El siguiente resultado de Muckenhoupt da condiciones necesarias y suficientes para la acotación uniforme del operador $S_n g$ con un cierto tipo de pesos y, como consecuencia, sobre la convergencia en media.

Teorema 3.1 (Muckenhoupt)**.** *Sean $\alpha, \beta > -1$, $1 < p < \infty$ y $w(x) = x^a(1-x)^b$. Entonces, existe una constante C tal que*

$$\|s_n g\|_{L^p([0,1], w^p(x) x^\alpha (1-x)^\beta \, dx)} \leq C \|g\|_{L^p([0,1], w^p(x) x^\alpha (1-x)^\beta \, dx)}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

si y sólo si

$$\left| (\alpha+1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) + a \right| < \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{\alpha+1}{2}\right\},$$
$$\left| (\beta+1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) + b \right| < \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{\beta+1}{2}\right\}.$$

Además, en estas condiciones $S_n g \to g$ en $L^p([0,1], w^p(x) x^\alpha (1-x)^\beta \, dx)$ para cualquier función $g \in L^p([0,1], w^p(x) x^\alpha (1-x)^\beta \, dx)$.

Relación entre polinomios de Jacobi y funciones de Bessel. Existe una estrecha relación, vía la transformada de Hankel, entre los polinomios de Jacobi y las funciones de Bessel. El siguiente lema, que será fundamental en nuestra argumentación, muestra dicha vinculación:

Lema 3.2. *Sean $\alpha, \beta > -1$ y $\alpha + \beta > -1$. Entonces*

$$\mathcal{H}_\alpha(j_n^{\alpha+\beta}(t), x) = 2^{-\beta} \frac{\sqrt{\alpha+\beta+2n+1}\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(\beta+n+1)} (1-x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x) \chi_{[0,1]}(x). \tag{9}$$

Si, además, asumimos $\beta < 1$, tenemos

$$\chi_{[0,1]} \mathcal{H}_\alpha(j_n^{\alpha+\beta}(t) t^\beta, x) = 2^\beta \frac{\sqrt{\alpha+\beta+2n+1}\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)} P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x) \chi_{[0,1]}. \tag{10}$$

La comprobación de (9) puede verse en [1] y la de (10) en [2]. Nótese que (9) nos permite asegurar que $\operatorname{sop}(\mathcal{H}_\alpha(j_n^{\alpha+\beta})) \subseteq [0,1]$. Sin embargo, (10) únicamente nos da el valor de la transformada de Hankel de $t^\beta j_n^{\alpha+\beta}$ en $[0,1]$; fuera de dicho intervalo no dice nada.

El lema anterior nos va a proporcionar la clave para resolver la ecuación doble, por ello lo reescribiremos en términos de los operadores $M_{\alpha,\beta}, \mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ y M_η. Teniendo en cuenta que $\mathcal{H}_\eta j_n^{\alpha+\beta} = \mathcal{H}_\eta j_n^{\eta+\alpha+\beta-\eta}$ y usando (9) podemos deducir que $\mathcal{H}_\eta j_n^{\alpha+\beta}$ está soportada en $[0,1]$, si $\eta, \alpha+\beta, \alpha+\beta-\eta > -1$. Así es claro que, cuando M_η esté bien definido,

$$M_\eta(j_n^{\alpha+\beta}) = j_n^{\alpha+\beta}. \tag{11}$$

Por otra parte, aplicando (8) y (10) tenemos

$$\begin{aligned} M_{\alpha,\beta}(j_n^{\alpha+\beta}) &= x^{-\beta} M_\alpha(t^\beta j_n^{\alpha+\beta}) = x^{-\beta}\mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]}\mathcal{H}_\alpha(t^\beta j_n^{\alpha+\beta})) \\ &= x^{-\beta}\mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]} d_n p_n^{(\alpha,\beta)}) = d_n \mathcal{H}_{\alpha,\beta} p_n^{(\alpha,\beta)} \end{aligned} \tag{12}$$

con

$$d_n = 2^\beta \, \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)^{1/2}\,\Gamma(\beta+n+1)^{1/2}}{\Gamma(\alpha+n+1)^{1/2}\,(n!)^{1/2}}.$$

De (11) y (12) se deduce que, si tomamos el dato $g = d_n p_n^{(\alpha,\beta)}$, una solución de la ecuación doble es $f = j_n^{\alpha+\beta}$. Este hecho nos induce a pensar que, si el dato es una función g desarrollable como serie de Fourier-Jacobi, la solución f se podrá expresar como serie de Fourier-Neumann, con sus coeficientes elegidos de manera adecuada a partir de los del desarrollo de g.

4. La solución de la ecuación doble

Teorema 4.1. *Sean $-1 < \beta < 1$, $\alpha, \eta, \alpha+\beta \geq -1/2$, $\alpha+\beta-\eta > -1$ y $1 < p < \infty$ verificando*

$$\begin{aligned} \max\Big\{ \left|\tfrac{\nu+1}{p} - \tfrac{\alpha+1}{2}\right|, \left|\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{2}\right|, (\alpha+\beta+1)\left|\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{2}\right|, \\ \left|\tfrac{\alpha+\beta+1}{p} - \tfrac{\alpha+1}{2} - \beta\right|, \left|\tfrac{\alpha+\beta+1}{p} - \tfrac{\eta+1}{2}\right| \Big\} < \tfrac{1}{4}, \end{aligned}$$

$$\left|\tfrac{1}{p} - \tfrac{\beta+1}{2}\right| < \min\left\{\tfrac{1}{4}, \tfrac{\beta+1}{2}\right\}, \qquad \tfrac{\alpha+\beta+\nu+2}{p} \leq \alpha+\beta+1$$

y

$$\max\left\{(2\alpha+2\beta+1)\left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{2}\right), (2\alpha+2\beta+3)\left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{2}\right)\right\} \leq \beta < \tfrac{\alpha+\beta+1}{p}.$$

Entonces, para cada $g \in L^p([0,1], x^\nu\,dx)$, la función

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\mathcal{H}_{\alpha,\beta} g) j_k^{\alpha+\beta} = M_{\alpha+\beta}(\mathcal{H}_{\alpha,\beta} g)$$

es una solución en $L^p([0,\infty), x^{\alpha+\beta}\,dx)$ de la ecuación doble

$$\begin{cases} M_{\alpha,\beta} f = \mathcal{H}_{\alpha,\beta} g, \\ M_\eta f = f. \end{cases}$$

Demostración. En nuestras hipótesis se tiene que $M_{\alpha,\beta}$ y M_η son operadores acotados de $L^p([0,\infty), x^{\alpha+\beta}\,dx)$ en sí mismo y que $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ es un operador acotado del espacio $L^p([0,1], x^\nu\,dx)$ en $L^p([0,\infty), x^{\alpha+\beta}\,dx)$. Además, podemos asegurar que

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\mathcal{H}_{\alpha,\beta} g) j_k^{\alpha+\beta}, \quad a_k(\mathcal{H}_{\alpha,\beta} g) = \int_0^\infty \mathcal{H}_{\alpha,\beta}(g,t) j_k^{\alpha+\beta}(t) t^{\alpha+\beta}\,dt,$$

es una función en $L^p([0,\infty), x^{\alpha+\beta}\,dx)$. De hecho, a partir de (7) (con $\mu = \alpha+\beta$), se tiene que

$$f = M_{\alpha+\beta}(\mathcal{H}_{\alpha,\beta} g).$$

Verifiquemos en primer lugar que f cumple la segunda condición de la ecuación doble. Usando (11) llegamos a

$$\begin{aligned} M_\eta f &= \lim_{n\to\infty} M_\eta \left(\sum_{k=0}^{n} a_k(\mathcal{H}_{\alpha,\beta} g) j_k^{\alpha+\beta} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k(\mathcal{H}_{\alpha,\beta} g) j_k^{\alpha+\beta} = M_{\alpha+\beta}(\mathcal{H}_{\alpha,\beta} g) = f. \end{aligned}$$

Antes de ver que f cumple la primera condición de la ecuación doble comprobaremos que la función g es desarrollable en serie de Fourier-Jacobi. Por el Teorema 3.1 (tomando $a = (\nu-\alpha)/p$ y $b = -\beta/p$) sabemos

$$s_n g = \sum_{k=0}^{n} b_k(g) p_k^{(\alpha,\beta)} \to g, \quad \text{en } L^p([0,1], x^\nu\,dx), \ \forall g \in L^p([0,1], x^\nu\,dx)$$

$$\iff \begin{cases} \left| \frac{\nu+1}{p} - \frac{\alpha+1}{2} \right| < \frac{1}{4}, \\ \left| \frac{1}{p} - \frac{\beta+1}{2} \right| < \min\left\{ \frac{1}{4}, \frac{\beta+1}{2} \right\}, \end{cases}$$

y éstas son dos de nuestras hipótesis.

En el siguiente paso obtendremos una relación entre los coeficientes $a_k(\mathcal{H}_{\alpha,\beta} g)$ y $b_k(g)$. Teniendo en cuenta que la aplicación $h \mapsto \int_0^\infty j_k^{\alpha+\beta}(x) h(x) x^{\alpha+\beta}\,dx$ y el operador $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ son continuos, el primero de $L^p([0,\infty), x^{\alpha+\beta}\,dx)$ en $\mathbb{R}$ y el segundo de $L^p([0,1], x^\nu\,dx)$ en $L^p([0,\infty), x^{\alpha+\beta}\,dx)$, llegamos a que

$$\begin{aligned} a_k(\mathcal{H}_{\alpha,\beta} g) &= \int_0^\infty j_k^{\alpha+\beta}(x) \mathcal{H}_{\alpha,\beta}(g,x) x^{\alpha+\beta}\,dx \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m(g) \int_0^\infty j_k^{\alpha+\beta}(x) \mathcal{H}_{\alpha,\beta}(p_m^{(\alpha,\beta)}, x) x^{\alpha+\beta}\,dx. \end{aligned}$$

Observemos que sobre $L^2([0,\infty), x^\alpha\,dx)$ la transformada de Hankel $\mathcal{H}_\alpha$ es un operador autoadjunto (nótese que $j_k^{\alpha+\beta}, \chi_{[0,1]}p_m^{(\alpha,\beta)} \in L^2([0,\infty), x^\alpha\,dx)$). Entonces, aplicando (9) y la ortogonalidad de los polinomios de Jacobi concluimos que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty j_k^{\alpha+\beta}(x)\mathcal{H}_{\alpha,\beta}(p_m^{(\alpha,\beta)}, x)x^{\alpha+\beta}\,dx &= \int_0^\infty j_k^{\alpha+\beta}(x)\mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]}p_m^{(\alpha,\beta)}, x)x^\alpha\,dx \\ &= \frac{1}{d_k}\int_0^1 (1-t)^\beta p_k^{(\alpha,\beta)}(t)p_m^{(\alpha,\beta)}(t)t^\alpha\,dt = \frac{\delta_{k,m}}{d_k},\end{aligned}$$

donde d_k es como en (12). Por tanto se verifica que

$$a_k(\mathcal{H}_{\alpha,\beta}g) = \frac{b_k(g)}{d_k}.$$

Con la igualdad anterior, usando (12) y la continuidad de los operadores $M_{\alpha,\beta}$ y $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$, ya estamos en disposición de probar que f cumple la primera parte de la ecuación doble:

$$\begin{aligned}M_{\alpha,\beta}f &= \lim_{n\to\infty} M_{\alpha,\beta}\left(\sum_{k=0}^n a_k(\mathcal{H}_{\alpha,\beta}g)j_k^{\alpha+\beta}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\mathcal{H}_{\alpha,\beta}\left(\sum_{k=0}^n \frac{b_k(g)}{d_k}d_k p_k^{(\alpha,\beta)}\right) = \mathcal{H}_{\alpha,\beta}g.\end{aligned}$$

□

Referencias

[1] Ó. Ciaurri, J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Mean and almost everywhere convergence of Fourier-Neumann series, *J. Math. Anal. Appl.* **236** (1999), 125–147.

[2] Ó. Ciaurri, J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Solving dual integral equations on Lebesgue spaces, *Studia Math.* **142** (2000), 253–267.

[3] A. J. Durán, On Hankel transform, *Proc. Amer. Math. Soc.* **110** (1990), 417–424.

[4] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger y F. Tricomi, *Higher transcendental functions*, Vol. II, McGraw-Hill, Nueva York, 1953.

[5] R. Estrada y R. P. Kanwal, *Singular integral equations*, Birkhäuser, Boston, 2000.

[6] J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Mean and weak convergence of some orthogonal Fourier expansions by using A_p theory, en *Orthogonal polynomials and their applications* (Proc. Int. Congr., Laredo/España 1987, J. Vinuesa, ed.), *Lect. Notes Pure Appl. Math.* **117**, Dekker, Nueva York (1989), 161–169.

[7] H. Hochstadt, *Integral equations*, Wiley, Nueva York, 1973.

[8] C. S. Herz, On the mean inversion of Fourier and Hankel transforms, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **40** (1954), 996–999.

[9] P. Heywood y P. G. Rooney, A weighted norm inequality for the Hankel transformation, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **99A** (1984), 45–50.

[10] B. N. Mandal y N. Mandal, *Advances in dual integral equations*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999.

[11] B. Muckenhoupt, Mean convergence of Jacobi series, *Proc. Amer. Math. Soc.* **23** (1969), 306–310.

[12] C. Nasim y B. D. Aggarwala, On some dual integral equations, *Indian J. Pure Appl. Math.* **15** (1984), 323–340.

[13] J. Rey Pastor y A. de Castro, *Funciones de Bessel*, Dossat, Madrid, 1958.

[14] P. G. Rooney, A technique for studying the boundedness and extendability of certain types of operators, *Canad. J. Math.* **25** (1973), 1090–1102.
[15] I. N. Sneddon, *Fourier transforms*, McGraw-Hill, Nueva York, 1951. Reedición: Dover, Nueva York, 1995.
[16] K. Stempak y W. Trebels, Hankel multipliers and transplantation operators, *Studia Math.* **126** (1997), 51–66.
[17] E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Oxford, Nueva York, 1937.
[18] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4.ª edición, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.
[19] C. J. Tranter, *Integral transforms in mathematical physics*, 3.ª edición, Methuen, Londres, 1966.
[20] C. J. Tranter, *Bessel functions with some physical applications*, English Univ. Press, Londres, 1968.
[21] J. L. Varona, Fourier series of functions whose Hankel transform is supported on $[0, 1]$, *Constr. Approx.* **10** (1994), 65–75.
[22] G. N. Watson, *A Treatise on the theory of Bessel functions*, 2.ª edición, Cambridge Univ. Press, 1944.

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Edificio Vives, Calle Luis de Ulloa s/n, 26004 Logroño, Spain
Correo electrónico: oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Edificio Vives, Calle Luis de Ulloa s/n, 26004 Logroño, Spain
Correo electrónico: jvarona@dmc.unirioja.es
URL: http://www.unirioja.es/dptos/dmc/jvarona/hola.html