Труды конференции «Геометрия и приложения»
13 – 16 марта 2000 г., Новосибирск

МЕТРИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ РИМАНОВЫХ СУБМЕРСИЙ ДЛЯ МНОГООБРАЗИЙ А. Д. АЛЕКСАНДРОВА ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВИЗНЫ

В. Н. Берестовский

Аннотация.

Доказывается, что каждая субметрия многообразий (двусторонне) ограниченной кривизны по А. Д. Александрову является римановой $C^{1,1}$-субмерсией относительно дистанционных координат. Обратно, каждая риманова C^1-субмерсия полных многообразий А. Д. Александрова ограниченной кривизны – субметрия. Эти результаты характеризуют римановы субмерсии для многообразий ограниченной кривизны и обобщают результаты автора и Л.Гуиярро для гладких римановых многообразий. Кроме этого, обсуждаются некоторые связанные вопросы.

1 Введение

В этой работе основные результаты статьи [1] о субметриях и римановых субмерсиях гладких римановых многообразий обобщаются на многообразия А. Д. Александрова локально двусторонне ограниченной кривизны и обсуждаются новые связанные с этим результаты.

Приведем некоторые необходимые определения.

Определение 1.1. *Субмерсия* f из риманова C^0-многообразия M, (т.е. снабженного непрерывным метрическим тензором,) в другое такое же многообразие N есть такое C^1-отображение, что для любой точки $x \in M$ касательное отображение $df(x) : T_xM \to T_{f(x)}N$ является композицией ортогональной проекции и последующей изометрии соответствующих евклидовых пространств.

Определение 1.2. Отображение f из одного метрического пространства M в другое N есть *(локальная) субметрия* ([2]), если $f(B(x,r))=B(f(x),r)$ для всех $x \in M$ и всех положительных вещественных чисел r (таких, что $0 < r < r(x)$, где $r(x)$ есть положительная непрерывная функция на M). Здесь B обозначает замкнутый шар. *Слабая (локальная) субметрия* определяется аналогично заменой в предыдущем определении замкнутых шаров B на открытые шары U.

Определение 1.3. Радиус компактности $c = c(x)$ локально компактного метрического пространства M в точке x определяется как супремум всех вещественных положительных чисел r таких, что шар $B(x, r)$ компактен.

Очевидно,

1) Каждая (локальная) субметрия является слабой (локальной) субметрией.

2) Если M локально компактно, то каждая слабая локальная субметрия $f : M \to N$ является локальной субметрией и N также локально компактно.

Можно также доказать следующие утверждения:

3) Если $f : M \to N$ – слабая локальная субметрия пространств с внутренней метрикой и M локально компактно и полно, то f – субметрия и N также локально компактно и полно.

4)Если M – (локально компактное полное) пространство с внутренней метрикой и $f : M \to N$ – слабая субметрия, то N также (локально компактное полное) пространство с внутренней метрикой (и f – субметрия).

Видно, что понятие (слабой) (локальной) субметрии имеет смысл в чисто метрической ситуации.

Под *многообразием Александрова ограниченной кривизны* мы будем понимать многообразие с внутренней метрикой локально двусторонне ограниченной по Александрову кривизны [3].

Мы докажем следующие теоремы.

Теорема A. *Пусть $f : M \to N$ – отображение многообразий Александрова ограниченной кривизны.*

1. *Если f есть C^1-субмерсия, то f – локальная субметрия. Кроме того, если M полно, то f – субметрия и N также полно.*

2. *Если f – слабая локальная субметрия, то f есть риманова $C^{1,1}$-субмерсия относительно карт дистанционных координат в M и N (см. [3]).*

Таким образом, эта теорема дает чисто метрическую характеризацию римановой субмерсии для многообразий Александрова ограниченной кривизны, в частности для классических римановых C^2-многообразий.

Замечание 1.4. Второе утверждение теоремы A, когда M и N – римановы C^∞-многообразия, является гипотезой из [4] и было доказано в статье [1]. Даже в этой ситуации, $C^{1,1}$-гладкость f оптимальна (см. [5] и [1]).

Замечание 1.5. Мы не знаем, верно ли последнее утверждение теоремы A также относительно карт гармонических координат в M и N. Дистанционные и гармонические карты составляют вместе $C^{1,a}$-атлас для всех чисел $a \in]0, 1[$, что можно вывести из того факта, что гармоническая функция имеет $C^{1,a}$-гладкость относительно дистанционных координат (см. [6]). Следовательно, каждая локальная субметрия многообразий Александрова ограниченной кривизны имеет класс гладкости $C^{1,a}$ относительно гармонических координат. Возможно, общая (локальная) субметрия многообразий Александрова ограниченной кривизны имеет лучшую гладкость в дистанционных координатах, чем в гармонических, хотя гармонический атлас имеет гораздо лучшую гладкость (класса $C^{3,a}$) (см. [3]).

Мы обсудим также понятие *субметрии с душой*, которая была определена в [1] для гладких римановых многообразий как субметрия, допускающая правое обратное нерастягивающее отображение.

2 Доказательство теоремы A

1. Из [3] следует, что система карт дистанционных координат на многообразии Александрова M ограниченной кривизны определяет структуру дифференцируемого $C^{1,1}$-многообразия на M с липшицевыми компонентами метрического тензора и каждая дистанционная функция $d_p(x) := px$ является $C^{1,1}$-функцией на проколотой окрестности $U(p)$ точки $p \in M$ с (локально) липшицевым градиентным полем $X_p := gradd_p$. Для этого необходимо только, чтобы каждая точка в $U(p)$ соединялась с p единственной кратчайшей. Через $v(p)$ мы будем обозначать далее супремум всех положительных вещественных чисел r, таких что любые две точки в $U(p, r)$ соединяются единственной кратчайшей. Легко видно, что $|v(p) - v(q)| \leq pq$ для $p, q \in M$.

   Пусть $f : M \to N$ – риманова C^1-субмерсия многообразий Александрова ограниченной кривизны. Нам нужно доказать, что f – локальная субметрия.

   Из определения римановой C^1-субмерсии следует, что f не увеличивает длин кусочно дифференцируемых путей. Следовательно, f нерастягивающее отображение и $f(B(x, r)) \subset B(f(x), r)$ для каждой точки $x \in M$ и каждого положительного вещественного числа r. Поэтому нужно доказать противоположное включение для некоторой положительной непрерывной функции $r = r(x)$.

   Докажем, что $B(f(x), r) \subset B(x, r)$, если $0 < r < v(f(x))$ и $B(x, r)$, $B(f(x), r)$ компактны. Это значит, что можно взять $r(x) := \min(c(x), c(f(x), v(f(x)))$. Так как f нерастягивающее, очевидно $|r(p) - r(q)| \leq pq$.

   Предположим, что $r_0 = f(x)y \leq r$ для $y \in N$. Существует точка $z \in N$ такая что $f(x)$ lлежит между точками z и y, $zy < v(z)$ и $B(z, \max(zy, r))$ компактно. Тогда на компактном кольце $R := B(z, \max(zy, r))$ $U(z, zf(x))$ имеется липшицево единичное градиентное поле $X := X_z$. Существует единственный горизонтальный лифт Y поля X на прообразе $f^{-1}(R)$, т.е. поле, ортогональное всем слоям (прообразам точек в M), которое df переводит в X. Тогда Y – непрерывное и единичное, так как f риманова C^1- субмерсия. Возьмем любую максимальную интегральную кривую $c = c(t)$ поля Y с началом x. Используя теорему существования Пеано и теорему о расширении для решений обыкновенных дифференциальных уравнений из [7], видим, что c определена на $[0, r]$, следовательно на $[0, r_0]$. Тогда ее образ $fc : [0, r_0] \to N$ должен быть единственной интегральной кривой поля X с началом $f(x)$, так как X липшицево; следовательно это (единственная) кратчайшая, соединяющая точки $f(x)$ и y. Поэтому $f(c(r_0)) = y$ и $c(r_0)$ лежит в $B(x, r)$; следовательно f – локальная субметрия.

Теперь последняя часть утверждения следует из общего утверждения 3) выше.

2. Это утверждение доказано в статье [1], когда и M и N – римановы C^∞-многообразия, с помощью дистанционной функции и дистанционных систем координат. Те же рассуждения дают требуемое утверждение, если воспользоваться упомянутым результатом, что дистанционные системы координат на M или N определяют $C^{1,1}$-атлас, в котором сужение дистанционной функции d_p на $U(p, v(p))$ p также $C^{1,1}$-гладко.

Мы доказали теорему A.

3 Субметрия с душой

Определение 3.1. Субметрия $f : M \to N$ метрических пространств называется субметрией с душой, если существует такое нерастягивающее отображениеа $g : N \to M$, что $fg = Id_N$ (см. [1]).

Определение 3.2. Нерастягивающая ретракция r метрического пространства M на его подпространство N называется метрической ретракцией.

Легко доказывается следующее предложение.

Утверждение 3.3.

1. *Каждая метрическая ретракция есть субметрия с душой.*

2. *Каждое правое обратное нерастягивающее отображение g для субметрии $f : M \to N$ с душой есть изометрическое вложение в M и изометрия на образ $g(N)$. Кроме того, отображение gf является метрической ретракцией M на $g(N)$.*

3. *В условиях предыдущего пункта, если M и N – многообразия Александрова ограниченной кривизны, то множество $g(N)$ есть вполне геодезическое подмногообразие в M.*

Поэтому, с точностью до изометрии, понятия субметрии с душой и метрической ретракции совпадают.

Для полного риманова открытого C^∞-многообразия M неотрицательной секционной кривизны и его души S В.А.Шарафутдинов построил метрическую ретракцию из M на S (см. [8]). Этот факт и предложение 3.3 оправдывают термин в определении 3.1.

Замечание 3.4. Непосредственно из теоремы A и предложения 3.3 следует, что метрическая ретракция Шарафутдинова s есть риманова $C^{1,1}$-субмерсия, так что нет необходимости использовать для этого результат Перельмана о том, что s является римановой C^1-субметрией, как это было сделано в работе [1].

Замечание 3.5. Из теоремы E и следствия 6.2 в [1] следует, что каждая субметрия с душой $f : M \to N$, где M – полное открытое риманово C^∞-многообразие неотрицательной секционной кривизны, а N – компактное риманово многообразие, есть риманова C^2- субмерсия и f – C^∞-на открытом всюду плотном подмножестве в M полной лебеговой меры. В частности, это верно для отображения Шарафутдинова $f = s$.

Предположение 1. *Каждое полное некомпактное многообразие Александрова M неотрицательной кривизны допускает метрическую ретракцию $f = s$ на такое вполне выпуклое компактное подмногообразие $N = S$, что M гомеоморфно нормальному векторному расслоению $n(S)$ над S и верны все утверждения теоремы в [9] (или, эквивалентно, теоремы E в [1]).*

Желая улучшить C^2-гладкость отображения f в ситуации замечания 3.5, можно было бы попробовать доказать, что дифференциал $df : TM \to TN$ является римановой C^1-субмерсией, где касательные расслоения TM и TN снабжены римановы метриками Сасаки [10], и затем использовать теорему A.

Для риманова C^1-многообразия (M, g), (непрерывная) метрика Сасаки G на TM единственным образом характеризуется следующими тремя условиями:

A) Естественная проекция $p : (TM, G) \to (M, g)$ есть риманова C^1-субмерсия.

B) Для каждой точки $x \in M$, естественное отождествление слоя $p^{-1}(x) = T_xM$ с (горизонтальным векторным подпространством римановой субмерсии p в каждом векторе $v \in T_xM$) $T_v(T_xM)$ есть изометрия евклидовых векторных пространств.

C) Горизонтальное распределение связности Леви-Чивита метрики g на векторном расслоении TM совпадает с горизонтальным распределением на TM для римановой C^1-субмерсии p.

К сожалению, упомянутая выше попытка была бы почти бесполезной ввиду следующей теоремы.

Теорема B. *Пусть $f : M \to N$ – риманова C^2-субмерсия (римановых C^∞-многообразий M и N). Тогда $df : TM \to TN$, где TM и TN снабжены метрикой Сасаки, является римановой C^1-субмерсией тогда и только тогда, когда каждый слой субмерсии f – вполне геодезический.*

Мы опускаем доказательство этой теоремы, поскольку ее можно доказать, используя прямое рутинное, хотя и несколько длинное вычисление, основанное на формуле метрики Сасаки в работе [10], и эта теорема не является основной целью этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Berestovskii V.N. and Guijarro Luis, *A Metric Characterization of Riemannian Submersion*, Annals of Global Analysis and Geometry 18: 577-588, 2000. Zbl 0992.53025

[2] Берестовский В.Н., *Субметрии пространственных форм неотрицательной кривизны*, Сиб. матем. журн.. 28(4) (1987), 44-56. Zbl 0643.53053

[3] Александров А.Д., Берестовский В.Н. и Николаев И.Г., *Обобщенные римановы пространства*, Успехи матем. наук 41(3) (1986), 3-44. Zbl 0625.53059

[4] Берестовский В.Н., *О решении уравнения |grad u|=1 в пространствах постоянной кривизны*, in: *Тезисы докладов, представленных на конференции в Новосибирске, 1989*, с. 10.

[5] Вайнштейн А.Г., Горелик Е.М. и Ефремович В.А., *Расслоения плоскости Лобачевского*, Докл. АН СССР, 1978, т. 241, N 2б с.269-271. Zbl 0416.57002

[6] Николаев И.Г., *О гладкости метрики пространств с двусторонне ограниченной по А.Д.Александрову кривизной*, Сиб. матем. журн. 24, 1983, N 2, с. 114-132. Zbl 0547.53011

[7] Хартман Ф., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, М.: Мир, 1979. Zbl 0214.09101

[8] Шарафутдинов В.А., *Теорема Погорелова-Клингенберга для многообразий, гомеоморфных R^n*, Сиб. матем. журн. 1977, т.18, с.915-925. Zbl 0411.53031

[9] Perelman G., *Proof of the soul conjecture of Cheeger and Gromoll*, J. Differential Geom. 40(1994), 209-212. Zbl 0818.53056

[10] Sasaki S., *On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. I*, Tohoku Math. J., II. Ser. 1, (1958), 338-354.

Part II., Tohoku Math. J., II. Ser. 14, (1962), 146-155. Zbl 0109.40505

644077, Омск-77, пр. Мира 55 А,
Омский государственный университет,
Математический факультет
e-mail: berest@univer.omsk.su