Труды конференции «Геометрия и приложения»
13 – 16 марта 2000 г., Новосибирск

О ЗАДАЧЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ ДЛЯ МНОГООБРАЗИЙ АНОСОВА

Н. С. Даирбеков, В. А. Шарафутдинов [1]

Аннотация.

Доказано, что пространство инфинитезимальных изоспектральных деформаций замкнутого риманова многообразия с геодезическим потоком аносовского типа конечномерно по модулю тривиальных инфинитезимальных деформаций. Установлено, что многообразия Аносова не имеют ненулевых конформных инфинитезимальных изоспектральных деформаций. Рассмотрены некоторые задачи интегральной геометрии тензорных полей. Библиогр. 18.

1 Постановка задачи и формулировка результатов

Замкнутое (= компактное, без края) риманово многообразие (M, g) называется *многообразием Аносова*, если его геодезический поток является U-потоком (аносовским потоком). Класс многообразий Аносова достаточно широк и содержит, в частности, все многообразия отрицательной кривизны [1].

Далее τ'_M обозначает кокасательное расслоение многообразия M и $C^\infty(S^m\tau'_M)$ — пространство гладких симметричных ковариантных m-тензорных полей на M. Напомним, что касательное пространство в точке g многообразия (C^∞-гладких) римановых метрик на M состоит из всех симметричных 2-тензорных полей на M, т. е. элементов $C^\infty(S^2\tau'_M)$, называемых также *инфинитезимальными деформациями* метрики g.

Определение 1.1. *Инфинитезимальной изоспектральной деформацией* метрики g называется такое симметричное 2-тензорное поле $f \in C^\infty(S^2\tau'_M)$, что

$$\oint\limits_\gamma f_{ij}(\gamma(t))\dot\gamma^i(t)\dot\gamma^j(t)\,dt = 0 \tag{1.1}$$

для каждой замкнутой геодезической γ на M (всюду в работе подразумевается выполненным соглашение о суммировании по повторяющимся разновысоким индексам).

[1] Работа выполнена при поддержке CRDF, грант RM2-2242. Н.С.Д. также финансировался Российским фондом фундаментальных исследований (номер проекта 99-01-00517)

Это определение мотивировано результатами [2] и имеет следующее объяснение. Пусть g_t, $0 \le t \le 1$, — гладкое семейство метрик на M, $g_0 = g$. Для каждого значения t рассмотрим оператор Лапласа — Бельтрами Δ_t метрики g_t. Семейство метрик g_t называется *изоспектральной деформацией* метрики g, если для любых $0 \le t_1 \le t_2 \le 1$ спектр оператора Δ_{t_1} совпадает со спектром оператора Δ_{t_2} с учетом кратности. Деформация g_t, $0 \le t \le 1$, называется *тривиальной*, если существует однопараметрическое семейство диффеоморфизмов $\varphi_t : M \to M$ таких, что $\varphi_0 = 0$ и $g_t = (\varphi_t)^* g_0$. Многообразие (M, g) называется *спектрально жестким*, если оно не допускает нетривиальных изоспектральных деформаций. Имеет место следующее утверждение (см. [2, теорема 2.1]).

Предложение 1.2. *Если M — замкнутое многообразие Аносова и g_t, $0 \le t \le 1$, — изоспектральная деформация метрики g, то 2-тензорное поле $f = \frac{dg_t}{dt}\Big|_{t=0}$ является инфинитезимальной изоспектральной деформацией.*

Рассмотрим дифференциальный оператор первого порядка

$$d = \sigma\nabla : C^\infty(S^{m-1}\tau'_M) \to C^\infty(S^m\tau'_M), \tag{1.2}$$

где σ — оператор симметризации и ∇ — ковариантная производная. Оператор d называется *внутренней производной* (см. [3]). Инфинитезимальная деформация $f \in C^\infty(S^2\tau'_M)$ называется *тривиальной* [2], если $f = dv$ для некоторого ковекторного поля v. Напомним, что пространство тривиальных деформаций является касательным пространством в точке g к орбите действия группы (C^∞-гладких) диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}(M)$ в пространстве римановых метрик на M (см. [4, глава 4B]).

Следующее утверждение доказано в [2] (более точно, в [2] рассматривается случай многообразий отрицательной кривизны, однако то же самое доказательство применимо к многообразиям Аносова).

Предложение 1.3. *Если каждая инфинитезимальная изоспектральная деформация многообразия Аносова тривиальна, то многообразие является спектрально жестким.*

В работе [5] установлено следующее утверждение.

Предложение 1.4. *Каждая инфинитезимальная изоспектральная деформация замкнутого многообразия Аносова неположительной секционной кривизны тривиальна.*

В [5] это утверждение сформулировано для многообразий отрицательной кривизны, однако в доказательстве использовались только неположительность секционной кривизны и тот факт, что геодезический поток многообразия является U-потоком. Этот результат был ранее установлен для 2-мерных многообразий отрицательной кривизны в [2] и для n-мерных многообразий $(1/n)$-защемленной отрицательной кривизны в [6]. В [7] результат был обобщен на случай многообразий с отрицательно определенным оператором кривизны.

В настоящей работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 1.5. *Пространство инфинитезимальных изоспектральных деформаций замкнутого многообразия Аносова имеет конечную размерность по модулю тривиальных деформаций.*

Определение 1.6. Инфинитезимальная деформация $f \in C^\infty(S^2\tau'_M)$ называется *конформной*, если $f{=}\lambda g$ для некоторой гладкой функции λ на M.

Теорема 1.7. *Каждая конформная инфинитезимальная изоспектральная деформация замкнутого многообразия Аносова тождественно равна нулю.*

Замкнутое риманово многообразие имеет *простой спектр длин*, если не существует двух различных замкнутых геодезических с рациональным отношением длин.

Теорема 1.8. *Пусть (M,g) — замкнутое многообразие Аносова с простым спектром длин и пусть $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ — соответствующий оператор Лапласа — Бельтрами. Пусть q_1 и q_2 — гладкие действительные функции на M. Предположим, что операторы $\Delta + q_1$ и $\Delta + q_2$ имеют одинаковый спектр. Тогда $q_1 = q_2$.*

Теоремы 1.5, 1.7 и 1.8 вытекают из соответствующих результатов интегральной геометрии симметричных тензорных полей, представляющих самостоятельный интерес и изложенных ниже.

Для тензорного поля $f \in C^\infty(S^m\tau'_M)$ и замкнутой геодезической $\gamma : [a,b] \to M$ рассмотрим интеграл

$$If(\gamma) = \oint\limits_\gamma \langle f, \dot\gamma^m\rangle\, dt = \int\limits_a^b f_{i_1\dots i_m}(\gamma(t))\dot\gamma^{i_1}(t)\dots\dot\gamma^{i_m}(t)\, dt. \tag{1.3}$$

Несмотря на то, что подынтегральное выражение в (1.3) записано в локальных координатах, оно инвариантно, т. е. не зависит от локальных координат. Пусть $Z(S^m\tau'_M)$ обозначает подпространство $C^\infty(S^m\tau'_M)$, состоящее из таких тензорных полей f, что $If(\gamma) = 0$ для каждой замкнутой геодезической γ. Пусть $P(S^m\tau'_M)$ обозначает пространство потенциальных тензорных полей, т. е. полей f, каждое из которых представимо в виде $f = dv$ для некоторого $v \in C^\infty(S^{m-1}\tau'_M)$. Здесь d — внутренняя производная (1.2). Если $f = dv$, то подынтегральное выражение в (1.3) равно $d(v_{i_1\dots i_{m-1}}(\gamma(t))\dot\gamma^{i_1}(t)\dots\dot\gamma^{i_{m-1}}(t))/dt$, поэтому имеем вложение

$$P(S^m\tau'_M) \subset Z(S^m\tau'_M). \tag{1.4}$$

Теорема 1.5 является частным случаем следующей теоремы для $m = 2$.

Теорема 1.9. *Для многообразия Аносова вложение* (1.4) *имеет конечную коразмерность для каждого значения m.*

Отметим, что в [5] доказано, что вложение (1.4) является в действительности равенством для всех значений m в случае многообразий Аносова неположительной кривизны (в [5] этот результат сформулирован для многообразий отрицательной кривизны, но его доказательство верно и для многообразий Аносова неположительной кривизны). Равенство в (1.4) также установлено для некоторых симметричных пространств [8, 9].

Мы доказываем, что для произвольных многообразий Аносова равенство в (1.4) имеет место для $m = 0$ и $m = 1$.

Теорема 1.10. *Пусть (M, g) — многообразие Аносова. Если интеграл от функции $f \in C^\infty(M)$ вдоль каждой замкнутой геодезической равен нулю, то функция f тождественно равна нулю.*

Теорема 1.11. *Пусть (M, g) — многообразие Аносова и f — гладкая 1-форма на M. Если интеграл от f вдоль каждой замкнутой геодезической равен нулю, то f — точная форма.*

Теорема 1.10 влечет теорему 1.8 тем же самым путем, как и в [2]. Теорема 1.7 также является следствием теоремы 1.10. В самом деле, если $f = \lambda g$ — конформная инфинитезимальная изоспектральная деформация, то очевидно, что интеграл от функции λ вдоль произвольной замкнутой геодезической равен нулю и по теореме 1.10 функция λ тождественно равна нулю.

Метод доказательства теорем 1.9–1.11 является комбинацией методов из [10] и [5]. Основная идея в [10] состоит в построении полубазисного тензорного поля $a = (a^{ij})$ и рассмотрении для него модифицированной горизонтальной производной $\overset{a}{\nabla}$. Отметим, что имеется аналогия между модифицированной горизонтальной производной, построенной в работах [3, 11], и асимптотическими полями Якоби, впервые введенными Хопфом [12] и применяемыми многими авторами ([13, 14, 15]. В обоих случаях отсутствие сопряженных точек играет решающую роль и используется одно и то же уравнение Рикатти. Тензор кривизны $\overset{a}{R}_{ijkl}$ модифицированной горизонтальной производной $\overset{a}{\nabla}$ удовлетворяет уравнению $\overset{a}{R}_{ijkl}\xi^i\xi^k = 0$. В этом случае тождество Пестова не содержит члена, зависящего от кривизны. Устойчивое и неустойчивое распределения сферического расслоения многообразия позволяют построить нам аналог модифицирующего тензорного поля (a^{ij}) в случае многообразий Аносова. Это тензорное поле не является гладким, и мы аппроксимируем его гладким полем, не теряя контроля над соответствующим тензором кривизны.

2 Сведение доказательства теоремы 1.9 к оценке для кинетического уравнения

Пусть (M, g) — риманово многообразие. Обозначим через TM касательное расслоение многообразия M. Элементами TM являются пары (x, ξ), где $x \in M$, а $\xi \in T_xM$. Пусть ΩM — расслоение единичных касательных векторов (сферическое расслоение). Обозначим геодезический поток многообразия M через $G^t : TM \to TM$, и пусть H обозначает порождающее его векторное поле на TM. В точках ΩM поле H касательно к ΩM, поэтому мы также можем трактовать H как дифференциальный оператор первого порядка $H : C^\infty(\Omega M) \to C^\infty(\Omega M)$.

Оператор

$$-\delta : C^\infty(S^m\tau'_M) \to C^\infty(S^{m-1}\tau'_M)$$

определяется как формально сопряженный к внутренней производной d и называется *дивергенцией.*

Теорема 1.9 вытекает из следующего утверждения.

Лемма 2.1. *Пусть (M, g) — многообразие Аносова. Если функция $u \in C^\infty(\Omega M)$ и тензорное поле $f \in C^\infty(S^m\tau'_M)$ связаны кинетическим уравнением*

$$Hu(x,\xi) = f_{i_1\dots i_m}(x)\xi^{i_1}\dots\xi^{i_m}, \tag{2.1}$$

то выполнена следующая оценка:

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega M)} \le C\left(\|u\|^2_{L_2(\Omega M)} + \|\delta f\|_{L_2(S^{m-1}\tau'_M)}\cdot\|u\|_{L_2(\Omega M)}\right), \tag{2.2}$$

где постоянная C не зависит от u и f.

Доказательство леммы 2.1 требует достаточно громоздких предварительных рассмотрений и завершено в § 6, в котором также изложены доказательства теорем 1.10 и 1.11. Сейчас мы покажем, как теорема 1.9 выводится из этой леммы.

Доказательство теоремы 1.9. Если утверждение теоремы не верно, то существует последовательность тензорных полей $z_k \in Z(S^m\tau'_M)$ $(k = 1, 2, \dots)$, линейно независимых $\operatorname{mod}(P(S^m\tau'_M))$. Применяя теорему 2.2 работы [5], разложим каждое поле z_k в сумму потенциальной и соленоидальной частей:

$$z_k = y_k + dv_k, \quad \delta y_k = 0. \tag{2.3}$$

Тогда последовательность $y_k \in Z(S^m\tau'_M)$ также линейно независима. Применяя гладкую версию теоремы Лифшица [16], найдем функции $w_k \in C^\infty(\Omega M)$, удовлетворяющие кинетическому уравнению

$$Hw_k = \langle y_k(x), \xi^m\rangle. \tag{2.4}$$

Последовательность w_k линейно независима, ибо в противном случае (2.4) влечет линейную зависимость последовательности y_k. Применяя процесс ортогонализации Грамма — Шмидта к последовательности w_k, построим новую последовательность функций $u_k \in C^\infty(\Omega M)$ таких, что

$$\|u_k\|_{L_2(\Omega M)} = 1, \quad (u_k, u_l)_{L_2(\Omega M)} = 0 \quad \text{для} \quad k \ne l, \tag{2.5}$$

причем каждая функция u_k является линейной комбинацией $w_1, \dots, w_k$. Равенство (2.4) влечет

$$Hu_k = \langle f_k(x), \xi^m\rangle,$$

где $f_k \in C^\infty(S^m\tau'_M)$ — линейная комбинация $y_1,\dots,y_k$. В силу (2.3) имеем

$$\delta f_k = 0. \tag{2.6}$$

Ввиду (2.5) и (2.6), оценка (2.2) принимает следующий вид для пары u_k, f_k:

$$\|u_k\|_{H^1(\Omega M)} \le C\|u_k\|_{L_2(\Omega M)} = C.$$

Другими словами, последовательность u_k ограничена в пространстве Соболева $H^1(\Omega M)$, состоящем из функций, интегрируемых в квадрате вместе с их обобщенными производными первого порядка. Так как вложение $H^1(\Omega M) \subset L_2(\Omega M)$ компактно, то последовательность u_k имеет подпоследовательность, сходящуюся в $L_2(\Omega M)$, но это противоречит (2.5). □

3 Модифицирующие тензорные поля $\overset{s}{\alpha}$ и $\overset{u}{\alpha}$

Для многообразия M и открытого множества $U \subset TM$ обозначим через $C(\beta^r_s M; U)$ пространство непрерывных полубазисных (r,s)-тензорных полей на U (см. определение полубазисного тензорного поля в [3, глава 3] и [17]).

Лемма 3.1. *Если (M,g) — замкнутое многообразие Аносова размерности n, то существуют непрерывные полубазисные тензорные поля $\overset{s}{\alpha} = (\overset{s}{\alpha}_{ij}(x,\xi)) \in C(\beta^0_2 M; T^0M)$ и $\overset{u}{\alpha} = (\overset{u}{\alpha}_{ij}(x,\xi)) \in C(\beta^0_2 M; T^0M)$ на $T^0M = \{(x,\xi) \in TM \mid \xi \ne 0\}$ такие, что*

(1) *поля симметричны:*

$$\overset{s}{\alpha}_{ij} = \overset{s}{\alpha}_{ji}, \quad \overset{u}{\alpha}_{ij} = \overset{u}{\alpha}_{ji}$$

и ортогональны вектору ξ:

$$\xi^i \overset{s}{\alpha}_{ij}(x,\xi) = 0, \quad \xi^i \overset{u}{\alpha}_{ij}(x,\xi) = 0;$$

(2) *поля положительно однородны степени 1 относительно ξ:*

$$\overset{s}{\alpha}(x,t\xi) = t\,\overset{s}{\alpha}(x,\xi), \quad \overset{u}{\alpha}(x,t\xi) = t\,\overset{u}{\alpha}(x,\xi) \quad \text{для} \quad t>0;$$

(3) *ранг матрицы $(\overset{s}{\alpha}_{ij} - \overset{u}{\alpha}_{ij})$ равен $n-1$ в каждой точке $(x,\xi) \in T^0M$;*

(4) *вдоль каждой геодезической $\gamma : \mathbf{R} \to M$ поля $\overset{s}{\alpha}{}^i_j(t) = (g^{ik}\overset{s}{\alpha}_{kj})(\gamma(t),\dot\gamma(t))$ и $\overset{u}{\alpha}{}^i_j(t) = (g^{ik}\overset{u}{\alpha}_{kj})(\gamma(t),\dot\gamma(t))$ являются гладкими и удовлетворяют уравнению Рикатти*

$$\alpha' + \alpha^2 + R = 0, \tag{3.1}$$

где штрих обозначает ковариантную производную и $R = R(t)$ — оператор кривизны, $R^i_j = R^i_{kjl}\dot\gamma^k\dot\gamma^l$.

Прежде чем доказывать эту лемму, мы напомним некоторые понятия, относящиеся к геодезическому потоку и полям Якоби.

Пусть $\tau_M = (TM, \pi, M)$ обозначает касательное расслоение риманова многообразия (M, g). Для каждой точки $(x, \xi) \in TM$ имеем канонический изоморфизм

$$T_{(x,\xi)}(TM) \cong T_xM \oplus T_xM, \quad v \mapsto (d\pi(v), Kv),$$

где $K : TTM \to TM$ — *отображение связности.* Подпространства $T_{(x,\xi)}(TM)$, соответствующие слагаемым в правой части, называются *горизонтальным* и *вертикальным* соответственно. Указанный изоморфизм определяет *метрику Сасаки* на TM:

$$\langle v, w\rangle = \langle d\pi(v), d\pi(w)\rangle + \langle Kv, Kw\rangle.$$

Метрика g порождает естественный изоморфизм между касательным и кокасательным пространствами расслоения. Стандартная симплектическая структура кокасательного расслоения, перенесенная на TM посредством этого изоморфизма, имеет ассоциированную 2-форму

$$\omega(v, w) = \langle d\pi(v), Kw\rangle - \langle d\pi(w), Kv\rangle.$$

Касательное пространство к многообразию ΩM в точке $(x, \xi) \in \Omega M$ может быть выделено уравнением

$$T_{(x,\xi)}(\Omega M) = \{v \in T_{(x,\xi)}(TM) \mid \langle Kv, \xi\rangle = 0\}. \tag{3.2}$$

Пусть H — векторное поле на TM, порождающее геодезический поток $G^t : TM \to TM$. Заметим, что H горизонтально, $KH = 0$. Для каждого вектора $v \in T_{(x,\xi)}(TM)$ векторное поле $Y_v(t) = d\pi \circ dG^t(v)$ является полем Якоби вдоль геодезической $\gamma(t) = \exp_x t\xi$ и имеет ковариантную производную $Y_v'(t) = K \circ dG^t(v)$.

Теперь предположим, что (M, g) — многообразие Аносова. Для $(x, \xi) \in \Omega M$ определены два $(n-1)$-мерных подпространства $X_s(x, \xi)$ и $X_u(x, \xi)$ в $T_{(x,\xi)}(\Omega M)$, называемые *устойчивым* и *неустойчивым* соответственно. Мы будем использовать следующие свойства этих подпространств, вытекающие из предложения 1.7 и теоремы 3.2 работы [15].

(i) Распределения $(x, \xi) \mapsto X_s(x, \xi)$ и $(x, \xi) \mapsto X_u(x, \xi)$ непрерывны и инвариантны относительно геодезического потока, т. е.

$$dG^t(X_s(x, \xi)) = X_s(G^t(x, \xi)), \quad dG^t(X_u(x, \xi)) = X_u(G^t(x, \xi)).$$

(ii) Каждое из подпространств $X_s(x, \xi)$ и $X_u(x, \xi)$ ортогонально вектору $H(x, \xi)$. Пространство $T_{(x,\xi)}(\Omega M)$ разлагается в прямую (не ортогональную) сумму трех подпространств

$$T_{(x,\xi)}(\Omega M) = X_s(x, \xi) \oplus X_u(x, \xi) \oplus \{H(x, \xi)\}.$$

(iii) Сужение отображения $d\pi$ на каждое из подпространств $X_s(x, \xi)$ и $X_u(x, \xi)$ является изоморфизмом на $N_{(x,\xi)} = \{\eta \in T_xM \mid \langle \xi, \eta\rangle = 0\}$.

(iv) $X_s(x, \xi)$ и $X_u(x, \xi)$ являются лагранжевыми подпространствами, т. е., $\omega(v, w) = 0$ для $v, w \in X_s(x, \xi)$ $(X_u(x, \xi))$.

Доказательство леммы 3.1. Для $(x, \xi) \in \Omega M$ определим два эндоморфизма $b_s(x, \xi)$ и $b_u(x, \xi)$ пространства $N_{(x,\xi)}$ следующими композициями:

$$b_s(x, \xi) : N_{(x,\xi)} \overset{(d\pi)^{-1}}{\longrightarrow} X_s(x, \xi) \overset{K}{\longrightarrow} N_{(x,\xi)},$$

$$b_u(x, \xi) : N_{(x,\xi)} \overset{(d\pi)^{-1}}{\longrightarrow} X_u(x, \xi) \overset{K}{\longrightarrow} N_{(x,\xi)}.$$

Заметим, что ввиду (3.2) $Kv \in N_{(x,\xi)}$ для всех $v \in T_{(x,\xi)}(\Omega M)$. Это определение эквивалентно следующему правилу, более удобному для использования: два вектора $\eta, \zeta \in N_{(x,\xi)}$ связаны равенством $b_s(x, \xi)\eta = \zeta$ тогда и только тогда, когда найдется $v \in X_s(x, \xi)$ такой, что $d\pi(v) = \eta$ и $Kv = \zeta$. Подобное правило имеет место для оператора $b_u(x, \xi)$.

Операторы $b_s(x, \xi)$ and $b_u(x, \xi)$ обладают следующими свойствами:

1. Операторы $b_s(x, \xi)$ и $b_u(x, \xi)$ непрерывно зависят от $(x, \xi) \in \Omega M$.

2. Операторы b_s и b_u самосопряжены. Действительно, предположим, что $\eta_i \in N_{(x,\xi)}$ и $\zeta_i = b_s(x, \xi)\eta_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда существуют $v_i \in X_s(x, \xi)$ такие, что $d\pi(v_i) = \eta_i$ и $Kv_i = \zeta_i$. Поэтому

$$\langle b_s\eta_1, \eta_2\rangle - \langle \eta_1, b_s\eta_2\rangle = \langle \zeta_1, \eta_2\rangle - \langle \eta_1, \zeta_2\rangle$$

$$= \langle Kv_1, d\pi(v_2)\rangle - \langle d\pi(v_1), Kv_2\rangle = \omega(v_1, v_2) = 0,$$

так как $X_s(x, \xi)$ — лагранжево подпространство.

3. Оператор $b_s - b_u$ невырожденный. В самом деле, предположим, что $b_s\eta = b_u\eta$ для некоторого вектора $\eta \in N_{(x,\xi)}$. Тогда найдутся такие векторы $v \in X_s$ и $w \in X_u$, что

$$d\pi(v) = \eta = d\pi(w), \quad Kv = b_s\eta = b_u\eta = Kw.$$

Из этих отношений следует, что $v = w \in X_s \cap X_u = 0$. Поэтому $v = w = 0$ и $\eta = 0$.

4. Вдоль любой геодезической $\gamma : \mathbf{R} \to M$ с единичным вектором скорости каждая из оператор-функций

$$b_s(t) = b_s(\gamma(t), \dot\gamma(t)) : N_{(\gamma(t),\dot\gamma(t))} \to N_{(\gamma(t),\dot\gamma(t))},$$

$$b_u(t) = b_u(\gamma(t), \dot\gamma(t)) : N_{(\gamma(t),\dot\gamma(t))} \to N_{(\gamma(t),\dot\gamma(t))}$$

удовлетворяет уравнению Рикатти

$$b' + b^2 + R = 0. \tag{3.3}$$

Действительно, зафиксируем геодезическую γ и обозначим $N_t = N_{(\gamma(t),\dot\gamma(t))}$. Определим операторную функцию $D(t) : N_t \to N_t$ как решение уравнения Якоби

$$D'' + RD = 0, \tag{3.4}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$D(0) = E \text{ (тождественное отображение)}, \quad D'(0) = b_s(0).$$

Докажем, что

$$D'(t) = b_s(t)D(t). \tag{3.5}$$

С этой целью зафиксируем вектор $\eta \in N_0$ и обозначим через $\eta(t) \in N_t$ результат параллельного переноса η вдоль γ. Тогда вектор-функция $Y(t) = D(t)\eta(t)$ является векторным полем Якоби вдоль γ с начальными условиями

$$Y(0) = \eta, \quad Y'(0) = b_s(0)\eta.$$

С другой стороны, если вектор $v \in X_s(\gamma(0), \dot\gamma(0))$ удовлетворяет равенству $d\pi(v) = \eta$, то

$$D(t)\eta(t) = Y(t) = d\pi \circ dG^t(v), \quad D'(t)\eta(t) = Y'(t) = K \circ dG^t(v).$$

Вектор $v_t = dG^t(v)$ принадлежит $X_s(\gamma(t), \dot\gamma(t))$, так как распределение X_s инвариантно относительно геодезического потока. Предыдущие равенства могут быть переписаны следующим образом:

$$D(t)\eta(t) = d\pi(v_t), \quad D'(t)\eta(t) = Kv_t, \quad v_t \in X_s(\gamma(t), \dot\gamma(t)).$$

Полученные соотношения влекут

$$D'(t)\eta(t) = b_s(t)D(t)\eta(t),$$

что эквивалентно (3.5), так как η — произвольный вектор.

Оператор $D(t)$ не вырожден для достаточно малых $|t|$, и (3.5) может быть переписано в виде $b_s(t) = D'(t)D^{-1}(t)$. Отсюда и из уравнения Якоби (3.4) мы видим, что $b_s(t)$ удовлетворяет уравнению Рикатти (3.3) по крайней мере для достаточно малых $|t|$. Так как уравнение Рикатти инвариантно относительно сдвига $t \mapsto t + t_0$, оно выполнено для всех t.

Для $(x, \xi) \in \Omega M$ определим операторы

$$\overset{s}{\alpha}(x, \xi) : T_xM \to T_xM, \quad \overset{u}{\alpha}(x, \xi) : T_xM \to T_xM$$

посредством равенств

$$\overset{s}{\alpha}(x, \xi)|_{N_{(x,\xi)}} = b_s(x, \xi), \quad \overset{s}{\alpha}(x, \xi)\xi = 0;$$

$$\overset{u}{\alpha}(x, \xi)|_{N_{(x,\xi)}} = b_u(x, \xi), \quad \overset{u}{\alpha}(x, \xi)\xi = 0.$$

Затем продолжим функции $\overset{s}{\alpha}$ и $\overset{u}{\alpha}$ до функций на T^0M, положительно однородных относительно ξ:

$$\overset{s}{\alpha}(x, t\xi) = t\,\overset{s}{\alpha}(x, \xi), \quad \overset{u}{\alpha}(x, t\xi) = t\,\overset{u}{\alpha}(x, \xi) \quad \text{для} \quad t > 0.$$

Таким образом, мы построили полубазисные тензорные поля $\overset{s}{\alpha} = (\overset{s}{\alpha}{}^i_j(x, \xi)) \in C(\beta^1_1 M; T^0M)$ и $\overset{u}{\alpha} = (\overset{u}{\alpha}{}^i_j(x, \xi)) \in C(\beta^1_1 M; T^0M)$. Вышеперечисленные свойства операторов b_s и b_u влекут, что полубазисные тензорные поля $\overset{s}{\alpha}_{ij} = g_{ik}\overset{s}{\alpha}{}^k_j$ и $\overset{u}{\alpha}_{ij} = g_{ik}\overset{u}{\alpha}{}^k_j$ удовлетворяют всем условиям леммы 3.1. $\square$

4 Сглаживание тензорных полей $\overset{s}{\alpha}$ и $\overset{u}{\alpha}$

Наша цель в этом параграфе — определить два типа модифицированной горизонтальной производной по схеме § 8.2 работы [3] (см. также [11]) с помощью модифицируюших тензоров $\overset{s}{\alpha}$ и $\overset{u}{\alpha}$, построенных в предыдущем параграфе. К сожалению, поля $\overset{s}{\alpha}$ и $\overset{u}{\alpha}$ только лишь непрерывные, а не гладкие. Построение модифицированной горизонтальной производной требует по крайней мере C^2-гладкости модифицирующего тензора, ибо определение соответствующего тензора кривизны предполагает существование производных второго порядка. По этой причине мы вынуждены сгладить тензорные поля $\overset{s}{\alpha}$ и $\overset{u}{\alpha}$. Мы строим аппроксимирующие гладкие тензорные поля, удовлетворяющие всем условиям леммы 3.1 со следующим исключением: уравнение Рикатти (3.1) выполнено приближенно.

Прежде всего мы обсудим некоторые вопросы, касающиеся процедуры сглаживания сечений векторного расслоения.

Пусть $\pi : E \to N$ — гладкое m-мерное векторное расслоение над компактным многообразием N. Выберем конечный атлас $\{U_a, \varphi_a\}_{a=1}^{A}$ многообразия N, подчиненное ему разбиение единицы $\{\mu_a\}_{a=1}^{A}$ и локальные тривиализации $(e_1^a, \dots, e_m^a)$ расслоения над U_a (т. е. $e_\alpha^a \in C^\infty(E; U_a)$ и векторы $e_1^a(x), \dots, e_m^a(x)$ составляют базис в слое E_x над каждой точкой $x \in U_a$). Произвольное сечение $f \in C^\infty(E)$ может быть единственным образом представлено в виде

$$f(x) = \sum_{\alpha=1}^{m} f_a^\alpha(x) e_\alpha^a(x), \quad x \in U_a. \tag{4.1}$$

Для $0 \le k < \infty$ пусть $C^k(E)$ обозначает пространство сечений f таких, что $(\mu_a f_a^\alpha) \circ \varphi_a^{-1} \in C^k(\mathbf{R}^n)$, с нормой

$$\|f\|_{C^k(E)} = \sum_{a=1}^{A} \sum_{\alpha=1}^{m} \|(\mu_a f_a^\alpha) \circ \varphi_a^{-1}\|_{C^k(\mathbf{R}^n)}.$$

С точностью до эквивалентности норма не зависит от выбора атласа, разбиения единицы и тривиализаций.

Пусть $H \in C^\infty(\tau_N)$ — произвольное гладкое векторное поле на N. Фиксируя произвольную связность на E, мы можем определить производную Hf сечения f по связности H. Говорим, что сечение $f \in C(E)$ *дифференцируемо* вдоль связности H, если производная Hf существует и принадлежит $C(E)$. Тогда определена норма $\|Hf\|_{C(E)}$, которая не зависит, с точностью до эквивалентности, от выбора связности.

Лемма 4.1. *Пусть $H \in C^\infty(\tau_N)$ — гладкое векторное поле на компактном многообразии N, не обращающееся в нуль ни в какой точке, и пусть E — гладкое векторное расслоение над N. Зафиксируем C-норму в $C(E)$ и связность на E. Для произвольного сечения $f \in C(E)$, дифференцируемого вдоль H, и для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое гладкое сечение*

$\widetilde{f} \in C^\infty(E)$, *что*

$$\|f - \widetilde{f}\|_{C(E)} < \varepsilon, \quad \|H(f - \widetilde{f})\|_{C(E)} < \varepsilon.$$

Доказательство. Назовем карту (U, φ) многообразия N *спрямляющей* векторное поле H, если $\varphi_* H$ совпадает с координатным векторным полем $\partial/\partial x^1$ на образе $\varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$. Существует конечный атлас $\{U_a, \varphi_a\}_{a=1}^A$, состоящий из спрямляющих карт [18]. Выберем разбиение единицы, подчиненное этому атласу, и зафиксируем тривиализации E над U_a. Для данного сечения $f \in C(E)$, дифференцируемого вдоль H, запишем представление (4.1) для f. Тогда для всех a и α функция $\widetilde{f}_a^\alpha = (\mu_a f^\alpha) \circ \varphi_a^{-1}$ является непрерывной и финитной функцией на $\mathbf{R}^n$ с непрерывной производной $\partial \widetilde{f}_a^\alpha / \partial x^1$.

Зафиксируем такую неотрицательную функцию $\lambda \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, что $\int_{\mathbf{R}^n} \lambda\, dx = 1$, и положим $\lambda_\delta(x) = \lambda(x/\delta)/\delta^n$ для $\delta > 0$. Для всех индексов a и α функция $\overset{\delta}{f}{}_a^\alpha = \widetilde{f}_a^\alpha * \lambda_\delta$ является C^∞-гладкой на $\mathbf{R}^n$, и $\operatorname{supp} \overset{\delta}{f}{}_a^\alpha \subset \varphi_a(U_a)$ для достаточно малых δ. Разности $\overset{\delta}{f}{}_a^\alpha - \widetilde{f}_a^\alpha$ и $\partial(\overset{\delta}{f}{}_a^\alpha - \widetilde{f}_a^\alpha)/\partial x^1$ стремятся к нулю равномерно на $\mathbf{R}^n$ при $\delta \to 0$. Следовательно, сечение

$$\widetilde{f} = \sum_{a=1}^{A} \sum_{\alpha=1}^{m} \mu_a (\overset{\delta}{f}{}_a^\alpha \circ \varphi_a) e_\alpha^a$$

обладает всеми нужными свойствами для достаточно малых $\delta > 0$. Лемма доказана. $\square$

Для многообразия Аносова (M, g) обозначим через $\beta_2^0 M|_{\Omega M}$ сужение расслоения $\beta_2^0 M$ на компактное многообразие $N = \Omega M$. Пусть E — подрасслоение $\beta_2^0 M|_{\Omega M}$, состоящее из полубазисных тензоров $f = (f_{ij})$, удовлетворяющих условиям $f_{ij} = f_{ji}$ и $\xi^i f_{ij} = 0$. Обозначим через $\overset{s}{\alpha}, \overset{u}{\alpha} \in C(E)$ сечения, построенные в лемме 3.1, и обозначим через H векторное поле на ΩM, ассоциированное с геодезическим потоком. Применяя лемму 4.1 к $\overset{s}{\alpha}$ и $\overset{u}{\alpha}$ и продолжая полученные гладкие поля на $T^0 M$ по однородности, придем к следующему утверждению.

Лемма 4.2. *Пусть (M, g) — многообразие Аносова размерности n. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся гладкие полубазисные векторные поля $\overset{s}{a} = (\overset{s}{a}_{ij}(x, \xi)) \in C^\infty(\beta_2^0 M; T^0 M)$ и $\overset{u}{a} = (\overset{u}{a}_{ij}(x, \xi)) \in C^\infty(\beta_2^0 M; T^0 M)$ такие, что*

(1) *поля симметричны:*

$$\overset{s}{a}_{ij} = \overset{s}{a}_{ji}, \quad \overset{u}{a}_{ij} = \overset{u}{a}_{ji}$$

и ортогональны вектору ξ:

$$\xi^i \overset{s}{a}_{ij}(x, \xi) = 0, \quad \xi^i \overset{u}{a}_{ij}(x, \xi) = 0;$$

(2) *поля положительно однородны степени 1 по ξ:*

$$\overset{s}{a}(x, t\xi) = t\, \overset{s}{a}(x, \xi), \quad \overset{u}{a}(x, t\xi) = t\, \overset{u}{a}(x, \xi) \quad \text{для} \quad t > 0;$$

(3) *ранг матрицы* $(\overset{s}{a}_{ij} - \overset{u}{a}_{ij})$ *равен* $n-1$ *в каждой точке* $(x,\xi) \in T^0M$;

(4) *вдоль каждой геодезической* $\gamma : \mathbf{R} \to M$ *с единичным вектором скорости поля* $\overset{s}{a}{}^i_j(t) = (g^{ik}\overset{s}{a}_{kj})(\gamma(t),\dot\gamma(t))$ *и* $\overset{u}{a}{}^i_j(t) = (g^{ik}\overset{u}{a}_{kj})(\gamma(t),\dot\gamma(t))$ *удовлетворяют неравенству*

$$|a' + a^2 + R| < \varepsilon$$

для всех $t \in \mathbf{R}$.

5 Модифицированные горизонтальные производные $\overset{s}{\nabla}$ и $\overset{u}{\nabla}$

В этом параграфе для риманова многообразия (M,g) мы используем вертикальные и горизонтальные производные $\overset{v}{\nabla}, \overset{h}{\nabla}: C^\infty(\beta^r_s M) \to C^\infty(\beta^r_{s+1} M)$, определение которых может быть найдено в главе 3 книги [3] (см. также [17]). Метрика g порождает канонический изоморфизм $\beta^r_s M \cong \beta^{r+s}_0 M \cong \beta^0_{r+s} M$, и мы будем иногда отождествлять эти расслоения по этому изоморфизму.

Теперь мы напомним конструкцию модифицированной горизонтальной производной согласно главе 8 книги [3] и [11]. *Модифицирующий тензор* — это полубазисное тензорное поле $a = (a^{ij}(x,\xi)) \in C^\infty(\beta^2_0 M)$, которое симметрично, $a^{ij} = a^{ji}$, ортогонально ξ, $\xi_i a^{ij}(x,\xi) = 0$, и положительно однородно степени 1 относительно ξ. Если задано такое поле, то *модифицированная горизонтальная производная* определяется как дифференциальный оператор первого порядка

$$\overset{a}{\nabla} : C^\infty(\beta^r_s M) \to C^\infty(\beta^{r+1}_s M),$$

записываемый в локальных координатах следующим образом. Для $u = (u^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}) \in C^\infty(\beta^r_s M)$

$$\overset{a}{\nabla}{}^k u^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} = \overset{h}{\nabla}{}^k u^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} + a^{kp}\overset{v}{\nabla}_p u^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}$$
$$- \sum_{\alpha=1}^{r} \overset{v}{\nabla}_p a^{ki_\alpha} \cdot u^{i_1\dots i_{\alpha-1} p i_{\alpha+1}\dots i_r}_{j_1\dots j_s} + \sum_{\alpha=1}^{s} \overset{v}{\nabla}_{j_\alpha} a^{kp} \cdot u^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_{\alpha-1} p j_{\alpha+1}\dots j_s}. \tag{5.1}$$

В отличие от обычной горизонтальной производной, метрический тензор g уже не является параллельным относительно $\overset{a}{\nabla}$. Именно по этой причине k является верхним индексом в определении (5.1). Тем не менее мы будем также использовать оператор $\overset{a}{\nabla}_k = g_{kl}\overset{a}{\nabla}{}^l$.

Так как модифицирующий тензор ортогонален ξ, геодезическое векторное поле, рассматриваемое как дифференциальный оператор $H : C^\infty(TM) \to C^\infty(TM)$, может быть записано в терминах $\overset{a}{\nabla}$ следующим образом:

$$Hu = \xi_k \overset{a}{\nabla}{}^k u \quad (u \in C^\infty(TM)). \tag{5.2}$$

Тензор кривизны $\overset{a}{R} = (\overset{a}{R}_{ijkl}\ (x,\xi)) \in C^\infty(\beta_4^0 M)$, соответствующий $\overset{a}{\nabla}$, определяется формулой

$$\overset{a}{R}_{ijkl} = R_{ijkl} + \overset{h}{\nabla}_l \overset{v}{\nabla}_j a_{ik} - \overset{h}{\nabla}_k \overset{v}{\nabla}_j a_{il}$$
$$+ a_{lp}\overset{v}{\nabla}{}^p \overset{v}{\nabla}_j a_{ik} - a_{kp}\overset{v}{\nabla}{}^p \overset{v}{\nabla}_j a_{il} + \overset{v}{\nabla}{}^p a_{ik} \cdot \overset{v}{\nabla}_j a_{lp} - \overset{v}{\nabla}{}^p a_{il} \cdot \overset{v}{\nabla}_j a_{kp},$$

где (R_{ijkl}) — риманов тензор кривизны. Эта формула влечет тождество

$$\overset{a}{R}_{ijkl}\ \xi^j \xi^l = (Ha)_{ik} + a_i^l a_{kl} + R_{ijkl}\xi^j\xi^l. \tag{5.3}$$

Теперь предположим, что (M,g) — многообразие Аносова, и рассмотрим полубазисное тензорное поле $\overset{s}{a}$ $(\overset{u}{a})$, построенное в лемме 4.2. Полагая $a = \overset{s}{a}$ $(\overset{u}{a})$ в (5.1), определим модифицированную горизонтальную производную на $C^\infty(\beta_s^r M; T^0 M)$, обозначая ее через $\overset{s}{\nabla}$ $(\overset{u}{\nabla})$. Для соответствующего тензора кривизны используем символ $\overset{s}{R}$ $(\overset{u}{R})$.

Сравнение (5.3) с п. 4 леммы 4.2 приводит к следующему важному наблюдению: для произвольных полубазисных векторных полей $v, w \in C^\infty(\beta_0^1 M)$ выполнены следующие равномерные оценки на ΩM:

$$|\overset{s}{R}_{ijkl}\xi^i\xi^k v^j w^l| < \varepsilon |v||w|, \quad |\overset{u}{R}_{ijkl}\xi^i\xi^k v^j w^l| < \varepsilon |v||w|. \tag{5.4}$$

Из п. 3 леммы 4.2 следует, что набор

$$\overset{s}{\nabla}{}^i u, \quad \overset{u}{\nabla}{}^i u\ (i = 1,\dots,n), \quad \xi^k \overset{v}{\nabla}_k u$$

является полным набором производных функции $u \in C^\infty(T^0 M)$, т. е. каждая производная первого порядка функции u может быть получена как линейная комбинация элементов данного набора. Более точно, имеет место следующее утверждение.

Лемма 5.1. *Для произвольной функции $u \in C^\infty(T^0 M)$ выполнены оценки*

$$|\overset{v}{\nabla} u - \langle \xi, \overset{v}{\nabla} u\rangle \xi| \le C(|\overset{s}{\nabla} u| + |\overset{u}{\nabla} u|), \tag{5.5}$$

$$|\overset{h}{\nabla} u| \le C(|\overset{s}{\nabla} u| + |\overset{u}{\nabla} u|) \tag{5.6}$$

на ΩM с постоянными C, не зависящими от u.

Доказательство. Достаточно рассмотреть функции u с носителем в области определения $U \subset T^0 M$ некоторой координатной карты. Полубазисное векторное поле $y = \overset{v}{\nabla} u - \langle \xi, \overset{v}{\nabla} u\rangle \xi$ ортогонально ξ на ΩM. По определению модифицированных производных имеем

$$\overset{s}{\nabla}{}^i u = \overset{h}{\nabla}{}^i u + \overset{s}{a}{}^{ij} \overset{v}{\nabla}_j u, \quad \overset{u}{\nabla}{}^i u = \overset{h}{\nabla}{}^i u + \overset{u}{a}{}^{ij} \overset{v}{\nabla}_j u. \tag{5.7}$$

Подставляя $\overset{v}{\nabla}_j u = y_j + \langle \xi, \overset{v}{\nabla} u\rangle \xi_j$ в эти равенства и используя ортогональность $\overset{s}{a}$ и $\overset{u}{a}$ вектору ξ, получим

$$\overset{s}{\nabla}{}^i u = \overset{h}{\nabla}{}^i u + \overset{s}{a}{}^{ij} y_j, \quad \overset{u}{\nabla}{}^i u = \overset{h}{\nabla}{}^i u + \overset{u}{a}{}^{ij} y_j.$$

Следовательно,
$$(\overset{s}{a}{}^{ij} - \overset{u}{a}{}^{ij})y_j = \overset{s}{\nabla}{}^i u - \overset{u}{\nabla}{}^i u. \tag{5.8}$$
Согласно пп. 1 и 3 леммы 4.2 оператор $\overset{s}{a} - \overset{u}{a}$ является автоморфизмом пространства $N_{(x,\xi)} = \{\eta \in T_xM \mid \langle \xi, \eta \rangle = 0\}$. Выражение в правой части (5.8) принадлежит этому пространству, так как $\langle \xi, \overset{s}{\nabla} u - \overset{u}{\nabla} u \rangle = \xi_i \overset{s}{\nabla}{}^i u - \xi_i \overset{u}{\nabla}{}^i u = Hu - Hu = 0$. Следовательно, уравнение (5.8) имеет единственное решение
$$y_i = c_{ij}(\overset{s}{\nabla}{}^j u - \overset{u}{\nabla}{}^j u),$$
причем коэффициенты c_{ij} являются гладкими функциями на U, не зависящими от u. Из этого факта извлекаем (5.5). Оценка (5.6) следует из (5.5) и (5.7). Лемма доказана. □

Если $u \in C^\infty(\beta^r_s M; T^0M)$ — полубазисное тензорное поле, то далее полагаем
$$\|u\|^2_{L_2} = \int\limits_{\Omega M} |u(x,\xi)|^2 \, d\Sigma(x,\xi), \quad \|u\|^2_{H^1} = \|u\|^2_{L_2} + \|\overset{h}{\nabla} u\|^2_{L_2} + \|\overset{v}{\nabla} u\|^2_{L_2},$$
где $d\Sigma(x,\xi) = d\omega_x(\xi) \wedge dV^n(x)$ — симплектическая форма объема на ΩM. Лемма 5.1 имеет следующее следствие.

Следствие 5.2. *Нормы $\|u\|_{H^1}$ и $(\|\overset{s}{\nabla} u\|^2_{L_2} + \|\overset{u}{\nabla} u\|^2_{L_2} + \|u\|^2_{L_2})^{1/2}$ эквивалентны на пространстве функций $u(x,\xi) \in C^\infty(T^0M)$, положительно однородных относительно ξ с одинаковой степенью однородности.*

Действительно, $\langle \xi, \overset{v}{\nabla} u \rangle = \lambda u$, если u — однородная функция степени λ.

Замечание 5.3. Числа ε и C в (5.4)–(5.6) не зависят друг от друга в следующем смысле: значение ε может быть выбрано как угодно малым при фиксированном значении C. В самом деле, C полностью определяется непрерывными полями $\overset{s}{\alpha}$ и $\overset{u}{\alpha}$ из леммы 3.1, в то время как ε зависит от порядка аппроксимации этих полей гладкими полями.

6 Доказательство леммы 2.1 и теорем 1.10, 1.11

Доказательство леммы 2.1. Пусть тензорное поле $f \in C^\infty(S^m \tau'_M)$ и функция $u \in C^\infty(\Omega M)$ удовлетворяют уравнению (2.1). Продолжим u до функции на T^0M, положительно однородной степени $m-1$ относительно ξ. Тогда уравнение (2.1) выполнено на T^0M. Ввиду (5.2), это уравнение может быть переписано следующим образом:
$$Hu = \xi_k \overset{s}{\nabla}{}^k u = \xi_k \overset{u}{\nabla}{}^k u = \langle f(x), \xi^m \rangle. \tag{6.1}$$

Для модифицированной горизонтальной производной $\overset{s}{\nabla}$ имеем следующее *тождество Пестова* (см. § 8.2 в [3] или [11]):
$$2\langle \overset{s}{\nabla} u, \overset{v}{\nabla} Hu \rangle = |\overset{s}{\nabla} u|^2 + \overset{s}{\nabla}{}^i v_i + \overset{v}{\nabla}_i w^i - \overset{s}{R}_{ijkl}\, \xi^i \xi^k \overset{v}{\nabla}{}^j u \cdot \overset{v}{\nabla}{}^l u, \tag{6.2}$$

где

$$v_i = \xi_i \overset{s}{\nabla}{}^j u \cdot \overset{v}{\nabla}_j u - \xi_j \overset{v}{\nabla}_i u \cdot \overset{s}{\nabla}{}^j u, \tag{6.3}$$

$$w^i = \xi_j \overset{s}{\nabla}{}^i u \cdot \overset{s}{\nabla}{}^j u. \tag{6.4}$$

Преобразуем левую часть тождества (6.2). Из (6.1) выводим

$$\overset{v}{\nabla}_k (Hu) = \overset{v}{\nabla}_k (\langle f(x), \xi^m \rangle) = m f_{k i_2 \dots i_m} \xi^{i_2} \dots \xi^{i_m}.$$

Так как $\overset{s}{\nabla}{}^i \xi_j = 0$, это влечет

$$2\langle \overset{s}{\nabla} u, \overset{v}{\nabla} Hu \rangle = 2m \overset{s}{\nabla}{}^i u \cdot f_{i i_2 \dots i_m} \xi^{i_2} \dots \xi^{i_m}$$
$$= \overset{s}{\nabla}{}^i (2mu f_{i i_2 \dots i_m} \xi^{i_2} \dots \xi^{i_m}) - 2mu \overset{s}{\nabla}{}^i (f_{i i_2 \dots i_m} \xi^{i_2} \dots \xi^{i_m}).$$

Вводя обозначение

$$\widetilde{v}_i = 2mu f_{i i_2 \dots i_m} \xi^{i_2} \dots \xi^{i_m},$$

получим

$$2\langle \overset{s}{\nabla} u, \overset{v}{\nabla} Hu \rangle = \overset{s}{\nabla}{}^i \widetilde{v}_i - 2mu \overset{s}{\nabla}{}^i (f_{i i_2 \dots i_m} \xi^{i_2} \dots \xi^{i_m}). \tag{6.5}$$

По определению модифицированной производной

$$\overset{s}{\nabla}{}^i (f_{i i_2 \dots i_m} \xi^{i_2} \dots \xi^{i_m}) = \overset{h}{\nabla}{}^i (f_{i i_2 \dots i_m} \xi^{i_2} \dots \xi^{i_m})$$
$$+ \overset{s}{a}{}^{ip} \overset{v}{\nabla}_p (f_{i i_2 \dots i_m} \xi^{i_2} \dots \xi^{i_m}) + \overset{v}{\nabla}_i \overset{s}{a}{}^{ip} \cdot (f_{p i_2 \dots i_m} \xi^{i_2} \dots \xi^{i_m}) =$$
$$(\delta f)_{i_2 \dots i_m} \xi^{i_2} \dots \xi^{i_m} + (m-1) \overset{s}{a}{}^{ip} f_{i p i_3 \dots i_m} \xi^{i_3} \dots \xi^{i_m} + \overset{v}{\nabla}_i \overset{s}{a}{}^{ip} \cdot f_{p i_2 \dots i_m} \xi^{i_2} \dots \xi^{i_m}.$$

Подставляя это выражение в (6.5), выводим

$$2\langle \overset{s}{\nabla} u, \overset{v}{\nabla} Hu \rangle = \overset{s}{\nabla}{}^i \widetilde{v}_i - 2mu (\delta f)_{i_2 \dots i_m} \xi^{i_2} \dots \xi^{i_m}$$
$$- 2m(m-1) \overset{s}{a}{}^{ip} u f_{i p i_3 \dots i_m} \xi^{i_3} \dots \xi^{i_m} - 2m \overset{v}{\nabla}_i \overset{s}{a}{}^{ip} \cdot u f_{p i_2 \dots i_m} \xi^{i_2} \dots \xi^{i_m}.$$

Используя это, преобразуем тождество Пестова (6.2) к виду

$$|\overset{s}{\nabla} u|^2 = \overset{s}{\nabla}{}^i (\widetilde{v}_i - v_i)$$
$$- \overset{v}{\nabla}_i w^i - 2mu (\delta f)_{i_2 \dots i_m} \xi^{i_2} \dots \xi^{i_m} - 2m(m-1) \overset{s}{a}{}^{ip} u f_{i p i_3 \dots i_m} \xi^{i_3} \dots \xi^{i_m}$$
$$- 2m \overset{v}{\nabla}_i \overset{s}{a}{}^{ip} \cdot u f_{p i_2 \dots i_m} \xi^{i_2} \dots \xi^{i_m} + \overset{s}{R}_{ijkl}\, \xi^i \xi^k \overset{v}{\nabla}{}^j u \cdot \overset{v}{\nabla}{}^l u. \tag{6.6}$$

По п. 4 леммы 4.2 и ввиду (5.4) последние три слагаемых в правой части (6.6) могут быть оценены поточечно в $(x, \xi) \in \Omega M$ следующим образом:

$$|\overset{s}{a}{}^{ip} u f_{i p i_3 \dots i_m} \xi^{i_3} \dots \xi^{i_m}| \le C|u||f|, \quad |\overset{v}{\nabla}_i \overset{s}{a}{}^{ip} \cdot u f_{p i_2 \dots i_m} \xi^{i_2} \dots \xi^{i_m}| \le C|u||f|,$$

$$|\overset{s}{R}_{ijkl} \xi^i \xi^k \overset{v}{\nabla}{}^j u \cdot \overset{v}{\nabla}{}^l u| < \varepsilon |\overset{v}{\nabla} u|^2,$$

где $C = \| \overset{s}{a} \|_{C^1}$. Теперь (6.6) дает неравенство

$$|\overset{s}{\nabla} u|^2 \le \overset{s}{\nabla}{}^i (\widetilde{v}_i - v_i) - \overset{v}{\nabla}_i w^i + C|u||f| + 2m|u||\delta f| + \varepsilon |\overset{v}{\nabla} u|^2, \tag{6.7}$$

которое справедливо на ΩM с некоторой новой постоянной C.

Проинтегрируем (6.7) по ΩM и преобразуем интегралы от дивергентных слагаемых по формулам Гаусса — Остроградского (теорема 3.6.3 и формула (8.2.30) в [3]). Интеграл от $\overset{s}{\nabla}{}^i(\widetilde{v}_i - v_i)$ равен нулю, так как ΩM — замкнутое многообразие. Интеграл от второго слагаемого неположителен. Действительно, имеем

$$-\int\limits_{\Omega M} \overset{v}{\nabla}_i w^i \, d\Sigma = -(n+2m-2) \int\limits_{\Omega M} \langle w, \xi \rangle \, d\Sigma = -(n+2m-2) \int\limits_{\Omega M} |Hu|^2 \, d\Sigma \leq 0,$$

где использовано равенство $\langle w, \xi \rangle = |Hu|^2$, вытекающее из (6.4). Интегрируя, (6.7) выводим неравенство

$$\|\overset{s}{\nabla} u\|^2_{L_2} \leq C(\|u\|_{L_2} \cdot \|f\|_{L_2} + \|u\|_{L_2} \cdot \|\delta f\|_{L_2}) + \varepsilon \|u\|^2_{H^1}. \tag{6.8}$$

Повторяя рассуждения для $\overset{s}{\nabla}$ вместо $\overset{u}{\nabla}$, получим следующий аналог неравенства (6.8):

$$\|\overset{u}{\nabla} u\|^2_{L_2} \leq C(\|u\|_{L_2} \cdot \|f\|_{L_2} + \|u\|_{L_2} \cdot \|\delta f\|_{L_2}) + \varepsilon \|u\|^2_{H^1}. \tag{6.9}$$

Используя следствие 5.2 и неравенства (6.8), (6.9), получаем

$$\|u\|^2_{H^1} \leq CC'(\|u\|_{L_2} \cdot \|f\|_{L_2} + \|u\|_{L_2} \cdot \|\delta f\|_{L_2}) + C'\|u\|^2_{L_2} + C'\varepsilon \|u\|^2_{H^1}. \tag{6.10}$$

Как было отмечено, значение ε может быть выбрано сколь угодно малым при некотором фиксированном значении C'. В частности, мы можем предполагать, что $C'\varepsilon < 1$. Тогда (6.10) можно переписать в виде

$$\|u\|^2_{H^1} \leq C(\|u\|_{L_2} \cdot \|f\|_{L_2} + \|u\|_{L_2} \cdot \|\delta f\|_{L_2} + \|u\|^2_{L_2}) \tag{6.11}$$

для некоторой новой постоянной C, не зависящей от u.

Кинетическое уравнение $Hu = \xi^i \overset{h}{\nabla}_i u = \langle f, \xi^m \rangle$ влечет оценку $\|f\|_{L_2} \leq C\|\overset{h}{\nabla} u\|_{L_2} \leq C\|u\|_{H^1}$, позволяющую нам переписать (6.11) в виде

$$\|u\|^2_{H^1} \leq C(\|u\|_{L_2} \cdot \|u\|_{H^1} + \|u\|_{L_2} \cdot \|\delta f\|_{L_2} + \|u\|^2_{L_2}). \tag{6.12}$$

Рассматривая (6.12) как квадратичное неравенство относительно $\|u\|_{H^1}$, видим, что оно влечет (2.2) для некоторой постоянной C. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1.10. Предположим, что интеграл от функция $f \in C^\infty(M)$ вдоль каждой геодезической равен нулю. Применяя теорему Лифшица, получим функцию $u \in C^\infty(\Omega M)$, удовлетворяющую кинетическому уравнению

$$Hu(x, \xi) = f(x) \tag{6.13}$$

в ΩM. Продолжим u на $T^0 M$ так, что $u(x, t\xi) = t^{-1} u(x, \xi)$ для $t > 0$. Тогда (6.13) выполнено на $T^0 M$. В нашем случае левая часть тождества Пестова

(6.2) тождественно равна нулю. Интегрирование этого тождества по ΩM дает

$$\|\overset{s}{\nabla}u\|^2_{L_2} + (n-2)\|Hu\|^2_{L_2} = \int\limits_{\Omega M} \overset{s}{R}_{ijkl}\ \xi^i\xi^k\overset{v}{\nabla}{}^j u \cdot \overset{v}{\nabla}{}^l u\, d\Sigma. \qquad (6.14)$$

Обозначим $y^i = \overset{v}{\nabla}{}^i u - \langle \xi, \overset{v}{\nabla} u\rangle \xi^i$. Используя симметрии тензора кривизны, получим

$$\overset{s}{R}_{ijkl}\ \xi^i\xi^k\overset{v}{\nabla}{}^j u \cdot \overset{v}{\nabla}{}^l u = \overset{s}{R}_{ijkl}\ \xi^i\xi^k y^j y^l.$$

Ввиду (5.4) и (5.5) это влечет оценку

$$|\ \overset{s}{R}_{ijkl}\ \xi^i\xi^k\overset{v}{\nabla}{}^j u \cdot \overset{v}{\nabla}{}^l u| \le \varepsilon |y|^2 \le C\varepsilon(|\overset{s}{\nabla}u|^2 + |\overset{u}{\nabla}u|^2).$$

Вместе с (6.14) последняя оценка дает

$$\|\overset{s}{\nabla}u\|^2_{L_2} \le C\varepsilon(\|\overset{s}{\nabla}u\|^2_{L_2} + \|\overset{u}{\nabla}u\|^2_{L_2}). \qquad (6.15)$$

Аналогично выводим оценку

$$\|\overset{u}{\nabla}u\|^2_{L_2} \le C\varepsilon(\|\overset{s}{\nabla}u\|^2_{L_2} + \|\overset{u}{\nabla}u\|^2_{L_2}). \qquad (6.16)$$

Выбирая ε столь малым, что $C\varepsilon < 1/2$, из неравенств (6.15) и (6.16) получаем $\overset{s}{\nabla}u = \overset{u}{\nabla}u = 0$. Следовательно, $f = \xi_i\overset{s}{\nabla}{}^i u = 0$. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 1.11. В этом случае кинетическое уравнение выглядит следующим образом:

$$Hu(x,\xi) = f_i(x)\xi^i, \qquad (6.17)$$

а $\overset{v}{\nabla}Hu = f$. Поэтому тождество Пестова (6.2) принимает вид

$$2\langle\overset{s}{\nabla}u, f\rangle = |\overset{s}{\nabla}u|^2 + \overset{s}{\nabla}{}^i v_i + \overset{v}{\nabla}_i w^i - \overset{s}{R}_{ijkl}\ \xi^i\xi^k\overset{v}{\nabla}{}^j u \cdot \overset{v}{\nabla}{}^l u.$$

Интегрирование по ΩM дает

$$\|\overset{s}{\nabla}u\|^2_{L_2} - 2(\overset{s}{\nabla}u, f)_{L_2} + n\|Hu\|^2_{L_2} = \int\limits_{\Omega M} \overset{s}{R}_{ijkl}\ \xi^i\xi^k\overset{v}{\nabla}{}^j u \cdot \overset{v}{\nabla}{}^l u\, d\Sigma. \qquad (6.18)$$

Из (6.17) получим

$$\|Hu\|^2_{L_2} = \int\limits_{\Omega M} f_i(x)f_j(x)\xi^i\xi^j\, d\Sigma(x,\xi)$$

$$= \int\limits_{M} f_i(x)f_j(x)\left[\ \int\limits_{\Omega_x M} \xi^i\xi^j\, d\omega_x(\xi)\right] dV^n(x) = \frac{1}{n}\|f\|^2_{L_2}.$$

Теперь (6.18) принимает вид

$$\|\overset{s}{\nabla}u - f\|_{L_2}^2 = \int\limits_{\Omega M} \overset{s}{R}_{ijkl}\, \xi^i \xi^k \overset{v}{\nabla}{}^j u \cdot \overset{v}{\nabla}{}^l u\, d\Sigma.$$

Оценивая интеграл в правой части (5.4), получим

$$\|\overset{s}{\nabla}u - f\|_{L_2}^2 \le \varepsilon C \|\overset{v}{\nabla}u\|_{L_2}^2. \tag{6.19}$$

Повторяя рассуждения для $\overset{u}{\nabla}$ вместо $\overset{s}{\nabla}$, выведем аналогичное неравенство

$$\|\overset{u}{\nabla}u - f\|_{L_2}^2 \le \varepsilon C \|\overset{v}{\nabla}u\|_{L_2}^2. \tag{6.20}$$

Устремим ε в (6.19) и (6.20) к нулю. Векторные поля f и $\overset{v}{\nabla}u$ не зависят от ε. Постоянная C также не зависит от ε. Поля $\overset{s}{\nabla}u$ и $\overset{u}{\nabla}u$ стремятся соответственно к

$$\overset{s}{\nabla}_i u = \overset{h}{\nabla}_i u + \overset{s}{\alpha}{}_i^p \overset{v}{\nabla}_p u, \quad \overset{u}{\nabla}_i u = \overset{h}{\nabla}_i u + \overset{u}{\alpha}{}_i^p \overset{v}{\nabla}_p u, \tag{6.21}$$

где $\overset{s}{\alpha}$ и $\overset{u}{\alpha}$ — непрерывные тензорные поля из леммы 3.1. Переходя к пределу в (6.19) и (6.20) при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\overset{s}{\nabla}_i u = f_i = \overset{u}{\nabla}_i u. \tag{6.22}$$

Теперь равенства (6.21) дают

$$(\overset{s}{\alpha}{}_i^p - \overset{u}{\alpha}{}_i^p) \overset{v}{\nabla}_p u = 0. \tag{6.23}$$

В нашем случае функция $u(x, \xi)$ положительно однородна нулевой степени, поэтому

$$\xi^k \overset{v}{\nabla}_k u = 0. \tag{6.24}$$

Ввиду п. 3 леммы 3.1, из (6.23) и (6.24) выводим, что $\overset{v}{\nabla}u = 0$, т. е. функция u не зависит от ξ: $u = u(x)$. Равенства (6.21) и (6.22) теперь принимают вид $f_i = \overset{h}{\nabla}_i u = \partial u / \partial x^i$. Следовательно, f — точная форма: $f = du$, что завершает доказательство теоремы. □

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. В. Аносов, Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. Москва: Наука (АН СССР, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, Т. 90), 1967. Zbl 0163.43604

[2] V. Guillemin, D. Kazhdan, Some inverse spectral results for negatively curved 2-manifolds // Topology. 1980. V. 19. P. 301–312. Zbl 0465.58027

[3] V. A. Sharafutdinov, Integral Geometry of Tensor Fields. VSP, Utrecht, the Netherlands, 1994. Zbl 0883.53004

[4] A. Besse, Einstein Manifolds. Springer-Verlag, New York, 1987. Zbl 0613.53001

[5] C. B. Croke, V. A. Sharafutdinov, Spectral rigidity of a negatively curved manifold // Topology. 1998. V. 37, No. 6, P. 1265–1273. Zbl 0936.58013

[6] V. Guillemin, D. Kazhdan, Some inverse spectral results for negatively curved n-manifolds // Proceedings of Symposia in Pure Math. 1980. V. 36. P. 153–180. Zbl 0456.58031

[7] M. Min-Oo, Spectral rigidity for manifolds with negative curvature operator // Contemp. Math. 1986. V. 51. P. 99–103. Zbl 0591.53041

[8] R. Michel, Les tenseurs symétriques dont l'énergie est nulle toutes les géodésiques des espaces symétriques de rang 1 // J. Mat. Pures Appl. 1974. V. 45. P. 271–278. Zbl 0302.53023

[9] R. Michel, Tenseurs symétriques et geodesiques // C. R. Acad. Sci. Sér I Math. 1977. V. 284. P. 1065–1068. Zbl 0346.53032

[10] V. A. Sharafutdinov, Finiteness theorem for the ray transform on a Riemannian manifold // Inverse Problems. 1995. V. 11. P. 1039–1050. Zbl 0839.53052

[11] В. А. Шарафутдинов, Модифицированная горизонтальная производная и некоторые ее применения // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, N 3. С. 664–700. Zbl 0865.53061

[12] E. Hopf, Closed surfaces without conjugate points // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1948. V. 34. P. 47–51. Zbl 0030.07901

[13] L. W. Green, A theorem of E. Hopf // Michigan Math. J. 1958. V. 5. P. 31–34. Zbl 0134.39601

[14] J.-H. Eschenburg, Horospheres and the stable part of the geodesic flow // Math. Z. 1977. V. 153. P. 237–251. Zbl 0338.53029

[15] P. Eberlein, When is a geodesic flow of Anosov type? I // J. Differential Geometry. 1973. V. 8. P. 437–463. Zbl 0285.58008

[16] R. de la Llave, J. M. Marco, R. Moriyon, Canonical perturbation theory of Anosov Systems and regularity results for the Livsic cohomology equation // Annals of Math. 1986. V. 123. P. 537–611. Zbl 0603.58016

[17] Л. Н. Пестов, В. А. Шарафутдинов, Интегральная геометрия тензорных полей на многообразии отрицательной кривизны // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, №6. С. 114–130. Zbl 0659.53051

[18] В. И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: Наука, 1984. Zbl 0577.34001

Институт математики им. С. Л. Соболева, г. Новосибирск
e-mail: dair@math.nsc.ru
sharaf@math.nsc.ru