Труды конференции «Геометрия и приложения»
13 – 16 марта 2000 г., Новосибирск

ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ МНОЖЕСТВА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Е. А. Фоминых [1]

1 Введение

Теория нормальных поверхностей Хакена играет важную роль в топологии трехмерных многообразий. Она лежит в основе таких знаменитых алгоритмов, как алгоритмы распознавания тривиального узла [1], многообразия Хакена [2], трехмерной сферы [3, 4]. Множество поверхностей в компактном трехмерном многообразии M, нормальных по отношению к заданному разбиению многообразия M на ручки, относительно операции сложения образует частичный коммутативный моноид. Минимальный набор образующих этого моноида составляют фундаментальные поверхности. Известно [1], что множество фундаментальных поверхностей конечно и может быть построено алгоритмически.

Стандартный способ нахождения фундаментальных поверхностей состоит в следующем. Каждой нормальной поверхности сопоставляется вектор с целыми неотрицательными координатами, определяемый пересечением поверхности с ручками индекса 0. Каждый такой вектор является решением конечной системы $\mathcal{L}$ линейных однородных уравнений. При этом система $\mathcal{L}$ зависит только от разбиения многообразия на ручки. Векторы, соответствующие фундаментальным поверхностям, являются фундаментальными решениями системы $\mathcal{L}$ в классе всех целых неотрицательных решений.

Практическая реализация данного подхода весьма затруднительна даже для самых простых разбиений на ручки. Причина состоит в том, что число неизвестных и число уравнений системы довольно велико. Кроме того, среди фундаментальных решений много лишних, которые не реализуются нормальными поверхностями.

В данной работе мы рассматриваем две бесконечные серии 3-многообразий: линзовые пространства $L_{p,q}$ и обобщенные пространства кватернионов S^3/Q_{4n}. Для каждого многообразия выбирается разбиение на ручки, индуцированное его псевдо-минимальным специальным спайном (см. [7]).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 99-01-00813), Университеты России (992742) и INTAS (97-808)

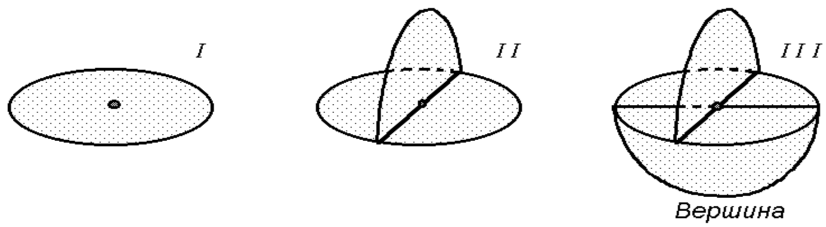

Рис. 1: Допустимые окрестности точек простого полиэдра

Оказалось, что фундаментальные поверхности в этих многообразиях находятся в биективном соответствии со связными простыми подполиэдрами специального спайна. По-видимому, это первый пример полного описания фундаментальных поверхностей для бесконечных серий многообразий.

Автор благодарит С.В. Матвеева за постановку задачи и внимание к работе.

2 Чистые k-нормальные поверхности

Напомним основные определения. Компактный двумерный полиэдр P называется *простым*, если линк каждой его точки гомеоморфен окружности, окружности с диаметром или окружности с тремя радиусами. Типичные окрестности точек простого полиэдра изображены на рис. 1. Объединение сингулярных (т.е. имеющих тип II и III) точек простого полиэдра P называется его *сингулярным графом*. Из каждой вершины сингулярного графа исходят (с учетом кратности) ровно четыре ребра. Компоненты связности множества несингулярных точек простого полиэдра P называются *2-компонентами*. Простой полиэдр называется *специальным*, если он имеет хотя бы одну вершину и все его 2-компоненты являются клетками.

Пусть M — компактное трехмерное многообразие с краем. Специальный полиэдр $P \subset M$ называется *специальным спайном* многообразия M, если разность $M \setminus P$ гомеоморфна $\partial M \times (0, 1]$.

Пусть P — специальный спайн многообразия M. Разобьем многообразие M на ручки. В качестве ручек индекса 0 возьмем регулярные окрестности вершин спайна P, ручек индекса 1 — относительные регулярные окрестности оставшихся частей ребер, и ручек индекса 2 — относительные регулярные окрестности оставшихся частей 2-компонент. Полученное разбиение обозначим через $\beta(P)$. Ручки индексов $0, 1, 2$ будем называть соответственно *шарами*, *балками* и *плитками*. Пересечения краев шаров с балками называются *островами*, с плитками - *мостами*.

Пусть k — натуральное число. Замкнутая поверхность $F \subset M$ называется *k-нормальной* по отношению к разбиению $\beta(P)$, если:

1) пересечение поверхности F с каждой плиткой $D^2 \times I$ либо пусто, либо состоит из нескольких параллельных копий диска D^2, т.е. имеет вид $D^2 \times \{x_1, \dots, x_n\}$, где x_i — отдельные внутренние точки отрезка I и $n \geq 1$;

2) пересечение поверхности F с каждой балкой $D^2 \times I$ состоит из полосок вида $l \times I$, где l — дуга в D^2 с концами на ∂D^2 (диск D^2 можно отождествить с островом $D^2 \times \{0\}$);

3) концы каждой дуги l принадлежат различным компонентам связности пересечения края острова с мостами;

4) пересечение поверхности F с каждым шаром состоит из дисков (эти диски называются *элементарными*);

5) пересечение каждого элементарного диска с каждым мостом либо пусто, либо состоит из не более чем k дуг с концами на тех островах, которые соединяет рассматриваемый мост.

Пусть F — k-нормальная поверхность. Каждой плитке разбиения $\beta(P)$ сопоставим число (*плиточную степень*), показывающее, сколько раз поверхность проходит по плитке.

Определение 1. k-нормальная поверхность F называется *чистой*, если степени плиток, примыкающих к каждой балке разбиения $\beta(P)$, удовлетворяют одному из следующих условий:

1) имеется плитка степени 0;

2) степень каждой плитки меньше 3;

3) степень каждой плитки меньше суммы степеней двух других плиток.

Замечание. Прокомментируем данное определение. Рассмотрим произвольную k-нормальную поверхность $F \subset M$. В каждой плитке, пересекаемой поверхностью F, диски $D^2 \times \{x_1\}$ и $D^2 \times \{x_n\}$ назовем *внешними*, а все остальные диски — *внутренними*. Если $n = 1$, то плитка содержит только один внешний диск. Каждая полоска $l \times I$ по краю $\partial l \times I$ примыкает к краям плиточных дисков. Будем называть полоску *внешней*, если она примыкает только к внешним плиточным дискам, *внутренней* — если только к внутренним, и *смешанной*, если она примыкает и к внешнему и к внутреннему плиточным дискам. Смысл определения 1 состоит в том, что каждая полоска чистой поверхности является либо внешней, либо внутренней, т.е. смешанных полосок нет.

Теорема 1. *Пусть P — специальный спайн 3-многообразия M, и пусть $\beta(P)$ — отвечающее ему разбиение на ручки. Тогда любая связная чистая поверхность $F \subset M$ пересекает каждую плитку разбиения $\beta(P)$ не более двух раз.*

Доказательство. Рассмотрим в поверхности F две непересекающиеся подповерхности с краем. Поверхность F_1' образуют все внешние плиточные диски и полоски, поверхность F_2' — все внутренние. Так как поверхность F чистая (т.е. смешанных полосок нет), то множество $F \setminus (F_1' \cup F_2')$ состоит их открытых элементарных дисков, лежащих в шарах разбиения $\beta(P)$. Добавив к поверхности F_1' примыкающие к ней элементарные диски, мы получим замкнутую поверхность $F_1 \subseteq F$. Так как поверхность F связна, то поверхность F_1 совпадает с поверхностью F, следовательно, $F_2' = \emptyset$.

Итак, поверхность F пересекает плитки разбиения $\beta(P)$ только по внешним дискам. Так как каждая плитка разбиения $\beta(P)$ содержит не более двух внешних дисков поверхности F, то поверхность F пересекает каждую плитку не более двух раз. Теорема 1 доказана. $\square$

3 Фундаментальные поверхности и простые подполиэдры специального спайна

Следуя Хакену, 1-нормальные поверхности называются просто *нормальными*. В дальнейшем мы будем рассматривать только нормальные поверхности.

Опишем стандартную частичную операцию сложения на множестве $\mathcal{N}$ всех нормальных поверхностей (разбиение на ручки произвольное). Пусть поверхности $F_1, F_2 \in \mathcal{N}$ можно реализовать так, чтобы их элементарные диски не имели общих точек. Тогда пересечение поверхностей есть (возможно пустой) набор попарно различных двойных замкнутых кривых, лежащих в балках и плитках разбиения. Будем интерпретировать объединение $F_1 \cup F_2$ как сингулярную поверхность. Вдоль каждой двойной кривой l выполним операцию разрезания-склеивания, которая состоит в разрезании сингулярной поверхности вдоль кривой l и склеивании полученных частей так, чтобы пересечение исчезло. Заметим, что эту операцию (а именно, склеивание) можно выполнить двумя способами. Мы используем так называемые регулярные разрезания-склеивания, приводящие к новой нормальной поверхности $F = F_1 + F_2$. Хорошо известно, что относительно операции сложения множество $\mathcal{N}$ является частичным коммутативным моноидом.

Нормальная поверхность называется *фундаментальной*, если ее нельзя представить в виде суммы двух непустых нормальных поверхностей. Множество $\mathcal{F}$ всех фундаментальных поверхностей является минимальной системой образующих моноида $\mathcal{N}$.

Изотопия многообразия M называется *нормальной*, если она инвариантна на каждой ручке разбиения $\beta(P)$. Нормальные поверхности, которые можно перевести друг в друга с помощью нормальной изотопии, считаются одинаковыми.

Пусть P — специальный спайн 3-многообразия M, и пусть $\beta(P)$ — отвечающее ему разбиение на ручки. Обозначим через $\mathcal{C}(P)$ множество всех связных простых подполиэдров специального спайна P. Построим отображение $\psi\colon \mathcal{C}(P) \to \mathcal{N}$. Если связный простой полиэдр $P' \subseteq P$ является поверхностью, то поверхность $\psi(P')$ нормально изотопна полиэдру P'. Если же полиэдр $P' \in \mathcal{C}(P)$ отличен от поверхности, то поверхность $\psi(P')$ нормально изотопна краю регулярной окрестности этого полиэдра.

Определение 2. Чистая поверхность F называется *уравновешенной*, если на каждой балке разбиения $\beta(P)$, пересекаемой поверхностью F, выполнено следующее условие: степени двух плиток, примыкающих к балке, равны, и не меньше, чем степень третьей плитки.

Определение 3. Специальный спайн P многообразия M будем называть *уравновешенным*, если любая поверхность, нормальная по отношению к разбиению $\beta(P)$, является уравновешенной.

Теорема 2. *Пусть P — уравновешенный специальный спайн 3-многообразия M, и пусть $\beta(P)$ — отвечающее ему разбиение на ручки. Тогда отображение ψ определяет биекцию множества связных простых подполиэдров специального спайна P на множество фундаментальных поверхностей многообразия M.*

Для доказательства теоремы нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Пусть P — уравновешенный специальный спайн 3-многообразия M. Тогда край регулярной окрестности любого отличного от поверхности связного простого полиэдра $P' \subseteq P$ связен.*

Доказательство. Обозначим через M' объединение тех шаров, балок и плиток разбиения $\beta(P)$, которые имеют непустое пересечение с полиэдром P'. Очевидно, что многообразие M' является регулярной окрестностью полиэдра P'. Допустим, что край многообразия M' несвязен. Определим валентность балки в M' как число примыкающих к ней плиток (с учетом кратностей). В силу связности многообразия M', в нем найдется балка E валентности 3, пересекающая более одной компоненты края $\partial M'$. Пересечение $\partial M' \cap E$ состоит из трех дисков. В крае многообразия M' выберем ту подповерхность F', пересечение которой с балкой E состоит ровно из двух дисков. Обозначим через F нормальную поверхность нормально изотопную поверхности F'. Мы утверждаем, что поверхность F не является уравновешенной. Действительно, одну из плиток, примыкающих к балке E, поверхность F пересекает два раза, а две другие плитки — один раз. Полученное противоречие завершает доказательство леммы 1. $\square$

Каждой нормальной поверхности $F \subset M$ сопоставим простой полиэдр $P_F \subseteq P$. Вершины, ребра и 2-компоненты полиэдра P лежат в полиэдре P_F, если поверхность F имеет непустое пересечение с соответствующими им шарами, балками и плитками разбиения $\beta(P)$. Полиэдр P_F будем называть *несущим* полиэдром поверхности F. Очевидно, что несущий полиэдр P_F поверхности F является простым.

Лемма 2. *Любая связная уравновешенная поверхность $F \subset M$ нормально изотопна либо своему несущему полиэдру P_F, либо краю его регулярной окрестности.*

Доказательство. Пусть F — связная уравновешенная поверхность. По теореме 1 она пересекает каждую плитку разбиения $\beta(P)$ не более двух раз. Мы утверждаем, что все ненулевые плиточные степени поверхности F равны. Допустим противное, т.е. что среди плиток разбиения $\beta(P)$ есть плитки степени 1 и 2. В силу связности поверхности F найдется балка E, к которой примыкают плитка степени 1 и плитка степени 2. Тогда степень третьей плитки, примыкающей к балке E, равна 1. А это противоречит тому, что поверхность F является уравновешенной.

Итак, возможны два случая. Если все ненулевые плиточные степени поверхности F равны 1, то несущий полиэдр P_F является поверхностью, нормально изотопной поверхности F. Если же все ненулевые плиточные степени поверхности F равны 2, то поверхность F нормально изотопна краю регулярной окрестности своего несущего полиэдра P_F. Лемма 2 доказана. □

Доказательство теоремы 2. Очевидно, что каждый связный простой полиэдр P' является несущим полиэдром поверхности $\psi(P')$. Поэтому отображение ψ — инъекция. Докажем, что множество фундаментальных поверхностей $\mathcal{F}$ совпадает с образом $\mathrm{Im}\psi$ отображения ψ.

Докажем включение $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Im}\psi$. Пусть F — фундаментальная поверхность. Тогда она является связной. Так как поверхность F уравновешенная, то по лемме 2 она нормально изотопна либо своему несущему полиэдру P_F, либо краю его регулярной окрестности. Так как поверхность F связна, то полиэдр P_F связен. Возможны два случая. Если несущий полиэдр P_F не является поверхностью, то поверхность F нормально изотопна краю его регулярной окрестности. Поэтому $F = \psi(P_F)$, т.е. $F \in \mathrm{Im}\psi$. Пусть полиэдр P_F — поверхность. Мы утверждаем, что поверхность F нормально изотопна полиэдру P_F. Действительно, если поверхность F нормально изотопна краю его регулярной окрестности, то $F = G + G$, где G — нормально изотопная полиэдру P_F нормальная поверхность, что противоречит условию $F \in \mathcal{F}$. Итак, $F \in \mathrm{Im}\psi$.

Докажем обратное включение $\mathrm{Im}\psi \subseteq \mathcal{F}$. Пусть $F \in \mathrm{Im}\psi$. По лемме 1 поверхность F является связной. Предположим, что поверхность F не является фундаментальной, т.е. $F = F_1 + F_2$, где F_1, F_2 — непустые нормальные поверхности. Тогда найдутся такие две связные нормальные поверхности F'_1, F'_2, что $F = F'_1 + F'_2$ (см. [5]). Так как поверхность F связна, то поверхности F'_1 и F'_2 пересекаются в плитках.

Мы утверждаем, что $F'_1 = F'_2$. Действительно, пусть C — любая из плиток разбиения $\beta(P)$, по которым проходят обе поверхности. Так как поверхность F является уравновешенной, то по теореме 1 она пересекает плитку C не более двух раз. Тогда каждая из поверхностей F'_1, F'_2 пересекает плитку C ровно один раз. Так как поверхности F'_1, F'_2 связны, то по лемме 2 каждая из них нормально изотопна своему несущему полиэдру, т.е. пересекает любую из плиток разбиения $\beta(P)$ не более одного раза. Если бы поверхности были различны, то нашлась бы такая балка E, что одну из плиток, примыкающих к E, поверхность F пересекала бы два раза, а две другие плитки — по одному. А это противоречит уравновешенности поверхности F.

Итак, $F = 2F'_1$. Так как поверхность F'_1 нормально изотопна своему несущему полиэдру $P_{F'_1}$, то поверхность F нормально изотопна краю регулярной окрестности этого полиэдра. Поэтому $F'_1 = \psi(P_{F'_1})$ и $F \notin \mathrm{Im}\psi$. Мы пришли к противоречию, следовательно, теорема 2 доказана. □

Подводя итоги, изложим алгоритм нахождения системы $\mathcal{F}$ фундаментальных поверхностей, нормальных по отношению к разбиению $\beta(P)$, где P — уравновешенный специальный спайн многообразия M. Для того, чтобы найти эту систему, нужно:

1. Перечислить все связные простые подполиэдры спайна P.

2. Если простой полиэдр является поверхностью, то включить его в систему $\mathcal{F}$.

3. Если же простой полиэдр отличен от поверхности, то добавить в систему $\mathcal{F}$ край его регулярной окрестности.

Вышеперечисленные поверхности составляют искомую систему фундаментальных поверхностей.

4 Какие многообразия имеют уравновешенный специальный спайн?

Под спайном замкнутого многообразия M мы понимаем спайн многообразия $M \setminus \mathrm{Int}D^3$, где D^3 — шар в M.

Напомним, что $L_{p,q}$ и S^3/Q_{4n} обозначают линзовое пространство с параметрами p, q и факторпространство сферы S^3 по линейному действию обобщенной группы кватернионов $Q_{4n} =< x, y \mid x^2 = (xy)^2 = y^{2n} >$.

Теорема 3. *Если $p \geq 4$ и $n \geq 2$, то многообразия $L_{p,q}$ и S^3/Q_{4n} имеют уравновешенные специальные спайны.*

Для доказательства теоремы нам понадобится лемма. Пусть P — специальный спайн многообразия M, и пусть $\beta(P)$ — отвечающее ему разбиение на ручки. Край каждого шара этого разбиения содержит 4 острова и 6 мостов, причем каждые два острова соединены ровно одним мостом. Мосты, которые не примыкают к одному острову, называются противоположными. Пусть V — шар разбиения $\beta(P)$. Обозначим примыкающие к нему плитки через C_i, $1 \leq i \leq 6$, так, что плиткам C_{2j-1}, C_{2j}, $1 \leq j \leq 3$, соответствуют противоположные мосты. Пусть нормальная поверхность $F \subset M$ пересекает шар V. Обозначим через y_i, $1 \leq i \leq 6$, плиточные степени поверхности F (y_i — степень плитки C_i).

Лемма 3. *Если $y_5 < y_1 = y_2 > y_3 = y_4$, то $y_6 = 2y_1 - y_5$.*

Доказательство. Справедливость этой леммы легко вывести из теоремы 4 работы [6]. Мы предпочитаем привести прямое доказательство. Рассмотрим три суммы: $y_1 + y_2$, $y_3 + y_4$ и $y_5 + y_6$. Каждая из этих сумм показывает, сколько раз элементарные диски пересекают соответствующую пару противоположных мостов. Край любого элементарного диска в шаре V проходит либо по трем (T-диск), либо по четырем (Q-диск) мостам. Так как каждый T-диск проходит ровно по одному из двух противоположных мостов, то он вносит равный вклад во все три суммы. По условию леммы $y_1 + y_2 > y_3 + y_4$, поэтому среди элементарных дисков поверхности F в шаре V есть Q-диски. Будем говорить, что два элементарных диска в шаре V относятся к одному типу, если они нормально изотопны. Очевидно, что все Q-диски, по которым нормальная поверхность F пересекает шар V, принадлежат одному типу. Так как каждый Q-диск проходит по двум парам

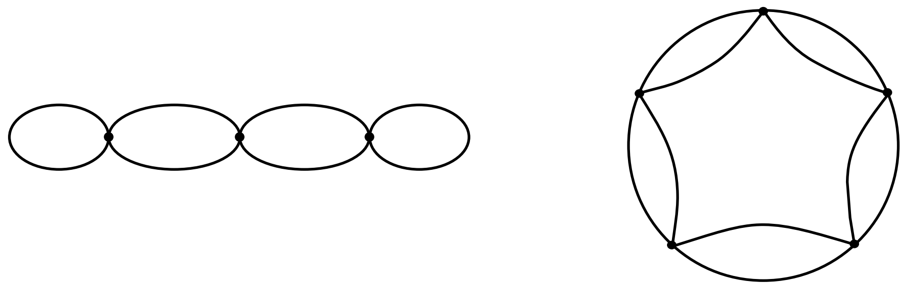

Рис. 2: Сингулярные графы: замкнутая и незамкнутая цепочки

противоположных мостов, то он вносит (равный) вклад только в две суммы из трех. Значит, Q-диски поверхности F проходят по мостам плиток C_1, C_2, C_5, C_6. Поэтому $y_1 + y_2 = y_5 + y_6$. Так как $y_1 = y_2$, то $y_6 = 2y_1 - y_5$. Лемма 3 доказана. □

Пусть $M = L_{p,q}$ или $M = S^3/Q_{4n}$, где $p \geq 4, n \geq 2$. Известно, что каждое такое многообразие M имеет так называемый псевдо-минимальный специальный спайн P (см. [7], [8], [9]). Нам понадобятся некоторые свойства этих спайнов.

Незамкнутой цепочкой будем называть регулярный граф степени 4, состоящий из двух петель и нескольких двойных ребер. Если все ребра регулярного графа степени 4 двойные, то такой граф называется *замкнутой цепочкой* (см. рис. 2). Под звеном цепочки понимается петля либо двойное ребро. Будем считать, что ребра замкнутой цепочки, содержащей две вершины, некоторым образом разбиты на два звена. Сформулируем первое свойство:

(1) *сингулярный граф псевдо-минимального специального спайна многообразия M есть либо замкнутая, либо незамкнутая цепочка.*

Пусть α — одна из 2-компонент псевдо-минимального специального спайна P. Кривую $\bar{\alpha} \setminus \alpha$ назовем граничной. Граничная кривая называется короткой, если она проходит по $k \leq 3$ вершинам спайна P, и по каждой из них не более одного раза. Второе необходимое нам свойство состоит в следующем:

(2) *специальный спайн P не содержит 2-компонент с короткой граничной кривой.*

Граничная кривая может проходить через вершину цепочки шестью способами: с каждого ребра она может попасть на любое из трех оставшихся. Если граничная кривая, проходя через вершину, переходит с одного звена цепочки на другое, то такой проход назовем *продольным*, если остается на том же звене — *поперечным.* Из шести проходов через вершину четыре являются продольными, и два — поперечными. Два прохода через вершину цепочки считаются *противоположными*, если их пересечение совпадает с вершиной. Последнее третье свойство заключается в следующем:

(3) *если два продольных прохода через вершину сингулярного графа являются противоположными, то они принадлежат одной и той же гра-*

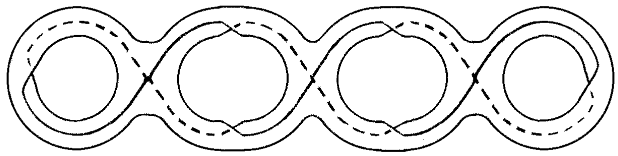

Рис. 3: Специальный спайн линзового пространства $L_{12,5}$

ничной кривой.

Для иллюстрации свойств (1) — (3) на рис. 3 изображена регулярная окрестность сингулярного графа псевдо-минимального специального спайна линзового пространства $L_{12,5}$.

Доказательство теоремы 3. Пусть $M = L_{p,q}$ или $M = S^3/Q_{4n}$, где $p \geq 4, n \geq 2$. Докажем, что псевдо-минимальный специальный спайн P многообразия M является уравновешенным. Предположим противное, т.е. что в M имеется неуравновешенная нормальная поверхность F. Тогда найдется такая балка E_1 разбиения $\beta(P)$, что одна из плиток (скажем C_1), примыкающих к ней, имеет степень, строго большую, чем степень каждой из двух оставшихся плиток (C_2 и C_5), т.е. $y_1 > y_2$ и $y_1 > y_5$. Так как спайн P удовлетворяет условиям (2) и (3), то на одном из шаров (шаре V), к которым примыкает балка E_1, плитке C_1 соответствуют два противоположных продольных моста. Можно считать, что другая пара противоположных продольных мостов шара V принадлежит плитке C_2.

Обозначим через E_2 такую примыкающую к шару V балку разбиения $\beta(P)$, что балки E_1 и E_2 соответствуют различным звеньям цепочки. Так как плитки C_1, C_2 продольно пересекают шар V, то они проходят по балке E_2. Обозначим через C_6 третью плитку, проходящую по балке E_2. Заметим, что плитки C_5, C_6 примыкают к шару V по поперечным мостам. Тогда по лемме 3 $y_6 = 2y_1 - y_5$, и, следовательно, $y_6 > y_1, y_6 > y_2$. Обозначим через $max(E)$ наибольшую из степеней плиток, проходящих по произвольной балке E. Подведем итог. Так как $max(E_2) = y_6$ и $max(E_1) = y_1$, то $max(E_2) > max(E_1)$. При этом к балке E_2 примыкают три различные плитки, так как $y_6 > y_1 > y_2$.

Повторяя предыдущее рассуждение, перейдем от балки E_2 к балке E_3 и т.д. В силу свойства (1) на каком-то шаге мы придем к одной из трех ситуаций: либо балки E_1, E_s совпадают, либо соответствуют ребрам одного звена цепочки, либо балка E_s соответствует петле. Так как по свойству (3) по двум балкам, соответствующим одному звену цепочки, проходят одинаковые плитки, то в первых двух случаях мы приходим к противоречию: $max(E_s) > max(E_1)$. Пусть балка E_s соответствует петле цепочки. Так как спайн P не содержит коротких граничных кривых, то одна из плиток разбиения $\beta(P)$ дважды проходит по балке E_s. Это означает, что к балке E_s примыкает менее трех плиток. Следовательно, мы получили противоречие. Теорема 3 доказана. □

Заметим, что сингулярный граф уравновешенного специального спай-

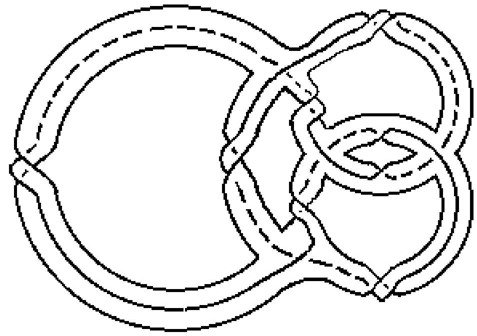

Рис. 4: Специальный спайн многообразия S^3/P_{24}

на не обязан быть замкнутой или незамкнутой цепочкой. Нетрудно проверить, что представленный на рисунке 4 специальный спайн факторпространства сферы S^3 по линейному действию группы $P_{24} =< x, y \mid x^2 = (xy)^3 = y^3, x^4 = 1 >$ является уравновешенным, и его сингулярный граф отличен от цепочки.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Haken W.* Theorie der Normalflachen // Acta. Math. 1961. V. 105. P. 245 - 375 Zbl 0100.19402

[2] *Jaco W., Oertel U.* An algorithm to decide if a 3-manifold is a Haken manifold // Topology. 1984. V. 23. N. 2. P. 195 - 209 Zbl 0545.57003

[3] *Thompson A.* Thin position and the recognition problem for S^3 // Math. Res. Lett. 1994. V. 1. P. 613 - 630 Zbl 0849.57009

[4] *Матвеев С. В.* Алгоритм распознавания трехмерной сферы (по А. Томпсон) // Мат. сб. 1995. Т. 186. №.5 С. 69 - 84 Zbl 0849.57010

[5] *Шуберт Х.* Алгоритм для разложения зацеплений на простые слагаемые // Математика: сб. пер. 1966. Т. 10. № 4. С. 45 - 78 Zbl 0097.16302

[6] *Матвеев С. В.* Аддитивность сложности и метод Хакена в топологии трехмерных многообразий // Укр. мат. журн. 1989. Т. 41. № 9, С. 1234 - 1239 Zbl 0697.57006

[7] *Matveev S. V.* Tables of 3-manifolds up to complexity 6 // Preprint MPI. 98-67

[8] *Матвеев С. В.* Один способ задания 3-многообразий // Вестник Московского университета. Математика, механика. 1975. Т. 30, № 3. С. 11 - 20 Zbl 0306.05102

[9] *Матвеев С. В.* Трехмерные многообразия, сконструированные на замкнутых цепочках // Прикладная математика (Челябинск). 1980. Т. 252. С. 79 - 83

Челябинский государственный университет
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: fominykh@cgu.chel.su