Труды конференции «Геометрия и приложения»
13 – 16 марта 2000 г., Новосибирск

КЛАССИФИКАЦИЯ ИНВАРИАНТНЫХ ЭЙНШТЕЙНОВЫХ МЕТРИК НА ПРОСТРАНСТВАХ АЛОФФА-УОЛЛАЧА

Ю. Г. Никоноров [1]

Аннотация.

В работе дается классификация инвариантных метрик Эйнштейна на пространствах Алоффа-Уоллача.

Настоящая работа посвящена классификации инвариантных эйнштейновых метрик на пространствах $SU(3)/SO(2)$. Каждое вложение окружности $SO(2) = S^1$ в $SU(3)$ с точностью до сопряжения в $SU(3)$ имеет вид

$$e^{2\pi i\theta} \mapsto diag(e^{2\pi ik\theta}, e^{2\pi il\theta}, e^{2\pi im\theta}),$$

где k, l, m — целые числа с наибольшим общим делителем 1, связанные соотношением $k + l + m = 0$. Обозначим соответствующее однородное пространство $M_{k,l}$. Эти пространства были исследованы С. Алоффом и Н. Уоллачем в [5]. В цитируемой работе было показано, что рассматриваемые однородные пространства допускают метрики положительной секционной кривизны. Кроме того, $H^4(M_{k,l}; Z) = Z/|k^2+l^2+kl|Z$, то есть среди этих пространств существуют бесконечные серии с различными гомотопическими типами. Позднее М. Крек и С. Штольц в [6] показали, что среди $M_{k,l}$ существуют гомеоморфные, но не диффеоморфные пространства. Эйнштеновы метрики на этих пространствах были исследованы М. Ваном [3], О. Ковальским и З. Влашеком [4]. В работе [3] показано, что в случае, когда k и l несравнимы по $mod 3$, пространство $M_{k,l}$ допускает по крайней мере одну инвариантную метрику Эйнштейна. В статье [4] доказано, что при $k \neq \pm l$, $k \neq \pm m$, $l \neq \pm m$ пространство $M_{k,l}$ допускает ровно две с точностью до изометрии и гомотетии инвариантные метрики

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 00-15-96165, 99-01-00543, 96-15-96291). Данные исследования поддержаны грантовым центром при Санкт-Петербургском государственном университете (код проекта 97-0-1.3-63)

Эйнштейна. В работе автора [7] анонсирована классификационная теорема для инвариантных эйнштейновых метрик на семимерных компактных однородных пространствах. Позже [8] появилась развернутая публикация на эту тему. Исследование пространств Алоффа-Уоллача в цитируемой работе было проведено схематично и отчасти опиралось на компьютерные расчеты. Целью настоящей статьи является устранение указанных пробелов в доказательстве классификационной теоремы. Основным результатом является

Теорема. *Каждое пространство Алоффа-Уоллача $M_{k,l}$ допускает ровно две, с точностью до изометрии и пропорциональности, инвариантные метрики Эйнштейна.*

Учитывая цитированный результат О. Ковальского и З. Влашека, нам достаточно рассмотреть лишь неисследованные в работе [4] вложения.

Представим алгебру Ли $su(3)$ как алгебру косоэрмитовых матриц с нулевым следом. Зафиксируем метрику $(X,Y) = -\frac{1}{2} Re\, tr(XY)$ на этой алгебре. Пусть $h = h_{k,l}$ — алгебра Ли группы Ли $i_{k,l}(S^1) = H_{k,l}$, а t — алгебра Ли стандартного максимального тора T в $SU(2)$.

Пусть $L = k^2 + l^2 + m^2$, нетрудно показать, что $k^2 + l^2 + m^2 - kl - km - ml = 3L/2$. Рассмотрим векторы

$$Z = i \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \text{ и } X_0 = \frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{3L}} \begin{pmatrix} l-m & 0 & 0 \\ 0 & m-k & 0 \\ 0 & 0 & k-l \end{pmatrix},$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, X_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

в алгебре $su(3)$. Отметим, что подалгебра h определяется вектором Z. Кроме того, все векторы X_i имеют единичную длину относительно выбранного скалярного произведения, попарно ортогональны и ортогональны подалгебре h. Рассмотрим модули $p_1 = Lin(X_1, X_2)$, $p_2 = Lin(X_3, X_4)$, $p_3 = Lin(X_5, X_6)$, $p_4 = Lin(X_0)$.

Имеют место следующие разложения

$$g = t \oplus p_1 \oplus p_2 \oplus p_3 = h \oplus p_4 \oplus p_1 \oplus p_2 \oplus p_3,$$

то есть p_4 — ортогональное дополнение к $h = h_{k,l}$ в алгебре t, а $p = p_1 \oplus p_2 \oplus p_3 \oplus p_4$ — ортогональное дополнение к алгебре $h = h_{k,l}$ в $su(3)$. Прямые вычисления показывают, что $[Z, X_0] = 0$, $[Z, X_1] = (k-l)X_2$,

$[Z,X_2]=(l-k)X_1$, $[Z,X_3]=(k-m)X_4$, $[Z,X_4]=(m-k)X_3$, $[Z,X_5]=(l-m)X_6$, $[Z,X_6]=(m-l)X_5$. Нетрудно убедиться в том, что модули p_i являются ad_h-инвариантными и при попарно различных k, l, m ad_h-неприводимы.

Выясним условие попарной изоморфности ad_h-модулей p_i. Пусть линейный изоморфизм $\varphi: p_1 \to p_2$ удовлетворяет условию $\varphi([Z,X])=[Z,\varphi(X)]$ для любого $X \in p_1$. Для некоторых чисел a, b, c, d выполняются равенства $\varphi(X_1)=aX_3+bX_4$, $\varphi(X_2)=cX_3+dX_4$. Поскольку $\varphi([Z,X_1])=[Z,\varphi(X_1)]$, $\varphi([Z,X_2])=[Z,\varphi(X_2)]$, то должны выполняться равенства $(k-l)c=(m-k)b$, $(k-l)d=(k-m)a$, $(k-l)a=(k-m)d$, $(l-k)b=(k-m)c$. Таким образом, для существования нужного отображения необходимо выполнение равенства $(k-l)^2=(m-k)^2$, или эквивалентного ему равенства $(l-m)(2k-l-m)=0$, которое, в свою очередь, влечет либо $l=m$, либо $k=0$ и $l=-m$. Следовательно, $|l|=|m|$.

Теперь напомним некоторые факты, которые нам потребуются при доказательстве сформулированной теоремы.

Рассмотрим произвольное ad_h-инвариантное скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на p. Если привести одновременно формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $(\cdot,\cdot)$ на модуле p к диагональному виду, следуя работе [2], мы получим, что

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = x_1\cdot(\cdot,\cdot)|_{p_1}+x_2\cdot(\cdot,\cdot)|_{p_2}+...+x_s\cdot(\cdot,\cdot)|_{p_s}$$

для некоторых положительных x_i и ad_h-неприводимых модулей p_i, причем модули p_i и p_j при различных индексах взаимно ортогональны относительно обоих скалярных произведений, а $p=p_1\oplus p_2\oplus...\oplus p_s$. В случае отсутствия среди ad_h-модулей p_i попарно изоморфных, эти модули определяются однозначно. В противном случае фиксированным является их количество и набор размерностей $d_i=dim(p_i)$ [2].

Следуя цитированной работе М. Вана и В. Циллера, для произвольной тройки индексов $i,j,k\in\{1,2,...,s\}$ определим символы $\left[\begin{array}{c} k \\ i\,j \end{array}\right]$ равенством

$$\left[\begin{array}{c} k \\ i\,j \end{array}\right] = \sum_{\alpha,\beta,\gamma}([e^i_\alpha,e^j_\beta],e^k_\gamma)^2,$$

где e^i_α, e^j_β, e^k_γ обозначают векторы ортонормированного базиса в модулях p_i, p_j, p_k соответственно. Из биинвариантности скалярного произведения следует симметричность введенных символов относительно всех трех индексов. Пусть для $1\le i\le s$ $d_i=dim(p_i)$, а числа b_i определяются равенством $-B(X,Y)|_{p_i}=b_i\cdot(X,Y)$, где через B обозначена форма Киллинга алгебры g. Отметим что в нашем случае справедливо равенство $b_i=12$ для всех i. В работе [2] выведена формула для вычисления скалярной кривизны S метрики вида $\langle\cdot,\cdot\rangle$, а именно

$$S(\langle\cdot,\cdot\rangle) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\frac{d_i b_i}{x_i} - \frac{1}{4}\sum_{i,j,k}\left[\begin{array}{c} k \\ i\,j \end{array}\right]\frac{x_k}{x_i x_j}.$$

В доказательстве теоремы мы будем использовать так называемый вариационный принцип для инвариантных метрик Эйнштейна, суть которого состоит в том, что эйнштейновы G-инвариантные метрики на однородном компактном пространстве G/H являются в точности критическими точками функционала скалярной кривизны S, ограниченного на множество метрик объема 1 относительно некоторой выделенной метрики [1, 2].

Как показывают предыдущие рассуждения, для пространства $M_{k,l}$ при $|k| \neq |l| \neq |m| \neq |k|$, неприводимые ad_h-модули p_i будут попарно неизоморфными. Если $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — произвольное скалярное произведение на p (порождающее инвариантную метрику на $M_{k,l}$), то в силу результатов [2] имеем равенство

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = x_1(\cdot,\cdot)|_{p_1} + x_2(\cdot,\cdot)|_{p_2} + x_3(\cdot,\cdot)|_{p_3} + x_4(\cdot,\cdot)|_{p_4}.$$

Как показано в [3], уравнения Эйнштейна в этом случае принимают вид

$$\begin{cases} \frac{6}{x_1} + \frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_2}{x_1x_3} - \frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{3m^2}{L}\frac{x_4}{x_1^2} = \lambda \\ \frac{6}{x_2} + \frac{x_2}{x_1x_3} - \frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{3l^2}{L}\frac{x_4}{x_2^2} = \lambda \\ \frac{6}{x_3} + \frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_2}{x_1x_3} - \frac{3k^2}{L}\frac{x_4}{x_3^2} = \lambda \\ \frac{3x_4}{L}\left(\frac{m^2}{x_1^2} + \frac{l^2}{x_2^2} + \frac{k^2}{x_3^2}\right) = \lambda \end{cases}.$$

Отметим, что мы используем иные обозначения. В работе [4] показано, что полученная система уравнений при любых целочисленных k и l таких, что $k^2+l^2 \neq 0$, имеет два различных (с точностью до пропорциональности) решения. Тем самым соответствующее пространство $M_{k,l}$ допускает две инвариантные метрики Эйнштейна.

Таким образом, нам с учетом условий на числа k, l и m осталось разобрать два случая: 1) $(k,l,m) = (0,1,-1)$ и 2) $(k,l,m) = (2,-1,-1)$. Отметим, что во втором случае ad_h-модуль p_3 является приводимым, поскольку $[Z,p_3] = 0$.

Лемма 1. *Однородное пространство $M_{k,l}$ при $(k,l) = (0,1)$ допускает ровно две, с точностью до изометрии и пропорциональности, инвариантные метрики Эйнштейна.*

Доказательство. Пусть $(k,l,m) = (0,1,-1)$. В этом случае модули p_1 и p_2 являются изоморфными. Нетрудно показать с помощью вышеприведенных рассуждений, что любой изоморфизм имеет вид

$$\varphi(aX_1 + bX_2) = a(\alpha X_3 + \beta X_4) + b(-\beta X_3 + \alpha X_4).$$

Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — произвольное скалярное произведение на p. Диагонализуя его одновременно с $(\cdot,\cdot)$, получаем что

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = x_1(\cdot,\cdot)|_{\tilde{p_1}} + x_2(\cdot,\cdot)|_{\tilde{p_2}} + x_3(\cdot,\cdot)|_{p_3} + x_4(\cdot,\cdot)|_{p_4}$$

для некоторых положительных x_i и ad_h-инвариантных и ad_h-неприводимых взаимно ортогональных двумерных модулей $\tilde{p_1}$, $\tilde{p_2}$ со свойством $\tilde{p_1} \oplus \tilde{p_2} = p_1 \oplus p_2$.

Пусть модуль $\tilde{p_1}$ содержащий вектор

$$U = \left(\begin{array}{ccc} 0 & \cos(\alpha)e^{\phi i} & \sin(\alpha)e^{\psi i} \\ -\cos(\alpha)e^{-\phi i} & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha)e^{-\psi i} & 0 & 0 \end{array} \right)$$

единичной длины относительно $(\cdot,\cdot)$. Рассмотрим элемент группы $SU(3)$

$$V = diag(e^{-\frac{\phi+\psi}{3}i}, e^{\frac{2\phi-\psi}{3}i}, e^{\frac{2\psi-\phi}{3}i}).$$

Нетрудно убедиться в том, что $Ad_V(U) = \cos(\alpha)X_1 + \sin(\alpha)X_3$. Понятно, что модуль $\tilde{p_1}$ при рассматриваемом автоморфизме алгебры $su(3)$ переходит в модуль q_1, натянутый на векторы $Y_1 = \cos(\alpha)X_1 + \sin(\alpha)X_3$ и $Y_2 = -\cos(\alpha)X_2 + \sin(\alpha)X_4$. В свою очередь модуль $\tilde{p_2}$ переходит в модуль q_2, натянутый на векторы $Y_3 = -\sin(\alpha)X_1 + \cos(\alpha)X_3$ и $Y_4 = \sin(\alpha)X_2 + \cos(\alpha)X_4$.

Отметим также, что автоморфизм Ad_V сохраняет подалгебру h и модули p_3 и p_4. Таким образом, с точностью до изометрии, множество инвариантных метрик имеет вид

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = x_1(\cdot,\cdot)|_{q_1} + x_2(\cdot,\cdot)|_{q_2} + x_3(\cdot,\cdot)|_{q_3} + x_4(\cdot,\cdot)|_{q_4},$$

где $q_3 = p_3$, $q_4 = p_4$.

Теперь мы вычислим функционал скалярной кривизны для рассматриваемых метрик и воспользуемся вариационным принципом для поиска среди них эйнштейновых. Нетрудно убедиться в справедливости равенств $[X_1, X_2] = \sqrt{3}X_0 - Z$, $[X_3, X_4] = \sqrt{3}X_0 + Z$, $[X_5, X_6] = 2Z$, $[Z, X_1] = -X_2$, $[Z, X_2] = X_1$, $[Z, X_3] = X_4$, $[Z, X_5] = 2X_6$, $[Z, X_6] = -2X_5$, $[X_0, X_1] = \sqrt{3}X_2$, $[X_0, X_2] = -\sqrt{3}X_1$, $[X_0, X_3] = \sqrt{3}X_4$, $[X_0, X_4] = -\sqrt{3}X_3$, $[X_0, X_5] = [X_0, X_6] = 0$. С помощью приведенных соотношений легко также получить, что $[Y_1, Y_2] = Z - \sqrt{3}\cos(2\alpha)X_0$, $[Y_1, Y_3] = -X_5$, $[Y_1, Y_4] = \sqrt{3}\sin(2\alpha)X_0 - X_6$, $[Y_2, Y_3] = -\sqrt{3}\sin(2\alpha)X_0 - X_6$, $[Y_2, Y_4] = X_5$, $[Y_3, Y_4] = Z + \sqrt{3}\cos(2\alpha)X_0$.

Теперь нетрудно вычислить значения величин $\left[\begin{array}{c} k \\ i\,j \end{array} \right]$, соответствующим модулям q_i, q_j и q_k. Поскольку $[q_3 \oplus q_4, q_1 \oplus q_2] \subset q_1 \oplus q_2$ и $[q_3, q_4] = 0$, то с точностью до перестановки индексов, ненулевыми являются лишь $\begin{bmatrix} 4 \\ 1\,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2\,2 \end{bmatrix} = 6\cos^2(2\alpha)$, $\begin{bmatrix} 4 \\ 1\,2 \end{bmatrix} = 6\sin^2(2\alpha)$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 1\,2 \end{bmatrix} = 4$.

После этих предварительных рассмотрений мы можем выписать значение функционала скалярной кривизны для метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$:

$$S(\langle\cdot,\cdot\rangle) = \frac{12}{x_1} + \frac{12}{x_2} + \frac{12}{x_3} + \frac{6a}{x_4} - \frac{3-3a}{2}\left(\frac{x_4}{x_1^2} + \frac{x_4}{x_2^2}\right) -$$

$$-2\left(\frac{x_1}{x_2x_3} + \frac{x_2}{x_1x_3} + \frac{x_3}{x_1x_2}\right) - 3a\left(\frac{x_1}{x_2x_4} + \frac{x_2}{x_1x_4} + \frac{x_4}{x_1x_2}\right),$$

где $a = \sin^2(2\alpha)$. Условие фиксированности объема выражается равенством $x_1^2x_2^2x_3^2x_4 = 1$. Определим функцию Лагранжа равенством

$$L = L(x_1, x_2, x_3, x_4, a, \lambda) = S(\langle\cdot,\cdot\rangle) - \lambda(x_1^2x_2^2x_3^2x_4 - 1)\,.$$

Согласно вариационному принципу для инвариантных эйнштейновых метрик [2, 1], критические точки этой функции как раз и являются метриками Эйнштейна. Отметим, что существенно различаются случаи $a = 0$, $a = 1$ и $0 < a < 1$. В первых двух из них, в отличии от последнего, условие критичности по переменной α выполняется автоматически, поскольку $a = sin^2(2\alpha)$.

Выпишем условия критичности точки для функции Лагранжа по переменным x_i.

$$-S'_{x_1}x_1 = \frac{12}{x_1} - \frac{3(1-a)x_4}{x_1^2} - 2\left(\frac{x_2}{x_1x_3} + \frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{x_1}{x_2x_3}\right) -$$

$$-3a\left(\frac{x_2}{x_1x_4} + \frac{x_4}{x_1x_2} - \frac{x_1}{x_2x_4}\right) = -2\lambda.$$

$$-S'_{x_2}x_2 = \frac{12}{x_2} - \frac{3(1-a)x_4}{x_2^2} - 2\left(\frac{x_1}{x_2x_3} + \frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{x_2}{x_1x_3}\right) -$$

$$-3a\left(\frac{x_1}{x_2x_4} + \frac{x_4}{x_1x_2} - \frac{x_2}{x_1x_4}\right) = -2\lambda.$$

$$-S'_{x_3}x_3 = \frac{6}{x_3} - \left(\frac{x_1}{x_2x_3} + \frac{x_2}{x_1x_3} - \frac{x_3}{x_1x_2}\right) = -\lambda.$$

$$-S'_{x_4}x_4 = \frac{6a}{x_4} + \frac{3(1-a)}{2}\left(\frac{x_4}{x_1^2} + \frac{x_4}{x_2^2}\right) - 3a\left(\frac{x_1}{x_2x_4} + \frac{x_2}{x_1x_4} - \frac{x_4}{x_1x_2}\right) = -\lambda.$$

Особенность пространства $M_{0,1}$ заключается в том, что вместе с любой эйнштейновой метрикой, задаваемой параметрами (x_1, x_2, x_3, x_4, a) будет также эйнштейновой метрика с параметрами (x_2, x_1, x_3, x_4, a), причем эти метрики изометричны. Обусловлено это наличием внутреннего автоморфизма алгебры $su(3)$, порождаемого элементом

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

группы $SU(3)$. Нетрудно убедиться в том, что автоморфизм Ad_A переводит друг в друга модули q_1 и q_2, оставляя неподвижными модули q_3, q_4 и подалгебру h. С другой стороны, на пространстве $M_{0,1}$ не существует эйнштейновых метрик с условием $x_1 = x_2$. Действительно, предположив противное, мы получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{12}{t} - \frac{2x_3}{t^2} - \frac{3x_4}{t^2} = -2\lambda \\ \frac{4}{x_3} + \frac{x_3}{t^2} = -\lambda \\ \frac{3x_4}{t^2} = -\lambda \end{cases},$$

где $t = x_1 = x_2$. Складывая первое уравнение с третьим и вычитая утроенное второе уравнение, получаем равенство

$$\frac{12}{t} - 5\frac{x_3}{t^2} - \frac{12}{x_3} = 0,$$

которое эквивалентно уравнению

$$5\left(\frac{x_3}{t}\right)^2 - 12\frac{x_3}{t} + 12 = 0,$$

не имеющему вещественных решений. Таким образом, далее можно считать, что $x_1 \neq x_2$.

Рассмотрим случай $a = 0$. Система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \frac{6}{x_1} + \frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_2}{x_1x_3} - \frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{3}{2}\frac{x_4}{x_1^2} = -\lambda \\ \frac{6}{x_2} + \frac{x_2}{x_1x_3} - \frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{3}{2}\frac{x_4}{x_2^2} = -\lambda \\ \frac{6}{x_3} + \frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_2}{x_1x_3} = -\lambda \\ \frac{3x_4}{2}\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right) = -\lambda \end{cases}$$

Таким образом, мы получили такую же систему уравнений, что и при неособых вложениях. Пользуясь результатами работы [4], заключаем, что она имеет два, с точность до пропорциональности, решения. Следовательно, мы получаем две метрики Эйнштейна, которые обязаны быть изометричными (поскольку одна получается из другой перестановкой x_1 и x_2).

Разберем теперь случай $a = 1$. Система уравнений Эйнштейна принимает вид

$$\begin{cases} \frac{6}{x_1} + \frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_2}{x_1x_3} - \frac{x_3}{x_1x_2} + \frac{3}{2}\left(\frac{x_1}{x_2x_4} - \frac{x_2}{x_1x_4} - \frac{x_4}{x_1x_2}\right) = -\lambda \\ \frac{6}{x_2} + \frac{x_2}{x_1x_3} - \frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_3}{x_1x_2} + \frac{3}{2}\left(\frac{x_2}{x_1x_4} - \frac{x_1}{x_2x_4} - \frac{x_4}{x_1x_2}\right) = -\lambda \\ \frac{6}{x_3} + \frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_2}{x_1x_3} = -\lambda \\ \frac{6}{x_4} + 3\left(\frac{x_4}{x_1x_2} - \frac{x_1}{x_2x_4} - \frac{x_2}{x_1x_4}\right) = -\lambda \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$6\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) + \frac{2}{x_3}\left(\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1}\right) + \frac{3}{x_4}\left(\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1}\right) =$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{x_1x_2}\left(6 - \left(\frac{2}{x_3} + \frac{3}{x_4}\right)(x_1 + x_2)\right) = 0.$$

Поскольку $x_1 \neq x_2$, то получаем равенство

$$(x_1 + x_2)(3x_3 + 2x_4) = 6x_3x_4.$$

Умножая сумму первых двух уравнений системы на x_1x_2, приходим к равенству

$$6(x_1 + x_2) - 2x_3 - 3x_4 = -2\lambda x_1x_2.$$

Третье и четвертое уравнение системы преобразуются к виду

$$8x_1x_2 + x_3^2 - (x_1 + x_2)^2 = -\lambda x_1x_2x_3,$$

$$12x_1x_2 + 3x_4^2 - 3(x_1 + x_2)^2 = -\lambda x_1x_2x_4$$

соответственно. Исключая параметр λ из трех последних уравнений, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (x_1 + x_2)(3x_3 + 2x_4) = 6x_3x_4 \\ 6(x_1 + x_2)^2 + 6(x_1 + x_2)x_4 - 2x_3x_4 - 9x_4^2 = 24x_1x_2 \\ 2(x_1 + x_2)^2 - 4x_3^2 - 3x_3x_4 + 6(x_1 + x_2)x_3 = 16x_1x_2 \end{cases}.$$

Введем новые переменные по формулам $x_1 + x_2 = u\sqrt{x_1x_2}$, $x_3 = v\sqrt{x_1x_2}$, $x_4 = w\sqrt{x_1x_2}$. Последняя система уравнений преобразуется к виду

$$\begin{cases} 3uv + 2uw - 6vw = 0 \\ 6u^2 - 9w^2 + 6uw - 2vw - 24 = 0 \\ 2u^2 - 4v^2 + 6uv - 3vw - 16 = 0 \end{cases}.$$

Если положить $t = u/w$ и $s = v/w$, то из первого уравнения находим, что $t = \frac{6s}{3s+2}$. Из двух последних уравнений получаем, что

$$6u^2 + 12v^2 - 18w^2 - 18uv + 12uw + 5vw = 0.$$

Переходя к переменным t и s, приходим к равенству $6t^2+12s^2-18ts+12t+5s-18=0$. После подстановки $t=\frac{6s}{3s+2}$ получаем, что

$$108s^4-135s^3+162s^2-52s-72=0.$$

Поскольку функция $f(s)=108s^4-135s^3+162s^2-52s-72$ возрастает при $s>1/4$ и отрицательна при $0<s<1/4$, заключаем, что существует единственное положительное s, удовлетворяющее условию $f(s)=0$. Исходя из него находятся единственным образом u, v и w, после чего находятся два решения исходной системы уравнения (отличающиеся перестановкой x_1 и x_2), определяющие две изометричные инвариантные метрики Эйнштейна на пространстве $M_{0,1}$. Приближенные значения искомых величин таковы:

$$s{=}0.96123...,\ t{=}1.18094...,\ u{=}2.71792...,\ v=2.21224...,\ w{=}2.30147...$$

Отметим, что найденные метрики не изометричны метрикам, полученным при $a=0$. Действительно, если бы имела место изометрия, то собственные числа этих метрик относительно биинвариантной метрики должны были бы совпадать. Значит, должно было бы существовать совместное решение систем уравнений при $a=0$ и $a=1$ (возможно, при перестановке переменных в одной из систем). Нетрудно убедиться, что такого решения быть не может.

Нам осталось разобрать лишь случай $0<a<1$. К уравнениям, выписанным ранее, добавляется равенство $S'_a=0$. Соответствующие вычисления приводят к следующему результату.

$$0=S'_a=\frac{6}{x_4}+\frac{3x_4}{2}\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}\right)-3\left(\frac{x_1}{x_2x_4}+\frac{x_2}{x_1x_4}+\frac{x_4}{x_1x_2}\right)=$$

$$=-\frac{3}{x_4}\left(\frac{x_1}{x_2}-2+\frac{x_2}{x_1}\right)+\frac{3x_4}{2}\left(\frac{1}{x_1^2}-\frac{2}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2^2}\right)=$$

$$=\frac{3}{x_1x_2x_4}(x_2-x_1)^2\left(\frac{x_4^2}{2x_1x_2}-1\right).$$

Поскольку $x_1\neq x_2$, получаем равенство $x_4^2=2x_1x_2$. Выпишем теперь остальные уравнения Эйнштейна.

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{6}{x_1}-\frac{3-3a}{2}\frac{x_4}{x_1^2}+\frac{x_1}{x_2x_3}-\frac{x_2}{x_1x_3}-\frac{x_3}{x_1x_2}+\frac{3a}{2}\left(\frac{x_1}{x_2x_4}-\frac{x_2}{x_1x_4}-\frac{x_4}{x_1x_2}\right)=-\lambda\\
\frac{6}{x_2}-\frac{3-3a}{2}\frac{x_4}{x_2^2}+\frac{x_2}{x_1x_3}-\frac{x_1}{x_2x_3}-\frac{x_3}{x_1x_2}+\frac{3a}{2}\left(\frac{x_2}{x_1x_4}-\frac{x_1}{x_2x_4}-\frac{x_4}{x_1x_2}\right)=-\lambda\\
\frac{6}{x_3}+\frac{x_3}{x_1x_2}-\frac{x_1}{x_2x_3}-\frac{x_2}{x_1x_3}=-\lambda\\
\frac{6a}{x_4}+\frac{3-3a}{2}\left(\frac{x_4}{x_1^2}+\frac{x_4}{x_2^2}\right)+3a\left(\frac{x_4}{x_1x_2}-\frac{x_1}{x_2x_4}-\frac{x_2}{x_1x_4}\right)=-\lambda
\end{array}\right..$$

По аналогии с предыдущим случаем рассмотрим разность между первым и вторым уравнением системы.

$$6\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}+\frac{3(1-a)x_4}{2}\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{x_1^2x_2^2}+\left(\frac{2}{x_3}+\frac{3a}{x_4}\right)\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{x_1x_2}=0.$$

Поскольку $x_1 \neq x_2$, то

$$\left(\frac{3}{2}(1-a)x_4+\left(\frac{2}{x_3}+\frac{3a}{x_4}\right)x_1x_2\right)(x_1+x_2)=6x_1x_2.$$

Так как $x_4^2=2x_1x_2$, то из последнего равенства выводим

$$\left(\frac{3(1-a)x_1x_2}{x_4}+\left(\frac{2}{x_3}+\frac{3a}{x_4}\right)x_1x_2\right)(x_1+x_2)-6x_1x_2=$$

$$x_1x_2\left(\left(\frac{2}{x_3}+\frac{3}{x_4}\right)(x_1+x_2)-6\right)=0.$$

Следовательно, как и в предыдущем случае, $(x_1+x_2)(3x_3+2x_4)=6x_3x_4$. Далее, рассмотрим линейную комбинацию уравнений системы с коэффициентами 1, 1, -3 и 1 соответственно.

$$\frac{6}{x_1}+\frac{6}{x_2}-\frac{24}{x_3}+\frac{12a}{x_4}-\frac{5x_3}{x_1x_2}+\left(\frac{3}{x_3}-\frac{3a}{x_4}\right)\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=$$

$$=\frac{6}{x_1}+\frac{6}{x_2}-\frac{24}{x_3}-\frac{5x_3}{x_1x_2}+\frac{3}{x_3}\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}-\frac{3a}{x_1x_2x_4}(x_2-x_1)^2=0.$$

Таким образом,

$$=\frac{6}{x_1}+\frac{6}{x_2}-\frac{24}{x_3}-\frac{5x_3}{x_1x_2}+\frac{3}{x_3}\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}>0.$$

Введем новые переменные по формулам $x_1+x_2=u\sqrt{x_1x_2}$, $x_1+x_2=vx_3$. В этих переменных полученное неравенство принимает вид

$$6u-24\frac{v}{u}-5\frac{u}{v}+3uv>0.$$

Из уравнения $(x_1+x_2)(3x_3+2x_4)=6x_3x_4$ с учетом того, что $x_4^2=2x_1x_2$, получаем $4v+3\sqrt{2}u=12$ и $u=(12-4v)/(3\sqrt{2})$. Отметим, что полученное нами неравенство эквивалентно неравенству

$$(3v^2+6v-5)u^2-24v^2>0,$$

которое после подстановки $u=(12-4v)/(3\sqrt{2})$ принимает вид $(3v^2+6v-5)(3-v)^2-27v^2>0$. Поскольку величины u и v положительны и связаны условием $4v + 3\sqrt{2}u = 12$, то должно выполняться неравенство $0 < v < 3$. Осталось заметить, что функция

$$g(v) = (3v^2 + 6v - 5)(3 - v)^2 - 27v^2 = 3v^3(v - 4) - (41v^2 - 84v + 45)$$

не принимает положительных значений при $0 < v < 3$. Таким образом, при $0 < a < 1$ система уравнений решений не имеет. Значит, пространство $M_{0,1}$ допускает, с точностью до пропорциональности и изометрии, ровно две метрики Эйнштейна. Лемма доказана.

Лемма 2. *Однородное пространство $M_{k,l}$ при $(k, l) = (2, -1)$ допускает ровно две, с точностью до изометрии и пропорциональности, инвариантные метрики Эйнштейна.*

Доказательство. Пусть $(k, l, m) = (2, -1, -1)$. В этом случае $[h, p_3 \oplus p_4] = 0$, и поэтому ограничение инвариантной метрики на модуль $p_3 \oplus p_4$ может быть произвольным скалярным произведением. Как и в предыдущем случае, ad_h-модули p_1 и p_2 являются изоморфными. Любой изоморфизм имеет вид

$$\varphi(aX_1 + bX_2) = a(\alpha X_3 + \beta X_4) + b(\beta X_3 - \alpha X_4).$$

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — произвольное скалярное произведение на p. Приводя его одновременно с $(\cdot, \cdot)$ на p к диагональному виду, получаем

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = x_1(\cdot, \cdot)|_{\tilde{p_1}} + x_2(\cdot, \cdot)|_{\tilde{p_2}} + U|_{p_3 \oplus p_4}$$

для некоторых положительных x_i, неприводимых взаимно ортогональных двумерных модулей $\tilde{p_1}$, $\tilde{p_2}$ со свойством $\tilde{p_1} \oplus \tilde{p_2} = p_1 \oplus p_2$ и некоторого скалярного произведения U на $p_3 \oplus p_4$. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, можно показать существование внутреннего автоморфизма алгебры Ли $su(3)$, оставляющего на месте модуль $p_3 \oplus p_4$ и подалгебру h и переводящего $\tilde{p_1}$ в p_1 и $\tilde{p_2}$ в p_2. Действительно, пусть $q \subset p_1 \oplus p_2$ — произвольный ad_h-инвариантный и ad_h-неприводимый модуль, содержащий вектор

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & \cos(\alpha)e^{\phi i} & \sin(\alpha)e^{\psi i} \\ -\cos(\alpha)e^{-\phi i} & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha)e^{-\psi i} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

единичной длины относительно $(\cdot, \cdot)$. Рассмотрим элемент группы $SU(3)$

$$V_1 = diag(e^{-\frac{\phi+\psi}{3}i}, e^{\frac{2\phi-\psi}{3}i}, e^{\frac{2\psi-\phi}{3}i}).$$

Нетрудно убедиться в том, что $V_2 = Ad_{V_1}(U_1) = \cos(\alpha)X_1 + \sin(\alpha)X_3$. Теперь рассмотрим

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \in SU(3).$$

Прямые вычисления показывают, что $Ad_{V_2}(U_2) = X_1$. Таким образом, $Ad_V(U_1) = X_1$ для $V = V_2V_1$. Отметим, что Ad_V — внутренний автоморфизм алгебры $su(3)$, сохраняющий подалгебру h и модуль $p_3 \oplus p_4$. Поскольку образ ad_h-инвариантного модуля q при этом автоморфизме также является ad_h-инвариантным модулем и содержит вектор X_1, то $Ad_V(q) = p_1$. Если теперь взять в качестве q модуль $\tilde{p_1}$, нетрудно понять, что $Ad_V(\tilde{p_2}) = p_2$, поскольку внутренний автоморфизм сохраняет скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$.

Таким образом, с точностью до изометрии, множество инвариантных метрик имеет вид

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = x_1(\cdot,\cdot)|_{p_1} + x_2(\cdot,\cdot)|_{p_2} + U|_{p_3\oplus p_4}.$$

Приводя одновременно квадратичные формы U и $(\cdot,\cdot)$ на модуле $p_3 \oplus p_4$ к диагональному виду, мы получим ортонормированный относительно $(\cdot,\cdot)$ базис из векторов Y_1, Y_2, Y_3 таких, что векторы x_3Y_1, x_4Y_2, x_5Y_3 образуют ортонормированный базис относительно U при некоторых положительных x_i $(3 \le i \le 5)$.

Пусть вектор Y_3 имеет следующее разложение $Y_3 = aX_0 + bX_5 + cX_6$ в базисе (X_0, X_5, X_6). Покажем, что без ограничения общности можно полагать $b = 0$. Действительно, пусть $b \ne 0$. Рассмотрим внутренний автоморфизм Ad_A алгебры Ли $g = su(3)$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix},$$

действующий поворотами в модулях p_1, p_2, p_3, и оставляющий неподвижным модуль $p_4 \oplus h$. Нетрудно убедиться в том, что

$$Ad_A(Y_3) = aX_0 + (b\cos(2\theta) - c\sin(2\theta))X_5 + (b\sin(2\theta) + c\cos(2\theta))X_6.$$

Таким образом, выбирая подходящее значение θ, можно добиться зануления коэффициента при X_5. Поскольку под действием автоморфизма скалярное произведение переходит в изометричное скалярное произведение, то можно без ограничения общности считать, что матрица перехода от базиса (X_0, X_5, X_6) к базису (Y_1, Y_2, Y_3) имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sin\varphi\sin\psi}{Q} & \frac{\cos\varphi\cos\psi}{Q} & \frac{\cos\varphi\sin\psi}{Q} \\ \frac{-\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi}{Q} & -\frac{\sin\psi}{Q} & \frac{\cos^2\varphi\cos\psi}{Q} \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{pmatrix},$$

где $Q = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\sin^2\psi}$, φ — угол между векторами Y_3 и X_0, ψ — угол между вектором X_5 и ортогональной проекцией вектора

Y_1 на плоскость X_5X_6. Кроме того, очевидно, можно считать, что $0 \le \varphi \le \pi/4$ и $0 \le \psi \le \pi/4$.

Нетрудно убедиться в том, что в нашем случае выполняются следующие равенства: $[X_0, X_i] = \pm X_j$ ($i \ne j$, $i, j \in \{1, 2\}$ или $i, j \in \{3, 4\}$); $[X_0, X_i] = \pm 2X_j$ ($i \ne j, i, j \in \{5, 6\}$); $[X_1, X_3] = -X_5$, $[X_1, X_4] = -X_6$, $[X_2, X_4] = -X_5$, $[X_2, X_3] = X_6$.

Пусть модуль p_1 определяется векторами X_1 и X_2, модуль p_2 – векторами X_3 и X_4, одномерные модули p_3, p_4, p_5 натянуты соответственно на векторы Y_1, Y_2 и Y_3.

Понятно, что $[p_1, p_1] \subset h \oplus X_0$, $[p_2, p_2] \subset h \oplus X_0$, $[p_1, p_2] \subset p_3 \oplus p_4 \oplus p_5$. Таким образом, из символов $\begin{bmatrix} k \\ i\,j \end{bmatrix}$ не зануляются лишь $\begin{bmatrix} 1 \\ 3\,1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 3\,1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 3\,2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 4\,1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 4\,1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 4\,2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 5\,1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 5\,1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 5\,2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \\ 3\,4 \end{bmatrix}$, и те, что получаются из них перестановкой индексов.

Используя коммутационные соотношения нетрудно получить, что $\begin{bmatrix} 1 \\ 3\,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3\,2 \end{bmatrix} = \frac{2\sin^2\varphi\sin^2\psi}{Q^2}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 3\,1 \end{bmatrix} = \frac{2\cos^2\varphi}{Q^2}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 4\,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4\,2 \end{bmatrix} = \frac{2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cos^2\psi}{Q^2}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 4\,1 \end{bmatrix} = \frac{2(\sin^2\psi+\cos^4\varphi\cos^2\psi)}{Q^2}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 5\,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5\,2 \end{bmatrix} = 2\cos^2\varphi$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 5\,1 \end{bmatrix} = 2\sin^2\varphi$, $\begin{bmatrix} 5 \\ 3\,4 \end{bmatrix} = 4$.

Отметим, что для $\varphi = 0$ при любом значении ψ получаются изометричные метрики. Сделаем теперь замену переменных по формулам $a = \cos\varphi$, $b = \cos\varphi/Q$. Нетрудно понять, что $a^2 \le b^2 \le 1$ и равенство $a = 1$ влечет $b = 1$. После проведенной замены получаем равенства $\begin{bmatrix} 1 \\ 3\,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3\,2 \end{bmatrix} = 2(1 - b^2)$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 3\,1 \end{bmatrix} = 2b^2$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 4\,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4\,2 \end{bmatrix} = 2(b^2 - a^2)$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 4\,1 \end{bmatrix} = 2(1 + a^2 - b^2)$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 5\,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5\,2 \end{bmatrix} = 2a^2$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 5\,1 \end{bmatrix} = 2(1 - a^2)$,

После этих предварительных рассмотрений мы можем выписать значение функционала скалярной кривизны для метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$:

$$S(\langle\cdot,\cdot\rangle) = 6\left(\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5}\right) - 2\left(\frac{x_3}{x_4x_5} + \frac{x_4}{x_3x_5} + \frac{x_5}{x_3x_4}\right) -$$

$$-\frac{1-b^2}{2}\left(\frac{4}{x_3} + \frac{x_3}{x_1^2} + \frac{x_3}{x_2^2}\right) - \frac{b^2-a^2}{2}\left(\frac{4}{x_4} + \frac{x_4}{x_1^2} + \frac{x_4}{x_2^2}\right) -$$

$$-\frac{a^2}{2}\left(\frac{4}{x_5} + \frac{x_5}{x_1^2} + \frac{x_5}{x_2^2}\right) - b^2\left(\frac{x_3}{x_1x_2} + \frac{x_1}{x_2x_3} + \frac{x_2}{x_1x_3}\right) -$$

$$-(1+a^2-b^2)\left(\frac{x_4}{x_1x_2}+\frac{x_1}{x_2x_4}+\frac{x_2}{x_1x_4}\right)-(1-a^2)\left(\frac{x_5}{x_1x_2}+\frac{x_1}{x_2x_5}+\frac{x_2}{x_1x_5}\right).$$

Отметим, что условие фиксированности объема выражается равенством $x_1^2x_2^2x_3x_4x_5=1$. Определим функцию Лагранжа равенством

$$L=L(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b,\lambda)=S(\langle\cdot,\cdot\rangle)-\lambda(x_1^2x_2^2x_3x_4x_5-1)\,.$$

Согласно вариационному принципу для инвариантных эйнштейновых метрик [2, 1], критические точки этой функции как раз и являются метриками Эйнштейна. Нетрудно непосредственно убедиться в том, что точки $x_1=x_2=t$, $x_3=x_4=x_5=s$, $a=b=1$, где

$$5\left(\frac{s}{t}\right)^2-12\frac{s}{t}+4=0,$$

являются критическими. Решая последнее уравнение, получаем, что либо $s=2t$, либо $5s=2t$, и мы имеем две неизометричные и негомотетичные метрики Эйнштейна. Нам осталось показать, что других эйнштейновых метрик в данном случае нет.

Разберем отдельно случаи, когда $a=b=1$; $b=1$, $a\neq 0$ и $a\neq 1$, $b\neq 1$. В первом случае получаем следующее выражение для скалярной кривизны:

$$S(\langle\cdot,\cdot\rangle)=6\left(\frac{2}{x_1}+\frac{2}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_5}\right)-2\left(\frac{x_3}{x_4x_5}+\frac{x_4}{x_3x_5}+\frac{x_5}{x_3x_4}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{x_5}+\frac{x_5}{x_1^2}+\frac{x_5}{x_2^2}\right)-\left(\frac{x_3}{x_1x_2}+\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_1x_3}\right)-\left(\frac{x_4}{x_1x_2}+\frac{x_1}{x_2x_4}+\frac{x_2}{x_1x_4}\right).$$

Выпишем условия критичности точки.

$$-S'_{x_1}x_1=\frac{12}{x_1}-\left(\frac{x_2}{x_1x_3}+\frac{x_3}{x_1x_2}-\frac{x_1}{x_2x_3}\right)-\left(\frac{x_2}{x_1x_4}+\frac{x_4}{x_1x_2}-\frac{x_1}{x_2x_4}\right)-\frac{x_5}{x_1^2}=-2\lambda.$$

$$-S'_{x_2}x_2=\frac{12}{x_2}-\left(\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_3}{x_1x_2}-\frac{x_2}{x_1x_3}\right)-\left(\frac{x_1}{x_2x_4}+\frac{x_4}{x_1x_2}-\frac{x_2}{x_1x_4}\right)-\frac{x_5}{x_2^2}=-2\lambda.$$

$$-S'_{x_3}x_3=\frac{6}{x_3}-\left(\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_1x_3}-\frac{x_3}{x_1x_2}\right)-2\left(\frac{x_4}{x_3x_5}+\frac{x_5}{x_3x_4}-\frac{x_3}{x_4x_5}\right)=-\lambda.$$

$$-S'_{x_4}x_4=\frac{6}{x_4}-\left(\frac{x_1}{x_2x_4}+\frac{x_2}{x_1x_4}-\frac{x_4}{x_1x_2}\right)-2\left(\frac{x_3}{x_4x_5}+\frac{x_5}{x_3x_4}-\frac{x_4}{x_3x_5}\right)=-\lambda.$$

$$-S'_{x_5}x_5 = \frac{4}{x_5} + \frac{x_5}{2}\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right) - 2\left(\frac{x_3}{x_4x_5} + \frac{x_4}{x_3x_5} - \frac{x_5}{x_3x_4}\right) = -\lambda.$$

Наша ближайшая цель – показать, что из вышеприведенной системы равенств следует $x_4 = x_5$. Убедимся сначала в том, что $x_5 < x_3 + x_4$. Действительно, если предположить противное ($x_5 \geq x_3 + x_4$), то из уравнения на x_5 получаем

$$-\lambda = \frac{4}{x_5} + \frac{x_5}{2}\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right) - 2\frac{x_3^2 + x_4^2 - x_5^2}{x_3x_4x_5} = \frac{8}{x_5} + \frac{x_5}{2}\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right) -$$

$$-2\frac{(x_3+x_4)^2 - x_5^2}{x_3x_4x_5} \geq \frac{8}{x_5} + \frac{x_5}{2}\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right).$$

С другой стороны

$$-4\lambda = -S'_{x_1}x_1 - S'_{x2}x_2 = 12\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) - \frac{2(x_3+x_4)}{x_1x_2} - x_5\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right) <$$

$$< 12\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) - x_5\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right).$$

С учетом двух предыдущих выкладок получаем

$$\frac{8}{x_5} + \frac{x_5}{2}\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right) \leq -\lambda < 3\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) - \frac{x_5}{4}\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right).$$

Значит,

$$3\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) > \frac{8}{x_5} + \frac{3x_5}{4}\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right) \geq 2\sqrt{6}\sqrt{\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right)}.$$

В последнем переходе мы воспользовались неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим. Рассматривая крайние члены в последнем неравенстве, получаем, что

$$15(x_1)^2 - 18x_1x_2 + 15(x_2)^2 < 0,$$

что невозможно. Таким образом, неравенство $x_3 + x_4 > x_5$ обосновано.

Теперь рассмотрим

$$0 = -S_{x_3}x_3 + S_{x_4}x_4 = 6\left(\frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_4}\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{x_4}-\frac{1}{x_3}\right)\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right)+\frac{x_3-x_4}{x_1x_2}+\frac{4}{x_5}\left(\frac{x_3}{x_4}-\frac{x_4}{x_3}\right)=$$

$$2\left(\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_4}\right)+\left(\frac{1}{x_4}-\frac{1}{x_3}\right)\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right)+\frac{x_3-x_4}{x_1x_2}+\frac{4(x_3^2-x_4^2)}{x_3x_4x_5}+\frac{4(x_4-x_3)}{x_3x_4}=$$

$$\frac{1}{x_3}\left(2-\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}\right)+\frac{x_3}{x_1x_2}-\frac{1}{x_4}\left(2-\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}\right)-\frac{x_4}{x_1x_2}+\frac{4(x_3-x_4)}{x_3x_4x_5}(x_3+x_4-x_5)=$$

$$=f(x_3)-f(x_4)+4\frac{(x_4-x_3)(x_5-x_3-x_4)}{x_3x_4x_5},$$

где

$$f(x)=\left(2-\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}\right)\frac{1}{x}+\frac{x}{x_1x_2}.$$

Поскольку $2-\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}\leq 0$, функция f является строго возрастающей. Если $x_3>x_4$ ($x_3<x_4$), то

$$f(x_3)-f(x_4)+4\frac{(x_4-x_3)(x_5-x_3-x_4)}{x_3x_4x_5}>(<)\,0,$$

чего не может быть. Следовательно, $x_3=x_4$. Таким образом, наша система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \frac{6}{y_1}+\frac{y_1}{y_2y_3}-\frac{y_2}{y_1y_3}-\frac{y_3}{y_1y_2}-\frac{1}{2}\frac{y_4}{y_1^2}=\mu \\ \frac{6}{y_2}+\frac{y_2}{y_1y_3}-\frac{y_1}{y_2y_3}-\frac{y_3}{y_1y_2}-\frac{1}{2}\frac{y_4}{y_2^2}=\mu \\ \frac{6}{y_3}+\frac{y_3}{y_1y_2}-\frac{y_1}{y_2y_3}-\frac{y_2}{y_1y_3}-2\frac{y_4}{y_3^2}=\mu \\ \frac{y_4}{2}\left(\frac{1}{y_1^2}+\frac{1}{y_2^2}+\frac{4}{y_3^2}\right)=\mu \end{cases},$$

где $y_1=x_1$, $y_2=x_2$, $y_3=x_3=x_4$, $y_4=x_5$. То есть мы приходим к той же системе, что и при неособом вложении. Поскольку в работе [4] показано, что такая система имеет ровно два решения с точностью до пропорциональности, то единственными ее решениями являются те, что мы указали в начале доказательства.

Нам осталось рассмотреть случай, когда $a\neq 1$. Приравнивая производную S_a' к 0, получаем

$$\left(\frac{4}{x_4}+\frac{x_4}{x_1^2}+\frac{x_4}{x_2^2}\right)-2\left(\frac{x_1}{x_2x_4}+\frac{x_2}{x_1x_4}+\frac{x_4}{x_1x_2}\right)=$$

$$=\left(\frac{4}{x_5}+\frac{x_5}{x_1^2}+\frac{x_5}{x_2^2}\right)-2\left(\frac{x_1}{x_2x_5}+\frac{x_2}{x_1x_5}+\frac{x_5}{x_1x_2}\right),$$

откуда выводим, что

$$0=4\left(\frac{1}{x_4}-\frac{1}{x_5}\right)+(x_4-x_5)\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}\right)+2\left(\frac{1}{x_5}-\frac{1}{x_4}\right)\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right)+$$

$$+\frac{2(x_5-x_4)}{x_1x_2} = 2\left(2-\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}\right)\frac{1}{x_4} + x_4\left(\frac{1}{x_1^2}-\frac{2}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2^2}\right) -$$

$$-2\left(2-\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}\right)\frac{1}{x_5} - x_5\left(\frac{1}{x_1^2}-\frac{2}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2^2}\right) =$$

$$= \frac{(x_1-x_2)^2}{x_1x_2}\left(\frac{x_4}{x_1x_2}-\frac{2}{x_4}\right) - \frac{(x_1-x_2)^2}{x_1x_2}\left(\frac{x_5}{x_1x_2}-\frac{2}{x_5}\right),$$

то есть $h(x_4) = h(x_5)$, где

$$h(x) = \frac{(x_2-x_1)^2}{x_1x_2}\left(\frac{x}{x_1x_2}-\frac{2}{x}\right).$$

Заметим, что при $x_1 = x_2$ рассматриваемое равенство выполняется автоматически. Если же $x_2 \neq x_1$, то функция h является строго возрастающей, и равенство $h(x_4) = h(x_5)$ влечет равенство $x_4 = x_5$. Значит, нам осталось исследовать два варианта: $x_1 = x_2$ и $x_4 = x_5$.

В первом случае мы получаем следующее выражение для функционала скалярной кривизны:

$$S(\langle\cdot,\cdot\rangle) = \frac{24}{x_1}+\frac{4}{x_3}+\frac{4}{x_4}+\frac{4}{x_5}-2\left(\frac{x_3}{x_4x_5}+\frac{x_4}{x_3x_5}+\frac{x_5}{x_3x_4}\right)-\frac{x_3+x_4+x_5}{x_1^2}.$$

Нетрудно понять, что это выражение совпадает с выражением для функционала скалярной кривизны при $a = b = 1$, $x_2 = x_1$. Таким образом, в этом случае новых эйнштейновых метрик не получается.

Пусть теперь $x_1 \neq x_2$, тогда $x_5 = x_4$. Если к тому же $b = 1$, то

$$S(\langle\cdot,\cdot\rangle) = \frac{12}{x_1}+\frac{12}{x_2}+\frac{6}{x_3}+\frac{12}{x_4}-2\left(\frac{x_3}{x_4^2}+\frac{2}{x_3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{x_4}+\frac{x_4}{x_1^2}+\frac{x_4}{x_2^2}\right)-$$

$$-\left(\frac{x_3}{x_1x_2}+\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_1x_3}\right)-\left(\frac{x_5}{x_1x_2}+\frac{x_1}{x_2x_5}+\frac{x_2}{x_1x_5}\right).$$

Отметим, что полученное выражение совпадает с выражением для скалярной кривизны при $a = b = 1$ и $x_5 = x_4$. Значит, в этом случае получаются уже известные метрики Эйнштейна.

Если же $b \neq 1$, то дифференцируя S по b и приравнивая к 0, получим $x_3 = x_4 = x_5$. Этот результат получается аналогично результату относительно производной по a. Для этого достаточно отметить, что выражение для S не изменится при одновременной перестановке a^2 и $1-b^2$, x_3 и x_5. Значит, получается следующее выражение:

$$S(\langle\cdot,\cdot\rangle) = \frac{12}{x_1}+\frac{12}{x_2}+\frac{10}{x_3}-\frac{x_3}{2}\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}\right)-$$

$$-2\left(\frac{x_3}{x_1x_2}+\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_1x_3}\right),$$

что совпадает с выражением для S при $a = b = 1$, $x_5 = x_4 = x_3$. Следовательно, и в этом случае новых метрик Эйнштейна не получается. Лемма доказана.

Очевидно, что из результатов работы [4] и из приведенных лемм получается доказательство сформулированной теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Arthur L. Besse. Einstein manifolds, Springer-Verlag, Berlin, 1987. Zbl 0613.53001

[2] M.Wang and W.Ziller. Existence and non-existence of homogeneous Einstein metrics. Invent. math. 84(1986), 177-194. Zbl 0596.53040

[3] M.Wang. Some examples of homogeneous Einstein manifolds in dimension seven. Duke Math. J. 49(1982), 23-28. Zbl 0488.53035

[4] O.Kowalski and Z.Vlasek. Homogeneous Einstein metrics on Aloff-Wallach spaces. Diff. Geom. Appl. 3(1993), 157-167. Zbl 0779.53031

[5] S. Aloff and N.R.Wallach. An infinite family of distinct 7-manifolds admitting positively curved rimannian structures. Bull. Amer. Math. Soc. 81(1975), 93-97. Zbl 0362.53033

[6] M.Kreck and S.Stolz. Some nondiffemorphic homeomorphic 7-manifolds with positive sectional curvature. J. Differential Geom. 33(1991), 465-486. Zbl 0733.53025

[7] Никоноров Ю.Г. Компактные семимерные однородные многообразия Эйнштейна// Докл. РАН.- 2000.- Т.372, N 5,- С.589-592.

[8] Никоноров Ю.Г. Классификация компактных семимерных однородных многообразий Эйнштейна// Математические труды.- 2000.- Т.3, N 2. Zbl 0966.53031

Алтайский государственный университет,
Рубцовский индустриальный институт,
ул. Тракторная 2/6, 658207, Рубцовск, Россия.
e-mail: nik@inst.rubtsovsk.ru