劣モジュラ関数の最大化に対する近似アルゴリズム

塩浦昭義

東北大学大学院情報科学研究科

劣モジュラ関数最大化に関する FOCS, STOC での講演

- FOCS: IEEE Symposium on Foundations of Computer Science
- STOC: ACM Symposium on Theory of Computing
- 理論計算機科学に関する世界最高峰の会議

- FOCS2010
  - Dependent Randomized Rounding via Exchange Properties of Combinatorial Structures, by Chandra Chekuri, Jan Vondrak, Rico Zenklusen
- STOC2010
  - Matroid Matching: the Power of Local Search, by Jon Lee, Maxim Sviridenko, Jan Vondrak

- FOCS2009
  - Symmetry and approximability of submodular maximization problems, by Jan Vondrak

劣モジュラ関数最大化に関する FOCS, STOC での講演

- STOC2009
  - Non-monotone Submodular Maximization under Matroid and Knapsack Constraints, by Jon Lee, Vahab S. Mirrokni, Viswanath Nagarajan, Maxim Sviridenko FOCS2008
  - On the Approximability of Budgeted Allocations and Improved Lower Bounds for Submodular Welfare Maximization and GAP, by Deeparnab Chakrabarty, Gagan Goel
- STOC2008
  - Optimal approximation for the Submodular Welfare Problem in the value oracle model, by Jan Vondrak
- FOCS2007
  - Maximizing non-monotone submodular functions, by Uriel Feige, Vahab Mirrokni, Jan Vondrak

- FOCSとSTOCの講演のトピック≒現在の研究のトレンド
  ≒面白い研究テーマ

劣モジュラ関数最大化は面白い研究テーマ

予定

- 10:30—11:20 講義
  - 劣モジュラ関数の定義，最大化問題の分類，例
- 11:40—12:30 講義
  - 研究の歴史，基本的な近似技法
- 14:00—15:00 講義
  - 最近の近似技法
- 15:15—16:15 演習
- 16:30—17:30 講義
  - これまでの研究成果の紹介

大学院修士課程の学生でも十分理解可能

ちょっと難しめ？

主に研究者向けのサーベイ
数学の話はしません

10:30−11:20の予定

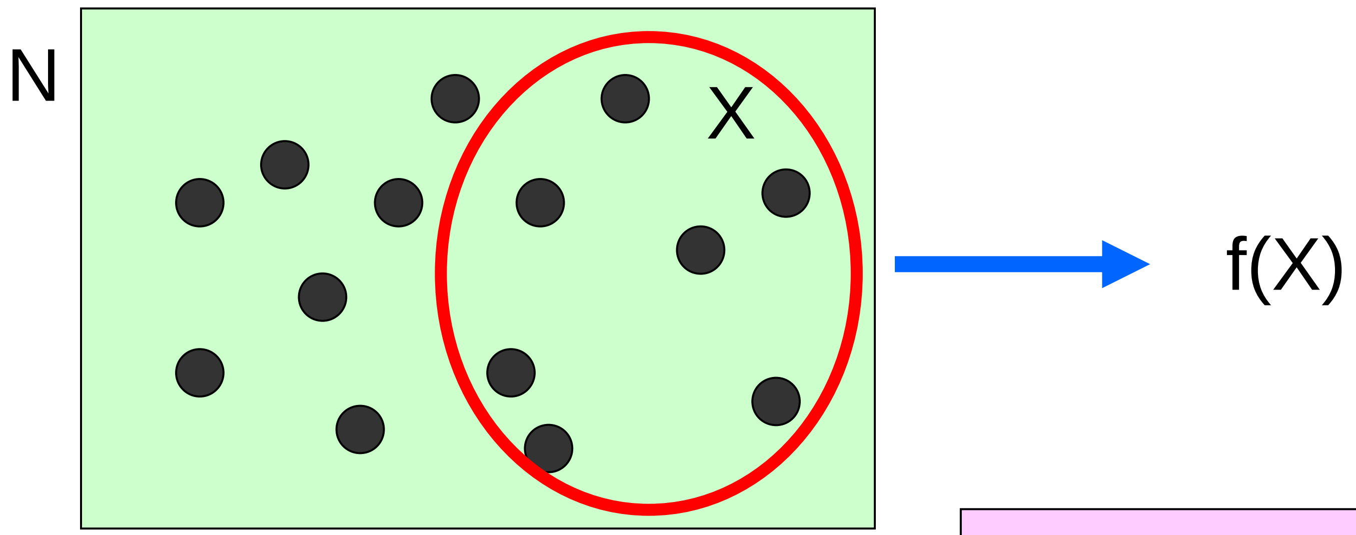
- 劣モジュラ関数の定義
- 劣モジュラ関数の簡単な例
- 劣モジュラ関数最大化問題の分類
  - 問題の難しさ・面白さ
- 劣モジュラ関数最大化問題の具体例

劣モジュラ関数の定義

集合関数

- N: 有限個の要素の集合
  - グラフの頂点・枝集合, アイテム集合, など
- 集合関数 f: $2^N \rightarrow R$
  - N の任意の部分集合 X に対し, 実数値 f(X) を与える

2^N
= Nの部分集合
すべてを集めたもの



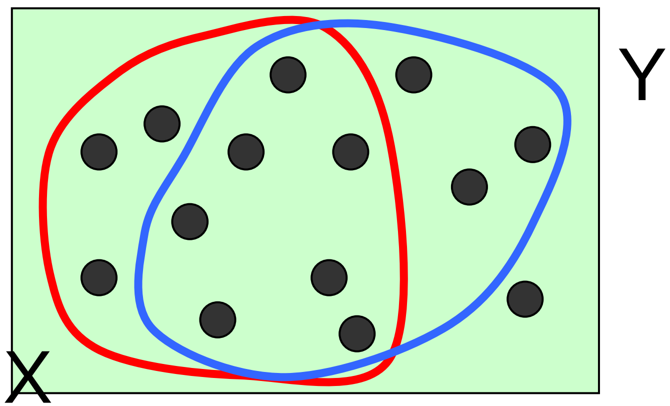
今日の講演では$f(\varnothing)=0$を仮定

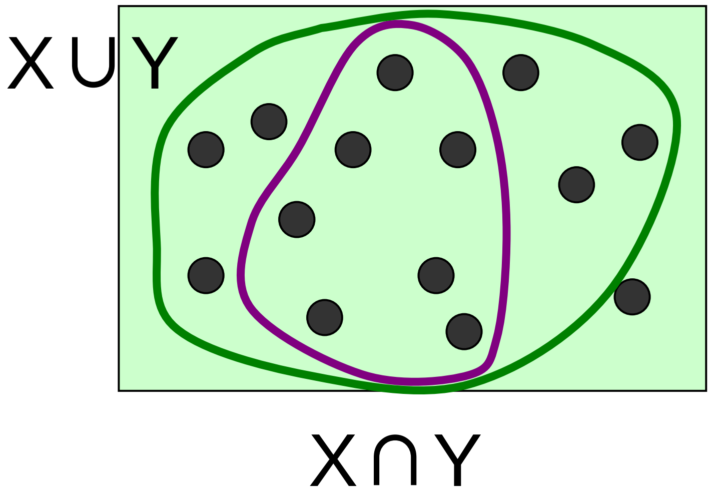
劣モジュラ関数の定義

劣モジュラ
不等式

- 定義:集合関数 f: $2^N \rightarrow R$ は劣モジュラ

  ←→ $\forall X, Y \subseteq N$: $f(X) + f(Y) \geqq f(X \cap Y) + f(X \cup Y)$





- 定義: f は単調(非減少)関数

  ←→ $X \subseteq Y \subseteq N$ のとき $f(X) \leqq f(Y)$

※非単調関数---単調とは限らない関数

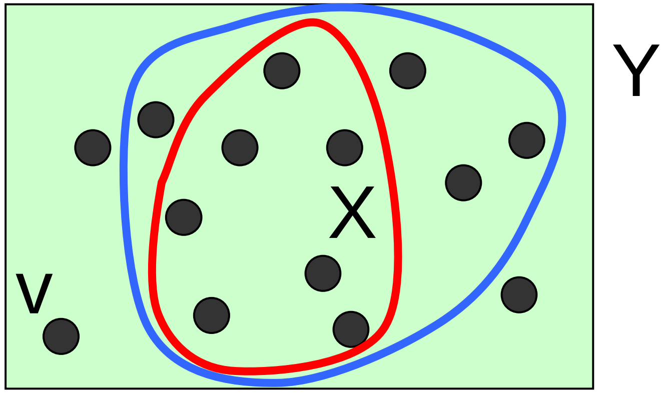
劣モジュラ関数の等価な定義

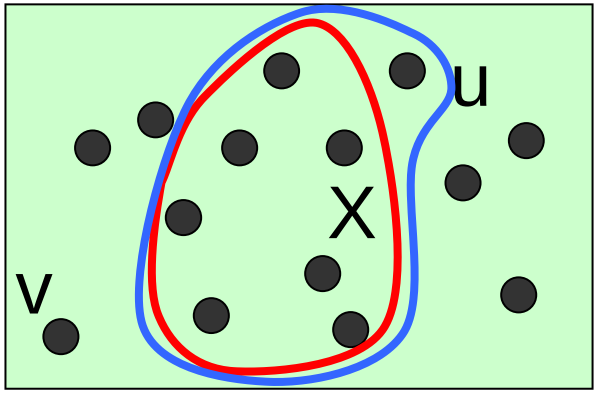
- 集合関数 $f: 2^N \rightarrow R$ は劣モジュラ

限界効用
逓減性

$\Leftrightarrow$ $\forall X \subseteq \forall Y \subseteq N,\ \forall v \in N-Y$:

$$f(X+v) - f(X) \geqq f(Y+v) - f(Y)$$





$\Leftrightarrow$ $\forall X \subseteq N,\ \forall u, v \in N-X,\ u \neq v$:

$$f(X+v) - f(X) \geqq f(X+\{u,v\}) - f(X+u)$$

演習

優モジュラ関数，モジュラ関数の定義

- 定義：集合関数 $f: 2^N \rightarrow R$ は優モジュラ
  - $\Leftrightarrow$ −f が劣モジュラ
  - $\Leftrightarrow$ $\forall X, Y \subseteq N$: $f(X) + f(Y) \leqq f(X \cap Y) + f(X \cup Y)$
- 定義：集合関数 $f: 2^N \rightarrow R$ はモジュラ
  - $\Leftrightarrow$ f が劣モジュラかつ優モジュラ
  - $\Leftrightarrow$ $\forall X, Y \subseteq N$: $f(X) + f(Y) = f(X \cap Y) + f(X \cup Y)$
  - $\Leftrightarrow$ ある $w(v) \in R$ $(v \in V)$ に対し，

$$f(X) = w(X) \quad (\equiv \Sigma\{w(v) \mid v \in X\})$$

（f は線形関数）

劣モジュラ関数の例

劣モジュラ関数の例1

- 凹関数から得られる劣モジュラ関数

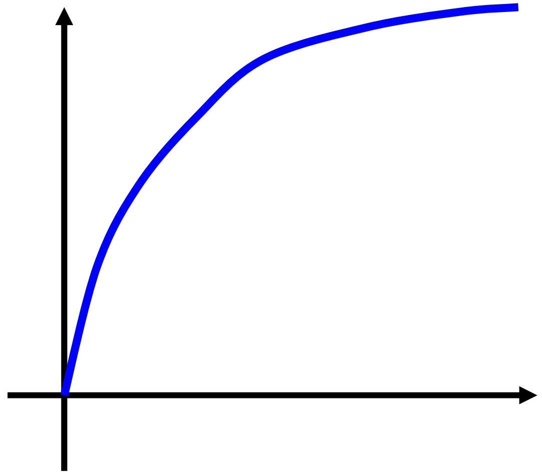
  $\phi : Z \to R$, 凹関数 $(k \leqq h \Rightarrow \phi(k+1) - \phi(k) \geqq \phi(h+1) - \phi(h))$

  に対し, $f(X) = \phi(|X|)$ 劣モジュラ

  より一般に, $w(v) \in R_+ (v \in V)$に対して

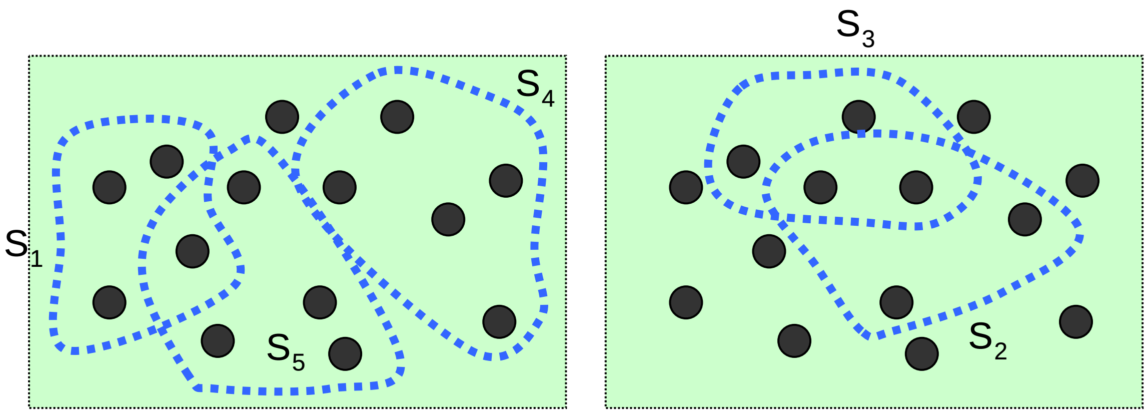
  $f(X) = \phi(w(X))$ 劣モジュラ

演習



劣モジュラ関数の例2

- 集合カバー問題（携帯電話の基地局設置）
  - 基地局の設置候補地の集合 N ← k 箇所設置
  - 顧客の集合 M
  - 建設候補地 v∈N に対し，基地局 v がカバーする顧客 $S_v \subseteq M$
  - カバーできる顧客数を最大に



f(X)
=Xの各地に基地を設置したとき，カバーできる顧客数

$$= \left| \bigcup_{v \in X} S_v \right|$$

単調劣モジュラ

重み付きバージョン：$f(X) = w\left(\bigcup_{v \in X} S_v\right)$ （$w(v)$：v の非負重み）

演習

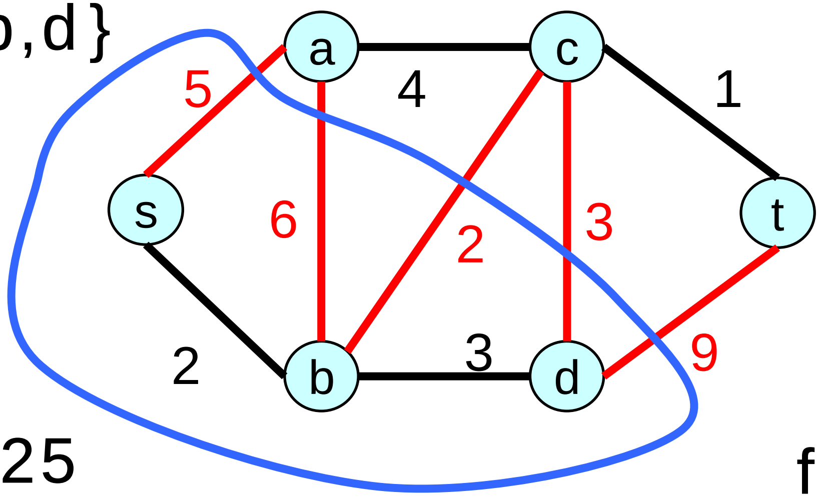
劣モジュラ関数の例3

グラフのカット

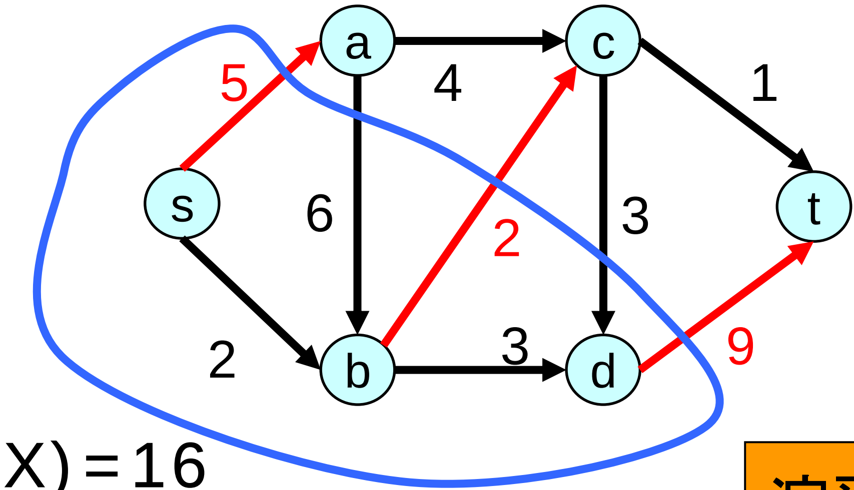
- 無向または有向グラフ G=(N, E)
- 各枝 e∈E の非負重みw(e)
- 無向の場合: f(X) = X と N-X を結ぶ枝の重み和
- 有向の場合: f(X) = X から N-X に向かう枝の重み和

劣モジュラ

X={s,b,d}



f(X)=25



f(X)=16

演習

劣モジュラ関数最大化問題

制約なし劣モジュラ関数最大化

- 入力：劣モジュラ関数 f: $2^N \rightarrow R$
  - 関数値評価オラクルにより与えられる

N の部分集合 X をインプット → **オラクル** → 関数値 f(X) がわかる

- 出力： f を最大化する X⊆N および値 f(X)

- 例：最大カット問題（例3）
- f が単調ならば答えは自明➔非単調な場合を考える

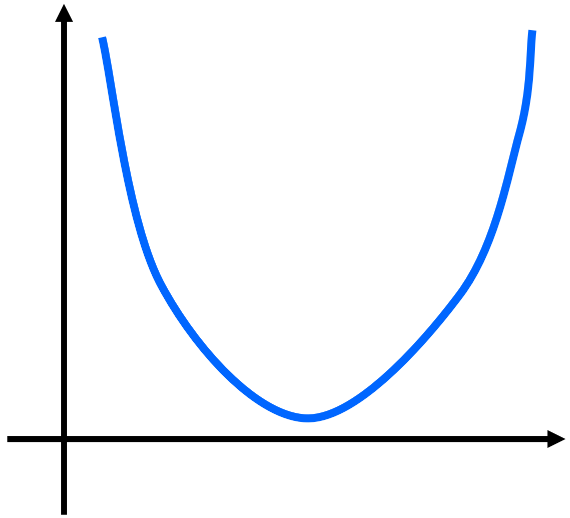
制約付き劣モジュラ関数最大化

- 入力：劣モジュラ関数 $f\colon 2^N \to R$（単調な場合，非単調な場合）
  $X \subseteq N$ に関する制約
  - 要素数制約（一様マトロイド制約）：整数 k に対し，$|X| \leqq k$
  - 費用（ナップサック）制約：
    非負費用 $c(v)$（$v \in N$)と予算 $B>0$ に対し，$c(X) \leqq B$
  - 分割マトロイド制約：N の分割 $\{N_1, N_2, \ldots, N_t\}$ に対し
    $|X \cap N_i| \leqq k_i$ $(i=1,2,\ldots,t)$
  - 一般のマトロイド制約：X は，与えられたマトロイドの独立集合
- 出力：制約の下で f を最大化する $X \subseteq N$ および値 $f(X)$
- 例：集合カバー問題（例2）

アルゴリズムの評価尺度

- 劣モジュラ関数最大化に対する「良い」アルゴリズムが欲しい
- 評価尺度：計算時間と解の精度
- 計算時間
  - 四則演算＋比較の回数，関数値オラクルの使用回数
  - 回数が多項式以下➔効率的なアルゴリズム
- 解の精度
  - 近似比＝得られた解の目的関数値／最適値（≦ 1）
  - 近似比＝1➔最適解
  - 近似比が1に近いほど良い

問題の難しさ･面白さ：凸関数との関係

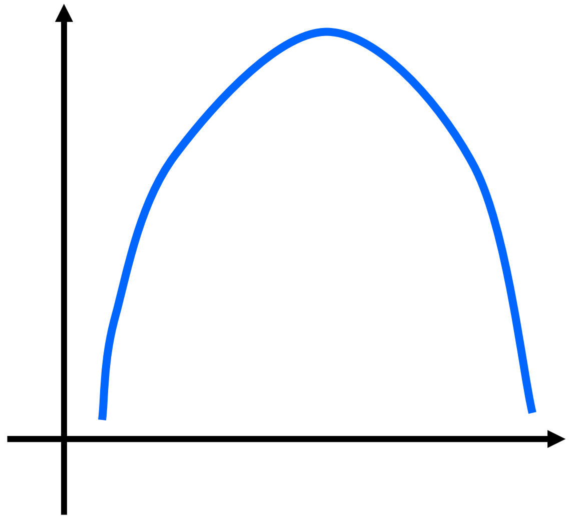


- 劣モジュラ関数は凸関数に似ている
  - 分離定理，双対定理(藤重，Frank)
  - 集合関数 f は劣モジュラ

    ←→ f のLovász拡張が凸関数
- 凸関数
  - 最小化は解きやすい．多項式時間で解けることも
  - 最大化は難しい．NP困難（多項式時間で解くことは絶望的）
- 劣モジュラ関数
  - 最小化は解きやすい
    - 岩田･Fleischer･藤重とSchrijver の多項式時間アルゴリズム
  - 最大化は難しい．特殊ケースでもNP困難

問題の難しさ･面白さ:凹関数との関係

- 劣モジュラ関数は凹関数にも似ている！
  - 凹関数から得られる劣モジュラ関数の例
  - 劣モジュラ関数
    ←→限界効用逓減性
    ←→凹関数



- 凹関数
  - 最大化は解きやすい
- 劣モジュラ関数
  - 最大化は難しい, けれど解きやすい!?
  - 問題の種類によっては良い近似が可能　←今日のトピック

劣モジュラ関数最大化の具体例

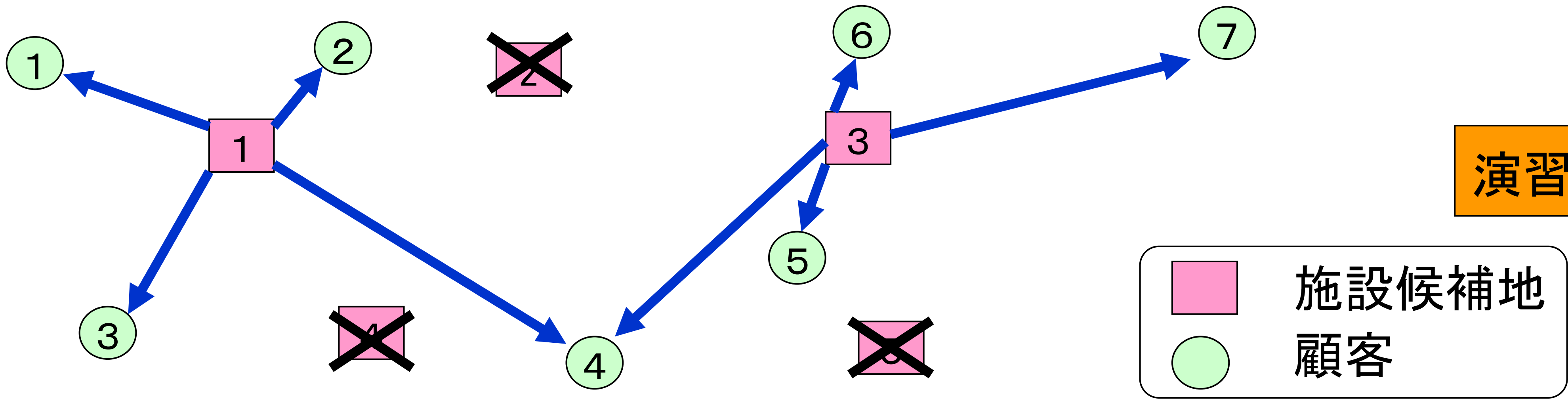
容量なし施設配置問題

- 施設建設候補地の集合 N ← p箇所を選択，施設を建設
- 顧客の集合 M ← いずれか1つの施設がサービスする
- 顧客 j が施設 u より得る満足度 w(u,j) → 合計を最大に

$$f(X) = \sum_{j \in M} \max_{u \in X} w(u, j)$$

要素数制約下での単調劣モジュラ関数最大化

演習



容量なし施設配置問題（建設コストつき）

- 施設建設候補地の集合 N ← u∈N に建設するコスト c(u)
- 顧客の集合 M ← いずれか1つの施設がサービスする
- 顧客 j が施設 u より得る満足度 w(u,j) → 満足度を最大に

$$\text{最大化}\ f(X) = \sum_{j\in M} \max_{u\in X} w(u,j) \quad \text{条件}\ \sum_{u\in X} c(u) \le B$$

費用制約下での単調劣モジュラ関数最大化

$$\text{最大化}\ f(X) = \sum_{j\in M} \max_{u\in X} w(u,j) - \sum_{u\in X} c(u) \quad \text{条件 なし}$$

制約なし劣モジュラ関数最大化

演習

センサー配置問題

- 機械学習，実験計画，ORなど多彩な応用
- センサーの配置場所の候補 {1, 2, ..., n}
  - センサーを u に配置➔情報が得られる➔確率変数X_u
- センサーの配置可能位置には制約がある（個数，費用など）
  ➔制約の元で，出来るだけ有用な情報を得たい
- 情報の価値を計る指標：エントロピーなど
  - S⊆N≡{X_1, ..., X_n} のエントロピー h(S)

劣モジュラ

$S=\{X_1, X_2, ..., X_k\}$，各確率変数の取り得る値が $\{1,2,...,N\}$ のとき，

$$h(S) = -\sum_{x_1=1}^{N}\cdots\sum_{x_k=1}^{N} P(X_1=x_1,\dots,X_k=x_k)\log P(X_1=x_1,\dots,X_k=x_k)$$

参考文献: http://www.submodularity.org/

センサー配置問題

劣モジュラ

- 情報の価値を計る指標：エントロピーなど
  - 例1：S⊆N≡{X_1, …, X_n} のエントロピー h(S)

$S=\{X_1,X_2,...,X_k\}$, 各確率変数の取り得る値が $\{1,2,\ldots,N\}$ のとき,

$$h(S)=-\sum_{x_1=1}^{N}\cdots\sum_{x_k=1}^{N}P(X_1=x_1,\ldots,X_k=x_k)\log P(X_1=x_1,\ldots,X_k=x_k)$$

  - 例2：f(S) = h(M) – h(M|S)

    M は確率変数の集合, M∩N=∅

    Nの確率変数は条件付き独立と仮定

劣モジュラ

参考文献: http://www.submodularity.org/

センサー配置問題の特殊ケース

- 確率変数がガウス分布に従う

➔ S⊆N のエントロピー

$h(S) = \log \det A[S, S]$ + 定数 ➔ 最大化

（A: 共分散行列）

実験計画への応用

Ko-Lee-Queyranne (1995), Lee (1998),

Hoffman et al. (2001)

数理経済学



- N＝財（品物）の集合
- f: $2^N \rightarrow R_+$, 効用関数

  $f(X)$ = 財の集合 X を貰ったときの満足度
- Nが代替財（似たような機能をもつ品物）

  ➔ f は劣モジュラ関数と仮定して良い

限界効用逓減性

$\forall X \subseteq \forall Y \subseteq N,\ \forall v \in N-Y$:

$$f(X + v) - f(X) \geqq f(Y + v) - f(Y)$$

「たくさん携帯端末を持っている人が iPod を
　もらっても，携帯端末を持っていない人に比べて嬉しくない」

- 費用制約の下で効用関数を最大化する➔劣モジュラ関数最大化

組合せオークション

- N＝代替財の集合,
- {1,2,...,k}: オークション参加者の集合
- f_i: $2^N \rightarrow R_+$, 参加者 i の効用関数, 劣モジュラと仮定
- オークション主催者の目的:

  $f_1(S_1)+f_2(S_2)+\cdots+f_k(S_k)$を最大にする

  N の分割 $\{S_1,S_2,...,S_k\}$（財の配分）を求める

  $(S_i \cap S_j = \varnothing,\ \cup_i S_i = N)$

分割マトロイド制約下での単調劣モジュラ関数最大化

B. Lehmann, D. Lehmann, N. Nisan (2006)

演習

参考文献

- C. Chekuri のスライド
  - http://www.math.mcgill.ca/~vetta/Workshop/schedule.html
- Select Lab の submodularity に関するスライド
  - http://www.submodularity.org/
  - http://www.submodularity.org/ijcai09/index.html
- 劣モジュラ最適化に関する岩田覚先生のスライド
  - http://www.ai-gakkai.or.jp/jsai/sig/dmsm/009/
- V.S. Mirrokni のスライド
  - http://research.microsoft.com/en-us/um/beijing/events/theoryworkshop08/speaker.html

演習問題（その1）

(1) p.1-9 で示した条件が劣モジュラ性と等価であることを証明せよ.

(2) p.1-12, 1-13, 1-14, 1-22, 1-23 で示した例が（単調）劣モジュラ関数であることを証明せよ.

(3) p.1-28 の組合せオークションの問題が，分割マトロイド制約下での劣モジュラ関数最大化として定式化できることを示せ.