

予定

- 10:30—11:20 講義
 - 劣モジュラ関数の定義, 最大化問題の分類, 例
- 11:40—12:30 講義
 - 研究の歴史, 近似における基本的な技法
- 14:00—15:00 講義
 - 近似における新たな技法
- 15:15—16:15 演習
- 16:30—17:30 講義
 - これまでの研究成果の紹介

11:40-12:30の予定

- 劣モジュラ関数最大化の研究の歴史
- 近似アルゴリズムで使われる基本的なテクニック
 - 局所探索
 - 貪欲算法
 - 部分列挙

劣モジユラ関数最大化の研究の歴史

旧ソ連における研究

- 旧ソ連では50年以上前より劣モジュラ関数最大化の研究が行なわれる
 - Petrov & Cherenin (1948) が最初？
- Cherenin, Khachaturov, Kovalev, Moshchensky, Genkin, Muchnik などにより論文が発表される
 - 主に列挙に基づく厳密解法の研究. 局所最適解の性質を利用.
 - その成果は西側には余り知られていない(Goldengorin (2009)などの論文で紹介されている)

A. Petrov and V. Cherenin. An improvement of train gathering plans design methods, *Zheleznodorozhnyi Transport* **3** (1948) 60–71 (in Russian).

B. Goldengorin. Maximization of submodular functions: theory and enumeration algorithms. *European J. Oper. Res.* 198 (2009) 102-112.

80年前後のOR分野での研究

- Fisher, Nemhauser, Wolsey, Cornuejols による一連の研究
 - スタートは容量なし施設配置問題(Cornuejols et al.(1977))
→ 制約付き単調劣モジュラ関数最大化へ一般化
- 近似アルゴリズム(上界, 下界)
 - 一様マトロイド制約 → $1-1/e$ 近似, これ以上は指数時間が必要
 - 一般のマトロイド p 個の共通部分 → $1/(p+1)$ 近似
- IPによる定式化, 分枝限定法による厳密解法

近年の近似アルゴリズムの進展

- 新たな応用が現れる
 - 組合せオークション, 機械学習, インターネット・マーケティング, など
 - ➔ 2005年以降の近似アルゴリズムの急速な発展へ
- 2007 IPCO, 2008 STOC (Calinescu, Chekuri, Pál, Vondrák)
 - マトロイド制約下での劣モジユラ関数最大化に対する $1-1/e$ 近似
 - 非線形計画緩和 + pipage rounding に基づく新たな近似手法

G. Calinescu, C. Chekuri, M. Pál, J. Vondrák: Maximizing a submodular set function subject to a matroid constraint, IPCO 2007, 182-196

J. Vondrák: Optimal approximation for the submodular welfare problem in the value oracle model, STOC 2008, 67-74

G. Calinescu, C. Chekuri, M. Pál, J. Vondrák:
Maximizing a submodular set function subject to a matroid constraint.
to appear in SIAM Journal on Computing

近年の近似アルゴリズムの進展

- 2007年FOCS (Feige, Mirrokni, Vondrák)
 - 制約なし非単調劣モジュラ関数最大化に対する様々な近似アルゴリズム, 局所探索を利用
- 2009年STOC (Lee, Mirrokni, Nagarajan, Sviridenko)
 - 各種制約付き非単調劣モジュラ関数最大化に対する近似アルゴリズム, 局所探索を利用

U. Feige, V.S. Mirrokni, J. Vondrák: Maximizing non-monotone submodular functions, FOCS 2007, 461-471

J. Lee, V.S. Mirrokni, V. Nagarajan, M.Sviridenko: Non-monotone submodular maximization under matroid and knapsack constraints, STOC 2009, 323-332

近似アルゴリズムの紹介

その1: 基本的な技法

近似に使われる技法

- 貪欲算法 (greedy algorithm)
- 局所探索 (local search)
- 部分列挙, 推測 (partial enumeration, guess)
- 乱択化 (randomization)
- 連続緩和 + 丸め (continuous relaxation + rounding)

- ラグランジュ緩和 (Lagrangian relaxation)

近似に使われる技法

- 貪欲算法 (greedy algorithm)
- 局所探索 (local search)
- 部分列挙, 推測 (partial enumeration, guess)
- 乱択化 (randomization)
- 連続緩和 + 丸め (continuous relaxation + rounding)

- ラグランジュ緩和 (Lagrangian relaxation)

(近似)局所探索

制約なし非単調劣モジュラ関数最大化に対する
Feige, Mirrokni, Vondrák (2007) の
1/3 近似アルゴリズムを例として

制約なし非単調劣モジュラ関数最大化 に対する局所探索近似アルゴリズム

Maximize $f(S)$ subject to $S \subseteq N$ (f : 非単調劣モジュラ, ≥ 0)

定義: X は局所最適 $\iff f(X) \geq \max\{f(X+v), f(X-v)\}$ ($\forall v \in N$)

アルゴリズム

Step 1: 局所最適解 X を求める

Step 2: X 及び $N - X$ のうち, 良い方を出力

→ 1/3 近似

近似アルゴリズムの解析

定理1 (Cherenin1962):

X は局所最適 $\rightarrow Y \subseteq X$ または $Y \supseteq X$ のとき $f(Y) \leq f(X)$

演習

S^* : 大域的最適解

定理: $\max\{f(X), f(N - X)\} \geq (1/3) f(S^*)$

証明:

定理1より $f(X \cap S^*) \leq f(X)$, $f(X \cup S^*) \leq f(X)$

劣モ性より $f(X \cup S^*) + f(N - X) \geq f(N) + f(S^* - X) \geq f(S^* - X)$

$$f(X \cap S^*) + f(S^* - X) \geq f(S^*) + f(\emptyset) \geq f(S^*)$$

$\therefore 2f(X) + f(N - X) \geq f(X \cap S^*) + f(X \cup S^*) + f(N - X) \geq f(S^*)$

$\therefore \max\{f(X), f(N - X)\} \geq (1/3)f(S^*)$

修正版局所探索近似アルゴリズム

劣モジュラ関数の局所最適解を多項式時間で求めるのは非常に困難！
(PLS完全)

→ 近似局所最適解を使う

定義: X は近似局所最適

$$\leftrightarrow (1 + (\varepsilon / n^2)) f(X) \geq \max\{f(X+v), f(X-v)\} \quad (\forall v \in N)$$

※ 局所最適解 → 近似局所最適解

近似局所最適解 X に対し, X または $N - X$ の良い方を出力

→ $(1/3 - \varepsilon)$ 近似

修正版局所探索近似アルゴリズム

修正版アルゴリズム

Step 1: $\max_{v \in N} f(\{v\})$ を計算, $=0$ ならば空集合 \emptyset を出力.

(\emptyset は最適解)

Step 2: $\{v^*\} = \max f(\{v\})$ に対し, $X := \{v^*\}$

Step 3: $f(X+u) > (1 + (\varepsilon/n^2))f(X)$ ($\exists u \in N-X$)

→ $X := X+u$, Step 2 に戻る

Step 4: $f(X-u) > (1 + (\varepsilon/n^2))f(X)$ ($\exists u \in X$)

→ $X := X-u$, Step 2 に戻る

Step 5: X 及び $N - X$ のうち, 良い方を出力

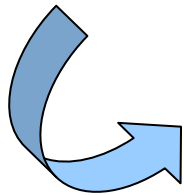
修正版近似アルゴリズムの解析

定理1':

X は近似局所最適

→ $Y \subseteq X$ または $Y \supseteq X$ のとき $f(Y) \leq (1 + \varepsilon/n)f(X)$

演習



$$\max\{f(X), f(N - X)\} \geq (1/3 - \varepsilon) f(S^*)$$

アルゴリズムの反復回数

- 各反復で目的関数は $(1 + (\varepsilon/n^2))$ 倍以上増加
- $f(\{v^*\}) \leq \text{OPT} \leq n f(\{v^*\})$

演習

→ 反復回数 = $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon} n^2 \log n\right)$

貪欲算法

一様マトロイド制約下の
単調劣モジュラ関数最大化に対する
Nemhauser, Wolsey, Fisher (1978) の
($1-1/e$) 近似アルゴリズムを例として

要素数制約下での 単調劣モジユラ関数最大化

Maximize $f(S)$ subject to $|S| \leq k, S \subseteq N$

貪欲算法による $(1-1/e) \doteq 0.632$ 近似アルゴリズム

Step 0: $S = \emptyset$

Step 1: $|S| = k$ となるまで以下を実行

1-1: $v = \arg \max \{ f(S + v) - f(S) \mid v \in N - S \}$

1-2: $S := S + v$

Step 2: S を出力

一番良い要素を
追加

※ $1-1/e$ より良い近似は不可能 (Nemhauser & Wolsey, Math. OR 1978)

貪欲算法の解析(その1)

劣モジュラ関数の性質

$X \subseteq Y \subseteq N$, $Y - X = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ のとき,
 $f(Y) - f(X) \leq \sum_i \{f(X + v_i) - f(X)\}$

貪欲算法の解析(その2)

$S_j =$ 第 j 反復での S ($|S_j| = j$), $a_j = f(S_j) - f(S_{j-1})$

→ $f(S) = a_1 + a_2 + \dots + a_k$

S^* : 最適解, $b =$ 最適値 ($=f(S^*)$)

$$\text{補題: } b \leq \sum_{i=1}^{j-1} a_i + ka_j \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

$$f(S^*) \leq f(S^* \cup S_{j-1}) \quad (\text{単調性})$$

$$\leq f(S_{j-1}) + \sum_{v \in S^* - S_{j-1}} \{f(S_{j-1} + v) - f(S_{j-1})\}$$

(劣モジュラ関数の性質)

$$\leq f(S_{j-1}) + |S^* - S_{j-1}|a_j \leq f(S_{j-1}) + ka_j$$

貪欲算法の解析(その3)

$$\text{補題: } b \leq \sum_{i=1}^{j-1} a_i + ka_j \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

→ (a_1, \dots, a_k) は次のLPの許容解

$$\text{Minimize } \sum_{j=1}^k x_j \quad \text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & k & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b \\ b \\ \vdots \\ b \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\text{最適解は} \quad x_j^* = \frac{b}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{j-1}$$

$$\therefore f(S) = \sum_{j=1}^k a_j \geq \sum_{j=1}^k x_j^* = b \left[1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right] \geq b \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

部分列挙

1つの費用制約下での
単調劣モジュラ関数最大化に対する
Sviridenko (2004) の
($1-1/e$)近似アルゴリズムを例として

費用制約下での 単調劣モジュラ関数最大化

Maximize $f(S)$ subject to $c(S) \equiv \sum \{c(v) \mid v \in S\} \leq B, S \subseteq N$

貪欲算法 + 部分列挙による $(1-1/e) \doteq 0.632$ 近似アルゴリズム

Sviridenko, ORL 2004 (+塩浦 2010)

貪欲算法

Step 0: $S = \emptyset$

Step 1: $c(S) \geq B$ となるまで以下を実行

$$1-1: v = \arg \max \left\{ \frac{f(S+v) - f(S)}{c(v)} \mid v \in N-S \right\}$$

$$1-2: S := S + v$$

Step 2: S を出力

S は許容解でない可能性大

補題: $f(S) \geq (1-1/e)OPT, c(S) \leq B + \max_v c(v)$

近似アルゴリズムのアイデア

補題: $f(S) \geq (1-1/e)OPT$, $c(S) \leq B + \max_v c(v)$

S は許容解でない可能性が高い

アイデア: S からある要素 u を1つ取り除いて許容解にする

→ $c(S-u) \leq B$, $f(S-u) \geq (1-1/e)OPT$ を満たす

一般には不可能, そのような u が存在しないこともある

→ **部分列挙**を使って, 強引にそのような状況に持っていく

近似アルゴリズムの流れ(その1)

- 最適解 S^* の要素数 ≥ 4 と仮定
 - $|S^*| \leq 3$ なる場合は全列挙すれば見つけられる
- S^* の中で費用 $c(v)$ の値が最大の3つの要素 u_1, u_2, u_3 が既知と仮定
 - すべての可能性 (n^3 種類) を列挙すればよい
- $S^* - \{u_1, u_2, u_3\} \subseteq N'$ 成立
 - $N' \equiv \{v \in N - \{u_1, u_2, u_3\} \mid c(v) \leq \min\{c(u_1), c(u_2), c(u_3)\}\}$

近似アルゴリズムの流れ(その2)

- $X \equiv \{u_1, u_2, u_3\}$,
 $N' \equiv \{v \in N - \{u_1, u_2, u_3\} \mid c(v) \leq \min\{c(u_1), c(u_2), c(u_3)\}\}$
 を使って縮小した問題に貪欲算法を適用
 ($X \subseteq$ 最適解 $S^* \subseteq N'$)
 - 目的関数 $f' : 2^{N'} \rightarrow \mathbf{R}_+$, $f'(S) = f(X \cup S) - f(X)$ ($S \subseteq N'$)
 - 問題: Maximize $f'(S)$ subject to $c(S) \leq B - c(X)$, $S \subseteq N'$

- 貪欲算法の出力 $S' \subseteq N'$
 - 元の問題に対し, $S' \cup X$ は非許容
 - u_1, u_2, u_3 のいずれかを削除

- $f(\{u_1, u_2\}) \geq \max\{f(\{u_1, u_3\}), f(\{u_2, u_3\})\}$ と仮定
 - $S' \cup \{u_1, u_2\}$ を元問題の近似解とする

近似アルゴリズムの解析(その1)

縮小問題の最適値 $OPT' = OPT - f(X)$

補題1: $f(X \cup S') - f(X) = f'(S')$
 $\geq (1-1/e)OPT' = (1-1/e)(OPT - f(X)),$
 $c(S') \leq B - c(X) + \max_{v \in N'} c(v)$
 $\leq B - c(X) + \min\{c(u_1), c(u_2), c(u_3)\}$

補題2: $S' \cup \{u_1, u_2\}, S' \cup \{u_1, u_3\}, S' \cup \{u_2, u_3\}$
 は元問題の許容解

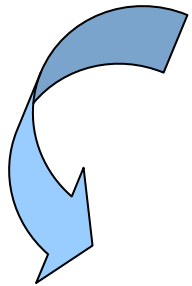
補題3: $f(\{u_1, u_2\}) \geq (2/3)f(\{u_1, u_2, u_3\})$

演習

近似アルゴリズムの解析(その2)

補題1: $f(X \cup S') - f(X) \geq (1 - 1/e)[OPT - f(X)]$

補題3: $f(\{u_1, u_2\}) \geq (2/3)f(\{u_1, u_2, u_3\})$



$$f(S' \cup \{u_1, u_2\})$$

$$= f(\{u_1, u_2\}) + [f(S' \cup \{u_1, u_2\}) - f(\{u_1, u_2\})]$$

$$\geq (2/3)f(X) + [f(S' \cup X) - f(X)]$$

(\because 補題3, 劣モ性の等価な定義)

$$\geq (2/3)f(X) + (1 - 1/e)[OPT - f(X)] \quad (\because \text{補題1})$$

$$\geq (1 - 1/e)OPT \quad (\because 2/3 \geq 1 - 1/e \doteq 0.632)$$

演習問題(その2)

- (1) p.2-13 の Cherenin の定理を証明せよ.
- (2) p.2-16 の定理1' を証明せよ.
- (3) p.2-16: $n \max_{v \in N} f(\{v\}) \geq \max_{S \subseteq N} f(S)$ を証明せよ.
- (4) p.2-19 の不等式を証明せよ.
- (5) p.2-27 の補題3を証明せよ.