

凡例：(*) 推奨

演習問題 1 (*) 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = 0$$

が成り立つことを証明せよ。

演習問題 2 (*) 無向グラフ $G = (V, E)$ の辺部分集合 $M \subseteq E$ が完全マッチングであるとは、各頂点 $v \in V$ に対して、唯一の辺 $e \in M$ が存在して、 v が e の端点であることである。

頂点数 $n+n$ の二部グラフにおける完全マッチングの総数を計算するための、 $O(2^n \text{poly}(n))$ 時間アルゴリズムを与えよ。(ヒント：包除原理を用いよ。)

演習問題 3 (*) 任意の確率空間における 2 つの事象 E, E' に対して $\Pr[E] \leq \Pr[E | \overline{E'}] + \Pr[E']$ が成り立つことを示せ。ただし、 $\overline{E'}$ は E' の余事象を表す。

演習問題 4 (*) 体 F 上の n 変数多項式 $p(x_1, \dots, x_n) \in F[x_1, \dots, x_n]$ の全次数は d 以下であるとする。要素数 $d+1$ 以上の有限集合 $S \subseteq F$ を考える。このとき、任意の $(r_1, \dots, r_n) \in S^n$ に対して、 $p(r_1, \dots, r_n) = 0$ であるならば、 $p(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$ が成り立つことを証明せよ。

演習問題 5 有限体 F と自然数 $m \geq 1$ に対して任意の関数 $f: F^m \rightarrow F$ を考える。任意の $\delta \geq 2\sqrt{\frac{d}{|F|}}$ に対して、 $\Pr[f(x) = q(x)] \geq \delta$ となる次数 d 以下の多項式 $q \in F[x]$ の数が $\frac{2}{\delta}$ 以下であることを証明せよ。ただし、確率は要素 x を F^m から一様ランダムに選択したときのものとする。

演習問題 6 位数 (要素数) 4 の有限体を構成してみよ。すなわち、加法に関する単位元を 0、乗法に関する単位元を 1 と表記すると、この体には他に 2 つの元が存在する。それらを a, b として、加法と乗法がどのように定義されるか明らかにせよ。

演習問題 7 頂点数 $2n$ の閉路の頂点集合から n 個の頂点を一様ランダムに選ぶ。このとき、両端点がともに選ばれる辺の数の期待値が $\frac{n}{2} - \Theta(1)$ になることを証明せよ。