組合せ最適化に対する代数的厳密アルゴリズム

京都大学数理解析研究所「組合せ最適化セミナー」(第 8 回)

岡本 吉央

北陸先端科学技術大学院大学 大学院教育イニシアティブセンター

2011 年 7 月 28 日

1. 講義の主題
2. 包除原理
3. Schwartz–Zippel の補題 (多項式同一性判定)
4. Tutte 行列
5. 二部グラフにおけるハミルトン閉路問題
6. ハミルトン閉路問題に向けて
7. 展望

講義の主題

次の論文の理解

- Andreas Björklund.
  Determinant Sums for Undirected Hamiltonicity.
  Proc. of IEEE 51st Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2010), pp. 173–182.

以下，「B 論文」と呼ぶ

主定理

主定理 (Björklund 2010)

無向グラフに対するハミルトン閉路問題は高確率で $O(1.657^n)$ 時間で解ける (n **はグラフの頂点数**)

- **既存アルゴリズムの計算量：**$O(2^n)$ **ぐらい**
- **ここでいう「高確率」とは？**
  - **与えられた無向グラフがハミルトン閉路を持つ** $\Rightarrow$ **アルゴリズムが「ハミルトン閉路を持つ」と出力する確率** $\geq 1 - \frac{1}{e^n}$
  - **与えられた無向グラフがハミルトン閉路を持たない** $\Rightarrow$ **アルゴリズムが「ハミルトン閉路を持たない」と出力する確率** $= 1$

主定理は難しいので...

定理 (Björklund 2010)

二部グラフに対するハミルトン閉路問題は高確率で $O(1.4143^n)$ 時間で解ける (n **はグラフの頂点数**)

- **既存アルゴリズムの計算量：**$O(2^n)$ **ぐらい**
- **ここでいう「高確率」とは？**
  - **与えられた無向グラフがハミルトン閉路を持つ** $\Rightarrow$ **アルゴリズムが「ハミルトン閉路を持つ」と出力する確率** $\geq 1 - \frac{1}{e^n}$
  - **与えられた無向グラフがハミルトン閉路を持たない** $\Rightarrow$ **アルゴリズムが「ハミルトン閉路を持たない」と出力する確率** $= 1$

講義の内容

B 論文の用いる主な技法

- 包除原理
- Schwartz–Zippel の補題 (乱択) ← このあたりから代数的
- Tutte 行列
- ラベル付きハミルトン閉路問題

講義の内容

これら 1 つ 1 つを見ていく

B 論文の重要性

指数時間アルゴリズム設計/解析の展開

問題	簡単なアルゴリズム	今までで最良のアルゴリズム
SAT	$O^*(2^n)$	$O^*(2^n)$
3SAT	$O^*(2^n)$	$O^*(1.308^n)$ (Hertli '11)
最大独立集合	$O^*(2^n)$	$O^*(1.211^n)$ (Robson '86)
最小支配集合	$O^*(2^n)$	$O^*(1.514^n)$ (Fomin, Grandoni, Kratsch '09)
ハミルトン閉路	$O^*(2^n)$	$O^*(1.657^n)$ (Björklund '10)
木幅	$O^*(2^n)$	$O^*(1.890^n)$ (Fomin, Kratsch, Todinca, Villanger '09)
バンド幅	$O^*(n!)$	$O^*(4.383^n)$ (Cygan, Pilipczuk '10)
染色数	$O^*(n!)$	$O^*(2^n)$ (Björklund, Husfeldt, Koivisto '09)
最小集合被覆	—	$O^*(2^n)$ (Fomin, Kratsch, Woeginger '04)
集合分割	—	$O^*(2^n)$ (Björklund, Husfeldt, Koivisto '09)
ナップサック	$O^*(2^n)$	$O^*(1.415^n)$ (Horowitz, Sahni '74)

$O^*(f(n))$ **はある多項式** p **に対して** $O(f(n)p(n))$ **を意味する**

この分野に関する最新の教科書

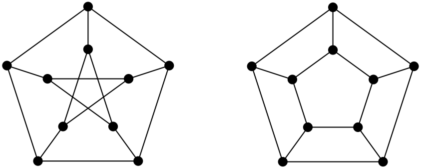
- F. Fomin, D. Kratsch. Exact Exponential Algorithms, Springer, 2010.

ハミルトン閉路とは？

$G = (V, E)$：無向グラフ

定義：ハミルトン閉路 (Hamilton cycle)

G の**ハミルトン閉路**とは，G の各頂点をちょうど一度ずつ通る閉路

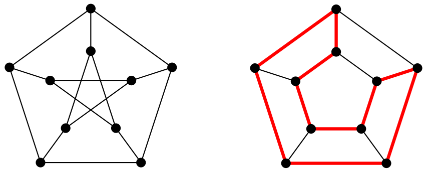


ハミルトン閉路とは？

$G = (V, E)$：無向グラフ

定義：ハミルトン閉路 (Hamilton cycle)

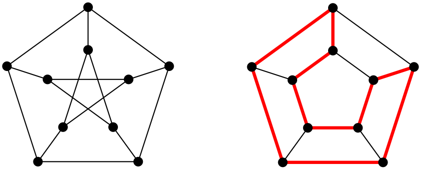
G の**ハミルトン閉路**とは，G の各頂点をちょうど一度ずつ通る閉路



ハミルトン閉路問題

定義：ハミルトン閉路問題

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$
- 出力：G にハミルトン閉路が存在すれば「Yes」，
  そうでなければ「No」



1. 講義の主題
2. 包除原理
3. Schwartz–Zippel の補題 (多項式同一性判定)
4. Tutte 行列
5. 二部グラフにおけるハミルトン閉路問題
6. ハミルトン閉路問題に向けて
7. 展望

包除原理

設定

- S：有限集合
- $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq S$
- $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$

包除原理 (Inclusion-Exclusion Principle)

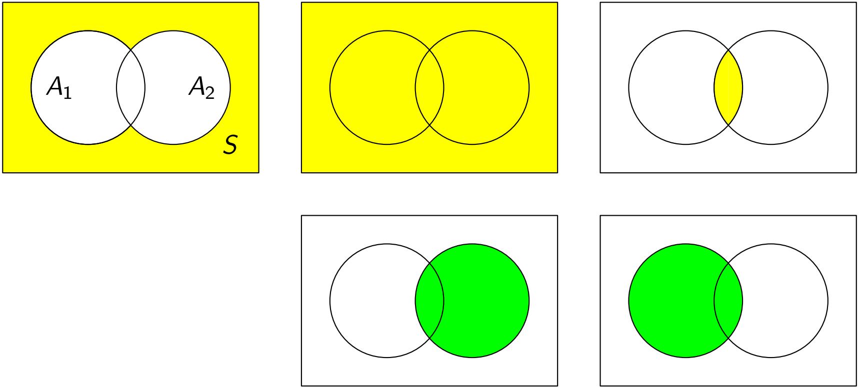
$$\left|\overline{\bigcup_{i \in [n]} A_i}\right| = \sum_{X \subseteq [n]} (-1)^{|X|} \left|\bigcap_{i \in X} A_i\right|,$$

ただし，$\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = S$ とする

包除原理：例 1

$n = 2$

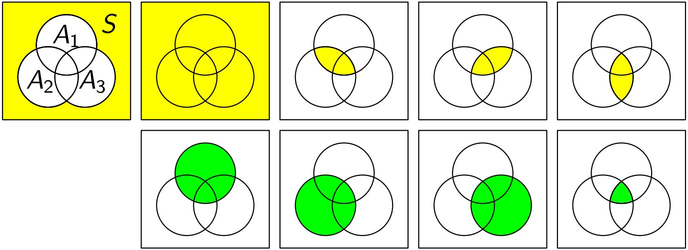
$$|\overline{A_1 \cup A_2}| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$



包除原理：例 2

$n = 3$

$$
\begin{aligned}
|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| \quad = \quad & |S| - |A_1| - |A_2| - |A_3| \\
& + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| \\
& - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|
\end{aligned}
$$



包除原理：証明 (1)

包除原理 (Inclusion-Exclusion Principle)

$$\left|\overline{\bigcup_{i\in[n]} A_i}\right| = \sum_{X\subseteq[n]} (-1)^{|X|} \left|\bigcap_{i\in X} A_i\right|,$$

ただし， $\bigcap_{i\in\emptyset} A_i = S$ **とする**

証明：各要素 $x \in S$ **が左辺と右辺にどれだけ貢献するか考える**

- **集合** $A \subseteq S$ **と要素** $x \in S$ **に対して**

$$[x \in A] = \begin{cases} 0 & (x \notin A \text{ のとき}), \\ 1 & (x \in A \text{ のとき}) \end{cases}$$

  とする (Iverson **の記号と呼ばれる**)

- **このとき，** $|A| = \sum_{x\in S}[x \in A]$

包除原理：証明 (2)

要素 $x \in S$ **に対して，** $I_x = \{i \in [n] \mid x \in A_i\}$ **とする**

- $I_x \neq \emptyset$ **のとき**

$$\sum_{X \subseteq [n]} (-1)^{|X|} \left[x \in \bigcap_{i \in X} A_i \right] = \sum_{X \subseteq I_x} (-1)^{|X|} \cdot 1 = \sum_{j=0}^{|I_x|} \binom{|I_x|}{j} (-1)^j = 0$$

(最後の等式は演習問題)

- $I_x = \emptyset$ **のとき (つまり，** $x \in \overline{\bigcup_{i \in [n]} A_i}$ **のとき)**

$$\sum_{X \subseteq [n]} (-1)^{|X|} \left[x \in \bigcap_{i \in X} A_i \right] = \sum_{X \subseteq I_x} (-1)^{|X|} \cdot 1 = (-1)^{|\emptyset|} \cdot 1 = 1$$

包除原理：証明 (3)

包除原理 (Inclusion-Exclusion Principle)

$$\left|\overline{\bigcup_{i\in[n]} A_i}\right| = \sum_{X\subseteq[n]} (-1)^{|X|} \left|\bigcap_{i\in X} A_i\right|,$$

ただし，$\bigcap_{i\in\emptyset} A_i = S$ とする

$$\begin{aligned}
\textbf{右辺} &= \sum_{X\subseteq[n]} (-1)^{|X|} \sum_{x\in S} \left[x \in \bigcap_{i\in X} A_i\right] = \sum_{x\in S} \sum_{X\subseteq[n]} (-1)^{|X|} \left[x \in \bigcap_{i\in X} A_i\right] \\
&= \sum_{x\in S} \left[x \in \overline{\bigcup_{i\in[n]} A_i}\right] = \textbf{左辺}
\end{aligned}$$

□

包除原理に基づくハミルトン閉路問題の解法 (1)

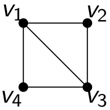
$G = (V, E)$：無向グラフ，$V = \{v_1, \ldots, v_n\}$

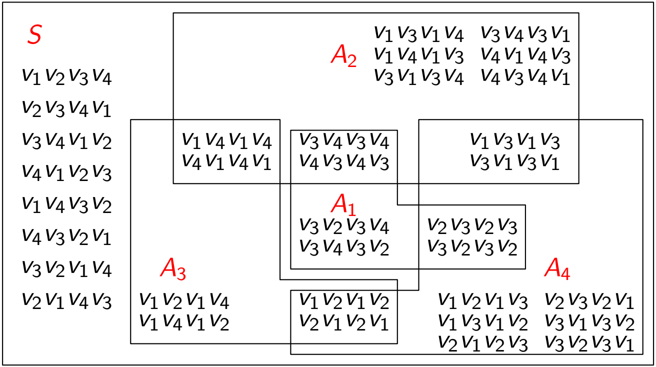
- $S = G$ における長さ n の閉歩道全体 (頂点の繰返しを許す)
- $A_i = G$ における長さ n の閉歩道で，v_i を通らないもの全体

このとき，

$$\overline{\bigcup_{i \in [n]} A_i} = \begin{array}{l} G \text{ における長さ } n \text{ の閉歩道で，} \\ \text{すべての頂点を通るもの全体} \\ (G \text{ におけるハミルトン閉路全体}) \end{array}$$

包除原理に基づくハミルトン閉路問題の解法 (2)：例





包除原理に基づくハミルトン閉路問題の解法 (3)

$G = (V, E)$：無向グラフ，$V = \{v_1, \ldots, v_n\}$

- 任意の $S \subseteq [n]$ に対して

$$\bigcap_{i \in S} A_i = \begin{array}{l} G \text{ における長さ } n \text{ の歩道で，} \\ \{v_i \mid i \in S\} \text{ を通らないもの全体} \end{array}$$

今から行うこと

- 任意の $S \subseteq [n]$ に対して，$\left|\bigcap_{i \in S} A_i\right|$ を $O(n^3 \log n)$ 時間で計算する

これができると，包除原理により，
ハミルトン閉路の数が $O(2^n n^3 \log n)$ 時間で計算できる
(すなわち，ハミルトン閉路が存在するか $O(2^n n^3 \log n)$ 時間で判定可)

包除原理に基づくハミルトン閉路問題の解法 (4)：グラフの隣接行列

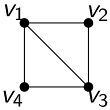
無向グラフ $G = (V, E)$，$V = \{v_1, \ldots, v_n\}$

定義：隣接行列 (adjacency matrix)

G **の隣接行列** $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **とは**

$$A_{i,j} = \begin{cases} 0 & (\{v_i, v_j\} \notin E), \\ 1 & (\{v_i, v_j\} \in E) \end{cases}$$

で定義される行列



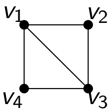
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

包除原理に基づくハミルトン閉路問題の解法 (5)：隣接行列のべき

命題 (証明は省略，k に関する帰納法でできる)

G の隣接行列 A のべき A^k において，

$$(A^k)_{i,j} = v_i \text{ と } v_j \text{ を結ぶ歩道で，辺数 } k \text{ のものの数}$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち

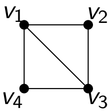
G における長さ n の閉歩道の総数 $= \sum_{i=1}^{n} (A^n)_{i,i}$

包除原理に基づくハミルトン閉路問題の解法 (5)：隣接行列のべき

命題 (証明は省略，k に関する帰納法でできる)

G の隣接行列 A のべき A^k において，

$$(A^k)_{i,j} = v_i \text{ と } v_j \text{ を結ぶ歩道で，辺数 } k \text{ のものの数}$$



$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

すなわち

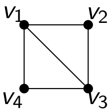
$$G \text{ における長さ } n \text{ の閉歩道の総数} = \sum_{i=1}^{n} (A^n)_{i,i}$$

包除原理に基づくハミルトン閉路問題の解法 (5)：隣接行列のべき

命題 (証明は省略，k に関する帰納法でできる)

G の隣接行列 A のべき A^k において，

$$(A^k)_{i,j} = v_i \text{ と } v_j \text{ を結ぶ歩道で，辺数 } k \text{ のものの数}$$



$$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

すなわち

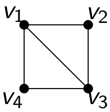
$$G \text{ における長さ } n \text{ の閉歩道の総数} = \sum_{i=1}^{n} (A^n)_{i,i}$$

包除原理に基づくハミルトン閉路問題の解法 (5)：隣接行列のべき

命題 (証明は省略，k に関する帰納法でできる)

G の隣接行列 A のべき A^k において，

$$(A^k)_{i,j} = v_i \text{ と } v_j \text{ を結ぶ歩道で，辺数 } k \text{ のものの数}$$



$$A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 9 & 14 & 9 \\ 9 & 10 & 9 & 10 \\ 14 & 9 & 15 & 9 \\ 9 & 10 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

すなわち

$$G \text{ における長さ } n \text{ の閉歩道の総数} = \sum_{i=1}^{n} (A^n)_{i,i}$$

包除原理に基づくハミルトン閉路問題の解法 (6)：まとめ

よって，

- 任意の $S \subseteq [n]$ に対して

$$\left|\bigcap_{i \in S} A_i\right| = \begin{array}{l} G \text{ における長さ } n \text{ の歩道で，} \\ \{v_i \mid i \in S\} \text{ を通らないものの総数} \end{array}$$

$$= \sum_{i \in [n] \setminus S} (A[[n] \setminus S]^n)_{i,i}$$

ここで，$A[[n] \setminus S]$ は A から S に関する行と列を削除したもの

- n 次正方行列の n 乗は $O(n^3 \log n)$ 時間で計算可能
- $\therefore$ 各 $S \subseteq [n]$ に対して，$|\bigcap_{i \in S} A_i|$ は $O(n^3 \log n)$ 時間で計算可能
- ハミルトン閉路の数は $O(2^n n^3 \log n)$ 時間で計算可能 □

(Kohn–Gottlieb–Kohn '77, Karp '82, Bax '93)

高速行列乗法

事実

$n \times n$ 行列に対して，次は $o(n^3)$ 時間で可能

- 行列の積の計算
- 行列式の計算
- 行列の階数の計算

行列積の計算が $O(n^\omega)$ 時間でできるとする

- $\omega \geq 2$ (行列を読むために必要)
- $\omega \leq 3$ (普通のアルゴリズム)
- $\omega \leq 2.807$ (Strassen '69)
- $\omega \leq 2.376$ (Coppersmith–Winograd '90)
- $\omega \leq 2.376$ (Cohn–Kleinberg–Szegedy–Umans '05)

1. 講義の主題
2. 包除原理
3. Schwartz–Zippel の補題 (多項式同一性判定)
4. Tutte 行列
5. 二部グラフにおけるハミルトン閉路問題
6. ハミルトン閉路問題に向けて
7. 展望

多項式が恒等的に零であるかを判定する？

例問

次の多項式 $p \in \mathbb{R}[x]$ は「恒等式に零」であるか？

$$p(x) = (2x-3)(2x+1) - (4x+1)(x-2) - 3x + 1$$

解答例：

1. **展開する：任意の x に対して**

$$p(x) = (4x^2 - 4x - 3) - (4x^2 - 7x - 2) - 3x + 1 = 0$$

2. **3 つの点で式を評価する**

$$\begin{aligned} p(0) &= 0 \\ p(1) &= 0 \\ p(-1) &= 0 \end{aligned}$$

p の次数は高々2 なので，任意の x に対して $p(x) = 0$ となる

多項式が恒等的に零であるかを判定する？

議論

- 「展開」は計算コストが高い
- 「評価」は計算コストが低い
- $\therefore$ 評価する点の数が問題
- 「次数 $+1$」個の点で十分
- もっと少ない数でできるか？
  - 十分大きな有限体ならできる
  - しかし，確率的な意味で

多項式が恒等的に零であるかを判定する？: 確率的に

- F：有限体 $(|F| \geq 2)$，$p \in F[x]$：d 次多項式
- p が恒等的に零か ($p(x) \equiv 0$ か) 知りたい

アルゴリズム

1. $r \in F$ を一様ランダムに選ぶ
2. $p(r) = 0$ ならば,「恒等的に零である」と出力
   $p(r) \neq 0$ ならば,「恒等的に零ではない」と出力

- p が恒等的に零である $\Rightarrow$ アルゴリズムの出力は常に正しい
- p が恒等的に零ではない $\Rightarrow$ アルゴリズムの出力は間違いかも？
  - アルゴリズムが間違える確率は？
  - p が恒等的に零でないとき，p の根の数は次数 d 以下
  - $\therefore \Pr[p(r) = 0] \leq d/|F|$

多項式が恒等的に零であるかを判定する ?: 多変数の場合

設定

- F：体
- $F[x_1, \ldots, x_n]$：F 上の多変数多項式全体の集合 (変数：$x_1, \ldots, x_n$)
- $p \in F[x_1, \ldots, x_n]$：全次数 d の多項式

Schwartz–Zippel の補題

p は恒等的に零ではないとする

任意の $S \subseteq F$ に対して，$r_1, \ldots, r_n$ を S から一様ランダム独立に選択 $\Rightarrow$

$$\Pr[p(r_1, \ldots, r_n) = 0] \leq \frac{d}{|S|}$$

Schwartz–Zippel の補題：証明 (1)

n に関する帰納法で行う

- $n = 1$ のとき，$p(x_1)$ の根は高々 d 個なので，直ちに従う
- $n > 1$ のとき，$p(x_1, \ldots, x_n)$ は次のように書ける

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{k} p_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) x_n^i$$

ただし，$p_0, \ldots, p_k \in F[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ で，p_i の全次数は高々 $d - i$

- $p_k(x_1, \ldots, x_{n-1}) \neq 0$ と仮定してよい
- 帰納法の仮定から

$$\Pr[p_k(r_1, \ldots, r_{n-1}) = 0] \leq \frac{d-k}{|S|}$$

Schwartz–Zippel の補題：証明 (2)

証明の流れは次の通り

- **最終的な目標**

$$\begin{aligned}\Pr[p(r_1,\dots,r_n)=0] &\leq \Pr[p_k(r_1,\dots,r_{n-1})=0] \\ &\quad + \Pr[p(r_1,\dots,r_n)=0 \mid p_k(r_1,\dots,r_{n-1})\neq 0] \\ &\leq \frac{d-k}{|S|}+\frac{k}{|S|}=\frac{d}{|S|}\end{aligned}$$

- **よって，次の 2 つを示す**
  1. 2 **つの事象** E, E' **に対して** **(演習問題)**

$$\Pr[E] \leq \Pr[E \mid \overline{E'}] + \Pr[E']$$

  2. **上の定義において** **(次のスライド)**

$$\Pr[p(r_1,\dots,r_n)=0 \mid p_k(r_1,\dots,r_{n-1})\neq 0] \leq \frac{k}{|S|}$$

Schwartz–Zippel の補題：証明 (3)

- $p_k(r_1,\ldots,r_{n-1}) \neq 0$ であると仮定
- 次の多項式 $q \in F[x_n]$ を考える

$$q(x_n) = p(r_1,\ldots,r_{n-1},x_n) = \sum_{i=0}^{k} p_i(r_1,\ldots,r_{n-1})x_n^i$$

- $q(x_n)$ の次数は k $\qquad (\because p_k(r_1,\ldots,r_{n-1}) \neq 0)$
- 帰納法の仮定より

$$\begin{aligned}&\Pr[p(r_1,\ldots,r_n)=0 \mid p_k(r_1,\ldots,r_{n-1}) \neq 0]\\ &= \Pr[q(r_n)=0 \mid \deg(q)=k] \leq \frac{k}{|S|}\end{aligned}$$

$\square$

多項式が恒等的に零であるかどうかの判定 (乱択)

入力：多項式 $p \in F[x_1, \ldots, x_n]$

アルゴリズム

1. $S \subseteq F$ **を適当に選ぶ**
2. $r_1, \ldots, r_n \in S$ **を一様ランダム独立に選択**
3. $p(r_1, \ldots, r_n)$ **を計算**
4. **これが零** $\Rightarrow$ **「恒等的に零である」と出力**
   そうでない $\Rightarrow$ **「恒等的に零ではない」と出力**

- p **が恒等的に零である** $\Rightarrow$ **アルゴリズムの出力は常に正しい**
- p **が恒等的に零ではない** $\Rightarrow$ **アルゴリズムの出力は間違いかも？**
  - **アルゴリズムが間違える確率は？**
  - Schwartz–Zippel **の補題より，** $\Pr[p(r_1, \ldots, r_n) = 0] \leq d/|S|$
  - **たとえば，**$|S| = 2d$ **となるように選べば，間違い確率は** $1/2$ **以下**
  - n **回繰り返せば，間違い確率は** $1/2^n$ **以下**

1. 講義の主題
2. 包除原理
3. Schwartz–Zippel の補題 (多項式同一性判定)
4. Tutte 行列
5. 二部グラフにおけるハミルトン閉路問題
6. ハミルトン閉路問題に向けて
7. 展望

Tutte 行列

設定

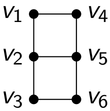
- $G = (V, E)$：無向グラフ，$V = \{v_1, \ldots, v_n\}$
- $F = \mathrm{GF}(2^k)$：位数 2^k の有限可換体 (標数 2：「$1 + 1 = 0$」)

定義：Tutte 行列 (Tutte matrix)

F 上の G の Tutte 行列とは，$n \times n$ 正方行列 M で

$$M_{i,j} = \begin{cases} 0 & (\{v_i, v_j\} \notin E \text{ のとき}), \\ x_e & (\{v_i, v_j\} = e \in E \text{ のとき}) \end{cases}$$

ただし，x_e $(e \in E)$ は F に値をとる変数



$$M = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & 0 & x_{14} & 0 & 0 \\ x_{12} & 0 & x_{23} & 0 & x_{25} & 0 \\ 0 & x_{23} & 0 & 0 & 0 & x_{36} \\ x_{14} & 0 & 0 & 0 & x_{45} & 0 \\ 0 & x_{25} & 0 & x_{45} & 0 & x_{56} \\ 0 & 0 & x_{36} & 0 & x_{56} & 0 \end{pmatrix}$$

Tutte 行列式

定義：Tutte 行列式 (Tutte determinant)

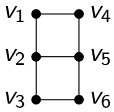
F 上の G の **Tutte 行列式**とは，Tutte 行列の行列式のこと

$$\det(M) = \sum_{\pi : V \text{ 上の置換}} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} M_{i,\pi(i)} = \sum_{\pi : V \text{ 上の置換}} \prod_{i=1}^{n} M_{i,\pi(i)}$$

F の標数が 2 であることに注意

(つまり，任意の $x \in F$ に対して，$x + x = 0$)

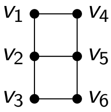
Tutte 行列式：例



$$M = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & 0 & x_{14} & 0 & 0 \\ x_{12} & 0 & x_{23} & 0 & x_{25} & 0 \\ 0 & x_{23} & 0 & 0 & 0 & x_{36} \\ x_{14} & 0 & 0 & 0 & x_{45} & 0 \\ 0 & x_{25} & 0 & x_{45} & 0 & x_{56} \\ 0 & 0 & x_{36} & 0 & x_{56} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(M) \quad = \quad & x_{12}x_{12}x_{36}x_{45}x_{36}x_{45} + x_{12}x_{23}x_{36}x_{14}x_{45}x_{56} + \\ & x_{12}x_{25}x_{36}x_{14}x_{45}x_{36} + x_{14}x_{12}x_{23}x_{45}x_{56}x_{36} + \\ & x_{14}x_{12}x_{36}x_{45}x_{25}x_{36} + x_{14}x_{23}x_{23}x_{14}x_{56}x_{56} + \\ & x_{14}x_{23}x_{36}x_{14}x_{25}x_{56} + x_{14}x_{25}x_{23}x_{14}x_{56}x_{36} + \\ & x_{14}x_{25}x_{36}x_{14}x_{25}x_{36} \end{aligned}$$

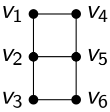
Tutte 行列式：例



$$M = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & 0 & x_{14} & 0 & 0 \\ x_{12} & 0 & x_{23} & 0 & x_{25} & 0 \\ 0 & x_{23} & 0 & 0 & 0 & x_{36} \\ x_{14} & 0 & 0 & 0 & x_{45} & 0 \\ 0 & x_{25} & 0 & x_{45} & 0 & x_{56} \\ 0 & 0 & x_{36} & 0 & x_{56} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(M) \quad = \quad & x_{12}x_{12}x_{36}x_{45}x_{36}x_{45} + x_{12}x_{23}x_{36}x_{14}x_{45}x_{56} + \\ & x_{12}x_{25}x_{36}x_{14}x_{45}x_{36} + x_{14}x_{12}x_{23}x_{45}x_{56}x_{36} + \\ & x_{14}x_{12}x_{36}x_{45}x_{25}x_{36} + x_{14}x_{23}x_{23}x_{14}x_{56}x_{56} + \\ & x_{14}x_{23}x_{36}x_{14}x_{25}x_{56} + x_{14}x_{25}x_{23}x_{14}x_{56}x_{36} + \\ & x_{14}x_{25}x_{36}x_{14}x_{25}x_{36} \end{aligned}$$

Tutte 行列式：例



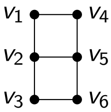
$$M = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & 0 & x_{14} & 0 & 0 \\ x_{12} & 0 & x_{23} & 0 & x_{25} & 0 \\ 0 & x_{23} & 0 & 0 & 0 & x_{36} \\ x_{14} & 0 & 0 & 0 & x_{45} & 0 \\ 0 & x_{25} & 0 & x_{45} & 0 & x_{56} \\ 0 & 0 & x_{36} & 0 & x_{56} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(M) &= x_{12}x_{12}x_{36}x_{45}x_{36}x_{45} + x_{12}x_{23}x_{36}x_{14}x_{45}x_{56} + \\ &\quad x_{12}x_{25}x_{36}x_{14}x_{45}x_{36} + x_{14}x_{12}x_{23}x_{45}x_{56}x_{36} + \\ &\quad x_{14}x_{12}x_{36}x_{45}x_{25}x_{36} + x_{14}x_{23}x_{23}x_{14}x_{56}x_{56} + \\ &\quad x_{14}x_{23}x_{36}x_{14}x_{25}x_{56} + x_{14}x_{25}x_{23}x_{14}x_{56}x_{36} + \\ &\quad x_{14}x_{25}x_{36}x_{14}x_{25}x_{36} \\ &= x_{12}^2x_{36}^2x_{45}^2 + x_{14}^2x_{23}^2x_{56}^2 + x_{14}^2x_{25}^2x_{36}^2 \end{aligned}$$

Tutte の定理

Tutte の定理 (1947)

G に完全マッチングが存在する $\Leftrightarrow$ F 上の G の Tutte 行列式が恒等的に零ではない



$$M = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & 0 & x_{14} & 0 & 0 \\ x_{12} & 0 & x_{23} & 0 & x_{25} & 0 \\ 0 & x_{23} & 0 & 0 & 0 & x_{36} \\ x_{14} & 0 & 0 & 0 & x_{45} & 0 \\ 0 & x_{25} & 0 & x_{45} & 0 & x_{56} \\ 0 & 0 & x_{36} & 0 & x_{56} & 0 \end{pmatrix}$$

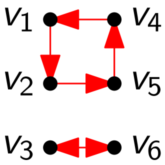
$$\det(M) = x_{12}^2 x_{36}^2 x_{45}^2 + x_{14}^2 x_{23}^2 x_{56}^2 + x_{14}^2 x_{25}^2 x_{36}^2$$

Tutte の定理：証明 (1)

- V 上の置換 π に対して，$\prod_{i=1}^{n} M_{i,\pi(i)} \neq 0$ のとき，有向グラフ $D = (V, A)$ を考える

$$A = \{(v_i, \pi(v_i)) \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$$

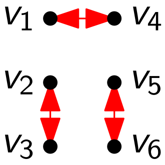
- D において，各頂点の入次数 $= 1$，出次数 $= 1$ $\qquad (\because \pi$ は置換$)$
- $\therefore D$ は閉路による頂点の被覆 (長さ 2 の閉路もありうる)



$$M = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & 0 & x_{14} & 0 & 0 \\ x_{12} & 0 & x_{23} & 0 & x_{25} & 0 \\ 0 & x_{23} & 0 & 0 & 0 & x_{36} \\ x_{14} & 0 & 0 & 0 & x_{45} & 0 \\ 0 & x_{25} & 0 & x_{45} & 0 & x_{56} \\ 0 & 0 & x_{36} & 0 & x_{56} & 0 \end{pmatrix}$$

Tutte の定理：証明 (2)

- D の閉路の長さがどれも 2 $\Rightarrow$ D は完全マッチングに対応
- 完全マッチングに対応する項は相殺 (そうさい) しない
- $\therefore$ 「$\Rightarrow$」が成立



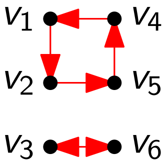
$$M = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & 0 & x_{14} & 0 & 0 \\ x_{12} & 0 & x_{23} & 0 & x_{25} & 0 \\ 0 & x_{23} & 0 & 0 & 0 & x_{36} \\ x_{14} & 0 & 0 & 0 & x_{45} & 0 \\ 0 & x_{25} & 0 & x_{45} & 0 & x_{56} \\ 0 & 0 & x_{36} & 0 & x_{56} & 0 \end{pmatrix}$$

Tutte の定理：証明 (3)

「$\Leftarrow$」の証明：D に長さ 3 以上の閉路があるとき

- C：D の長さ 3 以上の閉路で，添字最小の頂点を含むもの
- D'：D から次の操作によって得られる有向グラフ
  - 操作 $\to$ C に含まれる辺の向きをすべて逆にする
- D に対応する項と D' に対応する項は相殺する
- 「$D \mapsto D'$」は長さ 3 以上の閉路を持つ閉路被覆全体の上の全単射

$\therefore$ 長さ 3 以上の閉路を持つ閉路被覆に対応する項はすべて消える $\square$



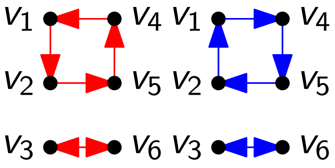
$$M = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & 0 & x_{14} & 0 & 0 \\ x_{12} & 0 & x_{23} & 0 & x_{25} & 0 \\ 0 & x_{23} & 0 & 0 & 0 & x_{36} \\ x_{14} & 0 & 0 & 0 & x_{45} & 0 \\ 0 & x_{25} & 0 & x_{45} & 0 & x_{56} \\ 0 & 0 & x_{36} & 0 & x_{56} & 0 \end{pmatrix}$$

Tutte の定理：証明 (3)

「$\Leftarrow$」の証明：D に長さ 3 以上の閉路があるとき

- C：D の長さ 3 以上の閉路で，添字最小の頂点を含むもの
- D'：D から次の操作によって得られる有向グラフ
  - 操作 $\to$ C に含まれる辺の向きをすべて逆にする
- D に対応する項と D' に対応する項は相殺する
- 「$D \mapsto D'$」は長さ 3 以上の閉路を持つ閉路被覆全体の上の全単射

$\therefore$ 長さ 3 以上の閉路を持つ閉路被覆に対応する項はすべて消える $\square$



$$M = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & 0 & x_{14} & 0 & 0 \\ x_{12} & 0 & x_{23} & 0 & x_{25} & 0 \\ 0 & x_{23} & 0 & 0 & 0 & x_{36} \\ x_{14} & 0 & 0 & 0 & x_{45} & 0 \\ 0 & x_{25} & 0 & x_{45} & 0 & x_{56} \\ 0 & 0 & x_{36} & 0 & x_{56} & 0 \end{pmatrix}$$

Tutte の定理を用いた完全マッチング存在性判定法

観察：$\det(M)$ **の次数は高々** n (G **の頂点数**)

完全マッチング存在性判定法 (乱択)

入力：無向グラフ $G = (V, E)$ ($E = \{e_1, \ldots, e_m\}$)

1. $F = \mathrm{GF}(2^k)$ **を用意** (k **の決め方は後で議論**)
2. $r_1, \ldots, r_m \in F$ **：一様ランダム独立に選択**
3. M **の変数** x_{e_i} **を** r_i **で置き換えて，**$\det(M)$ **を計算**
4. $\det(M) \neq 0$ **ならば「存在する」と出力**
   $\det(M) = 0$ **ならば「存在しない」と出力**

Schwartz–Zippel **の補題より，**

- **存在するのに「存在しない」と答える確率** $\leq \frac{n}{2^k}$
- $k = \lceil 2 \log_2 n \rceil$ **とすれば，**$\frac{n}{2^k} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$

計算量は

- **行列式の計算**：$O(n^\omega)$ **(これがボトルネック)**

二部グラフにおけるハミルトン閉路問題

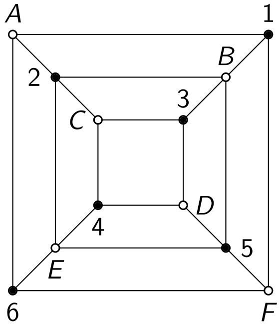
この節の目標

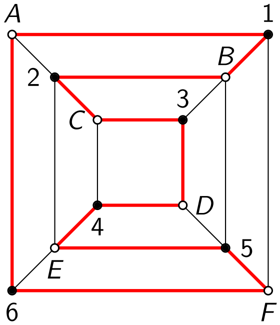
二部グラフにおけるハミルトン閉路問題に対する $O(2^{n/2}\mathrm{poly}(n))$ 時間 (乱択) アルゴリズム (n **はグラフの頂点数**)

- **ラベル付きハミルトン閉路問題を考える**
- Tutte **行列と** Schwartz–Zippel **の補題を利用する**
- **閉路をどのように扱うか？を考える**
- **包除原理を利用する**

二部グラフにおけるハミルトン閉路問題

$G = (U, V, E)$：二部グラフ，$|U| + |V| = n$

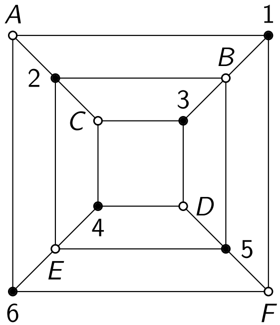


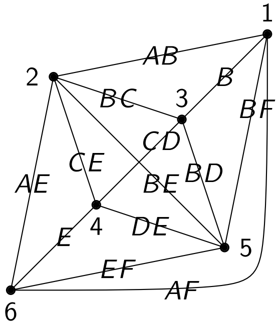


ハミルトン閉路が存在するとき

- U の頂点と V の頂点を交互に訪れる
- $|U| = |V| = n/2$

ラベル付きハミルトン閉路問題

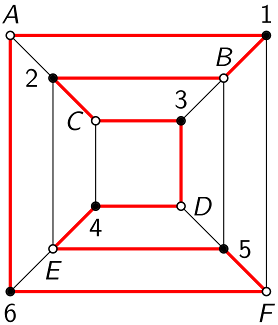




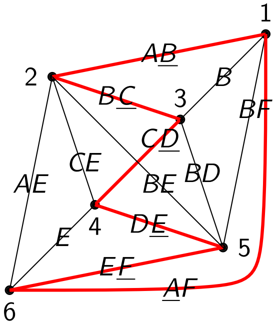
- $U = \{A, B, C, D, E, F\}$
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- **各辺のラベル集合** $\subseteq U$

ラベル付きハミルトン閉路問題：ハミルトン閉路の対応

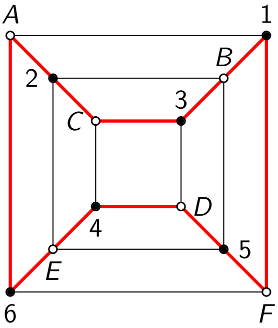


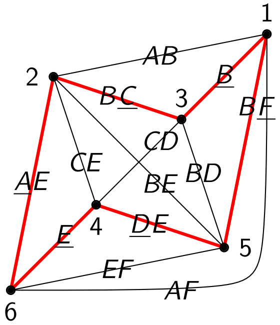
- $U = \{A, B, C, D, E, F\}$
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



- $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- **各辺のラベル集合** $\subseteq U$

ラベル付きハミルトン閉路問題：ハミルトン閉路の対応





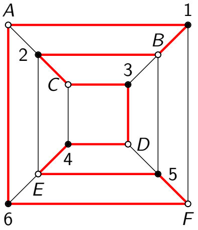
- $U = \{A, B, C, D, E, F\}$
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

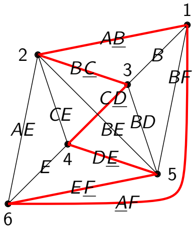
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- **各辺のラベル集合** $\subseteq U$

ラベル付きハミルトン閉路問題への変換

入力：無向二部グラフ $G = (U, V, E)$ $(|U| = |V| = n/2)$

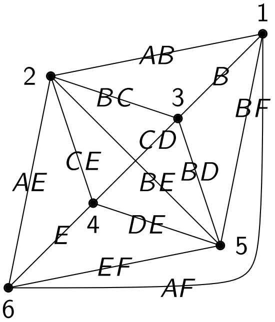
- **無向グラフ** $H = (V, E(H))$ **を作成**
  - $E(H) = \{\{v, w\} \mid G$ **に** v-u-w **というパスが存在 (ただし，**$u \in U$)$\}$
- **辺ラベル集合** $L\colon E(H) \to 2^U$ **を作成**
  - $L(\{v, w\}) = \{u \mid G$ **に** v-u-w **というパスが存在** $\}$
- H **と** L **の対** (H, L) **において見つけたいもの**
  - H **のハミルトン閉路** C **と**
  - C **の辺** e **上のラベル** $\ell(e) \in L(e)$ **の選択で** $\{\ell(e) \mid e \in E(C)\} = U$ **となるもの**





H **の頂点数** $= n/2$**，ラベル数** $= n/2$

Tutte 行列の利用

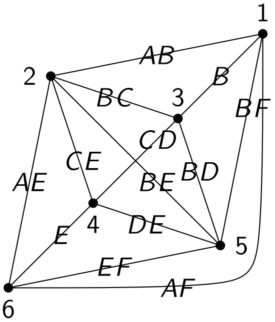


$$M = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & 0 & x_{15} & x_{16} \\ x_{12} & 0 & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} \\ x_{13} & x_{23} & 0 & x_{34} & x_{35} & 0 \\ 0 & x_{24} & x_{34} & 0 & x_{45} & x_{46} \\ x_{15} & x_{25} & x_{35} & x_{45} & 0 & x_{56} \\ x_{16} & x_{26} & 0 & x_{46} & x_{56} & 0 \end{pmatrix}$$

これでは完全マッチングの存在性しか判定できないので工夫が必要

- **閉路を相殺しない工夫**
- **辺ラベルを取り込む工夫**

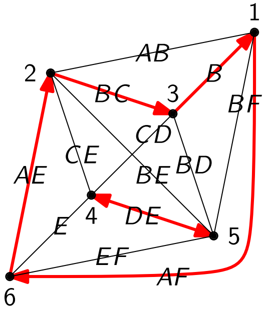
Tutte 行列の利用：閉路を相殺しない工夫 (1)

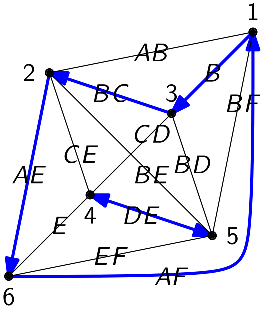


$$M = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & 0 & x_{15} & x_{16} \\ x'_{12} & 0 & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} \\ x'_{13} & x_{23} & 0 & x_{34} & x_{35} & 0 \\ 0 & x_{24} & x_{34} & 0 & x_{45} & x_{46} \\ x'_{15} & x_{25} & x_{35} & x_{45} & 0 & x_{56} \\ x'_{16} & x_{26} & 0 & x_{46} & x_{56} & 0 \end{pmatrix}$$

1 **つの頂点を特別に扱って「非対称化」**

Tutte 行列の利用：閉路を相殺しない工夫 (2)





$$\det(M) = \cdots + x_{16}x_{23}x'_{13}x^2_{45}x_{26} + x_{13}x_{26}x_{23}x^2_{45}x'_{16} + \cdots$$

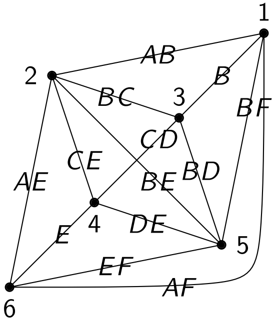
- **長さ 3 以上の閉路が特別に扱う頂点を通るときは，相殺しない**
- **特に，ハミルトン閉路は相殺しない**

問題点

- **ハミルトン閉路に対応しない項も相殺せずに残る**

Tutte 行列の利用：辺ラベルを取り込む工夫 (1)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & x_{12,A}+x_{12,B} & x_{13,B} & 0 & x_{15,B}+x_{15,F} & x_{16,A}+x_{16,F} \\ x'_{12,A}+x'_{12,B} & 0 & x_{23,B}+x_{23,C} & x_{24,C}+x_{24,E} & x_{25,B}+x_{25,E} & x_{26,A}+x_{26,E} \\ x'_{13,B} & x_{23,B}+x_{23,C} & 0 & x_{34,C}+x_{34,D} & x_{35,B}+x_{35,D} & 0 \\ 0 & x_{24,C}+x_{24,E} & x_{34,C}+x_{34,D} & 0 & x_{45,D}+x_{45,E} & x_{46,E} \\ x'_{15,B}+x'_{15,F} & x_{25,B}+x_{25,E} & x_{35,B}+x_{35,D} & x_{45,D}+x_{45,E} & 0 & x_{56,E}+x_{56,F} \\ x'_{16,A}+x'_{16,F} & x_{26,A}+x_{26,E} & 0 & x_{46,E} & x_{56,E}+x_{56,F} & 0 \end{pmatrix}$$



x_e を $\sum_{\ell \in L(e)} x_{e,\ell}$ に変える

Tutte 行列の利用：辺ラベルを取り込む工夫 (2)

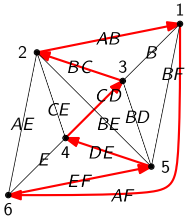
言い換え

- 各ラベル $\ell \in U$ に対して M_ℓ を作り，$M = \sum_{\ell \in U} M_\ell$ とする

$$M_A = \begin{pmatrix} 0 & x_{12,A} & 0 & 0 & 0 & x_{16,A} \\ x'_{12,A} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{26,A} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x'_{16,A} & x_{26,A} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_B = \begin{pmatrix} 0 & x_{12,B} & x_{13,B} & 0 & x_{15,B} & 0 \\ x'_{12,B} & 0 & x_{23,B} & 0 & x_{25,B} & 0 \\ x'_{13,B} & x_{23,B} & 0 & 0 & x_{35,B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x'_{15,B} & x_{25,B} & x_{35,B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{23,C} & x_{24,C} & 0 & 0 \\ 0 & x_{23,C} & 0 & x_{34,C} & 0 & 0 \\ 0 & x_{24,C} & x_{34,C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{34,D} & x_{35,D} & 0 \\ 0 & 0 & x_{34,D} & 0 & x_{45,D} & 0 \\ 0 & 0 & x_{35,D} & x_{45,D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{24,E} & x_{25,E} & x_{26,E} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{24,E} & 0 & 0 & x_{45,E} & x_{46,E} \\ 0 & x_{25,E} & 0 & x_{45,E} & 0 & x_{56,E} \\ 0 & x_{26,E} & 0 & x_{46,E} & x_{56,E} & 0 \end{pmatrix} \quad M_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15,F} & x_{16,F} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x'_{15,F} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{56,F} \\ x'_{16,F} & 0 & 0 & 0 & x_{56,F} & 0 \end{pmatrix}$$

Tutte 行列の利用：辺ラベルを取り込む工夫 (3)



$$
\begin{aligned}
\det(M) &= \cdots + (x_{16,A} + x_{16,F}) \cdot \\
&\qquad (x'_{12,A} + x'_{12,B}) \cdot \\
&\qquad (x_{23,B} + x_{23,C}) \cdot \\
&\qquad (x_{34,C} + x_{34,D}) \cdot \\
&\qquad (x_{45,D} + x_{45,E}) \cdot \\
&\qquad (x_{56,E} + x_{56,F}) + \cdots
\end{aligned}
$$

相殺されずに残った閉路被覆の辺上のラベル選択がすべて現れる

ラベル付きハミルトン閉路問題と包除原理

欲しいもの

すべてのラベルを 1 回ずつ用いるハミルトン閉路

→ 包除原理の登場

- ラベル集合 U の任意の部分集合 $X \subseteq U$ に対して，
  X のラベルのみを用いる閉路被覆 (に対応する項) を計算
  つまり，$\det(\sum_{\ell \in X} M_\ell)$ を計算
- 包除原理より (標数 2 の体上で計算しているので，$1 = -1$ に注意)

$$\sum_{X \subseteq U} \det(\sum_{\ell \in X} M_\ell)$$

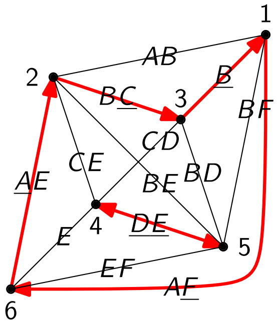
の (残った) 各項は，各ラベルを 1 回ずつ用いる閉路被覆を表す

考えなくてはならないこと

ハミルトン閉路だけを残すこと

ハミルトン閉路以外の閉路被覆は必ず相殺される

ハミルトン閉路ではない閉路被覆で相殺されずに残ったものは，特別に扱った頂点を通らない長さ 2 の閉路を含む



$\sum_{X \subseteq U} \det(\sum_{\ell \in X} M_\ell)$ **の中に対応する 2 つの項**

- **4 から 5 へ行くとき D を選び，5 から 4 に行くとき E を選ぶ**

  対応する項 $= x_{16,F} x_{23,C} x'_{13,B} x_{45,D} x_{45,E} x_{26,A}$

- **4 から 5 へ行くとき E を選び，5 から 4 に行くとき D を選ぶ**

  対応する項 $= x_{16,F} x_{23,C} x'_{13,B} x_{45,E} x_{45,D} x_{26,A}$

- **これら 2 つの項は相殺する！**

$\therefore$ **ハミルトン閉路以外の閉路被覆はすべて相殺される**

二部グラフに対するハミルトン閉路問題を解くアルゴリズム (1)

アルゴリズムのまとめ (乱択)

入力：二部グラフ $G = (U, V, E)$

1. $F = \mathrm{GF}(2^k)$ を用意 (k の決め方は後で議論)
2. G から H と L を構成
3. M の各変数に対して $r \in F$ を一様ランダム独立に選択
4. M の各変数を r で置き換えて，$\sum_{X \subseteq U} \det(\sum_{\ell \in X} M_\ell)$ を計算
5. これが 0 でないならば「存在する」と出力
0 ならば「存在しない」と出力

気にすべきこと：$\sum_{X \subseteq U} \det(\sum_{\ell \in X} M_\ell)$ の次数

- 変数はたくさんあるかもしれないけど，次数は高々 n

よって，Schwartz–Zippel の補題より，

- 存在するのに「存在しない」と答える確率 $\leq \frac{n}{2^k}$
- $k = \lceil 2 \log_2 n \rceil$ とすれば，$\frac{n}{2^k} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$

二部グラフに対するハミルトン閉路問題を解くアルゴリズム (2)

アルゴリズムのまとめ (乱択)

入力：二部グラフ $G = (U, V, E)$

1. $F = \mathrm{GF}(2^k)$ **を用意** (k **の決め方は後で議論**)
2. G **から** H **と** L **を構成**
3. M **の各変数に対して** $r \in F$ **を一様ランダム独立に選択**
4. M **の各変数を** r **で置き換えて，** $\sum_{X \subseteq U} \det(\sum_{\ell \in X} M_\ell)$ **を計算**
5. **これが** 0 **でないならば「存在する」と出力**
   0 **ならば「存在しない」と出力**

計算量： $\sum_{X \subseteq U} \det(\sum_{\ell \in X} M_\ell)$ **の計算がボトルネック**

- **各** $X \subseteq U$ **に対して** $\det(\sum_{\ell \in X} M_\ell)$ **の計算は** $O(n^\omega)$
- $\therefore$ **全体の計算量は** $O(2^{|U|} n^\omega) = O(2^{n/2} n^\omega)$
- **これは** $O(1.4143^n)$

1. 講義の主題
2. 包除原理
3. Schwartz–Zippel の補題 (多項式同一性判定)
4. Tutte 行列
5. 二部グラフにおけるハミルトン閉路問題
6. ハミルトン閉路問題に向けて
7. 展望

二部グラフではないグラフに対するハミルトン閉路問題：用いる技法

二部グラフの場合に加えて，次の技法を用いる

- **アルゴリズム設計技法**
  - **部分集合ラベル付きハミルトン閉路問題**
  - **ランダム分割**
  - **部分集合縦断動的計画法**
  - **高速** Möbius **変換** (Yates **のアルゴリズム**)
- **アルゴリズム解析技法**
  - Markov **の不等式** (**裾確率をおさえる不等式の一種**)

二部グラフではないグラフに対するハミルトン閉路問題

どうすればよいか？

- 頂点集合 V をランダムに二等分して，二部グラフっぽくする
- いろいろとややこしいことがある

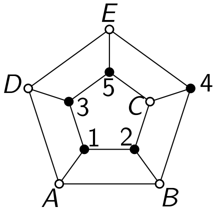
ややこしいこと：二分割を V_1, V_2 とする

- ハミルトン閉路は V_1 と V_2 を交互に訪れるとは限らない

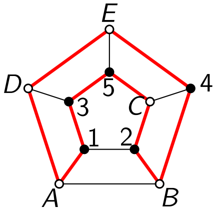
解決策：

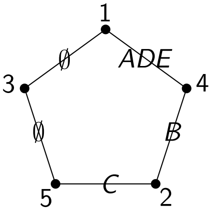
- ラベルとして部分集合を許す

例

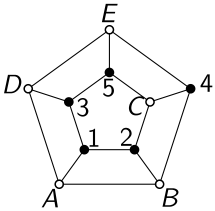


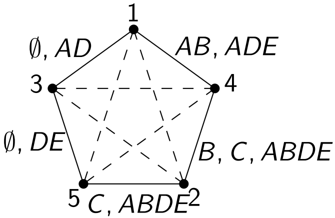
例



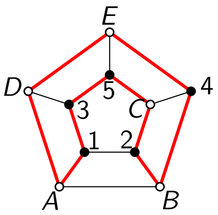


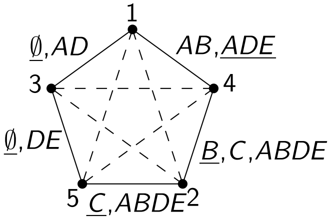
例：辺ラベルの与え方



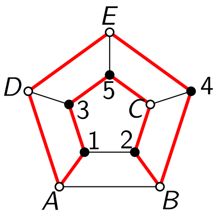


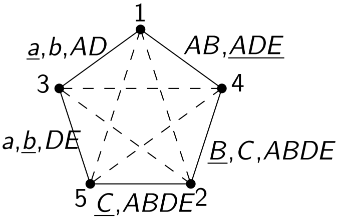
例：辺ラベルの与え方





例：辺ラベルの与え方 — 空集合を避ける





空集合に対応するダミーラベル： $D = \{a, b\}$

部分集合ラベル付きハミルトン閉路問題への帰着

無向グラフ $G = (V, E)$ が与えられる

($|V| = n$ は偶数としておく (簡単のため))

- **V をランダムに二等分 $\to V_1, V_2$ ($|V_1| = |V_2| = n/2$)**
- **無向グラフ $H = (V_1, E(H))$ を作成**
  - $E(H) = \{\{v, w\} \mid$ **G に $v - X - w$ というパスが存在** $(X \subseteq V_2)\}$
- **辺ラベル部分集合族 $L\colon E(H) \to 2^{2^{V_2}}$ を作成**
  - $L(\{v, w\}) = \{X \subseteq V_2 \mid$ **G に $v - X - w$ というパスが存在** $\}$
- **H と L の対 (H, L) において見つけたいもの**
  - **H のハミルトン閉路 C と**
  - **C の辺 e 上の互いに素な部分集合ラベル $\ell(e) \in L(e)$ の選択で $\bigcup_{e \in E(C)} \ell(e) = V_2$ となるもの**

必要なダミーラベルの数は？

Tutte 行列のアイディアを用いるために，ダミーラベルを用いる

- ダミーラベルの集合 D
- 辺ラベル部分集合族 $L(e)$ に対して，$\emptyset \in L(e)$ のとき，$L(e)$ を $L(e) \setminus \{\emptyset\} \cup D$ に変更

$|D|$ の大きさは？

- ハミルトン閉路が V_2 の 2 頂点を結ぶとき，対応辺ラベルが空になる
- $\therefore$ 固定したハミルトン閉路 C が V_2 の 2 頂点をいくつ結ぶか？

(証明しない) 命題：これが $n/4$ 以下になる確率 $= \Omega(\frac{1}{n})$

- 直観：期待値は $n/4$ ぐらいになる (演習問題)
- 直観：Markov の不等式を用いて，期待値以下になる確率を押さえる

- $\therefore |D| = n/4$ として，多項式回繰り返せば，高確率でうまくいく
- 用いるラベルの数は高々 $|V_2| + |D| = \frac{n}{2} + \frac{n}{4} = \frac{3}{4}n$

部分集合ラベル付き Tutte 行列

- ラベル集合 $U \subseteq V_2 \cup D$ に対して，

$$(M_X)_{v,w} = \begin{cases} \prod_{\ell \in X} x_{\{v,w\},\ell} & (H \text{ に } v - X - w \text{ というパスが存在}) \\ 0 & (\text{それが存在しない}) \end{cases}$$

二部グラフのときと同様に，「非対称化」も行う

- 計算すればよいもの

$$\sum_{U \subseteq V_2 \cup D} \det(\sum_{X \subseteq U} M_X)$$

これが恒等的に零でないこと $\Leftrightarrow$ G にハミルトン閉路が存在

アルゴリズム：概略

- $\sum_{U \subseteq V_2 \cup D} \det(\sum_{X \subseteq U} M_X)$ が恒等的に零であるかどうかを Schwartz–Zippel の補題を用いて確かめる
- $\sum_{X \subseteq U} M_X$ を効率よく手に入れる必要がある
  - そのために使う道具：部分集合縦断動的計画法，高速 Möbius 変換
  - $O(2^{n/2}\mathrm{poly}(n))$ 時間を費やして，前処理として入手しておく
- 各 $U \subseteq V_2 \cup D$ に対して，行列式 $\det(\sum_{X \subseteq U} M_X)$ の評価は多項式時間でできる
- $U \subseteq V_2 \cup D$ の選び方の総数 $= 2^{3n/4} < 1.682^n$
- $\therefore$ 計算量は $O(1.682^n)$
- 解析を精緻化して，ダミーラベルの数を調整すると，$O(1.657^n)$ 時間アルゴリズムが得られる

主定理

主定理 (Björklund 2010)

無向グラフに対するハミルトン閉路問題は高確率で $O(1.657^n)$ 時間で解ける (n **はグラフの頂点数**)

- **既存アルゴリズムの計算量：** $O(2^n)$ **ぐらい**
- **ここでいう「高確率」とは？**
  - **与えられた無向グラフがハミルトン閉路を持つ** $\Rightarrow$ **アルゴリズムが「ハミルトン閉路を持つ」と出力する確率** $\geq 1 - \frac{1}{e^n}$
  - **与えられた無向グラフがハミルトン閉路を持たない** $\Rightarrow$ **アルゴリズムが「ハミルトン閉路を持たない」と出力する確率** $= 1$

1. 講義の主題
2. 包除原理
3. Schwartz–Zippel の補題 (多項式同一性判定)
4. Tutte 行列
5. 二部グラフにおけるハミルトン閉路問題
6. ハミルトン閉路問題に向けて
7. 展望

展望 (1)

代数的手法は計算量改善の統一的枠組みとなるのか？

- **最大マッチング** (Mucha–Sankowski '04, Harvey '09)
- **最大クリーク** (Nešetřil–Poljak '85)
- **最大カット，最大** 2SAT (Williams '05)
- **パス発見，閉路発見** (Yuster–Zwick '04, Koutis '08, Williams '09)
- **完全マッチング数え上げ近似** (Chien, Rasmussen, Sinclair '03)
- **ハミルトン閉路** (Björklund '11)

これらは「病的」な例なのか？

展望 (2)

乱択は本質的か？

(代数的手法が効率的になるためには乱択が必要？)

- Schwartz–Zippel **の補題の脱乱択化は大きな問題**
  - **多項式同一性判定問題が (決定性) 多項式時間で解ける** $\Rightarrow$
    NEXP $\not\subseteq$ P/poly
    (非決定性指数時間で解ける問題で，多項式サイズの回路を持たないものが存在)
    であるか，または
    パーマネントが多項式サイズの算術回路を持たない
    (Kabanets–Impagliazzo '03)
- **完全マッチング** (Tutte **行列**) **に対しては脱乱択化が可能**
  (Geelen '00)

演習の行い方

- グループで取り組むことを強く推奨
- 全部解こうとはしない
- 「頑張れば解けそう」という問題を見つけることも重要
- 3 段階の解き方で：
  1. 解法の大きな方針を掲げる
  2. その方針に沿って解けるかどうか検討する
  3. 解ける場合，詳細を書き下す
- このセミナーの演習時間は短いので，Step 2 までで OK．