最速輸送問題

神山 直之

九州大学

目次

1. 準備

   静的流，動的流，時間拡大ネットワーク

2. 最大動的流問題

   静的流の鎖分解，Ford & Fulkerson のアルゴリズム

3. 最速輸送問題
   1. 判定問題
   2. 辞書式最大動的流問題
   3. 多面体的アプローチ
   4. 問題変形によるアルゴリズム
   5. 未解決問題

4. その他の話題

   最小費用動的流問題，多品種動的流問題

5. 演習問題

目次

静的流

定義：静的ネットワーク

- (有限) 有向グラフ $D = (V, A)$
- 容量関数 $c\colon A \to \mathbb{Z}_+$
- 端子集合 $S \subseteq V$

定義：静的流

- 以下を満たす関数 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$

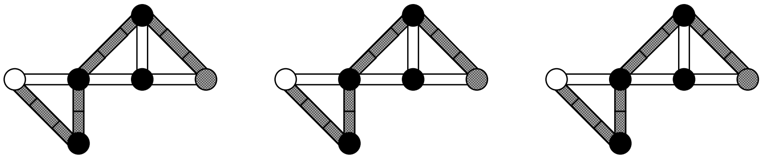
$$\forall a \in A, \quad f(a) \leq c(a)$$

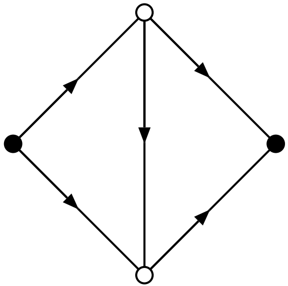
$$\forall v \in V \setminus S, \quad \sum_{a \in \delta(v)} f(a) = \sum_{a \in \varrho(v)} f(a)$$

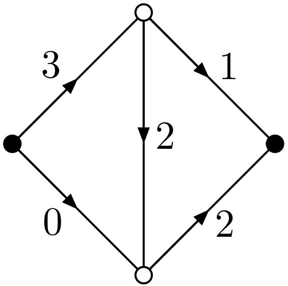
$\delta(v) :=$ v を始点とする A の辺集合

$\varrho(v) :=$ v を終点とする A の辺集合

例：静的流







動的流

定義：動的ネットワーク

- 有向グラフ $D = (V, A)$
- 容量関数 $c \colon A \to \mathbb{Z}_+$
- 端子集合 $S \subseteq V$
- 移動時間関数 $\tau \colon A \to \mathbb{Z}_+$

定義：動的流

- 以下の条件 D1 および D2 を満たす関数 $f \colon A \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$
- 直観的には

$$f(a, \theta) := \text{時刻 } \theta \text{ に辺 } a \text{ に入る流量}$$

動的流

条件 D1

- 全ての $a \in A$ および $\theta \in \mathbb{Z}_+$ に対して $f(a,\theta) \le c(a)$

- 各 $v \in V$ および $\theta \in \mathbb{Z}_+$ に対して

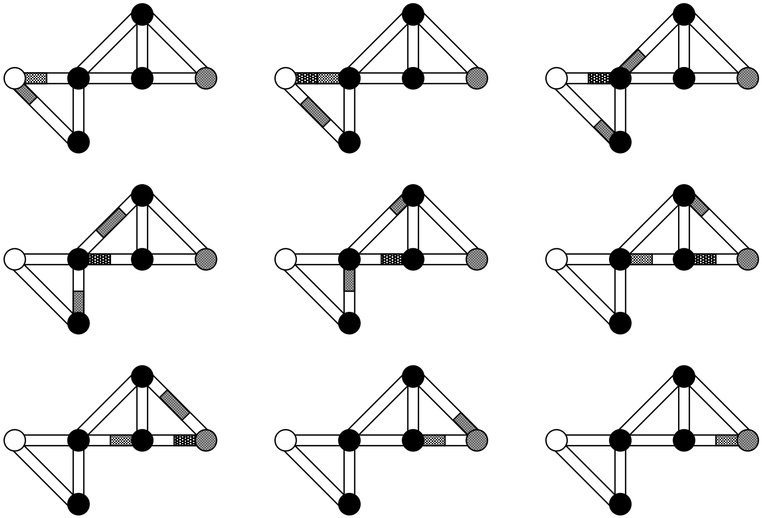
$$\mathrm{ex}_f(v,\theta) := \sum_{a \in \varrho(v)} \sum_{t=0}^{\theta-\tau(a)} f(a,t) - \sum_{a \in \delta(v)} \sum_{t=0}^{\theta} f(a,t)$$

条件 D2

- 全ての $v \in V \setminus S$ および $\theta \in \mathbb{Z}_+$ に対して $\mathrm{ex}_f(v,\theta) \ge 0$

注) 点における「滞留」を許している

例：動的流



時間制限付き動的流

定義：時間制限付き動的流

- 時間制限 T 付き動的ネットワーク上の動的流
- 全ての $a \in A$ および $\theta \geq T+1$ を満たす $\theta \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$f(a, \theta) = 0$$

- 全ての $v \in V \setminus S$ に対して

$$\mathrm{ex}_f(v, T) = 0$$

観察

- 時間制限付き動的流は時間拡大ネットワーク上の静的流と一対一対応している

時間拡大ネットワーク

定義：時間拡大ネットワーク

- 点集合 $V_T := \{v_\theta \mid \theta \in \{0, \dots, T\},\ v \in V\}$
- 辺集合 $A_T := A_1 \cup A_2$

$$A_1 := \{u_\theta v_{\theta+\tau(a)} \mid a = uv \in A, \theta \in \{0, \dots, T - \tau(a)\}\}$$
$$A_2 := \{v_\theta v_{\theta+1} \mid v \in V,\ \theta \in \{0, \dots, T - 1\}\}$$

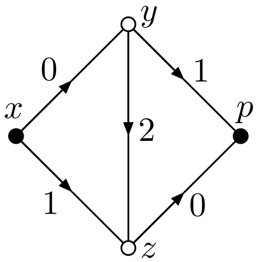
- 容量関数 $c_T \colon A_T \to \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$

$$c_T(a') := \begin{cases} c(a) & a' \in A_1 \\ \infty & a' \in A_2 \end{cases}$$

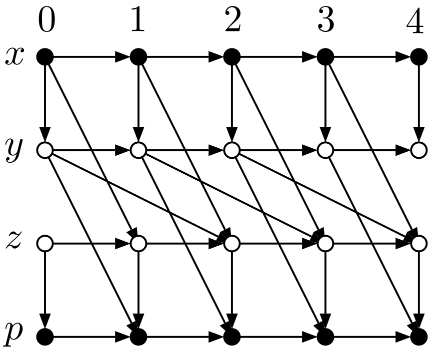
ただし $a := a'$ に対応する A の辺

- 端子集合 $S_T := \{s_\theta \mid s \in S,\ \theta \in \{0, \dots, T\}\}$

例：時間拡大ネットワーク



$T = 4$



目次

1. 準備

   静的流，動的流，時間拡大ネットワーク
2. 最大動的流問題

   静的流の鎖分解，Ford & Fulkerson のアルゴリズム
3. 最速輸送問題
   1. 判定問題
   2. 辞書式最大動的流問題
   3. 多面体的アプローチ
   4. 問題変形によるアルゴリズム
   5. 未解決問題
4. その他の話題

   最小費用動的流問題，多品種動的流問題
5. 演習問題

最大動的流問題

問題：最大動的流問題

- **Input**

  時間制限 T 付き動的ネットワーク

  仮定：$S = \{r, s\}$ かつ $\varrho(r) = \delta(s) = \emptyset$
- **Goal**

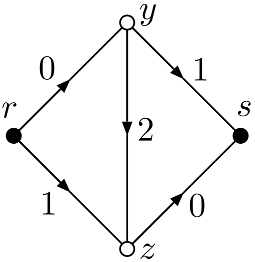
  $\mathrm{ex}_f(s, T)$ を最大化する動的流 f

- 擬多項式時間アルゴリズムは簡単!!

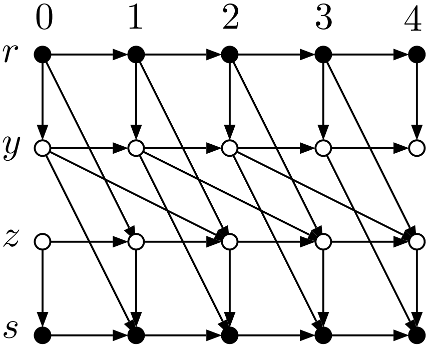
  $\Longrightarrow$ 時間拡大ネットワーク $+$ Max-flow アルゴリズム
- そもそも時間制限 T の入力のサイズは $\log T$

  $\Longrightarrow$ 動的流の簡潔な表現が必要

再掲：時間拡大ネットワーク



$T = 4$



定義：鎖流

- 鎖流 := 順序対 $(\mathcal{P}, x)$

  $\mathcal{P}$:= r から s への有向道の集合

  x := $\mathcal{P}$ から $\mathbb{R}_+$ への関数

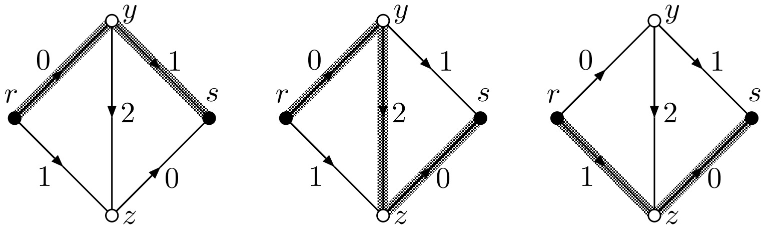
- 鎖流 $(\mathcal{P}, x)$ が実行可能 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\forall a \in A, \quad \sum_{P \in \mathcal{P}\colon a \in P} x(P) \leq c(a)$$

$$\forall P \in \mathcal{P}, \quad \tau(P) \leq T$$

$\tau(P)$:= P に含まれる辺の移動時間の和

例：鎖流



$x(P_1) = 1$ $\tau(P_1) = 1$

$x(P_2) = 1$ $\tau(P_2) = 2$

$x(P_3) = 1$ $\tau(P_3) = 1$

- $T = 4$ とする
- 各辺の容量は 2 とする

鎖流

観察

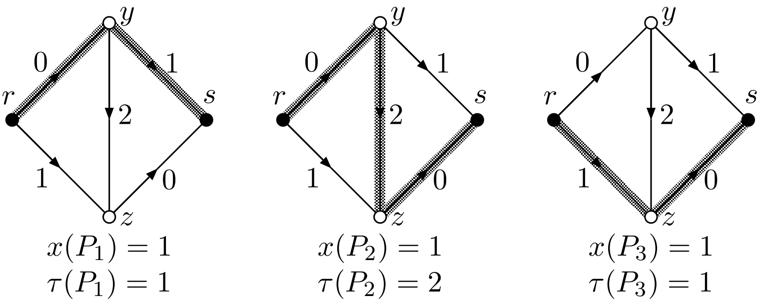
- 実行可能な鎖流 $(\mathcal{P}, x)$ から動的流が構成可能

```
for 𝒫 の各道 P do
    for 0 から T − τ(P) の各時刻 do
        P に沿って x(P) だけ流す
    end for
end for
```

- 得られたものが動的流であることは

$$\forall a \in A, \quad \sum_{P \in \mathcal{P}\colon a \in P} x(P) \le c(a) \quad \Longrightarrow \quad \text{条件 D1}$$

$$\text{道に沿って流す} \quad \Longrightarrow \quad \text{条件 D2}$$



- 時刻 0 から 3 まで P_1 上に 1 流す
- 時刻 0 から 2 まで P_2 上に 1 流す
- 時刻 0 から 3 まで P_3 上に 1 流す

Ford & Fulkerson のアルゴリズム

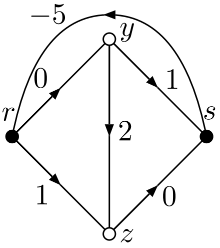
- **Step1:**
  容量が ∞，移動時間が $-(T+1)$ である辺 sr を加える
- **Step2:**
  $-$(移動時間) を費用として Max-cost circulation g を見つける
- **Step3:**
  g を鎖流 $(\mathcal{P}, x)$ へ分解し出力する

定理

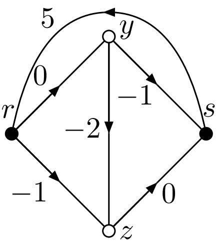
- Ford & Fulkerson のアルゴリズムは最大動的流問題を正しく解く

注) 「滞留」を必要としない

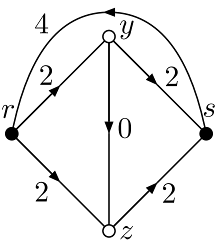
例：Ford & Fulkeron のアルゴリズム



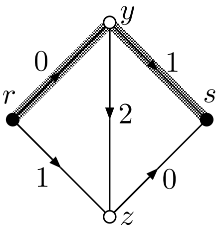
$T = 4$



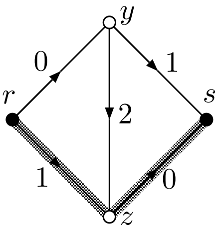
$T = 4$



$T = 4$



$x(P_1) = 2$



$x(P_2) = 2$

- 鎖流 $(\mathcal{P}, x)$ から構成される動的流の流量

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} (T + 1 - \tau(P)) x(P) = (T+1) \cdot g(sr) - \sum_{a \in A} \tau(a) \cdot g(a)$$

$$= \text{Max-cost circulation } g \text{ の費用}$$

- Max-cost circulation を求める問題の双対問題

$$\begin{array}{ll} \min & \displaystyle\sum_{a \in A} c(a) y(a) \\ \text{s.t.} & y(a) \geq p(v) - \tau(a) - p(u) \quad (\forall a = uv \in A) \\ & p(r) = -1, \quad p(s) \geq T \\ & y \geq \mathbf{0}, \quad p \in \mathbb{R}^V \end{array}$$

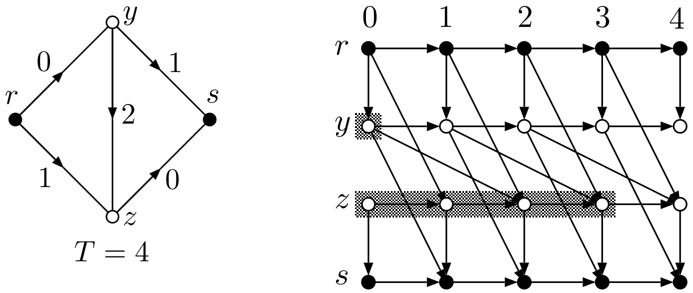
双対問題の最適解 y, p および任意の動的フロー f に対して

$$
\begin{aligned}
\sum_{a \in \varrho(s)} \sum_{\theta=0}^{T-\tau(a)} f(a,\theta) &\le \sum_{a \in \varrho(s)} \sum_{\theta=0}^{p(s)-\tau(a)} f(a,\theta) - \sum_{a \in \delta(r)} \sum_{\theta=0}^{p(r)} f(a,\theta) \\
&+ \sum_{v \neq r,s} \left(\sum_{a \in \varrho(v)} \sum_{\theta=0}^{p(v)-\tau(a)} f(a,\theta) - \sum_{a \in \delta(v)} \sum_{\theta=0}^{p(v)} f(a,\theta) \right) \quad (\because p(r) = -1) \\
&= \sum_{a=uv \in A} \left(\sum_{\theta=0}^{p(v)-\tau(a)} f(a,\theta) - \sum_{\theta=0}^{p(u)} f(a,\theta) \right) \\
&\le \sum_{a=uv \in A} c(a) \cdot \max\{0, p(v) - \tau(a) - p(u)\} \quad (\because f(a,\theta) \le c(a)) \\
&\le \sum_{a=uv \in A} c(a) y(a)
\end{aligned}
$$

- $p \in \mathbb{Z}^V$:= 双対問題の最適解
- 時間拡大ネットワーク上の最小カットを定める点集合

$$W = \bigcup_{v \in V} \{v_0, v_1, \ldots, v_{p(v)}\}$$

- W に入る uv のコピー $= \max\{0, p(v) - \tau(a) - p(u)\}$ 本



目次

最速輸送問題

問題：最速輸送問題

- **Input**

  端子集合 $r + S$ を持つ時間制限 T 付き動的ネットワーク

  要求関数 $d \colon S \to \mathbb{Z}_+$

  仮定：$\varrho(r) = \emptyset$ かつ全ての $s \in S$ に対して $\delta(s) = \emptyset$

- **Goal**

  以下を満たす動的流 f の存在判定および発見

$$\forall s \in S, \quad \mathrm{ex}_f(s, T) = d(s)$$

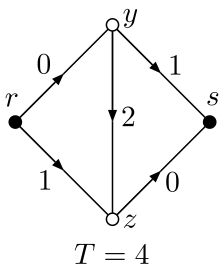
- 多項式時間アルゴリズム：B. Hoppe & E. Tardos

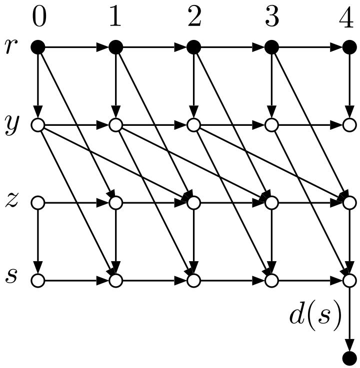
  国際会議 $\Rightarrow$ SODA'94, SODA'95

  論文誌 $\Rightarrow$ Math of OR'00

擬多項式アルゴリズム

- 擬多項式時間アルゴリズムは簡単!!
  $\Longrightarrow$ 時間拡大ネットワーク $+$ Max-flow アルゴリズム





単一出口の場合

観察

- $|S| = 1$ ならば最速輸送問題は簡単に解くことができる

- **Step1:**
  最大動的流問題を解く
- **Step2:**
  要求量と流量を比較し，必要ならばスケーリングする

- 複数出口の場合を単一出口の場合に帰着できる？
  $\Longrightarrow$ おそらく無理
- 辺の容量は単位時間当たりの流量を制限している
  $\Longrightarrow$ 総量を制限しているわけではない

判定問題

問題：判定版最速輸送問題

- **Input**

  最速輸送問題と同様

- **Goal**

  以下を満たす動的流 f の存在判定

$$\forall s \in S, \quad \mathrm{ex}_f(s, T) = d(s) \tag{1}$$

- 関数 $o\colon 2^S \to \mathbb{R}_+$ を以下のように定義

  $o(S') :=$ r から S' への時間制限 T の最大動的流の量

- $o(S')$ を計算する手間 $=$ 最大動的流問題を解く手間

判定問題

定理：B. Klinz

- 制約 (1) を満たす動的流が存在する $\Longleftrightarrow$

$$\forall S' \subseteq S, \quad o(S') \geq d(S')$$

- つまり，判定問題の答えが Yes である $\Longleftrightarrow$

$$\min\{o(S') - d(S') \mid S' \subseteq S\} \geq 0$$

観察

- 関数 $o - d$ は劣モジュラ関数である

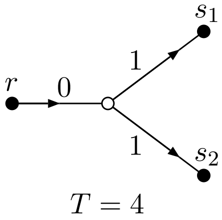
- 劣モジュラ関数最小化は多項式時間で解ける
  $\Longrightarrow$ 判定問題は多項式時間で解ける!!

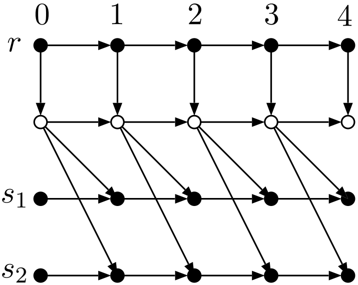
観察

- 制約 (1) を満たす動的流が存在する $\Longleftrightarrow$

$$\forall s \in S,\quad \{s_0, s_1, \ldots, s_T\}\text{ への流量} = d(s)$$

を満たす時間拡大ネットワーク上の静的フロー g が存在





- 各 $S' \subset S$ に対して

$$S'_T := \{s'_\theta \mid s' \in S',\ \theta \in \{0,1,\ldots,T\}\}$$

- 観察より，制約 (1) を満たす動的流が存在する $\Longleftrightarrow$

$$\forall S' \subseteq S,\quad S'_T \text{ を含む最小カット} \geq d(S')$$

- S'_T を含む最小カットの容量 $= o(S')$
- つまり，制約 (1) を満たす動的流が存在する $\Longleftrightarrow$

$$\forall S' \subseteq S,\ o(S') \geq d(S')$$

- $o - d$ の劣モジュラ性はカット関数の劣モジュラ性より

目次

問題：辞書式最大動的流問題

- **Input**

  端子集合 $r+S$ を持つ時間制限 T 付き動的ネットワーク

  S 上の線形順序 $s_1 \prec s_2 \prec \cdots \prec s_k$

  仮定：$\varrho(r)=\emptyset$ かつ全ての $s \in S$ に対して $\delta(s)=\emptyset$
- **Goal**

  以下を満たす動的流 f を求める

$$\forall i \in [k], \quad \mathrm{ex}_f(s_1, T) + \cdots + \mathrm{ex}_f(s_i, T) = o(\{s_1, \ldots, s_i\}) \quad (2)$$

定理

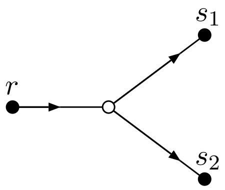
- 制約 (2) を満たす動的流は常に存在

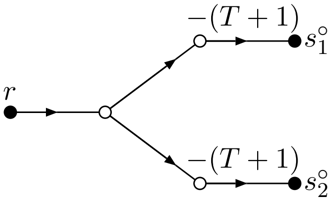
ネットワークの変形

- 各 $s \in S$ に対して以下を加える

  新たな点 s°

  移動時間が $-(T+1)$ で容量が ∞ の辺 ss°





- $S^\circ := \{s^\circ \mid s \in S\}$
- $A^\circ := A \cup \{ss^\circ \mid s \in S\}$

定義：拡張鎖流

- 拡張鎖流 $:=$ 順序対 $(\mathcal{P}, x)$

  $\mathcal{P} := r + S^\circ$ から $r + S^\circ$ への無向道の集合

  $x := \mathcal{P}$ から $\mathbb{R}_+$ への関数

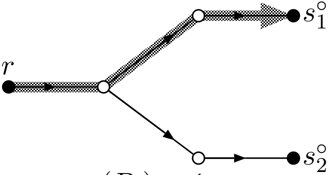
- 拡張鎖流 $(\mathcal{P}, x)$ が実行可能 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\forall a \in A^\circ, \quad \sum_{P \in \mathcal{P}_a^+} x(P) = \sum_{P \in \mathcal{P}_a^-} x(P)$$

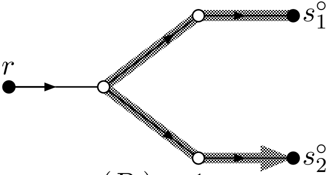
$\mathcal{P}_a^+ := a$ を順方向に含む $\mathcal{P}$ の道の集合

$\mathcal{P}_a^- := a$ を逆方向に含む $\mathcal{P}$ の道の集合

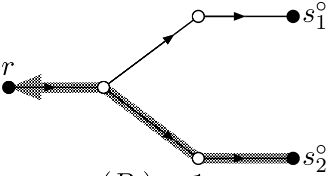
例：拡張鎖流



$x(P_1) = 1$



$x(P_2) = 1$



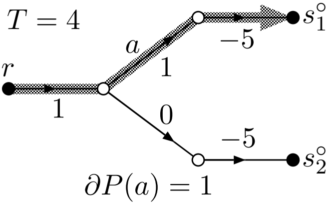
$x(P_3) = 1$

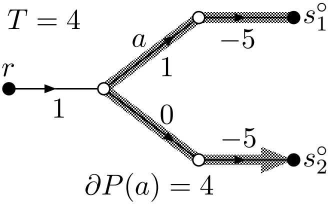
拡張鎖流からの復元

- 各 $a \in A$ と $\theta \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$f_{\mathcal{P}}(a,t) := \sum_{P \in \mathcal{P}_a^+ \,:\, \partial P(a) \le t} x(P) - \sum_{P \in \mathcal{P}_a^- \,:\, \partial P(a) \le t} x(P)$$

$\partial P(a) :=$ P の始点から a の始点までの移動時間
(ただし逆方向に含む辺の移動時間は負とする)





Hoppe & Tardos のアルゴリズム

Hoppe & Tardos のアルゴリズム

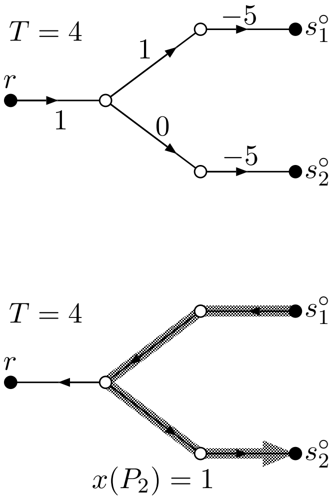
$g := \mathbf{0}$, $\mathcal{P} := \emptyset$
for $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ **do**
  g に対する残余ネットワーク上で $\{r, s_1^\circ, \ldots, s_{i-1}^\circ\}$ から s_i° への Max-cost flow g' を求める
  g' を拡大鎖流に分解し $\mathcal{P}$ に加える
  g を $g \oplus g'$ で更新する
end for
g を逆にしたものを拡大鎖流に分解し $\mathcal{P}$ に加える

定理

- Hoppe & Tardos のアルゴリズムは辞書式最大動的流問題を正しく解く

注) 「滞留」は必要ない

例：Hoppe & Tardos のアルゴリズム



証明：Hoppe & Tardos のアルゴリズム

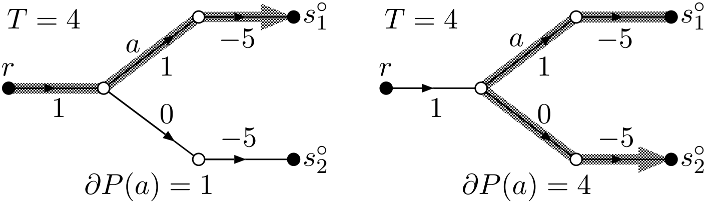
- $f :=$ アルゴリズムが出力した拡大鎖流から復元されたもの

証明すべきこと

1. f が $f(a, \theta) \geq 0$ を満たす
2. f が条件 D1 & D2 を満たす
3. f が時間制限 T を満たす
4. f が辞書式最大である

- f が条件 D1 & D2 を満たす $\Longrightarrow$
  拡大鎖流の定義とアルゴリズムより明らか
- f が辞書式最大である $\Longrightarrow$
  Ford & Fulkerson の証明の拡張で証明可能

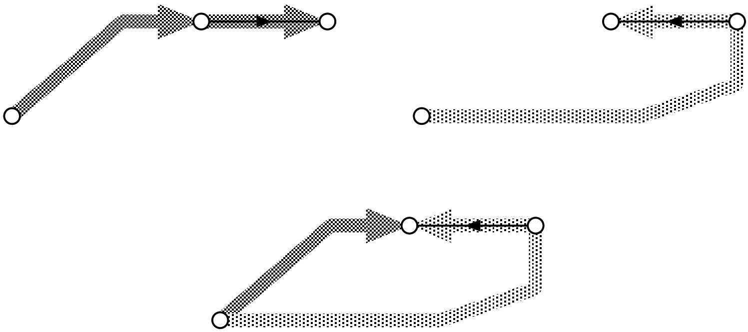
- f が時間制限 T を満たす $\Longrightarrow$
  最終的に zero flow になることより



時刻	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
左	0	1	1	1	1	1	1	1	$\cdots$
右	0	0	0	0	1	1	1	1	$\cdots$
合計	0	1	1	1	0	0	0	0	$\cdots$

証明：Hoppe & Tardos のアルゴリズム

- f が $f(a,\theta) \geq 0$ を満たす $\Longrightarrow$
  残余ネットワークにおける入口からの距離が非減少



目次

- 制約 (1) を満たす動的流が存在する要求関数の集合

$$\mathcal{F} := \{x \in \mathbb{R}_+^S \mid \forall S' \subseteq S, \quad x(S') \leq o(S')\}$$

事実

- $d \in \mathbb{R}_+^S$ が $\mathcal{F}$ の端点 $\iff$
- ある $S' = \{s_1, \ldots, s_{k'}\} \subseteq S$ と $s_1 \prec \cdots \prec s_{k'}$ が存在して

$$\forall i \in [k'], \quad d(s_1) + \cdots + d(s_i) = o(\{s_1, \ldots, s_i\})$$

$$\forall s \in S \setminus S', \quad d(s) = 0$$

- $\mathcal{F}$ の各端点はある辞書式最大動的流の流量に対応
- Hoppe & Tardos のアルゴリズムで求めることができる!!

多面体的アプローチ

観察

- 制約 (1) を満たす動的流が存在 $\iff d \in \mathcal{F}$

- d の $\mathcal{F}$ の端点 $x_1, \ldots, x_{k+1}$ による凸結合で表現可能

$$d = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{k+1} x_{k+1}$$

- 各 x_i に対応する辞書式最大動的流を凸結合すればよい

事実

- d の凸結合の表現を求める問題は劣モジュラ関数の基多面体の要素の凸結合表現を求める問題と同値

基多面体

- 劣モジュラ関数 $\rho\colon 2^U \to \mathbb{R}$ with $\rho(\emptyset) = 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\rho) &:= \{x \in \mathbb{R}^U \mid \forall W \subseteq U,\ \ x(W) \leq \rho(W)\} \\ \mathrm{B}(\rho) &:= \{x \in \mathrm{P}(\rho) \mid x(U) = \rho(U)\} \end{aligned}$$

- 劣モジュラ関数最小化

$$\min_{W \subseteq U} \rho(W) = \max_{x \in \mathrm{B}(\rho)} \left\{ \sum_{u \in U} \min(0, x(u)) \right\}$$

- 大抵の劣モジュラ関数最小化アルゴリズム (e.g., S00, IFF01)
  $\Longrightarrow$ 右辺の最適解も $\mathrm{B}(\rho)$ の端点凸結合の形で出力

凸結合表現

- $z \in \mathrm{B}(\rho)$ の端点の凸結合表現
  結論：$\rho - z$ の最小化をすればよい!!
- 最大最小関係再考

$$\min_{W \subseteq U} \left\{ \rho(W) - z(W) \right\} = \max_{x \in \mathrm{B}(\rho - z)} \left\{ \sum_{u \in U} \min(0, x(u)) \right\}$$

- 左辺および右辺の値は 0
- $\mathrm{B}(\rho - z)$ は $\mathrm{B}(\rho)$ を $-z$ だけ平行移動したもの
- 右辺の最適解は唯一で $\mathbf{0}$
  $(x \in \mathrm{B}(\rho - z) \Rightarrow x(U) = 0$ に注意!!$)$

凸結合表現を求めるアルゴリズム

- **Step1:**

  $\rho - z$ を最小化
- **Step2:**

  0 の $\mathrm{B}(\rho - z)$ の端点凸結合表現を得る

$$\mathbf{0} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k$$

- **Step3:**

  z の $\mathrm{B}(\rho)$ の端点凸結合表現を得る

$$z = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_k y_k$$

ただし $y_i = x_i + z$

目次

特殊な要求関数

- $S := \{s_1, \ldots, s_k\}$
- 以下の式を満たすときは非常に好都合

$$\forall i \in [k], \quad d(s_1) + \cdots + d(s_i) = o(\{s_1, \ldots, s_i\})$$

観察

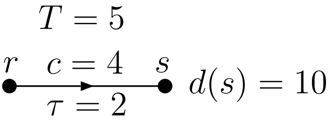
- 上記の条件が満たされるならば最速輸送問題は $s_1 \prec \cdots \prec s_k$ に対する辞書式最大動的流問題と等価

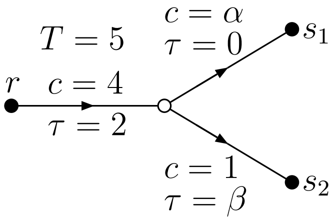
- 元の問題の解が構成可能な辞書式最大流問題へ変形!!

注) 「滞留」は必要ない

簡単な例

- 以下のような二つの問題を考える





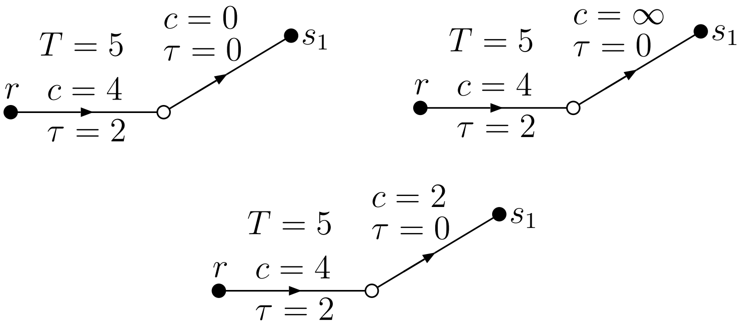
- 左の問題を右の辞書式最大動的流問題に帰着する

$$\alpha = 2, \quad \beta = 2, \quad s_1 \prec s_2$$

- $r \to s$ に時刻 0 から 3 の間に 2 ずつ流す (s_1 に対応) $+$
  $r \to s$ に時刻 0 から 1 の間に 1 ずつ流す (s_2 に対応)

簡単な例

- $o(\{s_1\}) \leq d(s)$ を満たす最大の $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ を二分探索で求める



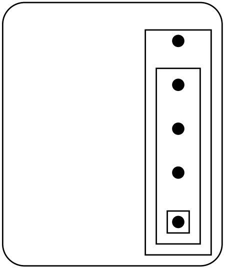
- $d(s) - o(\{s_1\}) = 2$ だけ s_2 に流すために $\beta = 2$

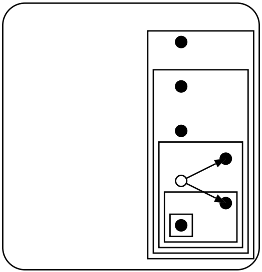
Hoppe & Tardos のアルゴリズム

- S の部分集合 S' がタイト $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \sum_{s \in S'} d(s) = o(S')$
- 目標：各 S_i がタイトかつ $|S_i \setminus S_{i-1}| = 1$ であるような

$$\emptyset = S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_{k'}$$

- $|S_i \setminus S_{i-1}| > 1$ であるようなものがあれば...





目次

未解決問題

1. 最速輸送問題を劣モジュラ関数最小化を用いずに解くことができるか?
2. 最速輸送問題から生じる劣モジュラ関数を高速に最小化することができるか?
3. Hoppe & Tardos のアルゴリズムは結局何をしているのか?
4. 最速輸送問題を実用的に (近似的でもいいので) 解くことのできるアルゴリズムの開発

目次

1. 準備

   静的流，動的流，時間拡大ネットワーク

2. 最大動的流問題

   静的流の鎖分解，Ford & Fulkerson のアルゴリズム

3. 最速輸送問題
   1. 決定問題
   2. 辞書式最大動的流問題
   3. 多面体的アプローチ
   4. 問題変形によるアルゴリズム
   5. 未解決問題

4. その他の話題

   最小費用動的流問題，多品種動的流問題

5. 演習問題

最小費用動的流問題

問題：最小費用動的流問題

- **Input**

  時間制限 T 付き動的ネットワーク

  費用関数 $\pi\colon A \to \mathbb{R}_+$ および要求量 $D \in \mathbb{R}_+$

  仮定：$S = \{r, s\}$ かつ $\varrho(r) = \delta(s) = \emptyset$

- **Goal**

  $\mathrm{ex}_f(s, T) = D$ を満たす最小費用動的流 f

$$f \text{ の費用} := \sum_{t=0}^{T} \sum_{a \in A} \pi(a) f(a, t)$$

定理

- 最小費用動的流問題は $\mathcal{NP}$ 困難

証明

- 全ての辺の容量を 1 とする
- 要求量 D を 1 とする
- このときの最小費用動的流問題 $\Longrightarrow$
  長さが T 以下の最小費用動を見つける問題と同値
- この制約付き最短路問題は $\mathcal{NP}$ 困難

$\square$

多品種動的流問題

- 単一の品種 $\Rightarrow$ k 個の品種 $\{1, 2, \ldots, k\}$
- $f\colon A \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+ \Rightarrow f_i\colon A \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$ $(i \in \{1, 2, \ldots, k\})$
- 容量制約

$$\forall a \in A, \quad \forall \theta \in \mathbb{Z}_+, \quad \sum_{i \in 1}^{k} f_i(a, \theta) \leq c(a)$$

- 全ての品種の速度は同一?
- 品種ごとの速度にすると「追い越し」の問題が生じる
(辺の「入口」でのみ容量制約を考えているため)

参考文献

- B. Hoppe and E. Tardos, The quickest transshipment problem, Mathematics of OR, 25 (2000), No. 1, 36–62.

  Also: in SODA'94 and SODA'95
- N. Baumann and M. Skutella, Solving evacuation problems efficiently: Earliest arrival flows with multiple sources, Mathematics of OR, 34 (2009), No. 2, 499–512.

  Also: in FOCS'06
- B. Klinz and G. J. Woeginger, Minimum-cost dynamic flows: The series-parallel case, Networks, 43 (2004), 153–162.

  Also: in IPCO'95
- A. Hall, S. Hippler, and M. Skutella, Multicommodity flows over time: Efficient algorithms and complexity, Theoretical Computer Science, 379 (2007), 387–404.

  Also: in ICALP'03

目次

演習問題 1

- 最大動的流問題に対する Ford & Fulkerson のアルゴリズム
  $\Longrightarrow$ Max-cost circulation を求める
- Max-cost circulation を求める問題の双対問題

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{a \in A} c(a) y(a) \\
\text{s.t.} \quad & y(a) \geq p(v) - \tau(a) - p(u) \quad (\forall a = uv \in A) \\
& p(r) = -1, \quad p(s) \geq T \\
& y \geq \mathbf{0}, \quad p \in \mathbb{R}^V
\end{aligned}
$$

演習問題

- 上記の問題を導け

演習問題 2

問題：辞書式最大動的流問題

- **Input**

  端子集合 $r+S$ を持つ時間制限 T 付き動的ネットワーク

  S 上の線形順序 $s_1 \prec s_2 \prec \cdots \prec s_k$

  仮定：$\varrho(r)=\emptyset$ かつ全ての $s \in S$ に対して $\delta(s)=\emptyset$

- **Goal**

  以下を満たす動的流 f を求める

$$\forall i \in [k], \quad \mathrm{ex}_f(s_1, T) + \cdots + \mathrm{ex}_f(s_i, T) = o(\{s_1, \ldots, s_i\})$$

演習問題

- 辞書式最大動的流が存在することを証明せよ

演習問題 3

- 劣モジュラ関数最小化を用いずとも最速輸送問題が多項式時間で解くことのできるネットワークの条件を考える

性質

- 各点 $v \in V$ に対して，r から v への任意の道の移動時間が等しい

演習問題

- 上の性質が満たされるとき，最速輸送問題は劣モジュラ関数最小化アルゴリズムを用いずとも多項式時間で解くことができることを証明せよ

演習問題 4

問題：最小費用動的流問題

- **Input**

  時間制限 T 付き動的ネットワーク

  費用関数 $\pi\colon A \to \mathbb{R}_+$ および要求量 $D \in \mathbb{R}_+$

  仮定：$S = \{r, s\}$ かつ $\varrho(r) = \delta(s) = \emptyset$
- **Goal**

  $\mathrm{ex}_f(s, T) = D$ を満たす最小費用動的流 f

演習問題

- 最小費用動的流問題は直並列ネットワークに制限しても $\mathcal{NP}$ 困難であることを証明せよ