一般グラフのマッチングとその周辺

高澤 兼二郎

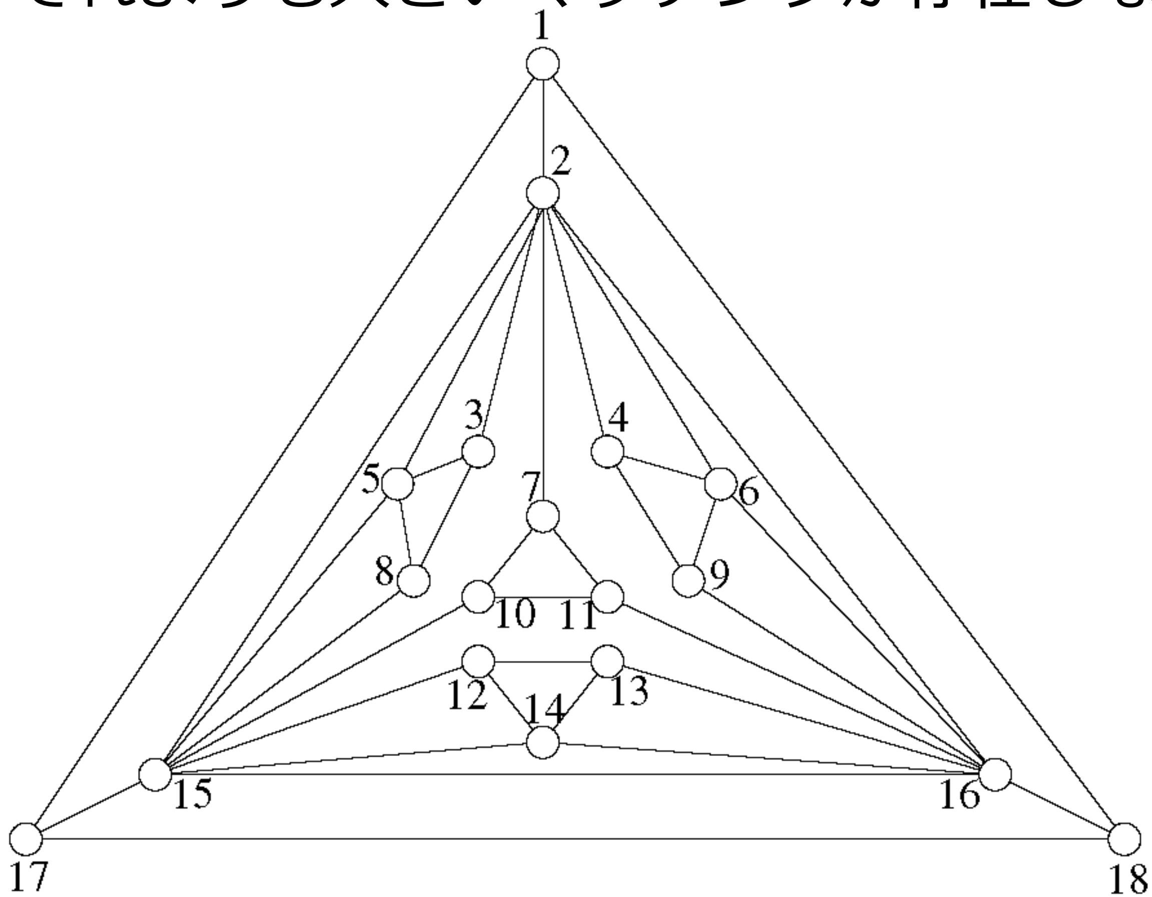
京都大学 数理解析研究所

第 11 回 組合せ最適化セミナー
2014 年 7 月 30 日

今日の目標

(1) 最大マッチングをひとつ示せ

(2) それが最大マッチングであることを示せ
(= それよりも大きいマッチングが存在しないことを示せ)



Goemans 2013

目次

◆ 2部グラフのマッチング

- König の定理
- 増加道アルゴリズム

◆ 一般グラフのマッチング

- Tutte-Berge 公式
- Edmonds のアルゴリズム
- Edmonds-Gallai 分解

◆ 2部グラフの重みつきマッチング

- マッチング多面体
- 完全単模性

◆ 一般グラフの重みつきマッチング

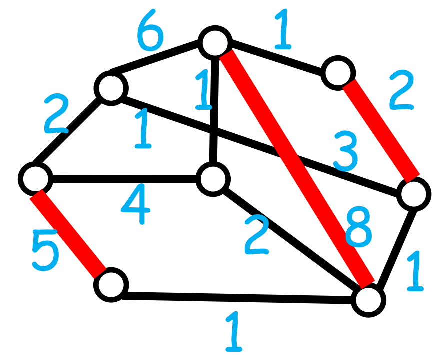
- マッチング多面体
- 完全双対整数性
  (Cunningham-Marsh公式)

◆ 周辺の話題

マッチング問題

無向グラフ $G = (V, E)$　枝重み $w: E \to \mathbf{R}_+$

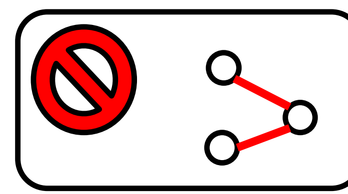
頂点集合　枝集合



$w(M) = 2+8+5 = 15$

定義

$M \subseteq E$ が マッチング
⇔　Mの枝は端点を共有しない



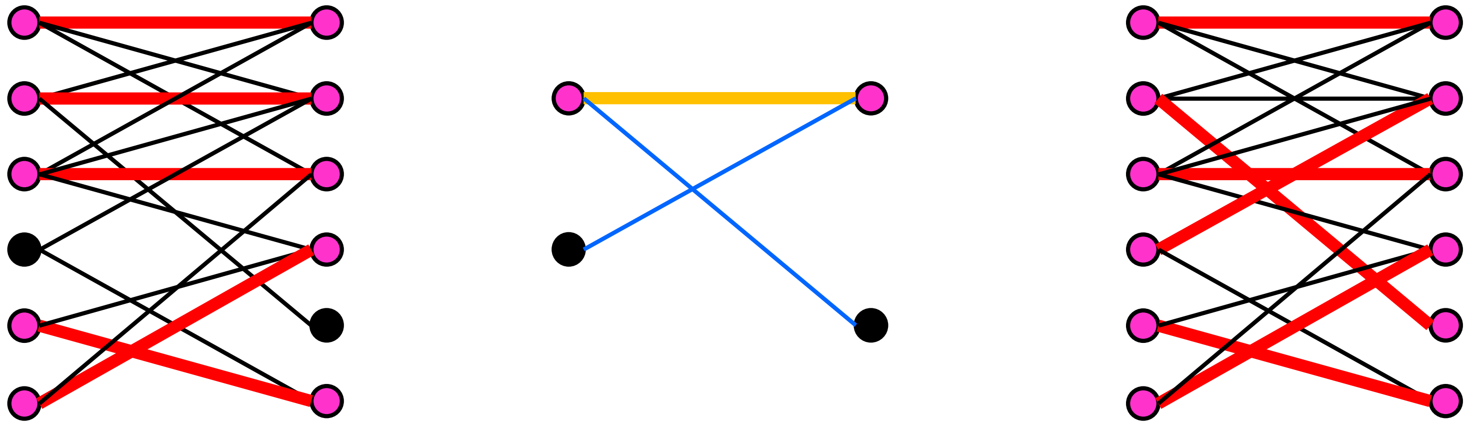
問題

$|M|$ 最大のマッチング M を求めよ

$w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$ 最大のマッチング M を求めよ

◆ 多項式時間可解　Edmonds 1965 など

交互道



M　　　　P　　　　MΔP

定義

Mに関する交互道: M と E-M の枝が交互に現れる道

Mに関する増加道: 交互道で，両端点がMに接続しない

P が M-増加道 ➔ $M' = M \Delta P = (M - P) \cup (P - M)$はマッチングで

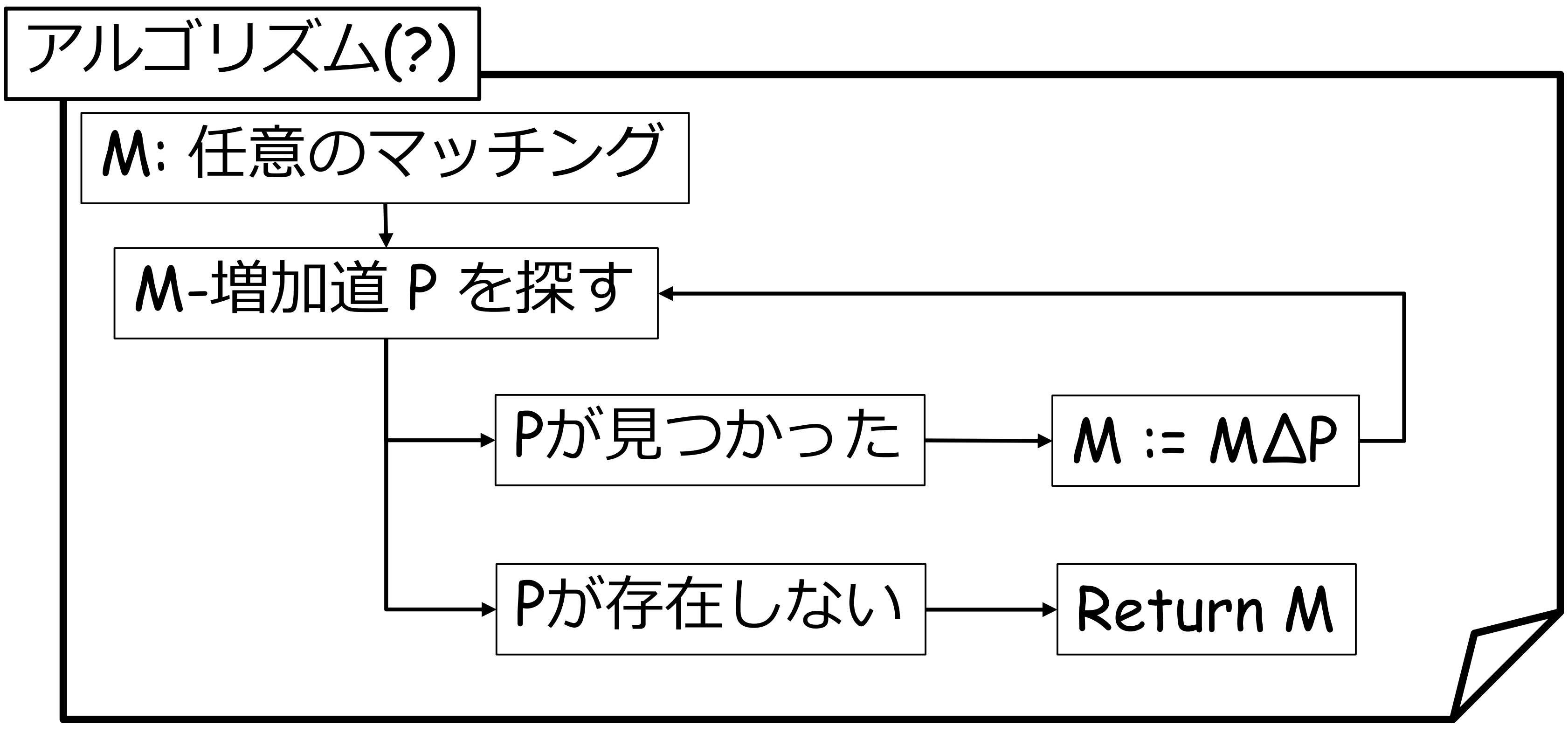
$|M'| = |M|+1$

増加道アルゴリズム (?)

定理

M が最大マッチング ⟺ M-増加道が存在しない

【演習】証明せよ



存在しないことの証明

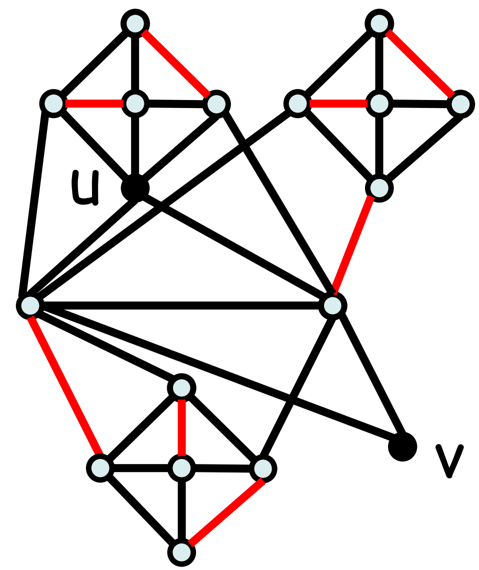
定理

M が最大マッチング ⟺ M-増加道が存在しない

「○○が存在しない」ことを説明するには・・・??

(^_^;) 「探したけど増加道ありません」
(°⊿°) 「は？ ちゃんと探せや」

(^O^) 「全探索したけどありません！
(u → v の全頂点列ドバー)」
(°⊿°) 「こんなにたくさんチェックできん,
やり直し」



2部グラフの場合

$G = (U \cup V, E)$
- E - M の枝: U→V の向き付け
- M の枝: V→U へ向き付け

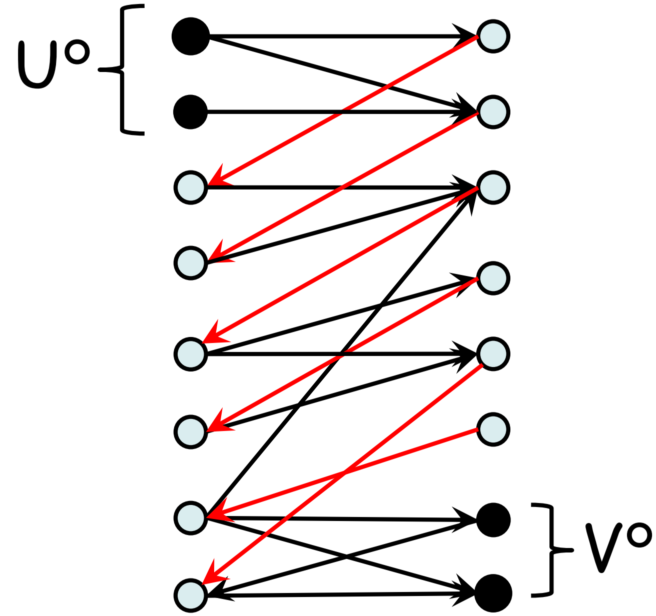
- M-交互道 ⟺ 有向道
- M-増加道 ⟺ U°-V° 有向道

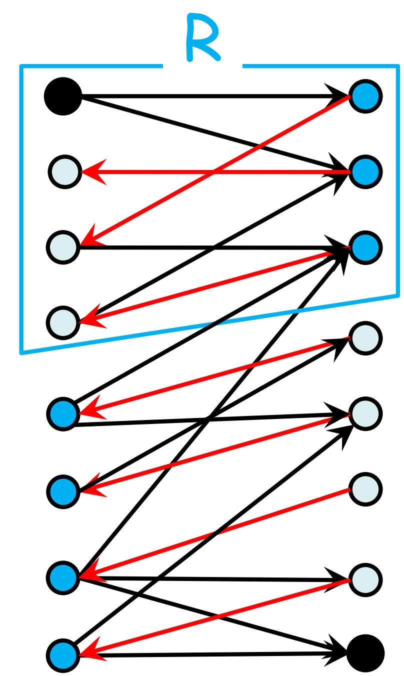
- M-増加道が存在 ⟺ U°からV°へ到達可能

- R := U°から到達可能な頂点の集合

$R \cap V^\circ = \emptyset$ ➔ M-増加道は存在しない

➔ M は最大マッチング



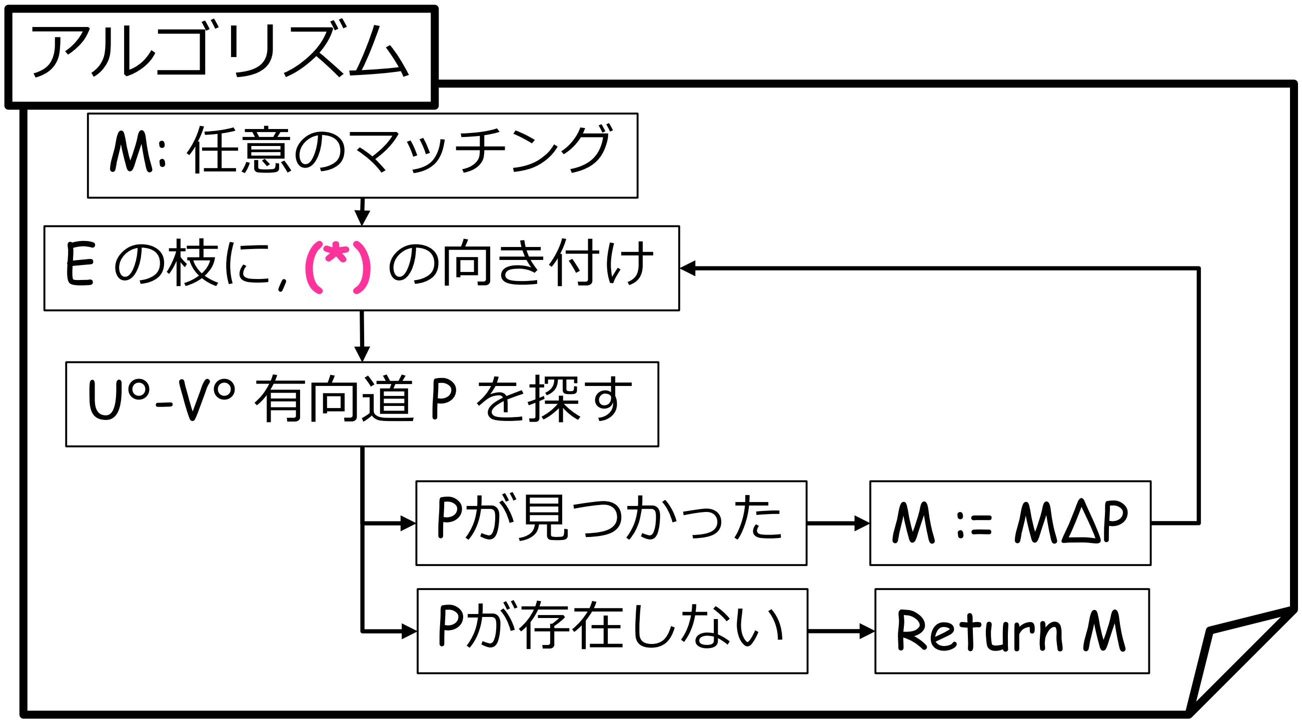


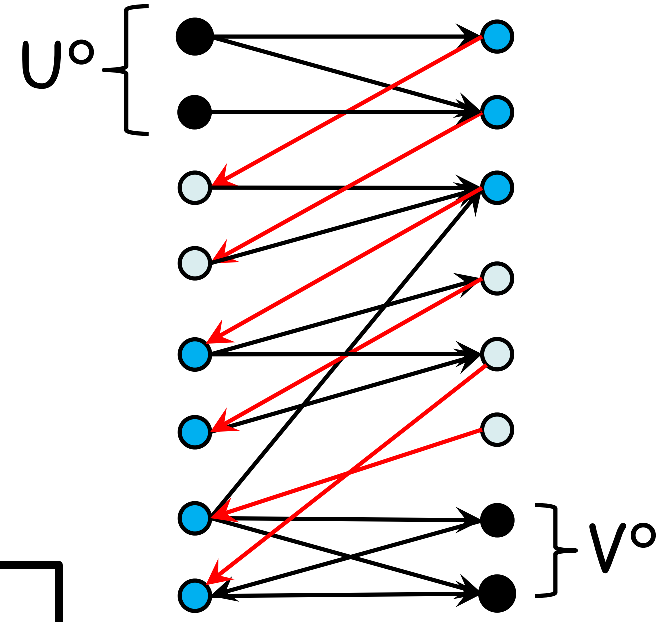
2部グラフのアルゴリズム

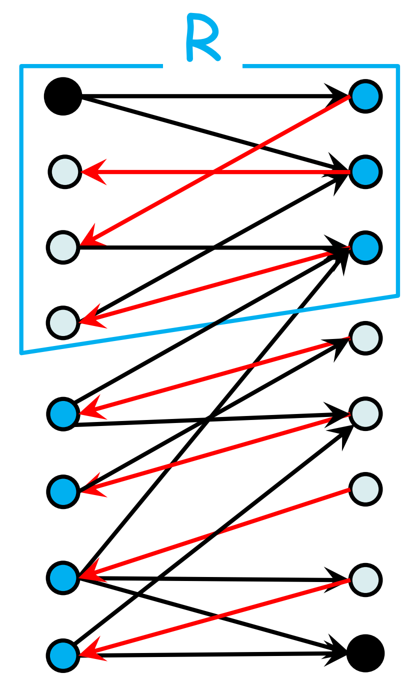
G = (U ∪ V, E)

- E - M の枝: U→V の向き付け
- M の枝: V→U へ向き付け

(*)







マッチング と 点被覆

定義

$C \subseteq U \cup V$ が 点被覆

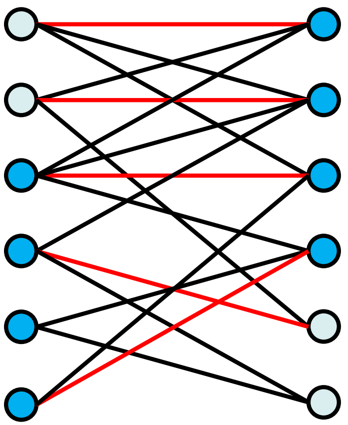
⇔ E のすべての枝は C に端点をもつ

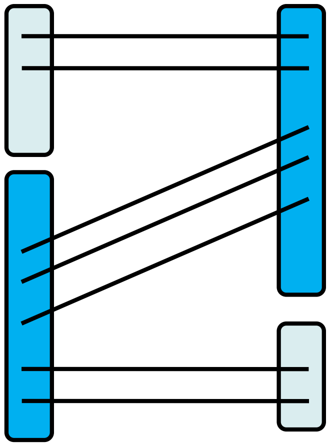
命題

M はマッチング, C は点被覆

➔ $|M| \le |C|$

- 点被覆 C ➔ $|C|$ はマッチングサイズの上限
- $|M| = |C|$ が成立すれば
  - M は最大マッチング
  - C は最小点被覆



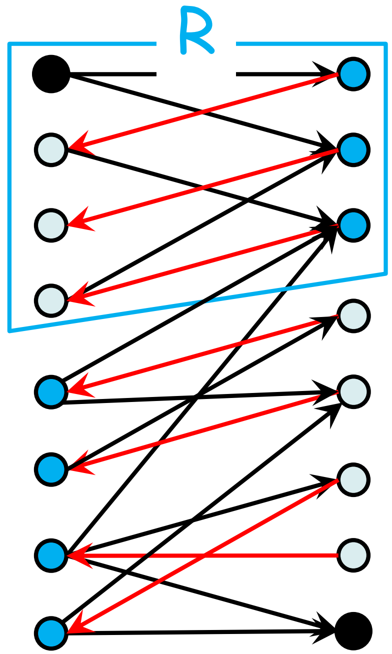


最大マッチング と 最小点被覆

アルゴリズム終了時: U°-V° 有向道なし

R⊆U∪V : U° から有向道で到達可能

C := (U - R)∪(V∩R)



命題
- C は点被覆
- $|M| = |C|$

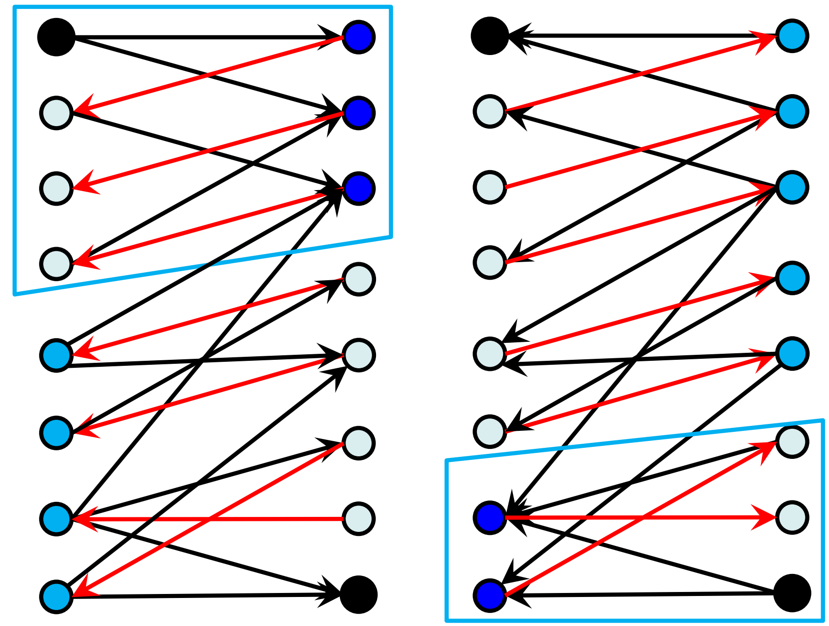
定理 [Kőnig 1931]

max{$|M|$: M はマッチング} = min{$|C|$: C は点被覆}

最小点被覆全体の構造: DM分解

Dulmage-Mendelsohn 分解

- $C \subseteq U \cup V$ が最小点被覆
  - ➔ ● $\in C$
- ・
- ・
- ・



点被覆 C_1　　点被覆 C_2

C_1, C_2 はともに最小点被覆

- 浅野: **情報の構造 上**. 日本評論社, 1994
- 伊理, 藤重, 大山: **グラフ・ネットワーク・マトロイド**, 産業図書, 1986
- K. Murota: ***Matrices and Matroids for Systems Analysis***, Springer, 2010

完全マッチングの存在判定

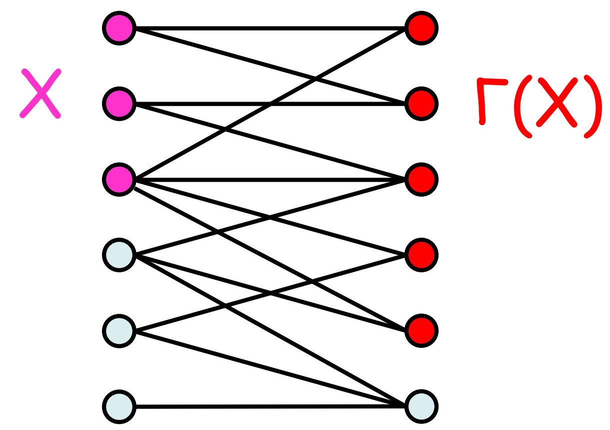
定理 [Hall 1935]

G が完全マッチングをもつ ⟺ $|\Gamma(X)| \geq |X| \; {}^{\forall}X \subseteq U$

【演習】証明せよ

$G = (U \cup V, E),\ X \subseteq U$

$\Gamma(X) := \{\, v \in V : \exists u \in X,\ uv \in E \}$



ここまでのまとめ

- 最大マッチング ⟺ 増加道が存在しない

- 存在しないことの証明は (一般には) 難しい

- ２部グラフ: 向き付け + パス探索 で存在判定可能

- 最大最小定理による最適性の証明

$$\boxed{\max\{|M| : M \text{ はマッチング}\} = \min\{|C| : C \text{ は点被覆}\}}$$

  - max ≤ min を示す
  - $|M| = |C|$ をみたす M, C 求めるアルゴリズムを設計

➔ max = min の証明 & アルゴリズムの正しさの保証

目次

◆ 2部グラフのマッチング

- König の定理
- 増加道アルゴリズム

◆ 一般グラフのマッチング

- Tutte-Berge 公式
- Edmonds のアルゴリズム
- Edmonds-Gallai 分解

◆ 2部グラフの重みつきマッチング

- マッチング多面体
- 完全単模性

◆ 一般グラフの重みつきマッチング

- マッチング多面体
- 完全双対整数性 (Cunningham-Marsh公式)

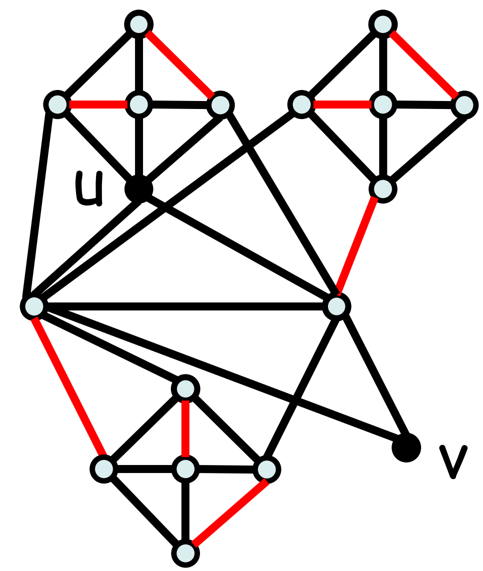
◆ 周辺の話題

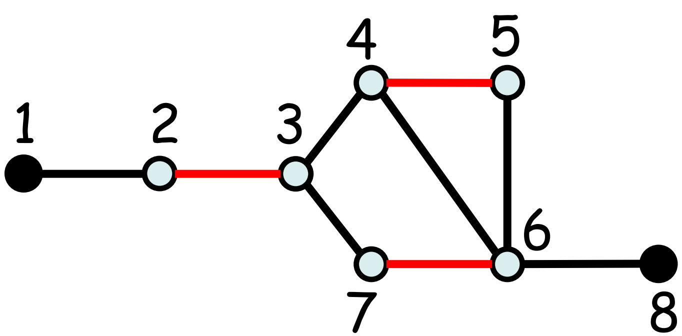
一般グラフのマッチング

定理

M が最大マッチング ⇔ M-増加道が存在しない

- 一般グラフでも成立
- 増加道の探索・存在判定 が難しい
  - 向き付けができない
  - 各枝はどちら向きにも通れる





探索: 1→2→3→4→5→6→7 …

➔増加道なし??

最大最小定理

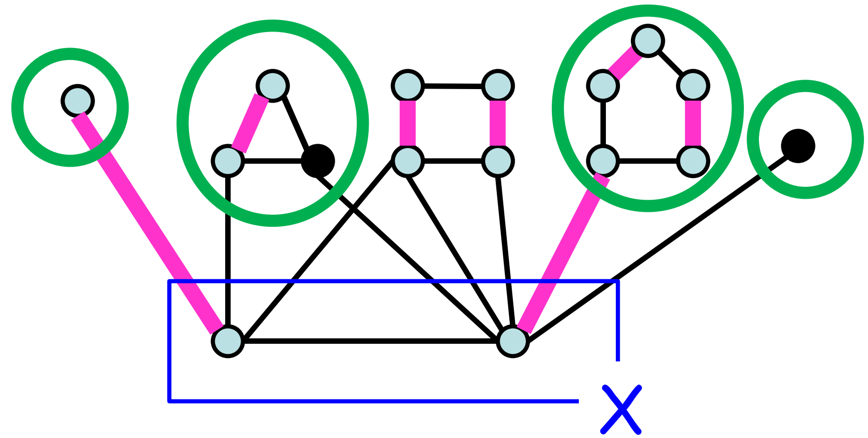
Tutte 1947, Berge 1958

定理 [Tutte-Berge 公式]

$$\max\{|M| : M \text{ はマッチング}\} = \min_{X \subseteq V} \frac{1}{2}\{|V| + |X| - \mathrm{odd}(V - X)\}$$

頂点数奇数の成分数

odd(V-X)=4



- max ≤ min
- 等号でみたす M, X

➔ M, X は最適解

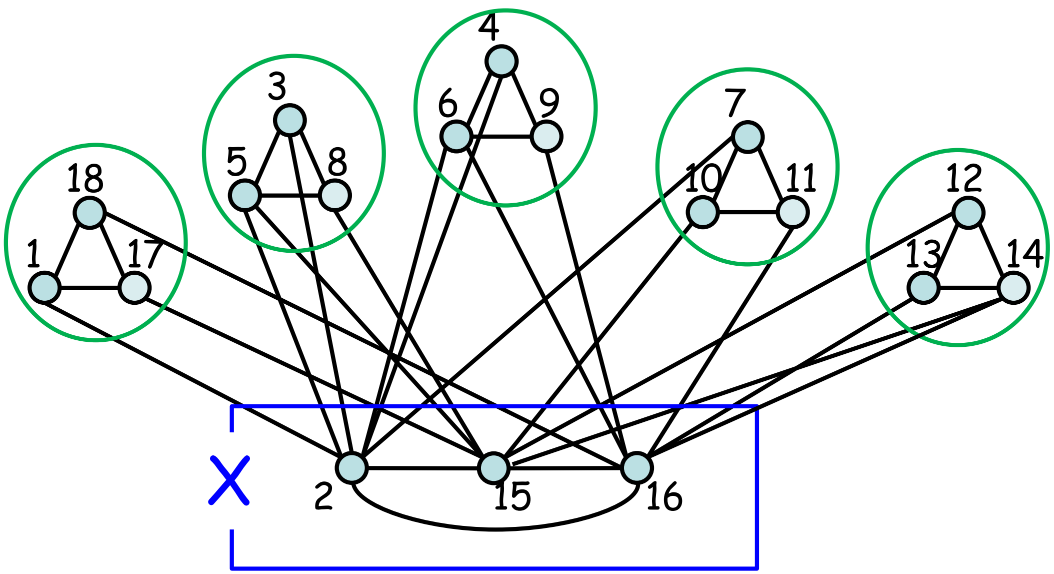
定理 [Tutte の定理]

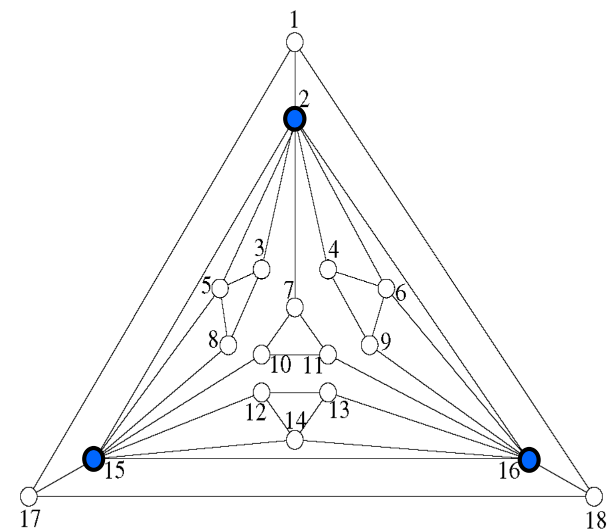
G が完全マッチングをもつ

$\Longleftrightarrow \mathrm{odd}(V - X) \leq |X| \quad \forall X \subseteq V$

冒頭の問題 の 答え

X = {2, 15, 16} ➔ odd(V-X) = 5



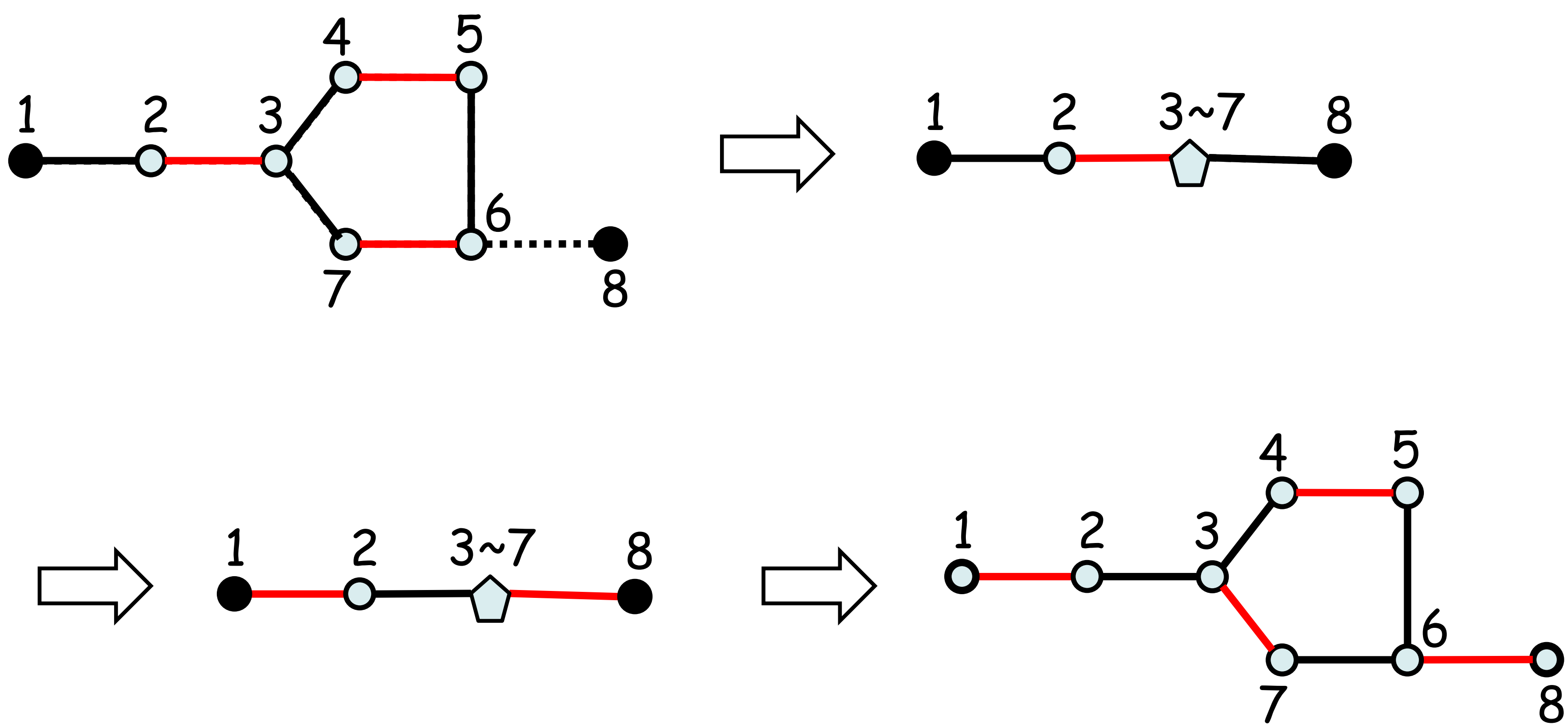


∀M, |M| ≤ (|V| + |X| - odd(V-X))/2 = (18 + 3 – 5)/2 = 8

➔ |M|=8 のマッチングMが見つかっていれば最適解
(Xも最適解)

ブロッサム・アルゴリズム: 縮約・増加

Edmonds 1965



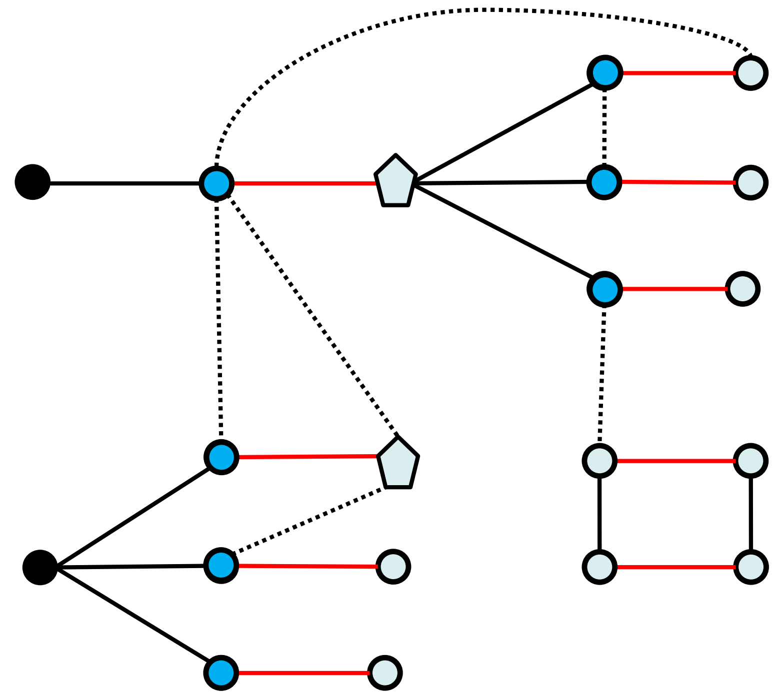
命題 $\forall$奇閉路 C は factor-critical

$\forall v$, $C - v$ は完全マッチングをもつ

ブロッサム・アルゴリズム: 終了時

Edmonds 1965

X = {●から奇数長の交互道でたどり着く頂点}

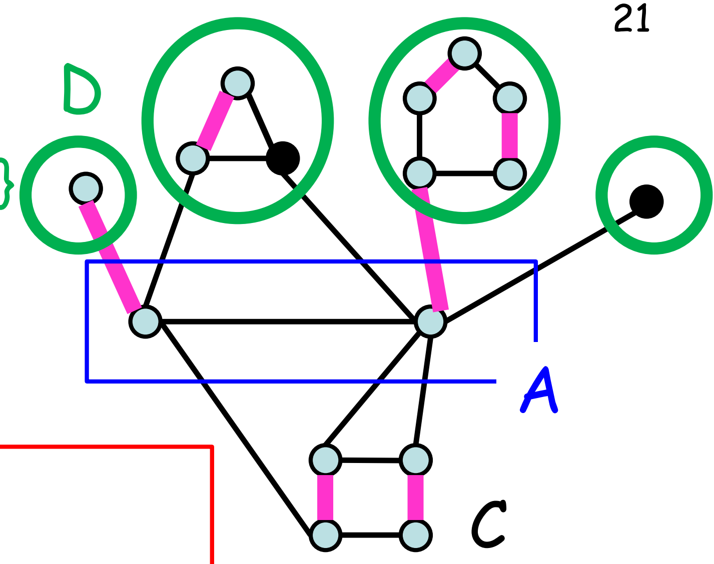


➔ $|M| = \frac{1}{2}(|V| + |X| - \mathrm{odd}(V-X))$

➔ M, X はそれぞれ最適解
Tutte-Berge 公式の構成的証明

Edmonds-Gallai 分解

D = {v∈V : v を被覆しない最大マッチングが存在}
A = {v∈V-D : vはDの頂点に隣接}
C = V - D - A



定理 [Edmonds-Gallai 分解]

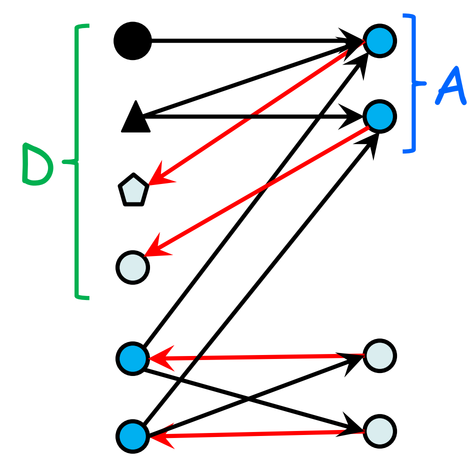
(1) G[D] の連結成分は factor-critical

(2) G[C] は完全マッチングをもつ

(3) C を削除, E[A] を削除, G[D] の連結成分を縮約 して得られる2部グラフにおいて, Γ(X) - |X| ≥ 1 ∀X⊆A

(4) M: G の最大マッチング ➔
- M[D]: 各連結成分の near-perfect matching
- M[C]: G[C] の完全マッチング
- M[A]: A の頂点は D の異なる連結成分とマッチ

(5) max{|M|} = (|V| - #component(D) + |A|)/2



ここまでのまとめ

- 最大マッチング ⟺ 増加道が存在しない

- 一般グラフ: 増加道の存在判定は難しい

- 最大最小定理による最適性の証明

$$\boxed{\max\{|M| : M \text{ はマッチング}\} = \frac{1}{2}\min\{|V| + |X| - \mathrm{odd}\,(V-X)\}}$$

  - max ≤ min を示す
  - 左辺 = 右辺 をみたす M, X 求めるアルゴリズムを設計

➔ max = min の証明 & アルゴリズムの正しさの保証

目次

◆ 2部グラフのマッチング

- Kőnig の定理
- 増加道アルゴリズム

◆ 一般グラフのマッチング

- Tutte-Berge 公式
- Edmonds のアルゴリズム
- Edmonds-Gallai 分解

◆ 2部グラフの重みつきマッチング

- マッチング多面体
- 完全単模性

◆ 一般グラフの重みつきマッチング

- マッチング多面体
- 完全双対整数性
(Cunningham-Marsh公式)

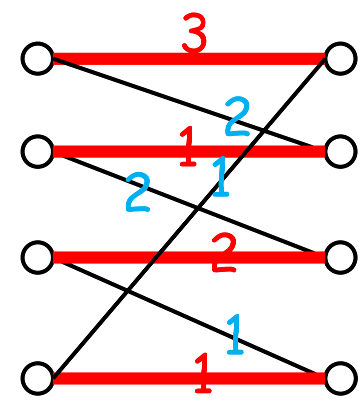
◆ 周辺の話題

2部グラフの重みつきマッチング

$G = (U \cup V, E)$
$w : E \to \mathbf{R}_{\geq 0}$

問題

- w(M) 最大のマッチング M
- w(M) 最小の完全マッチング M



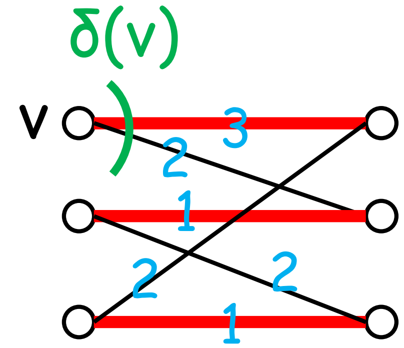
$w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$

- 多項式時間可解 (Hungarian method など)

最小重み完全マッチングの整数計画表現

変数 $\mathbf{x} \in \{0,1\}^E$: マッチングの特性ベクトル

$$\begin{cases} x(e) = 1 \Rightarrow e \in M \\ x(e) = 0 \Rightarrow e \in E - M \end{cases}$$



- $w(M) = \sum_{e \in M} w(e)x(e)$

$\mathbf{x} = (1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1)$

IP_{min}

minimize	$\sum_{e \in E} w(e)\, x(e)$	
subject to	$\sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 1$	$\forall v \in U \cup V$
	$x(e) \in \{0,1\}$	$\forall e \in E$

線形計画緩和 と 整数最適解

LP_{min}

minimize $\quad \sum_{e \in E} w(e)\, x(e)$

subject to $\quad \sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 1 \qquad {}^{\forall} v \in U \cup V$

$x(e) \geq 0 \qquad {}^{\forall} e \in E$

➢ $OPT(LP_{min}) \leq OPT(IP_{min})$

定理 [Birkhoff 1946 など]

G が 2部グラフのとき，(LP_{min}) は 整数最適解 x^* をもつ

(LP_{min}) を解いて 整数最適解 x^* を求める
➔ x^* は (IP_{min}) の最適解
(最小重み完全マッチングの特性ベクトル)

整数性の証明

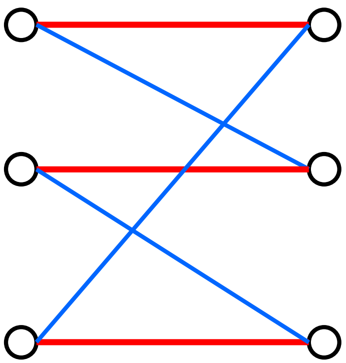
$\sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 1 \quad \forall v \in U \cup V$
$x(e) \geq 0 \quad \forall e \in E$

定理 [Birkhoff 1946 など]

G が 2部グラフのとき，(LP_{min}) の制約式は完全マッチング多面体を定める

【証明】

- x : 制約式が定める多面体 Q の端点
- $F = \{e \in E \mid x(e) > 0\}$
- F が閉路 C を含むとする
  - ➔ C の長さは偶数
  - ➔ C はマッチング M, N の disjoint union
  - ➔ $x + \varepsilon(\chi_M - \chi_N),\ x - \varepsilon(\chi_M - \chi_N) \in Q$
  - ➔ x が Q の端点であることに矛盾
- F は閉路を含まない ➔ $x(e) = 1\ \forall e \in F$



【証明終】

最大重みマッチングの線形計画表現

LP

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \textstyle\sum_{e \in E} w(e)\, x(e) \\
\text{subject to} \quad & \textstyle\sum_{e \in \delta(v)} x(e) \le 1 && \forall v \in U \cup V \\
& x(e) \ge 0 && \forall e \in E
\end{aligned}
$$

定理

G が 2部グラフのとき,
(LP) は 整数最適解 x^* をもつ,
i.e., (LP) の制約式はマッチング多面体を定める

【演習】証明せよ
Hint: (LP_{min}) の整数性を使ってよい

LP の最適性保証：双対定理

LP

maximize	$\sum_{e\in E} w(e)\, x(e)$	
subject to	$\sum_{e\in\delta(v)} x(e) \leq 1$	$\forall v\in U\cup V$
	$x(e) \geq 0$	$\forall e\in E$

Dual-LP $y\in \mathbf{R}^{U\cup V}$

minimize	$\sum_{v\in U\cup V} y(v)$	
subject to	$y(u) + y(v) \geq w(e)$	$\forall e = uv \in E$
	$y(v) \geq 0$	$\forall v\in U\cup V$

- OPT(LP) = OPT(Dual-LP)

- (LP) の許容解 x が最適解

  ⟺ 相補性条件をみたす (Dual-LP) の許容解 y が存在:
  - $x(e) > 0 \Rightarrow y(u) + y(v) = w(e)$
  - $y(v) > 0 \Rightarrow \sum_{e\in\delta(v)} x(e) = 1$

双対最適解 = “最小点被覆”

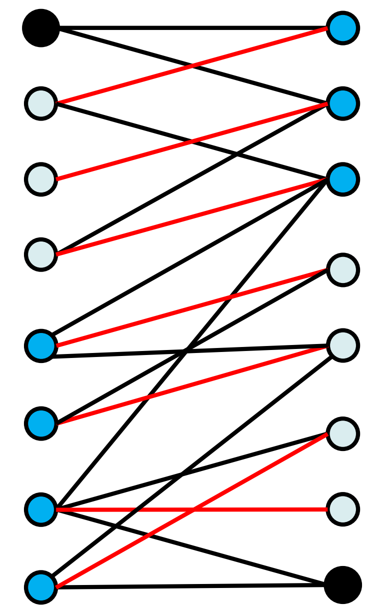
$w(e) = 1 \ {}^\forall e$ の場合

Dual-LP

minimize $\sum_{v \in U \cup V} y(v)$

subject to $y(u) + y(v) \geq 1 \quad {}^\forall e = uv \in E$

$y(v) \geq 0 \quad {}^\forall v \in U \cup V$



y(●) = 1

y(○) = 0

- 最小点被覆問題の線形緩和
  - ✓ $y \in \{0,1\}^{U \cup V}$ ➔ y は点被覆の特性ベクトル

命題 (Dual-LP) は整数最適解をもつ

【略証】

- OPT(IP) = OPT(LP) = OPT(Dual-LP) ≤ OPT(Dual-IP)
- OPT(IP) = OPT(Dual-IP) ■

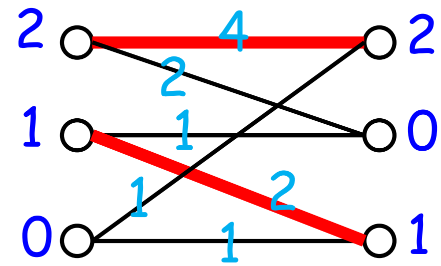
- 相補性条件
  - $x(uv) = 1$ ➔ $y(u) + y(v) = 1$
  - $y(v) = 1$ ➔ $\sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 1$

x: 最大マッチング

y: 最小点被覆

双対最適解 = "最小点被覆"

$w(e) \in \mathbf{Z}\ \forall e$ の場合



Dual-LP

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & \sum_{v \in U \cup V} y(v) & \\ \text{subject to} & y(u) + y(v) \geq w(e) & \forall e = uv \in E \\ & y(v) \geq 0 & \forall v \in U \cup V \end{array}$$

➢ 最小点被覆問題の一般化

定理[Egerváry 1931]

w が整数ならば, (Dual-LP) は整数最適解をもつ

➢ 相補性条件

- $x(uv) = 1 \Rightarrow y(u) + y(v) = w(e)$
- $y(v) \in \mathbf{Z}_{>0} \Rightarrow \sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 1$

x: 最大重みマッチング
y: "最小点被覆"

係数行列 の 完全単模性

Total unimodularity
Totally unimodular

A : n×m 行列

定義

A が 完全単模 (完全単模性をもつ)

⇔ A の任意の正方小行列の行列式が 0, +1 or -1

定理

A が 完全単模 n×m 行列, $b \in \mathbf{Z}^n$

⇒ $P = \{x \mid Ax \leq b\}$ は整数多面体

整数格子点の凸包

定理

A が 完全単模 n×m 行列, $b \in \mathbf{Z}^n$, $c \in \mathbf{Z}^m$

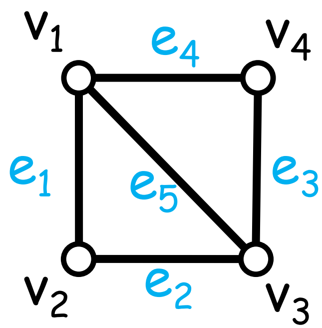
⇒ $\max \{cx \mid Ax \leq b, x \geq 0\} = \min \{yb \mid yA \geq c, y \geq 0\}$

両辺は 整数最適解 をもつ

(※両辺は実行可能とする)

接続行列の完全単模性

$G = (V,E)$
$A(G)$: G の接続行列



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
v_1	1	0	0	1	1
v_2	1	1	0	0	0
v_3	0	1	1	0	1
v_4	0	0	1	1	0

定理

$A(G)$ が 完全単模 ⟺ G は2部グラフ

【演習】証明せよ

LP

maximize $\quad \sum_{e\in E} w(e)\, x(e)$

subject to $\quad \sum_{e\in\delta(v)} x(e) \leq 1 \quad \forall v\in U\cup V$

$x(e) \geq 0 \quad \forall e\in E$

$A(G)\, x \leq 1$

ここまでのまとめ

G: 2部グラフ

(IP) 最大重みマッチング

max. wx
s.t. $Ax \le 1$,
$x \in \{0,1\}^E$

=

(IP-Dual) "最小点被覆"

min. $1y$
s.t. $yA \ge w$,
$y \in \mathbf{Z}^{U \cup V}$

線形緩和

||

A の完全単模性

||

(LP)

max. wx
s.t. $Ax \le 1$,
$x \ge 0$

=
(双対定理)

(LP-Dual)

min. $1y$
s.t. $yA \ge w$,
$y \ge 0$

目次

◆ 2部グラフのマッチング

- König の定理
- 増加道アルゴリズム

◆ 一般グラフのマッチング

- Tutte-Berge 公式
- Edmonds のアルゴリズム
- Edmonds-Gallai 分解

◆ 2部グラフの重みつきマッチング

- マッチング多面体
- 完全単模性

◆ 一般グラフの重みつきマッチング

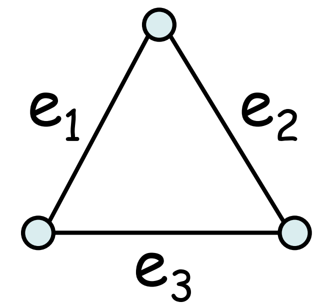
- マッチング多面体
- 完全双対整数性
  (Cunningham-Marsh公式)

◆ 周辺の話題

最小重み完全マッチング

(IP_{min})

min.	$\sum w(e)\,x(e)$	
sub. to	$\sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 1$	$\forall v \in V$
	$x(e) \in \{0,1\}$	$\forall e \in E$



$({}^{\times}LP_{min})$

min.	$\sum w(e)\,x(e)$	
sub. to	$\sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 1$	$\forall v \in V$
	$x(e) \geq 0$	$\forall e \in E$

(IP): 許容解なし

(LP): $x = (\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2})$

$$\boxed{OPT(IP_{min}) > OPT({}^{\times}LP_{min})}$$

最小重み完全マッチングの線形計画表現

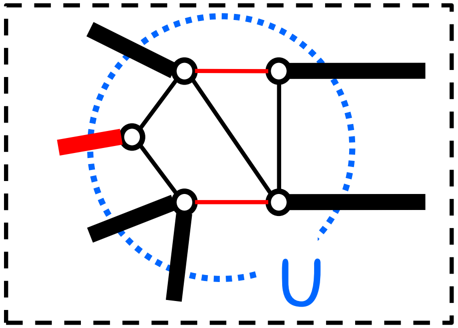
(LP_{min})

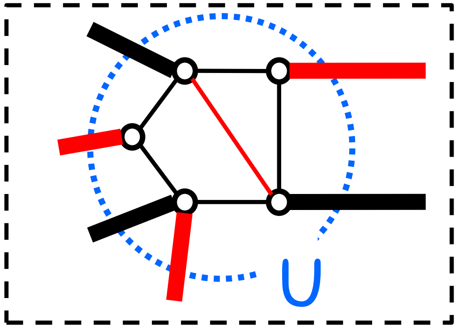
min. $\sum w(e)\, x(e)$

sub. to $\sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 1 \quad {}^{\forall} v \in V$

$\sum_{e \in \delta(U)} x(e) \geq 1 \quad {}^{\forall} U \subseteq V,\ |U|$ is odd

$x(e) \geq 0 \quad {}^{\forall} e \in E$





定理 [Edmonds 1965]

(LP_{min}) は 整数最適解 x^* をもつ
i.e., (LP_{min}) の制約式は整数多面体を定める

整数性の証明

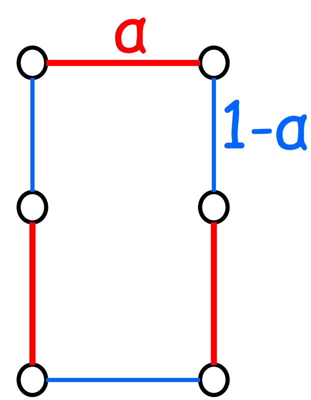
$\sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 1 \quad \forall v \in V$
$\sum_{e \in \delta(U)} x(e) \geq 1 \quad \forall U \subseteq V,\ |U| \text{ is odd}$
$x(e) \geq 0 \quad \forall e \in E$

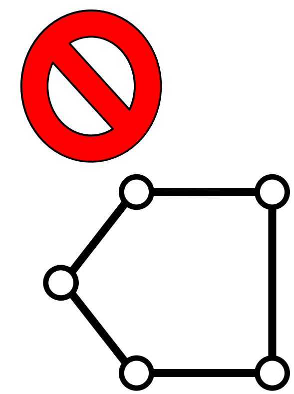
定理 [Edmonds 1965]

(LP_{min}) の制約式は完全マッチング多面体を定める

【証明】P＝完全マッチング多面体, Q＝制約式が定める多面体

- P⊆Q : 簡単
- Q⊆P を示す． $x \notin P$ をみたす Q の頂点 x が存在したとする
  - |V|＋|E| 最小の例をとる
    - ➔ $0 < x(e) < 1 \quad \forall e \in E$
    - ➔ $\deg(v) \geq 2 \quad \forall v \in V$
    - ➔ $|E| \geq |V|$
  - ◆ |E| = |V| の場合
    - ➔ 閉路の disjoint union
    - ➔ 完全マッチングの凸結合





二つ目の制約に矛盾

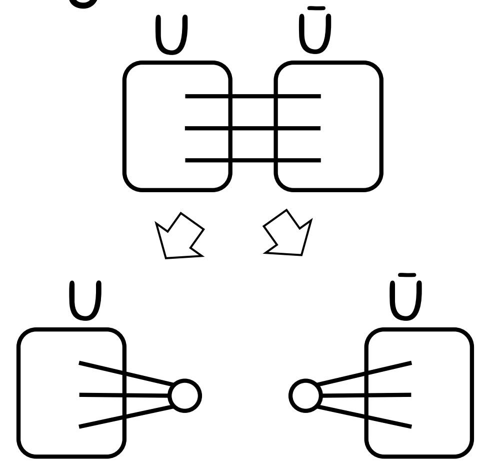
整数性の証明

Q(G)

$$\sum_{e\in\delta(v)} x(e) = 1 \quad \forall v\in V$$
$$\sum_{e\in\delta(U)} x(e) \geq 1 \quad \forall U\subseteq V,\ |U| \text{ is odd}$$
$$x(e) \geq 0 \quad \forall e\in E$$

◆ $|E| > |V|$ の場合

- x は $|E|$ 本の制約を等号でみたす
  ➔ $\exists U\subseteq V,\ x(\delta U) = 1$ and $3 \leq |U| \leq |V| - 3$
- x', x'' : x の $G/\bar{U}$, G/U への射影
  ➔ $x'\in Q(G/\bar{U}) = P(G/\bar{U})$
  $x''\in Q(G/U) = P(G/U)$
  ➔ $x' = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \chi_{M'(i)}$, $x'' = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \chi_{M''(i)}$
  ➔ $\forall i\in[k],\ M'(i)\cap\delta U = M''(i)\cap\delta U$ としてよい
  ➔ $\forall i\in[k],\ M(i) = M'(i)\cup M''(i)$ は G の完全マッチングで
  $x = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \chi_{M(i)}$ となって矛盾



【証明終】

最大重みマッチングの線形計画表現

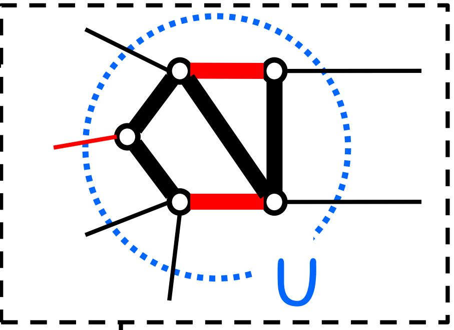
(LP)

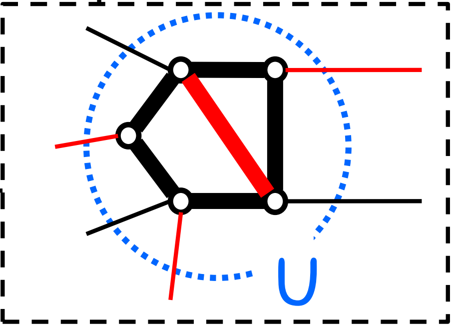
max. $\sum w(e)\, x(e)$

sub. to $\sum_{e \in \delta(v)} x(e) \leq 1 \quad {}^\forall v \in V$

$\sum_{e \in E[U]} x(e) \leq \dfrac{|U|-1}{2} \quad {}^\forall U \subseteq V,\ |U| \text{ is odd}$

$x(e) \geq 0 \quad {}^\forall e \in E$





定理 [Edmonds 1965]

(LP) は 整数最適解 x^* をもつ
i.e., (LP) の制約式は整数多面体を定める

【演習】証明せよ

双対問題

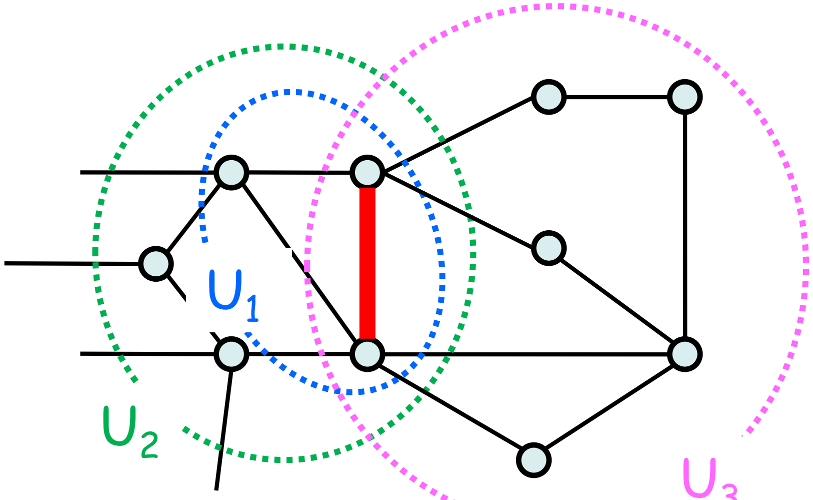
(Dual-LP)

min. $\sum_{v \in V} y(v) + \sum_{U} \frac{|U|-1}{2} z(U)$

sub. to $y(u) + y(v) + \sum_{U:\, u,v \in U} z(U) \geq w(e) \quad \forall e=uv \in E$

$y(v) \geq 0 \quad \forall v \in V$

$z(U) \geq 0 \quad \forall U \subseteq V, |U| \text{ is odd}$



完全双対整数性

$y(u) + y(v) + \sum_{U:\, u,v \in U} z(U) \geq w(e)$
$y(v) \geq 0$
$z(U) \geq 0$

定理 [Cunningham & Marsh 1978]

w が整数のとき, (Dual-LP) は 整数最適解 (y, z) をもつ
さらに, $\mathcal{F} = \{U \subseteq V \mid z(U) > 0\}$ がラミナー集合族をなす
整数最適解が存在する

$U_1, U_2 \in \mathcal{F}$
➔ $U_1 \subseteq U_2$ or $U_1 \supseteq U_2$ or $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

定理

(LP) の制約式は 完全双対整数性 をもつ

Rational system $Ax \leq b$ が完全双対整数性をもつ
⟺ $\min\{ yb \mid y \geq 0,\ yA = c\}$ が任意の整数ベクトル c に対して整数最適解をもつ

ここまでのまとめ

G: 一般グラフ

(LP)

max. wx

s.t. $Ax \le 1$,

$x(E[U]) \le \frac{|U|-1}{2}$

$x \ge 0$

- マッチング多面体を定める
- 完全双対整数性をもつ

➔ (LP), (Dual-LP) ともに整数最適解をもつ

= (双対定理)

(Dual-LP)

min. $\sum_v y(v) + \sum_U \frac{|U|-1}{2} z(U)$

s.t. $y(u) + y(v) + \sum_{U \ni u,v} z(U) \ge w$,

$y, z \ge 0$

目次

◆ 2部グラフのマッチング

- König の定理
- 増加道アルゴリズム

◆ 一般グラフのマッチング

- Tutte-Berge 公式
- Edmonds のアルゴリズム
- Edmonds-Gallai 分解

◆ 2部グラフの重みつきマッチング

- マッチング多面体
- 完全単模性

◆ 一般グラフの重みつきマッチング

- マッチング多面体
- 完全双対整数性 (Cunningham-Marsh公式)

◆ 周辺の話題

参考文献

- 浅野: **情報の構造 上**. 日本評論社, 1994.
- 伊理, 藤重, 大山: ***グラフ・ネットワーク・マトロイド***. 産業図書, 1986.
- L. Lovász, M.D. Plummer: ***Matching Theory***, AMS Chelsea Publishing, 2009.
- K. Murota: ***Matrices and Matroids for Systems Analysis***, Springer, 2010.
- G.L. Nemhauser, L.A. Wolsey: ***Integer and Combinatorial Optimization***, Wiley, 1988.
- A. Schrijver: ***Combinatorial Optimization---Polyhedra and Efficiency***, Springer, 2003.
- 高澤: マッチング. 薩摩順吉, 大石進一, 杉原正顕 (編), **応用数理ハンドブック**, 朝倉書店, 2013, pp. 288-289.

Related Topic

Finding 2-Factors Closer to TSP Tours in Cubic Graphs

Sylvia Boyd (U. Ottawa)
Satoru Iwata (U. Tokyo)
Kenjiro Takazawa (Kyoto U.)

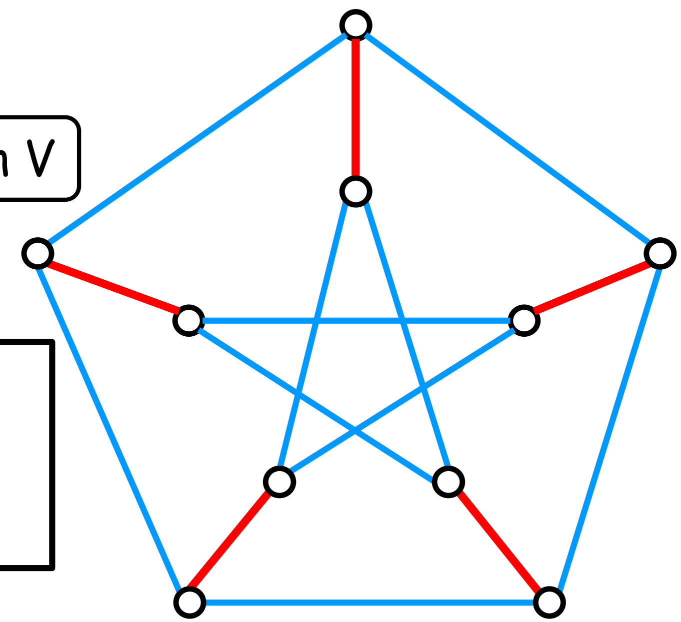
11th COSS
July 30, 2014

Petersen's Theorem [1891]

G=(V,E): Bridgeless Cubic Graph

= 2-edge-connected

deg(v) = 3 for every v in V



Thm.

Every bridgeless cubic graph has a perfect matching

⇕

Every bridgeless cubic graph has a 2-factor

Schönberger's Theorem [1935]

$G=(V,E)$: Bridgeless Cubic Graph

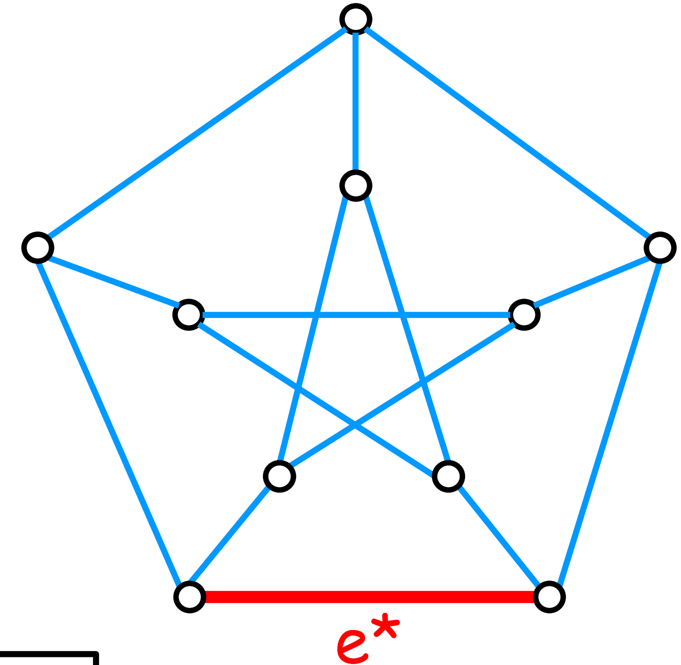
e^* in E

Thm.

G has a perfect matching including e^*

$\Updownarrow$

G has a 2-factor excluding e^*



- $O(n \log^4 n)$ algorithm [Biedl, Bose, Demaine, Lubiw 2001]

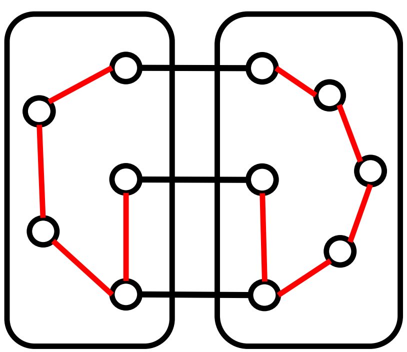
$n = |V|$

Kaiser & Škrekovski's Theorem

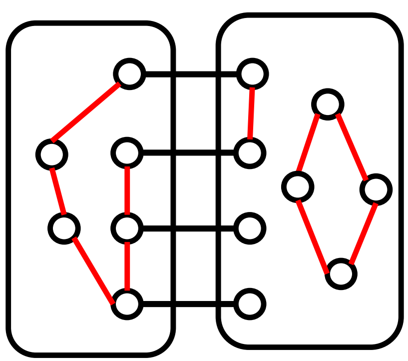
G=(V,E): Bridgeless Cubic [2008]

e* in E

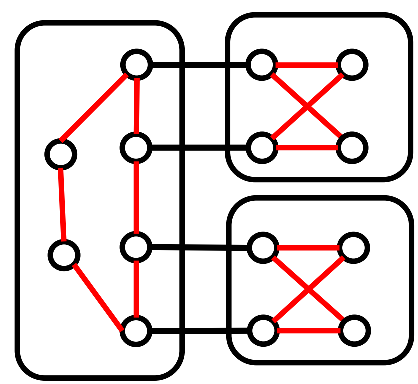
Thm. G has a 2-factor excluding e* and covering all 3- and 4-edge cuts



3-edge cut



4-edge cut

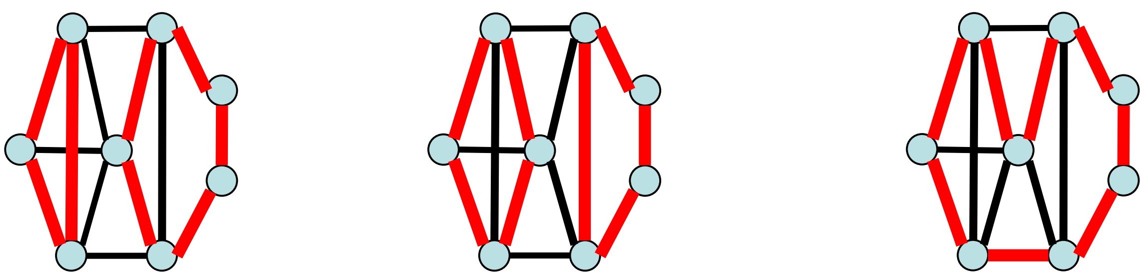


Not a 4-edge cut

2-factors and TSP Tours

- TSP tour = 2-factor of one cycle of length n

Relax → 2-factor without cycles of length k or less : $C_{\leq k}$-free 2-factor (in simple graphs)



☹ ✓ $C_{\leq 3}$-free ✓ $C_{\leq 4}$-free

k = n/2 → TSP tour

Complexity of $C_{\leq k}$-free 2-factors

	Unweighted	Weighted
$k \geq 5$	NP-hard [Papadimitriou '80]	NP-hard
$k = 4$	(a) OPEN	(b) NP-hard [Vornberger '80]
$k = 3$	(c) P [Hartvigsen '84]	(d) OPEN
$k = 2$	P	P

- Subcubic graphs
  - (a) : P [Bérczi & Végh '10]
  - (c) : P [Bérczi & Végh '10, Hartvigsen & Li '11]
  - (d) : P [Vornberger '80, Kobayashi '10, Hartvigsen & Li '13]
- Bipartite graphs
  - (a) : P [Hartvigsen '06, Pap '07]
  - (b) : NP-hard for general weight [Király 00]
    P if the weight hass a special property [Makai '07, T. '09]

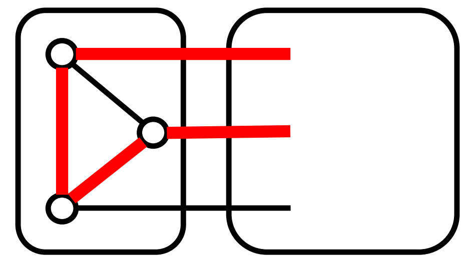
2-factors Covering Cuts

- TSP tour = 2-factor covering all edge cuts

  ➔ 2-factor covering prescribed edge cuts

  Relax

G: Cubic

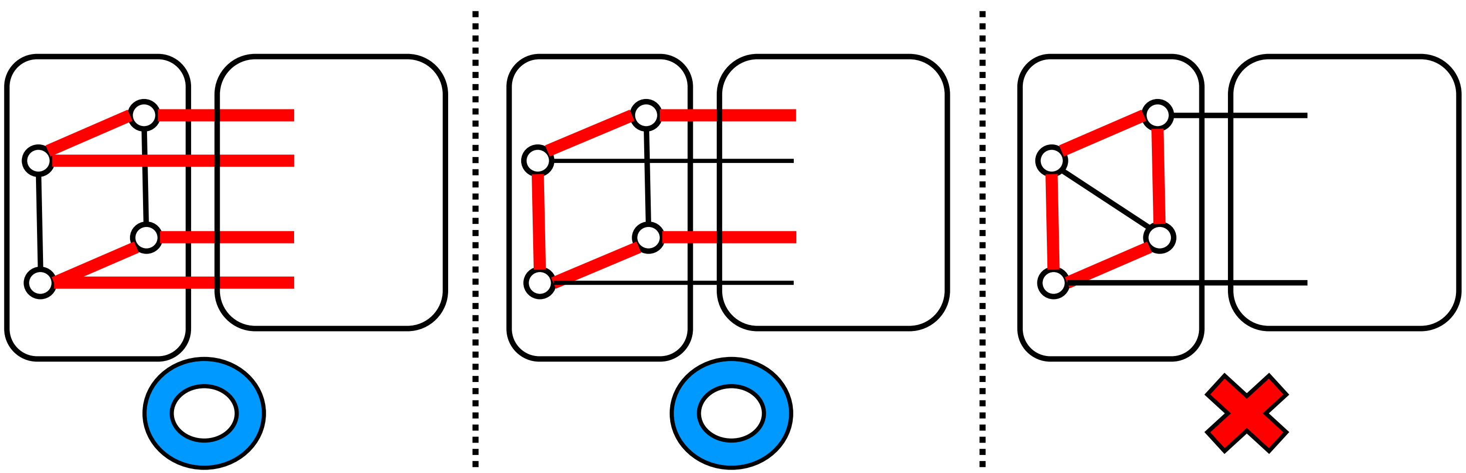


- 2-factor covering all 3-edge cuts

  ➔ $C_{\leq 3}$-free

G: 3-edge-connected cubic

- 2-factor covering all 3,4-edge cuts ➔ $C_{\leq 4}$-free



Our Results

(1) - An $O(n^3)$-algorithm for finding a *min.-weight* 2-factor covering all 3-edge cuts in bridgeless cubic graphs
- Polyhedral description

(2) An $O(n^3)$-algorithm for finding a 2-factor covering all 3-, 4-edge cuts in bridgeless cubic graphs

- Constructive proof for [Kaiser, Škrekovski 2008]

Application

(3) A 6/5-approx. algorithm for the minimum 2-edge-connected subgraph problem in 3-edge-connected cubic graphs

- Start with the 2-factor found by Algorithm (2)
- Previous ratio: 5/4 for 3-edge-connected cubic graphs [Huh 2004]

Contents

- Introduction

(1) - An $O(n^3)$-algorithm for finding a *min.-weight* 2-factor covering all 3-edge cuts in bridgeless cubic graphs
- Polyhedral description

- Summary

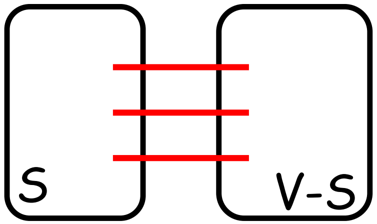
(1) - 2辺連結3正則グラフにおける，
すべての3辺カットと丁度 1 本の辺で交わる
完全マッチングで最小重みのものを求めるアルゴリズム
- 多面体的表現

3-カット完全マッチング

多面体的表現

$\sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 1 \quad \forall v \in V$
$\sum_{e \in \delta(U)} x(e) \geq 1 \quad \forall U \subseteq V,\ |U| \text{ is odd}$
$x(e) \geq 0 \quad \forall e \in E$
$\sum_{e \in \delta(S)} x(e) = 1 \quad \forall S \subseteq V,\ \delta(S) \text{ is a proper 3-edge cut}$

- A 3-edge cut $\delta(S)$ is proper
  $\Longleftrightarrow\ 2 \leq |S| \leq n - 2$



定理

上記の制約式は 3-カット完全マッチング多面体を定める

【証明】

P＝3-カット完全マッチング多面体, Q＝制約式が定める多面体

- $P \subseteq Q$：簡単

多面体的表現

Q	$\sum_{e\in\delta(v)} x(e) = 1 \quad {}^\forall v\in V$ $\sum_{e\in\delta(U)} x(e) \geq 1 \quad {}^\forall U\subseteq V$, $\lvert U\rvert$ is odd $x(e) \geq 0 \quad {}^\forall e\in E$ $\sum_{e\in\delta(S)} x(e) = 1 \quad {}^\forall\delta(S)$: proper 3-edge cut

- $Q\subseteq P$ を示す:
  $x^*\in Q$ を3-カット完全マッチングの凸結合で表す
- $x^*\in Q\subseteq$ [完全マッチング多面体]

  ➔ $x^* = \sum_i \lambda_i \chi_{M_i}$: 完全マッチング $\{M_i\}$ の凸結合

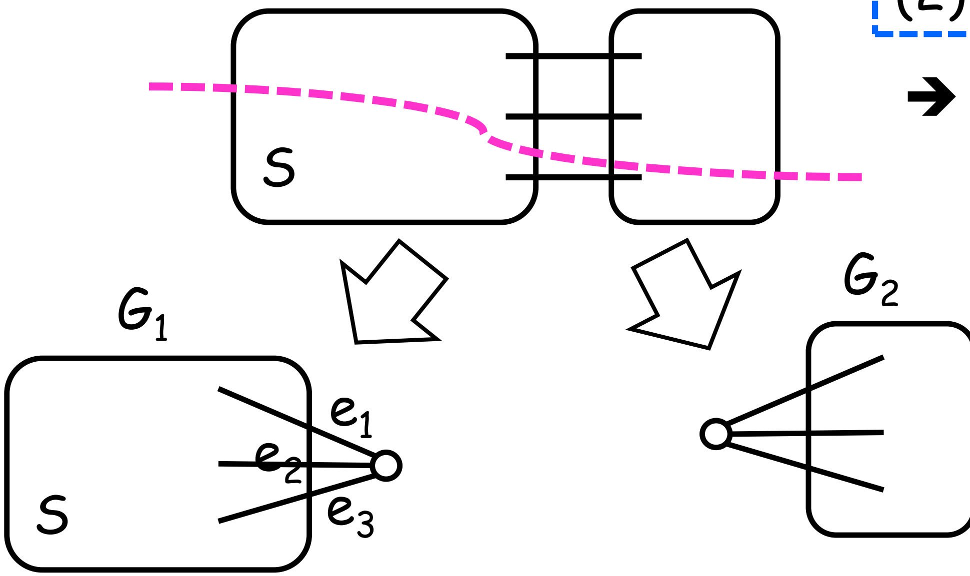
- $\sum_{e\in\delta(S)} x^*(e) = 1$
- $\sum_{e\in\delta(S)} \chi_{M_i}(e) \geq 1$ ➔ $\sum_{e\in\delta(S)} \chi_{M_i}(e) = 1 \ {}^\forall i$
- i.e., M_i は 3-カット完全マッチング ${}^\forall i$ 【証明終】

アルゴリズム

(1) Find a proper 3-edge cut δ(S)

(2) Contract V – S, S

➔ Smaller bridgeless cubic graphs



(3) For i = 1,2,3, find a min.-weight perfect matching M_i including e_i

(4) For i = 1,2,3, let $w(e_i) := w(M_i)$

(5) Recurse in G_2 ➔ N ➔ return $M = M_i \cup N$

M intersects all 3-cuts with 1 edge : Proven by submodularity

Summary

- For bridgeless cubic graphs:
  - A 2-factor covering all 3- and 4-edge cuts: Algorithm
  - A min-weight 2-factor covering all 3-edge cuts:
    - ✓ Algorithm
    - ✓ Polyhedral description

- For 3-edge-connected cubic graphs
  - 6/5-approx. algorithm for the min. 2-edge-connected subgraph problem

Open Problems

Min-weight 2-factor covering all 3- and 4-edge cuts in bridgeless cubic graphs

6/5-approx. algorithm for the min. 2-edge-connected subgraph problem in ***bridgeless*** cubic graphs